राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

गणित

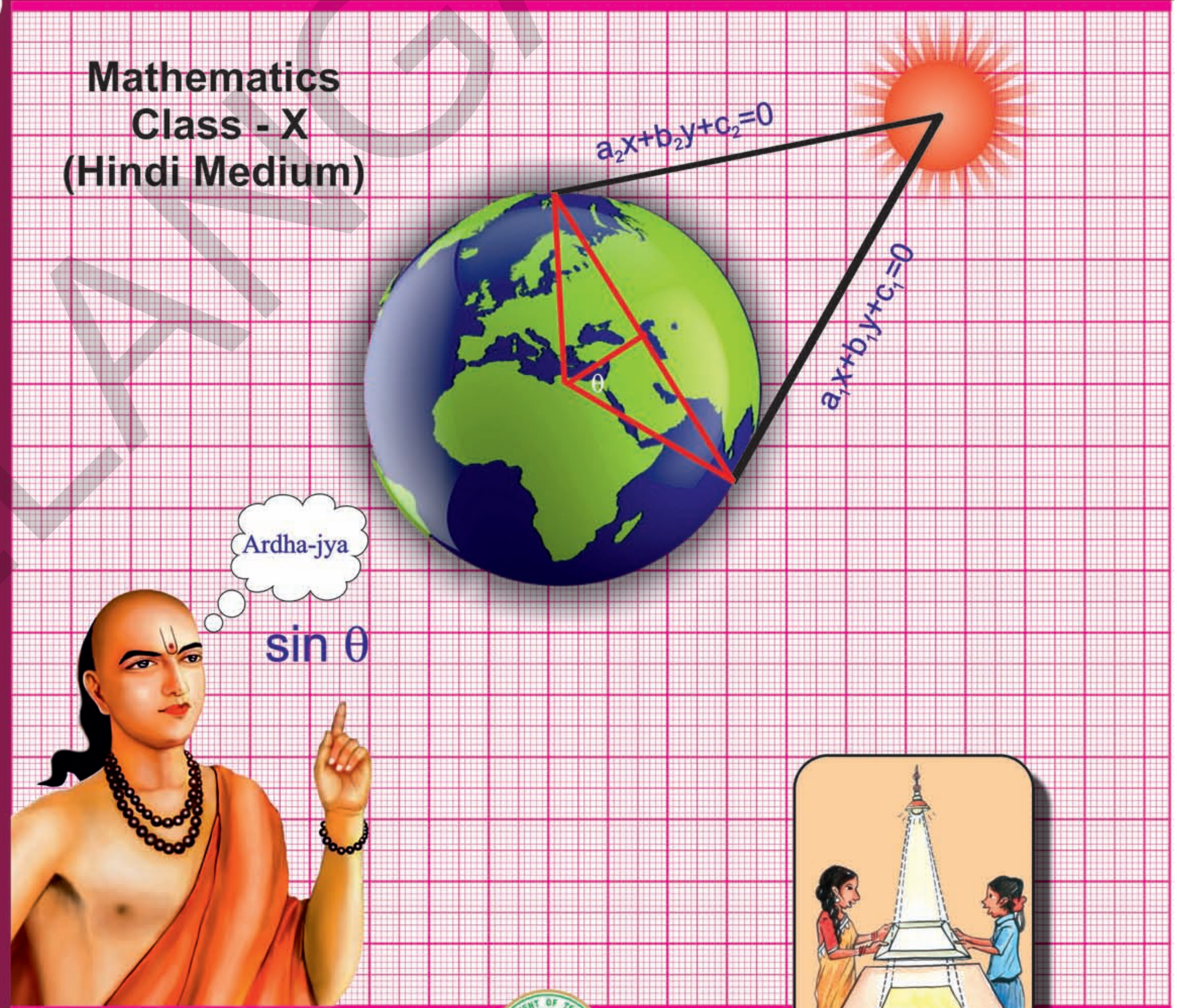
कक्षा - X

FREE

गणित

कक्षा - X

Mathematics
Class - X
(Hindi Medium)



तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित
हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

बच्चो! ये सूचनाएँ आपके लिए।

1. पाठ्य पुस्तक के संकल्पनाएँ समझने के लिए अनेक परिस्थितियों के चित्र दिये गये हैं, संकल्पनाओं के संबंध को ध्यान में रखते हुए आप अध्ययन करना चाहिए।
2. गतिविधियों की अवधारणाओं को समझते समय कुछ संदेह उत्पन्न हो सकते हैं। इनको अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा के माध्यम से उन संदेहों को स्पष्ट करें और बिना कोई शंका के गणितीय अनवधारणाओं को समझे।
3. ''इन्हें कीजिये'' अभ्यास स्वयं प्रयत्न के लिये दिया जाता है जिससे यह ज्ञात होता है कि अवधारणयें आपको कहाँ तक समझमें आई है। यदि आप इन अभ्यासों में समस्याओं को करने में कोई कठिनाई का सामना कर रहे हैं, तो आप अपने शिक्षक के साथ चर्चा करके उन्हें स्पष्ट करें।
4. ''प्रयास कीजिये'' में दी गई समस्याओं को रचनात्मक और बड़े पैमाने पर सोच कर, तर्क के द्वारा हल किया जा सकता है। आप इन समस्याओं को हल करने में कठिनाई का सामना करते हैं, तो आप अपने मित्रों और शिक्षकों की सहायता ले सकते हैं।
5. ''सोचिये और चर्चा कीजिये'' में दी गई कार्यविधियाँ, या गतिविधियाँ, गंभीर सोच की अवधारणा की व्यापकता को समझने के लिये दिये गये हैं। इन गतिविधियों को अपने साथी छात्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा द्वारा हल किया जाना चाहिये।
6. अध्याय में चर्चा की गई-विभिन्न अवधारणाओं के साथ समस्याओं के विभिन्न प्रकार के अवधारणा/अध्याय के अंत में दिये गये अभ्यास में हैं। स्कूल में, घर में या अवकाश के समय में अपने आप इन समस्याओं को हल करने का प्रयास करें।
7. अभ्यास ''प्रयत्न करो/प्रयास कीजिये'' का उद्देश्य केवल कक्षा में, स्वयं शिक्षक की उपस्थिति में समस्याओं को हल करने के लिये है।
8. जहाँ भी पाठ्यपुस्तक में दिया जाता है ''परियोजना कार्य'' आप उसे समूहों में आचरण करना चाहिये, लेकिन परियोजना के निर्माण की रिपोर्ट को व्यक्तिगत रूप से प्रस्तुत करना चाहिये।
9. उक्त दिन गृहकार्य के रूप में दी गई समस्याओं को हल करने का प्रयास करें। अपने संदेहों को स्पष्ट करें और अपने शिक्षकों के साथ विचार विमर्श करने के पश्चात उसी दिन उसका सुधार करें।
10. अधिक समस्याओं को इकट्ठाकर, सीखी गई अवधारणाओं पर नई समस्याएँ बनाये और उन्हें अपने साथी शिक्षकों और सहपाठियों को दिखाने का प्रयास करें।
11. अनेक पहेली, खेल और गणितीय अवधारणाओं से संबंधित रोचक बातें इकट्ठा करें और अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ साझा (share) करें।
12. केवल कक्षा के लिये गणितीय अवधारणाओं को सीमित न रखें। कक्षा के बाहर अपने परिवेश के साथ उन्हें संबंधित करने का प्रयास करें।
13. छात्र, समस्याओं का समाधान और कारण दें, और सिद्ध करें, गणितीय संवाद करने में सक्षम हों, अधिक अवधारणाओं को समझने, संवाद करने में सक्षम हों, अधिक अवधारणाओं को समझने और समस्याओं और गणितीय अध्ययन में प्रतिनिध्व करने के लिये, सक्षम हल करने के लिये अवधारणाओं को कनेक्ट करना होगा।
14. शैक्षणिक मापदंड (Academic Standards) के अनुसार आप अपने अंदर उसकी क्षमता को विकास करना चाहिए। माध्यमिक स्तर (Secondary Level) पर शैक्षणिक मापदंड 5 है। (1) समस्या का हल, (2) कारण और उपपत्तियाँ (3) गणितीय वार्तालाप (4) गणितीय संबंध (5) गणितीय प्रस्तुतीकरण
15. आपको अनेक पुस्तकों की और इंटरनेट फोरम की सहायता लेना चाहिये, जो एक समस्या को हल करने के लिये और संकल्पनाएँ समझने के लिए उपयोगी है।
16. वैकल्पिक अभ्यास दिये गये है। जो आपको राष्ट्रीय स्तर पर होने वाली परीक्षाओं के लिये सहायक है।
17. व्यापार, व्यवसाय, शेर बज़ार आदी के स्वयं तथ्य और प्रमेय को समझने के लिये गणितीय मॉडलिंग का वरिशिष्ट अभ्यास दिया गया है।
18. आपकी उन्नती का विश्लेपन करने के लिये पाठ्यपुस्तक के अंत में पाठ्यक्रम दिया गया है। आप दूसरों के साथ अपनी तुलना करने की आशा है।

''शुभकामनाएँ''

विद्यालय के गणित के चिह्न तथा संकेत

चिह्न/संकेत	इस तरह पढ़िए	गणितीय अर्थ
$\pm$	जोड या घटाना (plus or minus)	धनात्मक या ऋणात्मक
$\neq$	समान नहीं है (not equal)	असमान
$\therefore$	इसलिए (therefore)	कथन का तार्किक प्रवाह
∞	अनन्त (infinite)	अनगिनत
$\sim$	समरूप (is similar to)	ज्यामितीय आकृति में समान
$\cong$	अनुरूप (is congruent to)	आकृति और परिमाण में समान
$\equiv$	एक समान (is identically euqal to)	तुल्यता कथन
$\forall$	सब के लिए (for all)	सार्वभौमिक परिमानक
$\sqrt{\ }$	वर्गमूल (square root of)	इस संख्या का वर्गमूल
$\sqrt[3]{\ }$	घनमूल (cube root of)	एक संख्या का घनमूल
$\cup$	प्याला (cup of) (union of sets)	समुच्चय का सम्मेलन
$\cap$	टोपी (cap of) (intersection of sets)	समुच्चय का उभयनिष्ट
Φ	फै (phi)	रिक्त समुच्चय का संकेत
%	प्रतिशत (percent of)	सौ में सौ
^{0}	डिग्री (अंश) (degree)	कोण का माप
Δ	डेल्टा / त्रिभुज (Delta/Triangle)	समुच्चय में सम्मित अंतर/ त्रिभुज का प्रतीक
$\in$	का है (belongs to)	समुच्चय का मुख्य घटक
$\leftrightarrow$	का समान है (equivilent to)	एक से एक का व्यवहार
μ	अल्फा, बीटा, गामा (Alpha, beeta, gama)	गुणांक का प्रतिनिधित्व करने के ग्रीक अक्षर
π	म्यू (mue)	सार्वभौमिक समुच्चय का संकेत
Σ	पै (phi)	अपरिमेय संख्या = 3.14159 लगभग = 22/7
$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$	सिगमा (sigma)	स्कोर का योग
θ	थीटा	त्रिकोणमितीय अनुपात $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$
$\bar{x}$	x बार (x bar)	समानांतर श्रेणी
$\log a^x$	log x का आधार a (to the base a)	लघु घनक का फलन
(a, b)	बिंदु a, b (point a, b)	क्रमित युग्म a, b
$\lvert x \rvert$	माड x (mod x)	वास्तविक संख्या का पूर्ण मूल्य
P(x)	x का p (p of x)	x में बहुपदिय फलन
P(E)	e का p (p of e)	एक घटना की प्रायकता
$\because$	क्योंकि (since)	एक स्थिति पर तर्क वितर्क
₹	रूपया (rupee)	भारतीय रूपये का प्रतीक
$\parallel$	समानांतर है (is parallel to)	रेखाओं का समानांतर गुण
$\perp$	लंबवत है (is perpendicular to)	एक रेखा पर x बार 90^0 कोण बनाना
{ }	फूल कोष्टक (flower bracket)	समुच्चय के अंकन के लिए उपयोगी
$\overparen{PQ}$	चाप PQ (arc PQ)	वृत्त का चाप
a^2	a का वर्ग (a square)	एक संख्या का वर्ग
$\angle$	कोण (angle)	कोण का संकेत
θ	थीटा (theta)	कोण का मापन

गणित कक्षा - 10

MATHEMATICS CLASS-X (HINDI MEDIUM)

पाठ्यपुस्तक निर्माण एवं प्रकाशन समिति

मुख्य निर्माण अधिकारी : **श्री. जी. गोपाल रेड्डी**
निदेशक, एस.सी.इ.आर.टी, हैदराबाद

मुख्य कार्यकारी संयोजक : **श्री. बी. सुधाकर**
निदेशक, पाठ्य पुस्तक प्रेस, हैदराबाद

कार्यकारी संयोजक : **प्रो. एन. उपेंदर रेड्डी,**
अध्यक्ष, पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तक विभाग,
एस.सी.इ.आर.टी, हैदराबाद

मुख्याधीश, कागज़ की स्थिति और गणित पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तक का विकास

प्रो. वी. कन्नन
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, एच.सी.यु. हैदराबाद

मुख्य सलाहकार

श्री चुक्का रामय्या
गणित के विशेषज्ञ
हैदराबाद

डा. एच.के. दीवान
शैक्षणिक सलाहकार, विद्याभवन समाज
उदयपुर, राजस्थान

तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित, हैदराबाद

First Published 2014
New Impressions 2015, 2017,2018, 2019,2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by T.S. Government 2020-21

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

हिंदी अनुवादक समूह

समन्वयक

श्री सय्यद मतीन अहमद
समन्वयक, हिंदी विभाग, राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद हैदराबाद

संपादक

श्रीमती एस. पद्मा
सेवानिवृत्त प्रवक्ता, हिंदी महाविद्यालय, नल्लाकुंटा, हैदराबाद

श्रीमती अफ़रोज जबीन
एस.ए.,(गणित) नवजीवन बालिका विद्यालय, रामकोठ, हैदराबाद

श्रीमती पुष्पलता
प्रिंसिपल, टी.एस., एम.एस., वेलदंडा, महबूबनगर

अनुवादक

श्रीमती एस. पद्मा
सेवानिवृत्त प्रवक्ता, हिंदी महाविद्यालय, नल्लाकुंटा, हैदराबाद

श्रीमती पुष्पलता
प्रिंसिपल, टी.एस., एम.एस., वेलदंडा, महबूबनगर

श्रीमती अफ़रोज जबीन
एस.ए.,(गणित) नवजीवन बालिका विद्यालय, हैदराबाद

श्रीमती उमा निकम
एस.ए.,(गणित) एल.एम.जी.एच.एस., बेगम बज़ार, हैदराबाद

डॉ. राजीव कुमार सिंह
यू.पी.ए., याडारम, मेड्चल, रंगारेड्डी, आं.प्र.

श्री सुरेश कुमार मिश्रा
एसआरजी, एससीईआरटी

लेखक

श्री. टाटा वेंकटराम कुमार
प्रधानाध्यापक, जेड़.पी.एच.एस. मुलुमुडि, एस.पी.एस., नेल्लूर

श्री. कोमनडुरु श्रीधराचार्युलु
एस.ए., जेड़. पी. एस. एस., रंगायीपल्ली, मेदक

श्री. पेद्दडा डि.आई. गणपति शर्मा
एस.ए., जी.एच.एस., जमिस्तानपुर, मानिकेश्वर नगर, हैदराबाद

श्री. सोमप्रसाद बाबू
पी.जी.टी., ए.पी.टी.डब्लू.आर.एस चन्द्रशेखरपुरम, एस.पी.एस., नेल्लूर

श्री. कंडाला रामय्या
एस.ए., जेड़.पी.एच.एस., कासिमदेव पेट, वरंगल

श्री. सरदार धर्मेंदर सिंघ
एस.ए., जेड. पी.एच.एस., दानूर (बी) आदिलाबाद

श्री. जी. अनंता रेड्डी
सेवानिवृत्त प्रधानाध्यापक, रंगारेड्डी

श्री. गोट्टुमुक्काला वी.बी.एस.एन. राजू
एस.ए., एम.पी.एल. उन्नत पाठशाला, कस्पा, विजयनगरम

श्री. नागुला रवि
एस.ए., ज़ेड.पी.एच.एस., लोकेश्वरम, आदिलाबाद

डॉ. पूण्डला रमेश
प्रवक्ता, सरकारी आई.ए.एस.ई., एस.पी.एस., नेल्लूर

श्री. पादाला सुरेश कुमार
एस.ए., जी.एच.एस., विजयनगर कॉलनी, हैदराबाद

श्री. काकुलवारम राजेन्द्र रेड्डी
समन्वयक, एस.सी.ई.आर.टी., टी.एस., हैदराबाद

मुख्य संपादक

डा. एच. के. दीवान
शैक्षणिक सलाहकार, विद्याभवन समाज, उदयपुर, राजस्थान

संपादक

प्रो. वी.शिवराम प्रसाद
सेवानिवृत्त गणित विभाग, उस्मानिया विश्वविद्यालय, हैदराबाद

प्रो. एन.सी.एच. पट्टाभीराम चार्युलु
सेवानिवृत नेशनल इंस्टिट्यूट ऑफ टेक्नालजी, वरंगल

श्री. ए. पद्मानाभम (सेवानिवृत्त)
अध्यक्ष, गणित विभाग, महारानी कॉलेज, पद्मापुरम, पूर्व गोदावरी जिला

डॉ. सी. एस. एन. मूर्ति (रीड़र)
रीडर, गणित विभाग, राजाह आर.एस.आर.के. रंगा राव कॉलेज,बोब्बिलि, विजयनगरम जिला

समन्वयक

श्री.के. राजेन्द्र रेड्डी
समन्वयक, एस.सी.इ.आर.टी, टी.एस., हैदराबाद

श्री. के. नारायण रेड्डी
प्रवक्ता, एस.सी.इ.आर.टी., हैदराबाद

शैक्षिक सहायक समूह सदस्य

श्री. हनीफ पालिवाल
विद्याभवन, सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान

सुश्री प्रीति मिश्रा
विद्याभवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान

श्रीमती. स्नेह बाला जोशी
विद्याभवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान

सुश्री तान्या सक्सेना
विद्याभवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान

चित्रकार एवं डिज़ाइन समूह

श्री. प्रशांत सोनी
विश्लेषक, विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान

आरीफ़ा सुल्ताना
डी.टी.पी. आपरेटर

आमुख

शिक्षण मानव प्रबोधन और सशक्तिकरण की प्रक्रिया है। शिक्षण की इस विशाल क्षमता को ध्यान में रखते हुए सभी प्रगतिशील सामाजिक तत्वों ने इसके वैश्वीकरण तथा सबके लिए गुणवत्तापूर्ण शिक्षा प्रदान करने का निश्चय किया है। फलस्वरूप माध्यमिक शिक्षा के वैश्वीकरण में तीव्रता आई है।

माध्यमिक स्तर पर, प्राथमिक स्तर की शिक्षा द्वारा सीखे गये गणितीय ज्ञान की समृद्धता की अनुशासित शुरूआत होती है। तार्किक भावनाओं, प्रमेयों आदि को इस स्तर पर परिचय कराया जाता है। साथ ही साथ गणित एक विशिष्ट विषय होने के साथ अन्य विषयों के अंतर्गत तार्किक विश्लेषण में भी सहायक होते है।

मुझे विश्वास है कि तेलंगाना के इस स्तर के छात्र, इस पाठ्यपुस्तक को पढ़कर गणित का आनंद लेंगे, अपने दैनिक जीवन के अनुभवों और समस्याओं में गणित का उपयोग कर सकेंगे, गणित की मूल भावनाओं व संरचनाओं को समझ सकेंगे।

अध्यापकों के लिए पाठ्यक्रम व शिक्षण संबंधी दृष्टिकोण के समीक्षात्मक अंशों को समझना और, साथ ही गुणात्मक शिक्षण पर ध्यान देना आज की विशेष आवश्यकता है। इसके लिए कक्षा में समावेशी व सहयोगपूर्ण वातावरण की आवश्यकता है ताकि शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया को प्रभावी बनाया जा सकें। सकारात्मक कक्षाकक्ष वातावरण का निर्माण एक ऐसी शक्ति है जिसके माध्यम से बच्चों के रहन-सहन को संस्कारित एवं प्रभावित किया जा सकता है।

टी.एस.एस.सी.एफ.-2011 में गणित आधार पत्र सिद्धांतों की विस्तारपूर्वक प्रस्तुति है। साथ ही कक्षागत पाठ्यक्रम और शैक्षिक मापदंड निर्दिष्ट हैं। इन सबको पाठ्यपुस्तक बनाते समय ध्यान में रखा गया है। पाठ्यपुस्तक निर्माण के समय संवेदनशील मुद्दों के प्रति विशेष सावधानी बरती गई है।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, पाठ्यपुस्तक निर्माण में सहयोग देने वाली पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति, राष्ट्रीय स्तर के विषय विशेषज्ञ, विश्वविद्यालय आचार्य, शिक्षाविद्, लेखकगण, अनुवादक गण, चित्रकार, प्रकाशन विभाग आदि के प्रति कृतज्ञतापूर्ण धन्यवाद अपिर्तत करती है। साथ ही साथ परिषद, पाठशाला शिक्षा विभाग, जिला शिक्षा अधिकारी, मंडल शिक्षा अधिकारी, प्रधानाध्यापक, अध्यापक एवं उन सभी लोगों को धन्यवाद देती है जिनका सहयोग इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण में प्रत्यक्ष एवं परोक्ष रूप से प्राप्त हुआ है। पाठ्यपुस्तक की गुणवत्ता में सुधार हेतु राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, तेलंगाना, हैदराबाद आपके सुझावों का स्वागत करेगी।

स्थान : हैदराबाद
दिनांक : 03.12.2014

निदेशक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं
प्रशिक्षण परिषद तेलंगाणा, हैदराबाद

प्राक्कथन

गणित के पाठ्यक्रम को संरचनागत एवं समावेशी आधार पर तीन स्तरों में विभाजित किया गया है, वे हैं-प्राथमिक, उच्च प्राथमिक और माध्यमिक। माध्यमिक स्तर के गणित अध्यापकों को कक्षा 8 से 10 तक के पाठ्यक्रम को बृहत एवं गहराई से समझने के लिए उन गणित की संकल्पनाओं के अध्ययन की आवश्यकता है जो बच्चों ने प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर सीखी है।

यह पाठ्यक्रम संरचनात्मक दृष्टिकोण, अन्वेषणात्मक प्रविधि और गणितीय मूल संकल्पनाओं व उनके सामान्यीकरण पर आधारित है। यह प्रविधि बच्चों को कक्षाकक्ष प्रक्रिया में उत्साह के साथ भाग लेने और चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित करती है।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक टी.एस.एस.सी.ई.आर.टी. द्वारा प्रस्तावित पाठ्यक्रम की रूपरेखा और अपेक्षित दक्षताओं के मिश्रण एवं संशोधन के आधार पर बनाई गई है।

पूरे पाठ्यक्रम को मुख्य रूप से छः भागों में विभाजित किया है - (1) अंक प्रणाली, (2) बीजगणित, (3) अंक गणित, (4) ज्यामिति, (5) क्षेत्रमिति और (6) आँकड़ों का प्रबंधन। क्षेत्रफल से संबंधित बिंदुओं के शिक्षण द्वारा हम अपेक्षित दक्षताओं में निहित कौशलों जैसे, समस्या समाधान, तार्किक चिंतन, गणितीय संचार, प्रदत्तों का विविध रूपों में प्रस्तुतीकरण, अध्ययन में गणितीय सिद्धांतों को अपनाना और इनका दैनिक जीवन में उपयोग करना आदि का विकास किया जा सकता है।

पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों को मनन करने के अवसर प्रदान करने पर बल दिया गया है। इसमें छोटे समूहों में चर्चा करने संबंधी क्रियाकलाप दिये गये हैं। साथ ही 'इसे कीजिए' और 'प्रयत्न कीजिए' जैसे क्रियाकलाप, उनके अनुभव का गणित में उपयोग करने पर बल देते हैं। अध्यापक को कक्षा में इन क्रियाकलापों के आयोजन के लिए आवश्यक कदम उठाने चाहिए।

इस पाठ्यपुस्तक के कुछ विशेष गुण निम्नलिखित हैं -

- अध्यायों को इस प्रकार से विविधता प्रदान करते हुए व्यवस्थित किया गया है जिससे छात्र संपूर्ण पाठ्यक्रम के प्रत्येक भाग के अध्ययन में रूचि ले सकें।
- उच्च प्राथमिक स्तर पर ज्यामितीय संकल्पनाओं को मापन और कागजों को मोड़ने जैसे क्रियाकलापों के माध्यम समझाया गया था। अब हम स्वयं सिद्ध करने की पद्धति को अपना रहे हैं। अनेक बार हमने रचना बनाकर, गणितीय संकल्पनाओं को समझा व परिभाषित किया है। इन परिभाषित व अपरिभाषित संकल्पनाओं को समझना व उनके बीच के संबंध जानना, हम इस स्तर पर सीखेंगे। तार्किक ढंग से किसी निष्कर्ष पर पहुँचना प्रमेय कहलाता है। विशेष बात यह है कि प्रत्येक प्रमेय को समझने व सिद्ध करने के लिए आरंभ में संबंधित क्रियाकलाप दिये गये हैं।
- सतत समग्र मूल्यांकन प्रक्रिया को 'प्रयत्न कीजिए' और 'सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए' जैसी क्रियाओं के माध्यम से इसमें समावेशित करने का प्रयास किया गया है। अध्यायों के अंतर्गत आने वाली प्रत्येक संकल्पना के बाद अभ्यास दिये गये हैं जिससे अध्यापक आकलन कर सकें कि बच्चा अध्याय का कौनसा भाग, कितनी सीमा तक समझने में सफल हुआ है।

- संपूर्ण पाठ्यक्रम को 15 अध्यायों में विभाजित किया गया है जिससे बच्चे प्रत्येक संकल्पना से संबंधित अंशों की वस्तुनिष्ठता से परिचित हो सकें और गणित सीखने की प्रक्रिया में आनंद का अनुभव करें।
- रंगीन चित्र, आकृतियाँ, पढ़ने युक्त मुद्रित अक्षरों के आकार निश्चित रूप से बच्चों को अपनी ओर आकर्षित करेंगे और वे इस पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को भलीभाँति समझने में सहायक होंगे।

वास्तविक संख्याएँ समझने के लिए अंक व्यवस्था के विविध व्यवस्थाओं का परिचय दिया गया है जिससे छात्र अनुमान लगा सकें कि भिन्नें, परिमेय संख्याओं से किस प्रकार भिन्न होते हैं? रचनात्मक उदाहरणों के माध्यम से परिमेय संख्याओं के लक्षणों की चर्चा की गई है।

बहुपद एवं गुणनखंडन के अंतर्गत हम एक पदीय एवं बहुपदीय के भेद को बीजगणितीय व्यंजकों के माध्यम से जानेंगे। बहुपदीय का गुणनखंडन शेष एवं गुणनखंड प्रमेय के माध्यम से सिखाया गया है। बहुपदी व्यंजकों का गुणनखंडन उसके मध्य के पद को वितरित करके करने की प्रविधि यहाँ बताई गई है। बच्चों को अपनी ओर से गुणनखंडन की अनेक विधियों को अपनाने के लिए प्रेरित कीजिए। इसके लिये द्विघाती समीकरण को हल करना बताया गया है।

दो चर राशि वाले समीकरण के अंतर्गत बच्चों को उदाहरणों के माध्यम से इस संकल्पना से संबंधित अनेक खोज करने के लिए प्रेरित किया गया है जिससे वे इन संकल्पनाओं को अपने दैनिक जीवन में प्रयोग कर सकें।

निर्देशांक ज्यामिति में युक्लिद की ज्यामितीय संकल्पना के निर्देशांकों एवं बीजगणित से संबंध स्थापित करते हुए दर्शाया गया है। अनेक समतल आकारों व आलेखों के उदाहरणों से इसकी व्यापक जानकारी दी गई है।

सांख्यिकी में इसके महत्व, विविध प्रदत्तों के संकलन (समूहबद्ध एवं असमूहबद्ध) के उदाहरण दिये गये हैं। साथ ही दैनिक जीवन के उदाहरण से मध्यिका, मध्यमान और बहुलक ज्ञात करना सिखाया गया है।

प्रायिकता माध्यमिक स्तर पर पहली बार पाठ्यक्रम में रखा गया है जिसमें अनेक क्षेत्रों के उदाहरण द्वारा उनसे संबंधित संभावनाओं का अनुमान लगाना सिखाया गया है। इसमें मिश्र अनुपात की समस्याएँ अनेक दैनिक जीवन के संदर्भों से ली गई हैं।

क्षेत्रफल और आयतन में, हम वक्राकार समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल, किसी बेलन, शंकु और गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं उनके आयतन ज्ञात करने संबंधी चर्चा है। इसमें किसी ठोस वस्तु के आयतन से संबंध एवं उन्हें ज्ञात करने के सूत्र की खोज करने संबंधी चर्चा भी की गई है। मिश्रित ठोस के क्षेत्रफल बताये गये हैं।

गणित में उपपत्तियाँ, छात्रों को गणितीय कथनों को समझने और विविध परिस्थितियों में उन्हें सिद्ध करने व समझने में सहायक होगा। हमने इसमें स्वयंसिद्ध, अभिग्रहित, अभिधारणाएँ और विविध उदाहरणों द्वारा अनेक प्रमेयों को सिद्ध करने के सोपानों की चर्चा की है।

मात्र अच्छी पाठ्यपुस्तक के निर्माण से गुणवत्तापूर्ण शिक्षा की गारंटी नहीं दी जा सकती है, इसके लिए अध्यापकों द्वारा इसे पाठ्यपुस्तक में दिये निर्देशों के अनुसार पढ़ाया जाना भी ज़रूरी है। क्रियाकलापों को कराते समय शिक्षार्थियों की सहभागिता एवं प्रतिभागिता के माध्यम से उनकी समझ के प्रति आश्वत हुआ जा सकता है।

माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों के लिए दसवीं कक्षा आखरी वर्ष है। उन्होंने गणित की समस्याओं को समझना सीखा है। यहाँ पर गणितीय मॉडलिंग की सहायता से प्रश्न हल करना सीखेंगे।

गणित कक्षा - 10

राष्ट्र-गान

- रवींद्रनाथ टैगोर

जन-गण-मन अधिनायक जय हे!
भारत भाग्य विधाता।
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा,
द्राविड़, उत्कल बंग।
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा
उच्छल जलधि-तरंग।
तव शुभ नामे जागे।
तव शुभ आशिष मागे,
गाहे तव जय गाथा!
जन-गण-मंगलदायक जय हे!
भारत-भाग्य-विधाता।
जय हे! जय हे! जय हे!
जय, जय, जय, जय हे!

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्रि वेंकट सुब्बाराव

भारत मेरा देश है और समस्त भारतीय मेरे भाई-बहन हैं। मैं अपने देश से प्रेम करता हूँ और इससे प्राप्त विशाल एवं विविध ज्ञान-भंडार पर मुझे गर्व है। मैं सर्वदा इस देश एवं इसके ज्ञान-भंडार के अनुरूप बनने का प्रयास करूँगा। मैं अपने माता-पिता और अध्यापकों तथा समस्त गुरुजनों का आदर करूँगा और प्रत्येक व्यक्ति के प्रति नम्रतापूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं जीव-जंतुओं से भी प्रेमपूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं अपने देश और उसकी जनता के प्रति अपनी भक्ति की शपथ लेता हूँ। उनके मंगल एवं समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है।

अध्याय

1 वास्तविक संख्याएँ

(Real Numbers)

1.1 प्रस्तावना : (Introduction)

''पूर्णांको को ईश्वर ने बनाया है, बाकी सब मानविक कार्य है।'' ..... लियोपोल्ड क्रोनेकर (Leopold Kronecker)

जीवन संख्याओं से भरा हैं। अपने जीवन के पहले क्षण की कल्पना कीजिए। आपके माता पिता उस समय शायद जन्म का समय, भार लंबाई तथा उससे भी महत्वपूर्ण आपके हाथ और पैरों के उँगलियों को गिन रहे होंगे। **उसके बाद** संख्यायें आपके जीवन: पर्यंत आपके साथ चलते है।

ऐसे दूसरे कौनसे संदर्भ है जिसमें आप संख्याओं का उपयोग करते है?

हम संख्याओं का उपयोग अपनी आयु, आय तथा पूर्ण खर्च के बाद शेष बचे बचत को मापने के लिए करते है। **उसी प्रकार** अपनी धन संपत्ति के आकलन में भी संख्याओं का उपयोग करते है।

इस अध्याय में हम संख्याओं के कुछ नये रूपों की जानकारी प्राप्त करेंगे। गणितीय क्षेत्र में संख्याओं की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। हम संख्याओं की अतिशयोक्ति को जानकर उसके आश्चर्यजनक प्रतिकों को उजागर व्यवस्थित हो जाता है कि वह स्थूल तथा सौंदर्य भाव को अभिव्यक्त करता है।

चलिए अब हम एक पहेली को दखेंगे।

जब आप किसी बगिचे में टहलते है तो देखा ही होगा कि मधुमक्खियों का झुण्ड फूलों पर बैठता है।

इस पहेली को देखिए : एक फुलों के बगिचे में मधुमक्खियों का झुण्ड समान रुप से फुलों पर बैठता है। जब दो फुलों पर बैठती है तो एक मक्खि शेष रहती। जब तीन फुलों पर बैठती है तो दो मक्खियाँ शेष रहती है। जब चार फुलों पर बैठती है तो ती मक्खीयाँ शेष रहती है। उसी प्रकार पाँच फुलों पर बैठती है तो एक मक्खि भी रेष नही बचती।

यदि वहाँ अधिकतम 50 मधुमक्खियाँ हो तो झुण्ड में कितनी मक्खियाँ होंगी?

चलिए अब हम इस पहेली को सुलझायेंगें।

मान लो मधुमक्खियों की संख्या 'x' है। दियें गयें तथ्य के आधार पर $x \leq 50$ होगा।

यदि झुण्ड को पाँच भागों में बाँट दिया जाय तो शेष एक भी मक्खि नहीं बचती हैं जिसे हम $x = 5a + 0$ के रूप में दर्शा सकते है। 'a' कोई भी एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यदि झुण्ड को चार भागों में बाँटा जाय तो शेष 3 रहता है। इसे हम $x = 4b + 3$ के रूप में लिख सकते है। b कोई भी एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यदि झुण्ड को 3 भागों में बाँटा जाय तो शेष 2 रहता है। इसे हम $x = 3c + 2$ के रूप में दर्शा सकते है। जहाँ c एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यदि झुण्ड को 2 भागों में बाँटा जाय तो शेष एक रहता है। इसे हम $x = 2d + 1$ के रूप में लिख सकते है। जहाँ d एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यहाँ प्रत्येक स्थिति में x तथा y एक धनात्मक पूर्णांक है। (इस उदाहरण में y का मूल्य क्रमशः 5, 4, 3 तथा 2 होगा) जो x को विभाजित करता है तथा शेष 'r' रखता है (उपरोक्त उदाहरण में r क्रमशः 0, 3, 2 तथा 1 है।), अर्थात् y से छोटा है। इस प्रकार के समीकरणों को लिखते समय **अनजाने में** युक्लिद के विभाजन पद्धति का उपयोग करते है।

फिर से अपनी पहेली की ओर जायेंगे। क्या आपके पास इसे हल करने के लिए कोई सुझाव है? आपको 5 के गुणक लेने होंगे जो दिये गये समीकरण को संतृप्त करते हैं क्योंकि $x = 5a + 0$.

यदि 2 से विभाजित करने पर शेष 1 रहता है तो अवश्य ही आपको विषम संख्या लेनी होगी। यहाँ 5, 15, 25, 35, 45 आदि है। उसी प्रकार यदि आप दूसरे दो स्थितियों को लेंगे तो आपको 35 प्राप्त होगा।

इसलिए झुण्ड में 35 मधुमक्खियाँ होंगी।

अब हम प्राप्त उत्तर की जाँच करेंगे।

जब हम 35 को 2 से भाग देते है तो शेष 1 बचता है। जिसे हम

$$35 = 2 \times 17 + 1$$

जब हम 35 को 3 से विभाजित करते है तो शेष 2 बचता है। जिसे हम

$$35 = 3 \times 11 + 2$$

जब हम 35 को 4 से विभाजित करते है तो शेष 3 बचता है। जिसे हम

$$35 = 4 \times 8 + 3$$

तथा जब हम 35 को 5 से विभाजित करते है तो शेष '0' रहता है। जिसे हम

$35 = 5 \times 7 + 0$ के रूप में लिख सकते है।

अब हम इसका निष्कर्ष कुछ इस प्रकार निकालेंगे। प्रत्येक a तथा b के धनात्मक पूर्णांक की जोडी के लिए (क्रमशः भाज्य तथा भाजक) हमें पूर्ण संख्यायें q तथा r प्राप्त होंगे (क्रमशः भागफल तथा शेष) जो इस संबंध को संतृप्त करता है।

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

यह कीजिए।

निम्नलिखित a तथा b की धनात्मक पूर्णांकों की जोडी के लिए q तथा r का मूल्य ज्ञात कीजिए जो $a = bq + r$ को संतृप्त करता हो।

(i) $a = 13,\quad b = 3$ (ii) $a = 80,\ b = 8$ (iii) $a = 125,\ b = 5$

(iv) $a = 132,\ b = 11$

विचार - विमर्श कीजिए और लिखिए

उपरोक्त प्रश्नों में q तथा r के लक्षण क्या है?

प्रमेय - 1.1 : युक्लिद की भाजक पद्धति : दिए गए a तथा b के धनात्मक पूर्णांकों के लिए एकल युग्म q तथा r जो $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ को संतृप्त करता है।

इस निष्कर्ष को सबसे पहले युक्लिद तत्व के VII वे पुस्तक में बताया गया है। युक्लिद के लघुगणकीय विभाजन इसी सिद्धान्त पर आधारीत है। चलिए अब हम युक्लिद के विभाजन पद्धति का उपयोग करेंगे।

युक्लिद का लघुगणकिय विभाजन दो पूर्णांकों का महत्तम समापवर्त्य भाजक (म.स.भा.) ज्ञात करने की तकनीक है। याद कीजिए a तथा b दो धनात्मक पूर्णांकों का म.स.भा. (H.C.F.) d वह सबसे बडी धनात्मक संख्या है जो a तथा b को विभाजित करती है।

क्रियाकलाप

समान चौडाई वाले 60 से.मी. और 100 से.मी. लम्बी दो कागज की पट्टियाँ लो। बिना कोई भी भाग छुटे दोनों पट्टीयॉ की अधिकतम लम्बाई ज्ञात करो। 100 से.मी. पट्टी को 60 से.मी. पट्टी से मापो, शेष बचा हुआ भाग 40 से.मी. को काट दो। अब इस 20 से.मी. पट्टी से 40 से.मी. की पट्टी को मापो, बचा हुआ 20 से.मी. काट दो अब बची हुयी 20 से.मी. की पट्टी से पहलेवाली 20 से.मी. की पट्टी को मापो। जो एक दुसरे के समान होती है। इसका अर्थ यह हुआ की कुछ भी शेष नही बचा।

अर्थात हम इस निष्कर्ष पर आते है की पट्टी का अधिकतम माप 20 से.मी. है जिससे 60 से.मी. और 100 से.मी. दोनों पट्टीयों को बिना कोई शेष भाग बचे माप सकते है।

अब हम इस प्रक्रिया को

युक्लिद के सिद्धांत से जोडकर 60 और 100 का म.स.भा. प्राप्त करेंगें।

जब हम 100 को 60 से विभाजित करते है तो शेष 40 बचता है।

$$100 = (60 \times 1) + 40$$

अब हम 60 को 40 से विभाजित करने के लिए युक्लिद के सिद्धांत का उपयोग करेंगे।

$$60 = (40 \times 1) + 20$$

अब हम 40 को शेष बचे 20 से विभाजित करेंगे तो युक्लिद के सिद्धान्तानुसार

$$40 = (20 \times 2) + 0$$

देखिए शेष 0 बचता है और हम इस प्रक्रिया को आगे नहीं बढा सकते। इसलिए हम कह सकते हैं कि 60 तथा 100 का म.स.भा। इस चरण का भाजक 20 होगा। इसकी जाँच आप 60 तथा 100 के खण्डों को लिखकर सरलता पूर्वक कर सकते है।

यह कीजिए।

युक्लिद के विभाजन पद्धति से म.स.भा. ज्ञात कीजिए।(Euclid division lemma)

(i) 50 तथा 70 (ii) 96 तथा 72 (iii) 300 तथा 550

(iv) 1860 तथा 2015

विचार - विमर्श कीजिए और लिखिए

क्या आप 1.2 और 0.12 का म.स.भा **युक्लिद विभाजन पध्दती** ज्ञात कर सकते हैं? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

युक्लिद का लघुगणकीय विभाजक बडी संख्याओं का म.स.भा. ज्ञात करने में ही नहीं बल्कि यह सबसे पहला अल्गोरिदम है जिसे संगणक के प्रोग्राम में भी डाल गया है।

टिप्पणी :

1. युक्लिद की विभाजन पद्धति तथा अल्गोरिदम एक दूसरे से इतने सह संबंधित है कि कुछ लोग पहले वाले को ही विभाजन अल्गोरिदम कहते है।

2. जबकि युक्लिद का अल्गोरिदम विभाजन केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए ही दिया गया है जिसे हम a तथा $b \neq 0$ के सभी पूर्णांकों के लिए विस्तृत कर सकते है। यहाँ हमें इस बात की चर्चा नहीं करनी है।

युक्लिद की विभाजन पद्धति/अल्गोरिदम का उपयोग कुछ संख्याओं के लक्षणों को ज्ञात करने में करते है। हम इसके कुछ उदाहरण देखेंगे ।

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सम धन पूर्णांक $2q$ रूप में तथा प्रत्येक विषम धन पूर्णांक $2q + 1$ रूप में पाया जाता है; जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : मानलों a एक धन पूर्णांक तथा $b = 2$ है तो युक्लिद अल्गोरिदम से $a = 2q + r$ कुछ पूर्णांकों के लिए $q \geq 0$ तथा $r = 0$ या $r = 1$, क्योंकि $0 \leq r < 2$ हो तो $a = 2q$ या $2q + 1$ होगा।

यदि a, $2q$ रूप में हो तो a एक सम संख्या होगी और धन पूर्णांक सम या विषम भी हो सकता है। इसलिए कोई भी धन विषम संख्या $2q + 1$ के रूप में होगी।

उदाहरण 2 : बताइए कि सभी धन विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ रूप में ही होंगी जबकी q कोई धन पूर्णांक है।

हल : मानलो a एक विषम धन पुर्णांक है, और $b = 4$ हम विभाजन अल्गोरीदम का उपयोग a तथा $b = 4$ से करेंगे।

हमें प्राप्त होगा $a = 4q + r$, $q \geq 0$, और $0 \leq r < 4$ प्राप्त शेषांक 0, 1, 2 और 3 होंगे।

अर्थात् a का मूल्य $4q$ या $4q + 1$ या $4q + 2$ या $4q + 3$ होगा। जहाँ q भागफल है। जैसे कि a एक विषम संख्या होने के कारण a का मूल्य $4q$ या $4q + 2$ **या 2 $(2q+1)$** नहीं होगा। (क्योंकि ये दोनों संख्याएँ 2 से विभाजित है).

इसलिए, कोई भी विषम संख्या $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप में होगी।

अभ्यास - 1.1

1. युक्लिद की विभाजन पद्धति से म.स.भा. ज्ञात कीजिए।

   (i) 900 तथा 270 (ii) 196 तथा 38220 (iii) 1651 तथा 2032

2. युक्लिद के विभाजन पद्धति से बताइए की कोई भी धनात्मक विषम संख्या $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप में होगी। जहाँ q एक पूर्णांक है।

3. युक्लिद के विभाजन पद्धति से बताइए की धनात्मक पूर्णांकों का वर्ग $3p$, $3p + 1$ या $3p + 2$ के रूप में होगा।

4. युक्लिद के विभाजन पद्धति के उपयोग से बताइए की धनात्मक पूर्णांकों का धन $9\,m$, $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप में होगा।

5. सिद्ध कीजिए की n, $n + 2$ या $n + 4$ में से केवल एक ही संख्या 3 से विभाजित है जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

1.2 अंकगणित के मौलिक प्रमेय (The Fundamental theorem of Arithmetic)

युक्लिद के विभाजन पद्धति से हम जानते है कि दिए गए धनात्मक संख्याएँ a तथा b के लिए q तथा r का एक अप्रतिम युग्म होता है। $a = bq + r$, $0 \le r \le b$

विचार - विमर्श कीजिए और लिखिए

यदि $r = 0$ हो तो $a = bq + r$ में a, b तथा q के मध्य युक्लिद विभाजन पद्धति से क्या संबंध होगा?

उपरोक्त चर्चा के अनुसार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचेगे कि यदि $a = bq$, 'a' को 'b' से विभाजित करते है तो 'b' को 'a' का खण्ड कहा जाएगा।

उदाहरण के लिए $24 = 2 \times 12$

$$24 = 2 \times 2 \times 6$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

हम जानते है कि यदि $24 = 2 \times 12$ हो तो हम कह सकते है कि 2 तथा 12, 24 के खण्ड होंगे इसे हम $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ के रूप में लिख सकते है और हम जानते है कि यही 24 के रूढी गुणनखण्ड होंगे।

चलिए अब हम कुछ रूढी संख्याओं को लिखते हैं जैसे 2, 3, 7, 11 तथा 23। इनमें से कुछ या सभी संख्याओं का गुणनफल इस प्रकार ज्ञात करेंगे कि कोई भी संख्या कितनी बार भी दोहराई जा सकती है। इसे हम अनंत पदों तक बढा सकते है। इनमें से कुछ उदाहरण दिए गए है।

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $\qquad$ $7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$ $\qquad$ $2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$ $\qquad$ $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

अब हम मानते है कि रूढी संख्याओं के समूह में सभी रूढी संख्याओं को लिया गया है। **इस समुह में से जब हम दो या दो से अधिक रुढी संख्यांए लेकर उन्हें गुणा करते है तो क्या हमें फिर से रुढी संख्या प्राप्त होती है या संयुक्त संख्या?** इसलिए यदि हम इन्हें सभी संभावित पद्धतियों से गुणा करेंगे तो हमें अनंत संयुक्त संख्याओं का समूह प्राप्त होगा।

प्रमेय-1.2 : (अंकगणित का मूलभूत प्रमेय) : प्रत्येक संयुक्त संख्या को रूढी गुणनखण्डों के रूप में दर्शाया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड अद्वितीय होगा। जहाँ संख्याओं का क्रम बदल सकता है।

अंकगणित का मौलिक प्रमेय हमें यह बताता है कि प्रत्येक संयुक्त संख्या को रूढ़ी गुणनखण्ड के रूप में लिख सकते है। वास्तव में यह बहुत कुछ दर्शाता है। यह प्रमेय बताता है कि संयुक्त संख्या को रूढी गुणनखण्ड के अद्वितीय ढंग से दर्शा सकते है। जबकि उसका क्रम अलग हो सकता है। उदाहरण के लिए जब हम 210 के खण्ड ज्ञात करेंगे तो हमें $2 \times 3 \times 5 \times 7$ उसी प्रकार $3 \times 5 \times 7 \times 2$ या कोई और संभावित क्रम जिसमें इन रूढी संख्याओं को लिखा जा सकता है। अर्थात् किसी भी संयुक्त संख्या को केवल एक ही रूढी गुणनखण्ड प्राप्त होगा, अर्थात् हम उसके क्रम का विचार नहीं करेंगे।

सामान्यतः यदि संयुक्त संख्या x दी हुई है जब हम उसके गुणनखण्ड प्राप्त करते है जैसे $x = p_1 \times p_2 \times p_3 ... p_n$, जहाँ $p_1, p_2 ..., p_n$ अभाज्य है। जब इसे आरोही क्रम में लिखते है, अर्थात् $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$। जब हम सम गुणनखण्डों को संयुक्त करते है तो, हमें अभाज्य के घातांक प्राप्त होते है जब हम खण्डों का आरोही क्रम लिखने का निर्णय लेते है। तव संख्या के गुणनखण्डों का प्रकार भी अद्वितीय रहता है। उदाहरण के लिए

$$27300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$$

यह कीजिए

2310 को रूढी गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए। यह भी देखिए की आपके मित्र को प्राप्त गुणनखण्ड किस प्रकार के है। क्या उसके खण्ड आपके खण्डों के समान ही है? आपकें गुणनखण्ड और आपके मित्र को प्राप्त परिणाम की जाँच कीजिए। ऐसे ही और 3, 4 संख्याओं के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए। इससे क्या निष्कर्ष निकलता है बताइए।

चलिए अब हम अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का उपयोग करें।

उदाहरण 3. मान लजिए संख्या 4^n है जहाँ n प्राकृतिक संख्या है। क्या n का कोई मान इस प्रकार है कि 4^n का अंतिम अंक शून्य आता हो, इसकी जाँच कीजिए।

हल : किसी भी प्राकृतिक संख्या n के लिए संख्या 4^n का अंतिम अंक शून्य होने के लिए वह संख्या 5 से विभाजित होनी चाहिए। इसका अर्थ है कि 4^n के रूढी गुणनखण्डों में 5 होना चाहिए। किंतु यह असंभव है क्योंकि $4^n = (2)^{2n}$ अतः 4^n के गुणनखण्डों में केवल 2 रूढी संख्या है। चूँकि गुणनखण्डों में 5 नहीं है, प्राकृतिक संख्या n अस्तित्व में है। जिसमें 4^n का अंतिम अंक शून्य रहता है।

आपने पिछली कक्षा में पढा है कि अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का उपयोग करते हुए, दो धन पूर्णांकों का महत्तम समापवर्त्य भाजक (HCF) और लघुत्तम समापवर्त्य भाजक (LCM) कैसे ज्ञात करते हैं। इस पद्धति को रूढीं गुमनखण्ड पद्धति भी कहते है। नीचे दिये गये उदाहरण द्वारा हम इस पद्धति को फिर से याद करेंगे।

उदाहरण-4. रूढी गुणनखण्ड पद्धति द्वारा 12 और 18 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल :
$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$$
$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$$

ध्यान दीजिए म.स.भा.$(12, 18) = 2^1 \times 3^1 = 6$ = (संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ रूढी गुणनखण्ड के न्यूनतम घातांक का गुणनफल)

ल.स.भा. $(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$ = संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ रूढी गुणनखण्डों के अधिकतम घातांक का गुणनफल

उपरोक्त उदाहरण से आपको समझ में आया होगा कि HCF $(12, 18) \times$ LCM $(12, 18) = 12 \times 18$। वस्तुतः हम कोई भी दो धन पूर्णांक a और b के लिए जाँच कर सकते है। अर्थात् HCF $(a, b) \times$ LCM$(a, b) = a \times b$ इसका उपयोग हम दो धन पूर्णांकों का LCM ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं। यदि उन दो धन पूर्णांकों का HCF ज्ञात हो।

यह कीजिए

रूढी गुणनखण्ड पद्धति से दिए गए संख्याओं का HCF तथा LCM (म.स.भा तथा ल.स.भा.) ज्ञात कीजिए। (i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

प्रयत्न कीजिए

सिद्ध किजिए कि n तथा m के किसी भी प्राकृतिक मूल्य के लिए $3^n \times 4^m$ का अंतिम अंक 0 या 5 नहीं होगा। **आपके उत्तर की जाँच किजिए।**

अभ्यास - 1.2

1. निम्न संख्याओं को रूढी गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
2. रूढी गुणनखण्ड पद्धति द्वारा निम्न पूर्णांकों का ल.स.भा. (LCM) तथा म.स.भा. (HCF) ज्ञात कीजिए।
   (i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29 (iii) 8, 9 और 25
   (iv) 72 और 108 (v) 306 और 657
3. जाँच कीजिए कि किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए क्या 6^n का अंतिम अंक शून्य होगा?
4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ को संयुक्त संख्याएँ क्यों कहते है, स्पष्ट कीजिए।
5. आप कैसे बताएँगे कि $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ संयुक्त संख्या है? स्पष्ट कीजिए।
6. 6^{100} **के इकाई स्थान पर इनमें से कौनसा अंक आएगा?**

अब और आगे वास्तविक संख्याओं की खोज करने के लिए अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का उपयोग करेंगे। सर्वप्रथम, हम इसका उपयोग, 'अपरिमेय संख्याओं का दशमलव रुप कब आवर्त, अनावर्त और पुनरावर्त रहता है इसे ज्ञात करने के लिए करेंगे। इसके अतिरिक्त अनेक संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करने के लिए इसका उपयोग करते है, जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$.

1.2.2 परिमेय संख्याएँ और उनके दशमलव विस्तार (Rational numbers and their decimal expansions)

पिछली कक्षाओं में हमने पूर्णांकों के कुछ गुणों की चर्चा की है। दिए गए पूर्णांकों का उत्तरपद एवं पूर्वपद कैसे ज्ञात करेंगे? आप जानते हैं कि पूर्णांकों के पूर्वपद एवं उत्तरपद का अंतर 1 होता है। **आपने अगला या पिछला संख्या को जोड या घटाने से नई संख्या प्राप्त होती है।**

क्या आप 0 तथा 1 या 1 तथा 2 ..... etc. के बीच आने वाले संख्याओं के बारे में जानते है? उन्हें क्या कहेंगे? उन संख्याओं को परिमेय संख्याएँ कहते है।

IX वी कक्षा में आपने पढा था कि परिमेय संख्याओं का दशमलव विस्तार या तो आवर्त होता है या फिर अनावर्त या पुनरावर्त होता है। इस कक्षा में हम यह जानकारी प्राप्त करेंगे कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ का दशमलव विस्तार कब आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त होगा। इसके बारे में कुछ उदाहरणों द्वारा जानकारी प्राप्त करेंगे।

कुछ परिमेय संख्याओं के दशमलव रूप नीचे दिए गए है।
(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5

अब हम इन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करेंगे।

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

हमने देखा कि ऊपर लिये गए सभी आवर्त दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं के रूप में व्यक्त कर सकते है। जिनके हर 10 के घातांकों में है। अब हम अंश तथा हर के गुणनखण्ड ज्ञात करेंगे और उन्हें सरल परिमेय के रूप में व्यक्त करेंगे।

अब (i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7}{80}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2}$

क्या आप हर में कुछ विशेषता (pattern) देख रहें है। ऐसा प्रतीत होता है कि जब दशमलव व्यंजक को उसके सरलतम परिमेय के रूप में व्यक्त करते हैं तब p और q सह-अभाज्य (co prime) रहते हैं और हर (i.e., q) में केवल 2 अंक के घातांक अथवा 5 के घातांक अथवा दोनों रहते है। यह इसलिए कि 10 के केवल 2 और 5 गुणनखण्ड होते हैं। जैसा कि हमने अंकगणित के मूलभूत प्रमेय में देखा।

हम ने निष्कर्ष प्राप्त किया

ऊपर दिए गए उदाहरणों में आप देख सकते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या जिसका दशमलव विस्तार आवर्त हैं । उसके हर में 2 या 5 या दोनों के घातांक रूप प्राप्त होंगे। जब परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में है जिसके हर को 10 के घातांक में व्यक्त कर सकते है जहाँ q के गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में रहते हैं, n और m कोई अ-ऋणात्मक (non-negative) पूर्णांक होते हैं। औपचारिक रूप से हम अपने परिणाम को इस प्रकार लिख सकते है।

नीचे दिए अनुसार हम अपने परिणामों की जाँच कर सकते है।

प्रमेय-1.3 : ***"माना कि x परिमेय संख्या है जिसका दशमलव विस्तार आवर्त है। x को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है, जहाँ p और q सह-अभाज्य (co-prime) रहते हैं, और q के गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में रहते हैं, जहाँ n और m अ-ऋणात्मक पूर्णांक रहते हैं।"***

यह कीजिए

निम्न आवर्त दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए जहाँ $q \neq 0$ तथा p, q असहभाज्य है।

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

इस प्रक्रिया द्वारा आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

अब यदि छात्र परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में लेते हैं, जहाँ q के रूढी गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में है, (जहाँ n और m अऋणात्मक पूर्णांक हो) तो क्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव विस्तार अनावर्त रहेगा?

इसलिए $\frac{p}{q}$ रूप की संख्या जहाँ 2^n5^m के रूप में q है की समरूप परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के रूप में होगी। जहाँ b 10 के घातांक में होगा दोबारा पिछले उदाहरणों को हल करेंगे।

(i) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$ (ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$ (iv) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

इसलिये, ये उदाहरण हमें बताते हैं कि $\frac{p}{q}$ रूप की परिमेय संख्या जहाँ q, 2^n5^m रूप में हो तो इसकी समतुल्य परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के रूप में होगी जहाँ b, 10 के घातांक रूप में होगा तो ऐसी परिमेय संख्या का दशमलव विस्तार आवर्त रहता है। इससे यह ज्ञात होता है कि $\frac{p}{q}$ रूप की परिमेय संख्या जहाँ q, 10 के घातांक में हो तो उसका दशमलव विस्तार आवर्त होता है।

अतः हमें ज्ञात हुआ कि प्रमेय 1.2 का व्युत्क्रम (converse) भी सत्य ही है और औपचारिक रूप से इसे इस प्रकार लिख सकते है :-

प्रमेय 1.4 : माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q के रूढी गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में हो जहाँ n, m अऋणात्मक पूर्णांक हो तो x का दशमलव विस्तार आवर्त रहता है।

यह कीजिए

निम्न परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए, जहाँ q, 2^n5^m के रूप में हो, तथा n और m अऋणात्मक पूर्णांक होने चाहिए तत्पश्चात संख्याओं को उनके दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{25}$ (v) $\frac{80}{100}$

1.2.3 परिमेय संख्याओं के अनावर्त, पुनरावर्त दशमलव

अब, हम ऐसे परिमेय संख्याएँ समझेंगे जिसका दशमलव विस्तार अनावर्त और पुनरावर्त रहते है। एक बार फिर, उदाहरण लेकर उसका अवलोकन करेंगे।

$\frac{1}{7}$ के दशमलव रूपांतरण की ओर देखेंगे।

$\frac{1}{7}$ = 0.1428571428571 ..... जो अनावर्त और पुनरावर्त दशमलव है।

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)1.0000000} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}
$$

ध्यान दीजिए, भागफल के अंकों का समूह '142857' बार-बार दोहराया जा है। **ध्यान दीजिए कि यहाँ हर के स्थान पर 7 है जिसे 2^n5^m के रूप में नहीं लिख सकते है।**

यह कीजिए

निम्न लिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव में लिखकर भागफल में दोहराये जाने वाले अंकों के समूह को ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

ऊपर दिये गये उदाहरण से हम कथन को इस प्रकार लिख सकते है :-

प्रमेय-1.5 : माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q के गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में नहीं है, जहाँ n और m अऋणात्मक पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव विस्तार अनावर्त और पुनरावर्त (recurring) रहता है।

ऊपर की गई चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव रूप आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त रहता है।

उदाहरण-5. ऊपर दिये गए प्रमेयों के आधार पर बिना भाग किए बताइए कि निम्न में कौनसी परिमेय संख्याएँ आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त दशमलव है?

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

हल : (i) $\frac{16}{125}=\frac{16}{5\times5\times5}=\frac{16}{5^3}$ आवर्त दशमलव हैं।

(ii) $\frac{25}{32}=\frac{25}{2\times2\times2\times2\times2}=\frac{25}{2^5}$ आवर्त दशमलव हैं।

(iii) $\frac{100}{81}=\frac{100}{3\times3\times3\times3}=\frac{10}{3^4}$ अनावर्त और पुनरावर्त दशमलव है।

(iv) $\frac{41}{75}=\frac{41}{3\times5\times5}=\frac{41}{3\times5^2}$ अनावर्त और पुनरावर्त दशमलव है।

उदाहरण-6. निम्न परिमेय संख्याओं को बिना भाग किए दशमलव विस्तार लिखिए।

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

हल : (i) $\frac{35}{50}=\frac{7\times5}{2\times5\times5}=\frac{7}{2\times5}=\frac{7}{10^1}=0.7$

(ii) $\frac{21}{25}=\frac{21}{5\times5}=\frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2}=\frac{21\times4}{5^2\times2^2}=\frac{84}{10^2}=0.84$

(iii) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2\times2\times2}=\frac{7}{2^3}=\frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)}=\frac{7\times25}{(2\times5)^3}=\frac{875}{(10)^3}=0.875$

अभ्यास - 1.3

1. निम्न लिखित परिमेय संख्याओं को उनके दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि कौनसे दशमलव आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त होंगे।

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. बिना भाग किए बताइए कि निम्न परिमेय संख्याओं में कौन-से आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त दशमलव होंगे ।

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3\cdot5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2\cdot5^7\cdot7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. प्रमेय 1.1 का उपयोग करते हुए निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव के रूप में लिखिए।

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. निम्नलिखीत दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रुप में लिखो, और q के रुढ खण्डों को लिखों. आपने क्या देखा?

(i) 43.123 (ii) 0.120112001120001.... (iii) $43.\overline{12}$ (iv) $0.\overline{63}$

1.3 अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

IX वी कक्षा में अपरिमेय संख्याओं के गुणों का परिचय दिया गया था। आपने अध्ययन किया था कि परिमेय तथा अपरिमेय संख्यायें मिलकर वास्तविक संख्याएँ बनती है। अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर डालना भी सीखा था। जबकि यह सिद्ध नहीं किया गया था कि वे अपरिमेय होगी। इस कक्षा में, अंकगणित के मूल सिद्धांत की सहायता से हम सिद्ध करेंगे कि $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ और सामान्यतः $\sqrt{p}$ अपरिमेय रहती है। जहां p अभाज्य रहता है।

स्मरण कीजिए, वास्तविक संख्या अपरिमेय कहलाती है जब हम इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिख सकते हैं जिसमें p और q पूर्णांक होंगे और $q \neq 0$। यहाँ अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण दिए गए है जिनसे आप पहले से ही परिचित है।

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots$, आदि

$\sqrt{2}$ को अपरिमेय सिद्ध करने से पूर्व हम उस कथन की ओर देखेंगे जिसकी उपपत्ति अंकगणित के मूलभूत प्रमेय पर आधारित है।

प्रमेय-1.6 : *मानलो p एक अभाज्य (रूढ़ी) संख्या है और p से a^2 विभाजित हो (जहाँ a धन पूर्णांक है) तो p से a विभाजित है।*

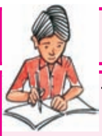
उपपत्ति : माना कि a एक धन पूर्णांक है तब a का अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार से होगा।

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, जहाँ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ रूढी (अभाज्य) हैं,

इसलिए $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p^2_1p^2_2 \ldots p^2_n$.

अब हमें दिया गया है कि p से a^2 विभाजित है। अंकगणित के मूलभूत प्रमेय से पता चलता है कि a^2 के रूढी गुणनखण्डो में से p एक है। अंकगणित के मूलभूत प्रमेय के अद्वितीय रूप का उपयोग करते हुए हम समझते है कि a^2 के रूढी गुणनखण्ड केवल $p_1 p_2 \ldots p_n$ रहते है। इसलिए $p_1, p_2, \ldots p_n$ में से कोई एक p है।

अब $p_1p_2 \ldots p_n$ में कोई एक संख्या p है अतः इससे a विभाजित है।



यह कीजिए

ऊपर दिए गए कथन की जाँच दिए गए मूल्यों से कीजिए $p = 2$, $p = 5$ और $a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64$ और 81 है।

अब हम $\sqrt{2}$ को अपरिमेय संख्या प्रमाणित करने का प्रयत्न करेंगे है। इसको हम ॠणात्मक (contradiction) कथन से प्रमाणित करेंगे।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति : वैसे तो इसे हम परस्पर विरोधी कथन द्वारा सिद्ध कर रहे हैं, हम इसका विलोम लेंगे अर्थात् मान लीजिए $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

यदि यह परिमेय संख्या है तो दो पूर्णांक r और s का अस्तित्व इस प्रकार रहना चाहिए जिससे $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ $(s \neq 0)$.

मान लीजिए r और s में 1 के अलावा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है तत्पश्चात हम इसे उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देते है ताकि हमें $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ प्राप्त हो, जहाँ a औप b असहभाज्य है। अतः $b\sqrt{2} = a$.

दोनों ओर वर्ग करने पर हमें $2b^2 = a^2$ प्राप्त होगा इसलिए 2 से a^2 विभाजित है।

अब हम प्रमेय 1.6 से यह समझते है कि यदि 2 से a^2 विभाजित हो तो 2 से a भी विभाजित है।

अतः किसी पूर्णांक c के लिए हम $a = 2c$ लिख सकते है । **दोनों ओर वर्ग लेने पर** $a^2 = (2c^2)$

a का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर हमें $2b^2 = (2c^2)$ प्राप्त होता है, अर्थात् $2b^2 = 4c^2$

इसका अर्थ यह है कि 2 से b^2 विभाजित है, इसलिए 2 से b विभाजित है (पुनः $p = 2$ के लिए कथन 1 का उपयोग करने पर)

इसलिए a और b दोनों में उभयनिष्ठ 2 है।

लेकिन यह a तथा b अभाज्य है कथन का ॠणात्मक होगा।

यह कथन हमारी कल्पना $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या के आधार पर उत्पन्न होती है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य सिद्ध होती है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

सामान्यतः यह बात कह सकते है कि $\sqrt{d}$ अपरिमेय होगा यदि d एक धन पूर्णांक है जो किसी पूर्णांक का वर्ग नहीं है। जैसे कि $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ $\sqrt{24}$ आदि सभी अपरिमेय संख्याएँ है।

पिछली कक्षाओं में उल्लेख किया गया है कि :

- परिमेय और अपरिमेय संख्या का योग अथवा अंतर अपरिमेय रहता है।
- अशून्य परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का गुणा या भाग अपरिमेय ही होता है।

यहाँ हम कुछ विशेष उदाहरणों से सिद्ध करेंगे।

उदाहरण-8. बताइए कि $5-\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए $5-\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम a और b के दो असहभाज्य खण्ड ज्ञात करेंगे जिसमें $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$.

इसलिए, $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

समीकरण को व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है, $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}=\frac{5b-a}{b}$ ... (1)

क्योंकि a और b पूर्णांक हो तो $5-\frac{a}{b}$ परिमेय हैं अतः $\sqrt{3}$ परिमेय है।

परन्तु यह इस वास्तविकता का विलोम होगा कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हमारी कल्पना जो कि $5-\sqrt{3}$ परिमेय है यह असत्य सिद्ध होती है।

अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $5-\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण-9. बताइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लो $3\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है।

हम a तथा b असहभाज्य संख्याएँ ज्ञात करेंगे $(b\neq 0)$ अर्थात् $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

अर्थात् $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$

व्यवस्थित करने पर $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ प्राप्त होता है।

क्योंकि 3, a और b पूर्णांक है, चूँकि $\frac{a}{3b}$ परिमेय होने के कारण $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या होगी

लेकिन यह $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है कथन का विलोम होगा।

अतः यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि $3\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण-10. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है।

माना कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ वहाँ a और b पूर्णांक हैं, जहाँ $b\neq 0$

इसलिए $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$.

दोनो ओर वर्ग लेने पर हमें प्राप्त होता है।

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2\frac{a}{b}\sqrt{3}$$

पुनः प्रस्थापित करने पर

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$

$$= \frac{a^2}{b^2} + 1$$

$$\sqrt{3} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

क्योंकि a, b पूर्णांक है, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ परिमेय है। अतः $\sqrt{3}$ परिमेय है।

यह वास्तविकता $\sqrt{3}$ अपरिमेय है का विलोम है।

अतः $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

सुचना :

1. दो अपरिमेय संख्याओं का योग अपरिमेय रहना आवश्यक नहीं है।
   उदाहरण के लिए $a = \sqrt{2}$ और $b = -\sqrt{2}$ हो तो a और b दोनों अपरिमेय है किंतु $a + b = 0$ जो परिमेय है।
2. दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल अपरिमेय रहना आवश्यक नहीं है।
   उदाहरण के लिए $a = \sqrt{2}$ और $b = \sqrt{8}$ हो तो a और b दोनों अपरिमेय संख्याएँ है। किन्तु $ab = \sqrt{16} = 4$ जो परिमेय संख्या है।

अभ्यास - 1.4

1. सिद्ध कीजिए कि निम्न संख्याएँ अपरिमेय है।
   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3 + 2\sqrt{5}$
2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ अपरिमेय हैं जहाँ p, q अभाज्य है।

1.4 घातोंको का पुनरविचार (Exponentials Revised)

हमें मालुम है की,

एक संख्या 'a^n' का 'n' घातांक प्राकृतीक संख्या 'a' के साथ जो 'n' का गुणनखण्ड है। प्रत्येक दिए गए 'a' के समान है । $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n-\text{factors}}$

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ .... 2 का घातांक है

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ .... 3 का घातांक है

हमे मालुम है की,81 को 3^4, लिख सकते है, $81 = 3^4$ यह घातांकीय रुप कहलाता है। '4' यह संख्या घातांक या सुचक है 3 आधार है। " 81 को 3 की चौथी"इस तरह पढते है। घातांकों के नियम का स्मरण करेंगे।

यदि a, b वास्तविक संख्याएँ जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$ और m, n पुर्णांक हो तब

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; (ii) $(ab)^m = a^m.b^m$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$

(v) $a^0 = 1$ (vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

यह किजिए

1. हल करो।

(i) 2^1 (ii) $(4.73)^0$ (iii) 0^3 (iv) $(-1)^4$ (v) $(0.25)^{-1}$ (vi) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (vii) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

2. (a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 को घातांक के रुप में प्रकट करो।

(b) निम्न लिखीत को संक्षिप्त लघुगणक रुप में प्रकट करो।

(i) 16×64 (ii) 25×125 (iii) $128 \div 32$

घातांक Exponential and Logarithms

घातांक परिमेय संख्याओं के साथ कुछ घातांकीय संख्याएँ होती है ।

5^2 , 5, का वर्ग दर्शाता है तथा 5 को 5^2 का वर्गमुल है।

5^3 , 5 का घन दर्शाता है तथा 5, को 5^3 का घनमुल कहते है ।

$5^{1.73} = 5^{173/100}$ यह '5' का 100^{th} वॉ मुल दर्शाता है।

निम्न को निरिक्षण किजिए।

$2^x = 4 = 2^2$ दर्शाता है $x = 2$

$3^y = 81 = 3^4$ दर्शाता है $y = 4$

$10^z = 100000 = 10^5$ दर्शाता है $z = 5$

क्या हम निम्न में x का मूल्य ज्ञात कर सकते है?

$2^x = 5$, $3^x = 7$, $10^x = 5$

यदी हॉ तो x का मूल्य क्या होगा ?

$2^x = 5$ में 2 का घातांक कौनसी संख्या लिखने पर वह हमें 5 देता है ?

इसलिए हमें x तथा 5 का एक नया संबंध स्थापित करना पडेगा?

चलिए अब हम यह देखे, क्या हम x तथा 5 के संभव मूल्यों की कल्पना कर सकते है ?

इन स्थितियों में लघुगुणक के नये संबंधों का परिचय करा रहे है। $y = 2^x$ में 'x' 'y' के किन मुल्यों से 5 प्राप्त होगा? यदि 'x'= 1 हो तो $y = 2^1$=2 यदी 'x'= 2 हो तो $y = 2^2$=4 यदि 'x'= 3 हो तो $y = 2^3$=8 इनमें 'x' का मुल्य 2 या 3 के बिच आता है।

2^x का आलेख (Graph of exponential 2^x)

अब $y = 2^x$ का आलेख खिचेंगे

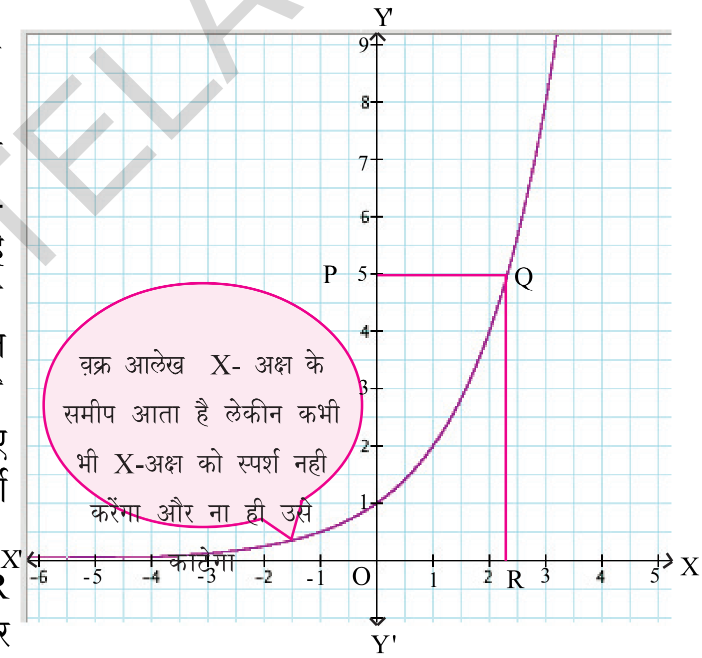
'x' के मुल्यों को 'y' के मुल्यों को ज्ञात करना।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y=2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

आलेख में बिन्दुओं को डालकर उन्हें मीलाएँगे $y = 2$ के बढने से का मूल्य बढता है। वैसे ही 'x' के घटने से $y = 2^x$ का मूल्य घट कर 0 के नजदीक आ जाता है। लेकिन कभी भी 0 नही होता. है।

चलिए अब हम दखेंगे की, $y = 2^x$ में x, y के कौनसे मूल्यों पर हमें 5 प्राप्त होगा?

हम जानते है की, आलेख में Yअक्ष 2^x को दर्शाता है तो X - अक्ष किसे दर्शाता है? हम देखते है की, X – अक्ष x के मूल्यों को दर्शाता है। Y - अक्ष पर 5 को अंकीत किजिए जिसे "P" से Y –अक्ष के समानांतर रेखा खिचिंए जो आलेख को बिन्दु Q पर स्पर्श करता है।



अब X - अक्ष के लम्ब QR रेखा खिंचिए क्या हम आलेख पर OR की लंबाई ज्ञात कर सकते है? या वह बिन्दु कहाँ पाया जाता है इस सोचिए।

अब हम जानते हैं कि बिंदु R का x निर्देशांक $2^x = 5$ के लिए x का निर्धारित मूल्य होगा। x के इसी मूल्य को 5 का लघुगणक का आधार 2 पर है। इसे $\log_2 5$ के रूप में लिखते हैं।$y = 2^x$ में x, y के किन मूल्यों से 5 प्राप्त होगा ? यदी $x = 1$ हो तो $y = 2^1 = 2$, यदि $x = 2$ होतो $y = 2^2 = 4$, यदि $x = 3$ होतो $y = 2^3 = 8$ इनमें x का मूल्य 2 तथा 3 के बिच आता है। क्या x का मूल्य 2 तथा 3 के नजदीक है ? लेकीन हम देखते है की, x का मूल्य 2 के नजदिक होगा।

यदि $2^x = 5$,में x को 5 लघुगणक जिसमें आधा 2 है परिभाषित करते है।

सांकेतिक रुप से इसे इस प्रकार लिखते है। $x = \log_2 5$

x का मुल्य ज्ञात करना कठिन होगा जब $2^x = 5$ या $3^x = 7$ या $10^x = 5$. तब हमें उपरोक्त समीकरण के लिए निम्नलिखित हल प्राप्त होगें।

यदि $2^x = 5$ हो तो x 5 का लघुगुणक 2" के आधार के लिए होगा उसे $log_2 5$ के रुप में लिखते है।

यदि $3^x = 7$ हो तो x " 7 का लघुगुणक 3" के आधार के लिए होगा उसे $log_3 7$ के रुप में लिखते है।

यदि $10^x = 5$ हो तो x " 5 का लघुगुणक10" के आधार के लिए होगा उसे $log_{10} 5$ के रुप में लिखते है।

सामान्यत: यदि a और N के रुपमें लिखते है $a \neq 1$ जहाँ $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$.

उपरोक्त तालिका को इस प्रकार लिखेंगे।

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

$y = 2^x$ के आलेख की परिभाषा द्वारा निरिक्षण किजिए।

यदि $y = \frac{1}{4}$; $x = -2$ अर्थात् $2^{-2} = \frac{1}{4}$ और $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2}$; $x = -1$ अर्थात् $2^{-1} = \frac{1}{2}$ और $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y = 2$; $x = 1$ अर्थात् $2^1 = 2$ और $1 = \log_2 2$

$y = 4$; $x = 2$ अर्थात् $2^2 = 4$ और $2 = \log_2 4$

$y = 8$; $x = 3$ अर्थात् $2^3 = 8$ और $3 = \log_2 8$

अर्थात, वर्क पर **y** - निर्देशांक का कोई भी बिंदु 2 का यदि **x** वाँ घातांक है तथा वक्र पर **x** - अक्ष का कोई भी बिंदु **y** - निर्देशांक का 2 आधार वाला लघुगणक होगा।

यदि $2^y = 25$ हो तो इसे हम $y = \log_{10}{}^{25}$ या $y = \log 25$ या के रुप में लिखते है।

10 आधार वाले लघुगणक को सामान्य लघुगणक कहते है।

यह किजिए

(1) निम्नलिखीत पदों को लघुगणित रुप में लिखिए।

(i) $7 = 2^x$ (ii) $10 = 5^b$ (iii) $\frac{1}{81} = 3^c$ (iv) $100 = 10^z$ (iv) $\frac{1}{257} = 4^a$

(2) निम्नलिखित पदों को घातांक के रुप में लिखो।

(i) $\log_{10}100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$ घातांक

प्रयत्न कीजिए

निम्नलिखित हल किजिए।

(i) $\log_2 32 = x$ (ii) $\log_5 625 = y$ (iii) $\log_{10} 10000 = z$

सोचो और विचार किजिए

(1) $\log_2 0$ का अस्तित्व का होता है? कारण बताइए।

(2) Prove (i) $\log_b b = 1$ (ii) $\log_b 1 = 0$ (iii) $\log_x b^x = x$

लघुगणक के गुणधर्म (Properties of Logarithms)

अनेक अनुप्रयोंगा तथा उन्नत गणित में लघुगणक का अत्यधिक महत्व है। लघुगणित व्यंजको को कुशलता पुर्वक हल करने के लिए उपयोगी कुछ मुलभुत गुणधर्मों को अब हम स्थापित करेंगे।

(1) गुणनफल नियम

घातांक के गुणधर्म क्रमानुगत लघुगणक के गुणधर्म उदाहरर्णाथ जब हम समान आधार वाले संख्याओं को गुणा करते है तो उनके घातांकों को जोडा जाता है।

अर्थात $a^x . a^y = a^{x+y}$

घातांक के इस गुणधर्म को लघुगणक के घातांक से जोडकर उसे गुणनफल नियम कहा गया है।

मान लिजिए a, x तथा y घनात्मक वास्तविक संख्याएँ हो तो जहाँ $a \neq 1$.

प्रमेय (गुणनफल नियम):-

तब $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

अर्थात, लघुगणकों का गुणनफल उनका योग होता है।

मानलो $\log_a x = m$ तथा $\log_a y = n$ होतो $a^m = x$ तथा $a^n = y$ अब

$$xy = a^m\, a^n = a^{m+n}$$

$$\therefore \quad \log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$$

प्रयत्न कीजिए

हम जानते है कि, $\log_{10} 100000 = 5$

दर्शाइए कि हमें $100000 = 1000 \times 100$ लिखने से वही उत्तर प्राप्त होता है या गुणनफल नियम से उत्तर की जाँच किजिए?

यह कीजिए

निम्न लघुगणकों को योग के रुप में दर्शाइए।

(i) 35×46 (ii) 235×437 (iii) 2437×3568

(ii) भाग नियम

जब हम समान आधार वाले संख्याओं का भाग करते है तो उनके घातांको को घटाते है।

अर्थात $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

इस गुणधर्म को भागफल नियम कहते है।

मान लिजिए a, x तथा y धनात्मक वास्तविक संख्या हो तो जहाँ $a \neq 1$.

प्रमेय (भाग नियम)

तब $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

उत्पत्ती: मानलो $\log_a x = m$ तथा $\log_a y = n$ हो तो $a^m = x$ तथा $a^n = y$

अब

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n = \log_a x - \log_a y$$

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

यह कीजिए

निम्न लिखित को लघुगणक के अन्तर के रुप में दर्शाइए।

(i) $\dfrac{23}{34}$ (ii) $\dfrac{373}{275}$ (iii) $4325 \div 3734$ (iv) $5055 \div 3303$

सोचो और विचार किजिए

हम जानते है की, $(a^m)^n = a^{mn}$

मानलो $a^m = x$ हो तो $m = \log_a^x$

$x^n = a^{mn}$ हो तो $\log_a^{x^n} = mn$

$= n\log_a^x$ (क्यों ?)

(iii) घातांक नियम

जब घातांक के उपर एक और घातांक लिखा जाता है तो उन दोनों घातांको गुणा करते है।

उदा. $(a^m)^n = a^{m.n}$

इस गुणधर्म को घातांक नियम कहते है।

मान लिजिए $\boldsymbol{a}$ तथा $\boldsymbol{x}$ धनात्मक वास्तविक संख्याएँ है जहाँ $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ तथा $\boldsymbol{n}$ एक वास्तविक संख्या है।

$$\mathbf{\log_a x^n = n \log_a x}$$

एक घातांक वाली संख्या का लघुगणक घातांक तथा लघुगणकीय संख्या का गुणनफल होता है।

प्रयत्न कीजिए

$\log_2 32 = 5$ हो तो बताइए कि इसे $32 = 2^5$ लिखने पर वही उत्तर प्राप्त होगा। तथा इसकी घातांक नियम से जाँच किजिए।

$2^x = 3^5$ हो तो क्या हम x का मूल्य ज्ञात कर सकते है? ऐसे संदर्भो में $3^5 = 243$ हो तो हम x के मूल्य को प्राप्त कर सकते है। जो की, 2^x का मूल्य 243 के समान देगा।

लघुगणक के उपयोग तथा सुत्र के उपयोग से $\log_a x^n = n\log_a x$, हम $3^{25}, 3^{33}$ आदि का मूल्य सरलता से प्राप्त कर सकते है।

$2^x = 3^5$

दोनो ओर आधार 2 वाले लघ

$\log_2^{2^x} = \log_2^{3^5}$

$x\log_2^2 = 5\log_2 3$

$x = 5\ \log_2 3 \qquad \left(\because \log_a x^n = n\ \log_a x\ and\ \log_a^a = 1\right)$

हमने देखा की, x का मूल्य 5 तथा $\log_2 3$ का गुणनफल होगा।

यह कीजिए

निम्नलिखित प्रश्नों को $\log_a x^n = n \log_a x$ विस्तार किजिए

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\log s_5 8^{50}$ (iii) $\log 5^{23}$ (iv) $\log 1024$

नोट : $\log x = \log_{10} x$

प्रयत्न कीजिए

(i) $\log_2 32$ का मूल्य ज्ञात किजिए (ii) $\log_c \sqrt{c}$ का मूल्य ज्ञात किजिए

(iii) $\log_{10} 0.001$ का मूल्य ज्ञात किजिए (iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ का मूल्य ज्ञात किजिए

सोचो और विचार किजिए

हमें मालुम है की, यदि $7 = 2^x$ तो $x = \log_2 7$ तब $2^{\log_2 7}$ का मूल्य क्या होगा। आपके उत्तर की सत्यता सिध्द किजिए। कुछ और उदाहरणों से $a^{\log_a N}$ का सामान्यीकरण किजिए।

उदाहरण-11. $\log \frac{343}{125}$ का विस्तार कीजिए

हल : जैसे कि आप जानते है, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ अतः $\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

चूँकि $\log_a x^n = m \log_a x$

$= 3\log 7 - 3\log 5$

$\log \frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5).$

उदाहरण-12. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ को केवल एक लघुगणक में लिखिए।

हल : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ (since in $n \log_a x = \log_a x^n$)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ (Since $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \frac{1125}{32}$ (Since $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$)

उदाहरण-13. $3^x = 5^{x-2}$.

हल : $3^x = 5^{x-2}$

दोनों ओर log लगाने पर $\quad \log(3^x) = \log(5^{x-2})$

$$x\log_{10}3 = (x-2)\log_1 5$$

$$x\log_{10}3 = x\log_{10}5 - 2\log_{10}5$$

$$x\log_{10}5 - 2\log_{10}5 = x\log_{10}3$$

$$x\log_{10}5 - x\log_{10}3 = 2\log_{10}5$$

$$x(\log_{10}5 - \log_{10}3) = 2\log_{10}5$$

$$x = \frac{2\log_{10}5}{\log_{10}5 - \log_{10}3}$$

उदाहरण-14. $2\log5 + \frac{1}{2}\log9 - \log3 = \log x$ में x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : $\log x \quad = 2\log5 + \frac{1}{2}\log9 - \log3$

$$= \log5^2 + \log9^{\frac{1}{2}} - \log3$$

$$= \log25 + \log\sqrt{9} - \log3$$

$$= \log25 + \log3 - \log3$$

$$\log x = \log25$$

$$\therefore \quad x = 25$$

अभ्यास - 1.5

1. निम्नलिखित के मूल्यों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\log_{25}5$ (ii) $\log_{81}3$ (iii) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

(iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x\sqrt{x}$ (vi) $\log_2 512$

(vii) $\log_{10}0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ (ix) $2^{2+\log_2 3}$

2. नीचे दिए गए पदों को log N रूप में लिखकर उसके मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log_2 16 - \log_2 2$ (iii) $3\log_{64}4$

(iv) $2\log 3 - 3\log 2$ (v) $\log 10 + 2\log 3 - \log 2$

3. यदि $x = \log_2 3$ और $y = \log_2 5$ दिया गया हो तो निम्नलिखित पदों का मूल्यांकन x और y में कीजिए।
   (i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$
4. विस्तार कीजिए

   (i) $\log 10000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\left(\frac{p^2q^3}{r^4}\right)$ (v) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$
5. यदि $x^2 + y^2 = 25xy$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $2\log(x + y) = 3\log 3 + \log x + \log y$.
6. यदि $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ हो तो $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।
7. यदि $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ हो तो $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।
8. यदि $2^{x+1} = 3^{1-x}$ हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. (i) $\log 2$ परिमेय है या अपरिमेय ? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।
   (ii) $\log 100$ परिमेय है या अपरिमेय? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

वैकल्पिक अभ्यास

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है]

1. क्या 6^n संख्या का अंतिम अंक 5 होगा जहाँ n प्राकृतिक संख्या हैं? कारण बताइए।
2. क्या $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ संयुक्त संख्या है? आपके उत्तर का औचित्य बताइए।
3. सिद्ध कीजिए कि $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ अपरिमेय संख्या है। और यह भी जाँच कीजिए कि $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ परिमेय है या अपरिमेय है।
4. यदि $x^2 + y^2 = 6xy$ सिद्ध कीजिए कि $2\log(x + y) = \log x + \log y + 3\log 2$
5. यदि $\log_{10} 2 = 0.3010$ हो तो 4^{2013} में अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

सूचनाः संख्या के पूर्णांकीय भाग और दशमलव भाग के बारे में आपके अध्यापक से पूछिये।

प्रस्तावित परियोजना

युक्लिद अल्गोरिदम - (म.स.भा)

- रंगीन रीबनों से या ग्रीड पेपर की सहायता से युक्लिद अल्गोरिदम द्वारा म.स.भा ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की

1. युक्लिद की विभाजन पद्धति : a तथा b दिए गए पूर्णांक हो तो q तथा r पूर्ण संख्याएँ होगी जो $a = bq + r, 0 < r < b$ को संतृप्त करते है?
2. अंक गणित का मूलभूत प्रमेय कथित करता है कि प्रत्येक संयुक्त संख्या इसके रूढी गुणनखण्डों के गुणा में व्यक्त कर सकते है। यह गुणनखण्ड अद्‌वितीय रहता है, जहाँ गुणनखण्डों के क्रम विचारणीय नहीं है।
3. यदि p अभाज्य है और p से a^2 विभाजित है जहाँ a धन पूर्णांक है, तब p से a विभाजित है।
4. माना कि x परिमेय संख्या है जिसका दशमलव विस्तार आवर्त है। तब हम x को $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त कर सकते है, जहाँ p और q अभाज्य गुणन खण्ड 2^n5^m के रूप में रहता है जहाँ n, m अ-ऋणात्मक पूर्णांक है।
5. माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या है q के अभाज्य 2^n5^m के रूप में है। जहाँ n, m अऋणात्मक पूर्णांक है तब x का दशमलव विस्तार आवर्त रहता है।
6. माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या है इस प्रकार है कि q के अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में नही है जहाँ n, m अ-ऋणात्मक पूर्णांक है। तब x का दशमलव विस्तार अनावर्त, पुनरावर्त रहता है।
7. हम $\log_a x = n$ से परिभाषित करते है, यदि $a^n = x$, जहाँ a और x धन पूर्णांक है और $a \neq 1$.
8. लघुगणक के नियम :

   (i) $a^{\log_a N} = N$ (ii) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

   (iii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (iv) $\log_a x^m = m \log_a x$
9. अभियांत्रिकी, विज्ञान, व्यापार और अर्थशास्त्र में सभी प्रकार की गणना के लिए लघुगणक का उपयोग किया जाता है।

अध्याय

2

समुच्चय
(Sets)

2.1 प्रस्तावना

जब आपको किसी व्यक्ति को परिभाषित करने के लिए कहा जाए तो आप कैसे करेंगे ?

निम्न प्रकार से किया जा सकता है।

रामानुजन एक गणितज्ञ थे जिनको संख्या प्रमेय में रुची थी। दासरथी एक तेलुगु कवि तथा स्वतंत्रता सेनानी भी थे। अलबर्ट आइनस्टाइन भौतिकशास्त्री जिनकी रुची संगीत में थी। मरियम मिर्जा खान एक ऐसी अकेली स्त्री है जिन्होंने गणित में पदक जीते थे ।

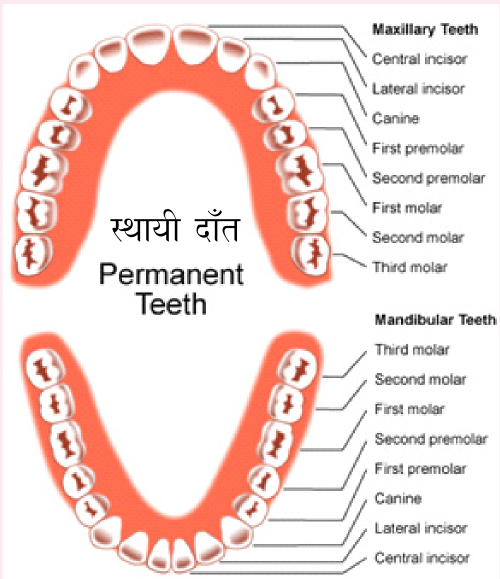
हम प्रत्येक व्यक्ति को उनके विशेष लक्षणों और रुची के अनुसार वर्गीकृत करते है तथा सबसे अधिक मान्यता प्राप्त समुह के सदस्य के रुप में जानते है। लोग अपने चारों ओर पाई जाने वाली वस्तुओं को उनके पर्यावरण तथा दुसरी वस्तुओं से संबंध के आधार पर वर्गीकृत करते है।
एक पुस्तकालय में विषयों के आधार पर व्यवस्थित किया जाता है जिससे आवश्यक पुस्तके तुरंत प्राप्त हो सके।
रसायन शास्त्र मे तत्वों को समुह तथा वर्गो में वर्गीकृत करते है। जिससे उनके साधारण गुणधर्मो को जान सके। आपके दसवी कक्षा के गणित का पाठ्यक्रम चौदह अध्यायों में अलग - अलग शिर्षकों से विभाजित किया गया है।

दंत्र सुत्र

मनुष्यों के दांतो को उनकी क्रियाओं के आधार पर चार प्रकार से विभाजित किया गया है।
निम्न लिखित भेदों के अनुसार दांतों की सूचि तैयार कीजिए।

1. छेदक (Incisors) 2. भेदक (Canines)
3. पूर्वचर्वणक (Pre-molars)
4. चर्वणकMolars

दाँतो के समुह को उनके चबाने के गुण के अनुसार छेदक, भेदक, पुर्वचर्वणक तथा चर्वणक के रुप में विभाजित किया गया है। दाँतो की इस व्यवस्था को दंत सुत्र कहते है, तथा इसे २,१,२,३ के रुप में लिखते है।



गणित इन स्थितीयों में दुसरों विषयों से अलग नही है। इसे अर्थपुर्ण वस्तुओं के समुहों की आवश्यकता होती है। गणित में समान लक्षणों वाले वस्तुओं को एक साथ किया जाता है। जिससे उस समुह को एक वस्तु के रुप में लिया जा सकता है।

उनमें से कुछ संख्याओं का समुच्चय जिसे हम साधारणत: उपयोग करते है वे-

$\mathbb{N}$ = प्राकृतिक संख्याओं का समुह 1, 2, 3....

W = पुर्ण संख्याओं का समुह 0, 1, 2, 3.....

I or $\mathbb{Z}$ = पुर्णांकों का समुह $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

$\mathbb{Q}$ = परिमेय संख्याओं का समुह अर्थात वह संख्याएँ जिसे $\frac{p}{q}$ के रुप में लिख सकते जहाँ p, q पुर्णांक है और $q \neq 0$

$\mathbb{R}$ = वास्तविवक संख्याओं का समुह अर्थात वह संख्याएँ जिसमें दशमल का विस्तार हो।

अब हम वस्तुओं के गुणधर्मों को देखकर और प्रक्रिया तथा तर्क के द्वारा साधारण कथनों को तैयार कर सकते हैं।

यह कीजिए

दिये गये समूहों में ''समान गुणों'' अर्थपुर्ण समुहों के रचना की पहचान कीजिए।

1) 2,4,6,8,… 2) 2,3,5,7,11,… 3) 1,4,9,16,…

4) जनवरी, फरवरी, मार्च, अप्रैल ….

5) अंगूठा, तर्जनी, मध्यमा अनामिका, कनिष्ठा

विचार - विमर्श कीजिए

दिए गए समूहों का निरीक्षण कर जितने सामान्य कथन लिख सकते हो लिखिए :-

1) 2,4,6,8,… 2) 1,4,9,16,…

2.2 समुच्चय (Set)

समुच्चय उन वस्तुओं का समूह है जों समान गुणों वाली हों या सम नियम का पालन करते हों। समुच्चय के वस्तुओं को ''घटक'' (elements) कहते है। समुच्चय के घटको को कोष्टक { } में कॉमा से अलग कर लिखते है और ''सामान्य नियमों'' द्वारा समुच्चय के घटक को निश्चित किया जाता है।

उदाहरण के लिए जब हमें प्रथम पाँच रूढी संख्याओं का समुच्चय लिखना हो तो इसे {2,3,5,7,11} रूप में लिखते है। तथा छेदक का समुच्चय = {मध्य छेदक (central incisor) बाह्य छेदक lateral incisor}

यह कीजिए

निम्नलिखित समुच्चयों को लिखिए :-

1) प्रथम पाँच धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय
2) 100 से बडी और 125 से छोटी 5 के गुणकों का समुच्चय
3) प्रथम पाँच धन संख्याओं का समुच्चय
4) रामानुजन संख्या के अंकों का समुच्चय

2.2.1 रोस्टर रूप और समुच्चय रचेता रूप (Roster form and Set builder form)

समुच्चय को लम्बे वाक्यों के रूप में लिखना कठिन होता है। इसलिए समुच्चय को सामान्यतः अंग्रेजी के बडे अक्षर से सूचित करते है।

उदाहरण के लिए M दाँतों के चर्वणक (molars) का समुच्चय है।

इस समुच्चय को हम M={पहला चर्वणक, दूसरा चर्वणक, तीसरा चर्वणक} के रूप में लिखते है।

चलिए अब हम एक और उदाहरण देखेंगे। Q एक ऐसा समुच्चय हैं जिसमें कम से कम दो समान भुजाओं वाले चतुर्भुजों का समुह है। इसे हम इस प्रकार लिखते है।

Q ={वर्ग, आयत, समचतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, पतंग, समद्विभुज, समलंब चतुर्भुज, शार (dart)}

यहाँ हमने घटकों की सूचि बनाकर समुच्चय लिखते है। तब हम कह सकते है कि समुच्चय को **''रोस्टर रूप''** में लिखा है।

उपरोक्त दो उदाहरणों में अब हम घटकों के प्रदर्शन की चर्चा करेंगे। मानलों हम कहना चाहते है कि ''दूसरा चर्वणक'' यह चर्वणक के समूह का घटक है। तब हम इसे ''दूसरा चर्वणक $\in$ M" के रूप में प्रदर्शित करते है। इसे हम दूसरा चर्वणक M समुच्चय से संबंधित है।'' ऐसा पढते है।

ऊपर दिए गए उदाहरण से क्या हम कह सकते है कि 'समचतुर्भुज $\in$ Q" ? इसे आप कैसे पढोगे?

उपरोक्त उदाहरण में क्या हम कह सकते है कि, वर्ग M समुच्चय से संबंधित है?

इसे कैसे दर्शाया जा सकता है? जब हम कहते है कि ''वर्ग M समुच्चय में नहीं है'' इसे ''वर्ग $\notin$ M" के रूप में लिखते है और इसे हम ''वर्ग M समुच्चय से संबंधित नहीं है।'' ऐसा पढते है।

पिछली कक्षाओं से प्राप्त ज्ञान के आधार पर याद कीजिए कि हम प्राकृतिक संख्याओं को $\mathbb{N}$, से, पूर्णांकों को $\mathbb{Z}$, से, परिमेय संख्याओं को $\mathbb{Q}$, से तथा वास्तविक संख्याओं को $\mathbb{R}$ से सूचित करते है।

यह कीजिए

दिये गये संख्याओं में से वे किस समुच्चय से संबंधित हैं या नहीं चिन्हों की सहायता से लिखिए।

i) 1   ii) 0   iii) -4   iv) $\frac{5}{6}$ v) $1.\overline{3}$

vi) $\sqrt{2}$ vii) log 2   viii) 0.03   ix) π x) $\sqrt{-4}$

विचार - विमर्श कीजिए

क्या आप परिमेय संख्याओं से समुच्चय बना सकते हो?

ऊपर की गयी चर्चा के आधार पर शायद आप कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के घटकों से समुच्चय बनाना मुश्किल है? आपने यह भी देखा होगा कि सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में होती है ($q \neq 0$ तथा p,q दो पूर्णांक है)

जब हम समुच्चयों को घटकों की ''समान गुणधर्मता'' से परिभाषित करते है तो उसे हम ''समुच्चय रचेता रूप'' कहते है। समुच्चय रचेता रूप में कुछ वाक्य-विज्ञान के नियमों का पालन करना पडता है। इसे हम उदाहरण द्वारा समझेंगे।

मानलिजिए A एक समुच्चय है जिसमें 20 से कम 3 के गुणक लिए गए है। तब A={3,6,9,12,15,18} और यह समुच्चय A का रोस्टर रूप है। जब हम इसका समुच्चय रचेता रूप लिखते है तो

A={x : x. 3 के गुणक है तथा x<20}

सभी x के समुच्चय में x इस प्रकार है कि वे 3 के गुणक है तथा x<20

A={x : x. 3 के गुणक है, $x < 20$} और इसे हम "A एक समुच्चय है जिसका घटक x इस प्रकार है कि x, 3 के गुणक है तथा x. 20 से कम है। अर्थात् हम परिमेय संख्याओं के समुच्चय को $\mathbb{Q}=\{x : x = \frac{p}{q}$, q $\neq$ 0 और p,q पूर्णांक है$\}$ लिख सकते है।

सुचना : (i) रोस्टर रूप में घटकों की सूचि का क्रम **अनावश्यक** (immaterial) है। इस प्रकार उदाहरण 1 को हम इस प्रकार लिख सकते है {7,2,1,9}या {1,2,7,9}या {1,7,2,9}

(ii) जब समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते हैं तब यदि कोई घटक बार-बार आता हो तो उसे दुबारा नहीं लिखा जाता है। उदाहरण के लिए "SCHOOL" शब्द में आने वाले अक्षरों का समुच्चय {S, C, H, O, L} होगा। लेकिन वह {S, C, H, O, O, L} नहीं होगा। अर्थात् समुच्चय में भिन्न-भिन्न घटक पाये जाते है।

अब हम कुछ समुच्चयों के ''रोस्टर रूप'' तथा ''समुच्चय रचेता'' रूपों को देखेंगे।

रोस्टर रूप	समुच्चय रचेता रूप
V = $\{a, e, i, o, u\}$	V = $\{x : x$ अंग्रेजी भाषा के स्वर$\}$
A = $\{-2,-1,0,1,2\}$	A = $\{x : -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$
B = $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$	B = $\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
C = $\{2,5,10,17\}$	C = $\{x : x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$

यह कीजिए

1. दिए गए समुच्चयों के घटकों को लिखिए
   (i) G = {20 के सभी खण्ड}
   (ii) F = {17 और 61 के बीच की ऐसी संख्याएँ जो 4 के गुणक भी है और जो 7 से भी विभाजित होती है।}
   (iii) S = $\{x : x$ 'MADAM' शब्द के अक्षर$\}$
   (iv) P = $\{x : x$ एक पूर्ण संख्या है जो 3.5 और 6.7 के बीच है$\}$
2. दिए गए समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए।
   (i) B = 30 दिन वाले महीनों का समुच्चय
   (ii) P = 10 से कम रूढी संख्याओं का समुच्चय
   (iii) X = इन्द्रधनुष के रंगों का समुच्चय
3. यदि A, 12 के खण्डों का समुच्चय हो तो दिये गये विकल्पों में एक समुच्चय का घटक नहीं है।
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

प्रयत्न कीजिए

1. बीज गणित और रेखागणित के उपयोग से आपकी इच्छा अनुसार सूत्र स्थापित कीजिए।
2. रोस्टर रूप के साथ समुच्चय रचेता रूप की जोडी बनाइए।

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a)	$\{x : x$ एक धनात्मक पूर्णांक है और 18 के खण्ड है।$\}$
(ii)	{0}	(b)	$\{x : x$ एक पूर्णांक है और $x^2 - 9 = 0\}$
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c)	$\{x : x$ एक पूर्णांक है और $x + 1 = 1\}$
(iv)	{3, -3}	(d)	$\{x : x$ एक PRINCIPAL शब्द के अक्षर$\}$

EXERCISE - 2.1

1. निम्न में कौनसे समुच्चय है बताइए। आपके उत्तर की जाँच कीजिए।
   (i) एक वर्ष के सभी महिनों का समुच्चय "J" अक्षर से शुरु होने वाले।
   (ii) संसार के दस उत्तम लेखकों का समुच्चय।
   (iii) संसार के दस उत्तम क्रिकेट के बल्ले बाज़ों का समूह।
   (iv) आपकी कक्षा के लड़कों का समुच्चय (समूह)
   (v) सम पूर्णांकों का समुच्चय।
2. यदि A={0, 2, 4, 6}, B = {3, 5, 7} और C = {p, q, r} तो रिक्त स्थानों में सही ढ़ंग से $\in$ या $\notin$ का प्रयोग कीजिए।
   (i) 0 ….. A (ii) 3 ….. C (iii) 4 ….. B
   (iv) 8 ….. A (v) p ….. C (vi) 7 ….. B
3. नीचे दिये गये कथनों को चिन्हों का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।
   (i) 'x' समुच्चय 'A' का घटक नहीं है।
   (ii) 'd' समुच्चय 'B' का घटक है।
   (iii) '1' प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N का घटक है।
   (iv) '8' रूढ़ संख्याओं के समुच्चय P का घटक नहीं है।
4. निम्नलिखित कथन सत्य या असत्य बताइए।
   (i) 5 $\notin$ {रूढ संख्याएँ }
   (ii) S = {5, 6, 7} का अर्थ है 8 $\in$ S.
   (iii) W पूर्ण संख्याओं का समुच्चय है तो -5 $\notin$ W
   (iv) Z एक पूर्णांकों का समुच्चय है तो $\frac{8}{11} \in Z$.
5. निम्नलिखित समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखिए।
   (i) B = {x : x एक प्राकृतिक संख्या है जो 6 से कम।}
   (ii) C = {x : x दो अंकों की प्राकृतिक संख्या इस प्रकार है उनके अंको का योग 8}
   (iii) D = {x : x एक रूढ़ संख्या है जो 60 का भाजक है}
   (iv) E = {BETTER शब्द के अक्षरों का समुच्चय}
6. निम्नलिखित समुच्चय को रचेता रूप में लिखिए।
   (i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32}
   (iii) {5, 25, 125, 625} (iv) (1, 4, 9, 25, ….. 100}
7. निम्नलिखित समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखिए।
   (i) A = {x : x एक प्राकृतिक संख्या जो 50 से अधिक है और 100 से कम}
   (ii) B = {x : x एक पूर्णांक है, $x^2 = 4$}
   (iii) D = {x : x एक "LOYAL" शब्द के अक्षरों का समुच्चय}
   (iv) E = {$x : x = 2n^2 + 1, -3 \le n \le 3, n \in \mathbb{Z}$ }

8. रोस्टर रूप की जोडी समुच्चय रचेता से करें।

(i)	$\{1, 2, 3, 6\}$	(a)	$\{x : x$ एक रूढ संख्या है जो 6 के भाजक है।$\}$
(ii)	$\{2, 3\}$	(b)	$\{x : x$ एक विषम संख्या है जो 10 से छोटी है।$\}$
(iii)	$\{M, A, T, H, E, I, C, S\}$	(c)	$\{x : x$ एक प्राकृतिक संख्या है जो 6 के भाजक है।$\}$
(iv)	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	(d)	$\{x : x$ एक MATHEMATICS शब्द के अक्षरों का समुच्चय है।$\}$

2.3 समुच्चय के प्रकार (Types of Set)

निचे दिए गए उदाहरणों को देखिए।

(i) $A = \{x : x.$ 1 से छोटी प्राकृतिक संख्या है$\}$

(ii) $D = \{x : x,$ 2 विभाजित होने वाली विषम संख्या है$\}$

A और D में कितने घटक है? कोई भी प्राकृतिक संख्या 1 से छोटी नहीं होती है। अतः A में एक भी घटक नहीं है। या कह सकते है कि A एक रिक्त समुच्चय है। उसी प्रकार 2 से विभाजित होने वाली कोई विषम संख्या नहीं है। अतः D भी रिक्त समुच्चय है।

जिस समुच्चय में एक भी घटक न हो उसे रिक्त समुच्चय या नल (Null) समुच्चय या वाइड (Void) समुच्चय कहते है। रिक्त समुच्चय को ϕ या $\{\ \}$ संकेत द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

रिक्त समुच्चय के कुछ और उदाहरण इस प्रकार है।

(i) $A = \{x : 1 < x < 2,\ x$ एक प्राकृतिक संख्या$\}$

(ii) $B = \{x : x^2 - 2 = 0$ और x एक परिमेय संख्या$\}$

सुचना: ϕ और $\{0\}$ ये दोनों भिन्न समुच्चय है। $\{0\}$ इस समुच्चय में एक ही घटक 0 है जबकि $\{\ \}$ यह रिक्त समुच्चय है।

यह कीजिए

निम्नलिखित में कौनसे रिक्त समुच्चय है? उत्तर की जाँच कीजिए।

(i) उन पूर्णांकों का समुच्चय जो 2 और 3 के मध्य है।

(ii) 1 से कम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।

(iii) 2 से विभाजित करने पर शेष 0 देने वाले विषम संख्याओं का समुच्चय।

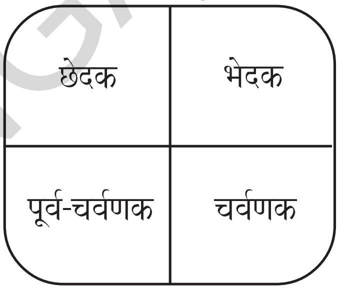
प्रयत्न कीजिए

1. निम्नलिखित में कौनसे समुच्चय रिक्त समुच्चय हैं उत्तर की जाँच कीजिए।
   (i) $A = \{x : x^2 = 4$ और $3x = 9\}$.
   (ii) समतल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय जिनमें तीनों कोणों का योग 180^0 से कम हो।
2. $B = \{x : x + 5 = 5\}$ यह रिक्त समुच्चय नहीं है। क्यों?

2.4 चित्र की सहायता से समुच्चयों का प्रतिनिधित्व (Using Diagrams to Represent Sets)

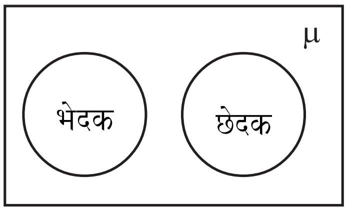
यदि S एक समुच्चय है और x एक घटक होतो $x \in S$ होगा या $x \notin S$ होगा। समूह के आधार पर प्रत्येक समुच्चय को बंद आकृति द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जब हम कहते है कि समुच्चय S तो उसके भीतर आने वाले घटकों का प्रदर्शन होगा न कि S के बाहर वाले घटक। उदाहरणार्थ समुच्चय $S = \{1, 2, 3, 4\}$ चित्र के आधार पर होगा जहां $5 \notin S$ और $4 \in S$।

दाँतों का समुच्चय



2.5 सार्वभौमिक समुच्चय और उपसमुच्चय (Universal Set and Subset)

अध्याय के प्रारंभ में दाँतों के बारे में की गयी चर्चा को याद कीजिए। आपने पूरे दाँतों को चार भागों में वर्गीकृत किया था जैसे छेदक, भेदक, पूर्वचर्वणक और चर्वणक।
लेकिन चर्वणक के भाग पूरे दाँतों का भी हिस्सा होंगे या नहीं?
यहाँ पूरे दाँतों का समूह ''सार्वभौमय समुच्चय'' है।



दाँतों के समूह को सार्वभौम समुच्चय मानलीजिए तथा चित्र में दर्शाये अनुसार छेदक और भेदक दो समुच्चय है।

चित्र में बचे हुए भाग को क्या कहेंगे?

अब हम सार्वभौमिक समुच्चय के कुछ और उदाहरण देखेंगे:-

(i) यदि हम आपने राज्य के विभिन्न समूहों का अध्ययन करना चाहते हैं तो सार्वभौमिक समुच्चय तेलंगाना के सभी लोगों का समुच्चय होगा।

(ii) यदि हम अपने देश के लोगों के विभिन्न समूहों का अध्ययन करना चाहते हैं, तो भारत के सभी लोगों का समुच्चय सार्वभौमिक समुच्चय होगा।

सार्वभौमिक समुच्चय को 'μ' या कभी-कभी U के द्वारा दर्शाते है। सार्वभौमिक समुच्चय साधारणतः आयत के प्रतिनिधित्व का निरूपण करती है।

अब हम प्राकृतिक संख्याओं को $\mathbb{N} = \{1,2,3,4...\}$ को देखेंगे। तब $\mathbb{N}$ के घटकों से सम संख्याओं का समुच्चय बना सकते है। ऐसी स्थिति में $\mathbb{N}$ सम संख्याओं का सार्वभौमिक समुच्चय होगा। क्या विषम संख्याओं का सार्वभौमिक समुच्चय भी $\mathbb{N}$ ही होगा?

1. जब हम कहते है ''यदि $x<3$ तो $x<4$'' तो हम दर्शाते है कि "$x<3 \Rightarrow x<4$".
2. जब हम कहते है "$x-2 = 5$ यदि केवल यदि $x=7$", अर्थात् हम "$x-2 = 5 \Leftrightarrow x=7$" को दर्शा रहें है।

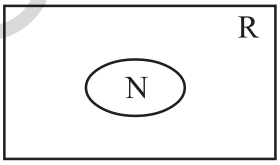
2.4.1 उपसमुच्चय

समुच्चय $A = \{1,2,3\}$ को देखिए और बताइए कि इनमें से आप कितने समुच्चय बना सकते हो?

अब $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ तथा $\{1,2,3\}$ आदि समुच्चयों को बना सकते है। क्या आप इनके अलावा और भी समुच्चय बना सकते हो? यदि नहीं तो इन समुच्चयों को A के उपसमुच्चय कह सकते है। यदि हम कहना चाहेंगे कि $\{1,2\}$ A का उपसमुच्चय है तो इसे हम $\{1,2\} \subseteq A$ के रूप में दर्शायेंगे। जब हम उपसमुच्चयों की चर्चा करते है तो $\{1, 2, 3\}$ भी A का उपसमुच्चय कहलाता है।

यदि A के कुछ या सभी घटक B में हो तो A को B का उपसमुच्चय कहते है और इसे $A \subseteq B$ के रूप में लिख सकते है अर्थात् $B \subseteq A$ सत्य होगा यदि केवल यदि B का प्रत्येक घटक A में हो।

अब इसे हम $B \subseteq A \Leftrightarrow a \in B \Rightarrow a \in A$ के रूप में लिखते है।



अब हम वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}$ के बारे में सोचेंगे। उसके कई उपसमुच्चय होंगे।

उदाहरण के लिए प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

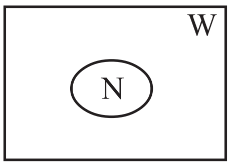
पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbb{Z} = \{\ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots..\}$

अपरिमेय संख्याएँ $\mathbb{Q}'$ जो उन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, जो परिमेय नहीं है।

अतः $\mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{R}$ और $x \notin \mathbb{Q}\}$ अर्थात् सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय संख्याएँ नहीं होती है। उदाः $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ और π.

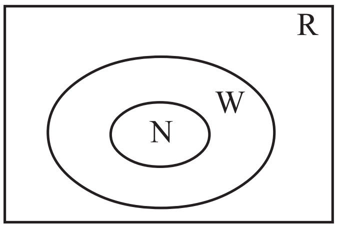
उसी प्रकार, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N, उपसमुच्चय है पूर्णसंख्या W का और इसे $\mathbb{N} \subseteq W$ के रूप में लिख सकते है। उसी प्रकार W उपसमुच्चय है $\mathbb{R}$ का।



अर्थात् $\mathbb{N} \subseteq W$ और $W \subseteq \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$$

कुछ उपसमुच्चय के बीच संबंध, कुछ इस प्रकार होता है $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq R$, $\mathbb{Q}' \subseteq R$, और $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}'$.



अंग्रेजी के स्वरों का समुच्चय V $= \{a, e, i, o, u\}$ को देखिए उसी प्रकार अंग्रेजी के वर्णमाला का समुच्चय A $= \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ को भी देखिए। हम देखते है कि V का प्रत्येक घटक A में भी उपस्थित हैं लेकिन A के कुछ घटक V में उपस्थित नहीं है। इस स्थिति में V को A का उपसमुच्चय कहा जाता है।

इसे $V \subset A$ के रूप में दर्शा सकते है क्योंकि $a \in V$ हो तो $a \in A$ होने के कारण $V \subseteq A$ प्राप्त होता है।

यह कीजिए

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{\ \}$.

रिक्त स्थानों की पूर्ति $\subset$ या $\not\subset$ चिन्हों से कीजिए :-

(i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A

(iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) ϕ ….. B

2. निम्नलिखित में से कौनसे कथन सत्य है।

(i) $\{\ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{0\}$

प्रयत्न कीजिए

1. A = {चतुर्भुज}, B = {वर्ग, आयत, समलंब चतुर्भुज, समचतुर्भुज} बनाइए कि $A \subset B$ या $B \subset A$ उत्तर की जाँच कीजिए।
2. यदि $A = \{a, b, c, d\}$ समुच्चय A के सभी उपसुच्चयों को लिखिए?
3. P 5 के गुणनखण्डों का समुच्चय है। Q 25 के गुणनखण्डों का समुच्चय है और R 125 के गुणनखण्डों का समुच्चय हो तो बताइए निम्नलिखित में कौनसा कथन असत्य है?

   (A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$
4. A 10 से कम रूढ संख्याओं का समुच्चय है, B 10 से कम विषम संख्याओं का समुच्चय है तथा C 10 से कम सम संख्याओं का समुच्चय हो तो निम्न में से कौनसे कथन सत्य है?

   (i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$

   (iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $\phi \subset A$

अब हम उपसमुच्चय के कुछ गुणों को देखेंगे। मानलो A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4} और C= {1, 2, 3, 4, 5} दिए गए समुच्चय हो तो हम जानते है कि A के सभी घटक B में भी है $\therefore A \subseteq B$.

उसी प्रकार B के सभी घटक C में है। $\therefore B \subseteq C$.

तथा A के सभी घटक C में है। $\therefore A \subseteq C$.

अतः $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

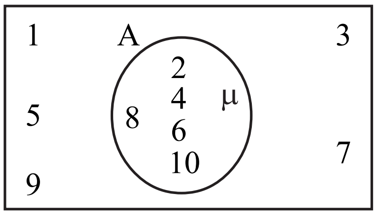
विचार - विमर्श कीजिए

1. क्या रिक्त समुच्चय सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है?
2. क्या कोई समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है?
3. यदि आपको दो समुच्चय इस प्रकार दिए गए हो कि पहला समुच्चय दूसरे का उपसमुच्चय नहीं हैं इसे आप किस प्रकार सिद्ध करोगे?

   आपके उत्तर का औचित्य बताइए।

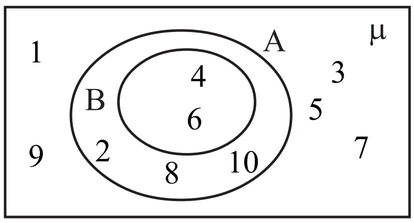
2.6 वेन चित्र (Venn diagrams)

अब तक हमने देखा कि समुच्चयों का निरूपण करने के लिए आकृतियों का प्रयोग किया जाता है। आइए अब हम इसे विस्तार से पढेंगे। वेन-यूलर या वेन चित्र समुच्चयों के बीच संबंध को दर्शाने की एक पद्धति है। इन चित्रों में सामान्यतः आयताकार और संवृत्त (बंद) वृत्ताकार रहते है।

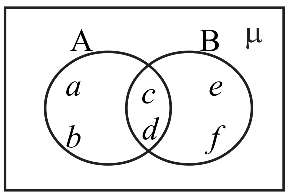


इस अध्याय में पहले उल्लेख किया गया है कि सामान्यतः सार्वभौमिक समुच्चयों को आयत द्वारा दर्शाते है।

(i) माना कि $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ सार्वभौमिक समुच्चय हैं जिसमें $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ उपसमुच्चय हो तो उसे वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाते है।



(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ एक सार्वभौमिक समुच्चय है जिसमें $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6\}$ उसके (μ) उपसमुच्चय है तथा $B \subset A$ हो तो हमें यह चित्र प्राप्त होगा।



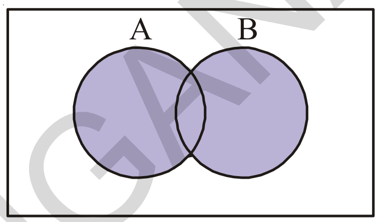
(iii) मान लीजिए $A = \{a, b, c, d\}$ और $B = \{c, d, e, f\}$ हो तो इस समुच्चय को वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाते है।

2.7 समुच्चय की मूल संक्रियाएँ (Basic Operations on Sets)

हम जानते है कि अंकगणित में चार मूलभूत संक्रियाएँ-योग, अंतर गुण और भाग है उसी प्रकार समुच्चय में भी हम समुच्चय के सम्मिलन (union), उभनिष्ठता (intersection) तथा समुच्चयों के अंतर को जानेंगे।

2.7.1 समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets)

मान लीजिए A समुच्चय आपके कक्षा के उन विद्यार्थियों का समूह है जो मंगलवार को अनुपस्थित थे तथा B समुच्चय उन विद्यार्थियों का समूह है जो बुधवार को अनुपस्थित थे तो



A = {रोजा, रामू, रवि} और

B = {रामू, प्रीति, हनीफ}

अब हमें समुच्चय K ज्ञात करना है। K उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जो या तो मंगलवार को अनुपस्थित थे या बुधवार को तब क्या रोजा $\in$ K? रामू $\in$ K? रवि $\in$ K? हनीफ $\in$ K? प्रीति $\in$ K? अखिला $\in$ K?

रोजा, रामू, रवि, हनीफ और प्रीति समुच्चय K के घटक है, लेकिन अखिला नहीं है।

जो हमेशा उपस्थित रहते है।

अतः K = {रोजा, रामू, रवि, हनीफ, प्रीति}

यहाँ समुच्चय K, A और B के घटकों का सम्मिलन है। A तथा B के सम्मिलन में दोनों के घटक उपस्थित रहते हैं सम्मिलन को '$\cup$' चिन्ह द्वारा दर्शाते हैं सांकेतिक रूप से इसे $A \cup B$ के रूप में लिखते है और 'A युनियन B' पढते है।

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

उदाहरण-1. मान लीजिए $A = \{2, 5, 6, 8\}$ और $B = \{5, 7, 9, 1\}$ हो तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त होगा $A \cup B = \{2, 5, 6, 8\} \cup \{5, 7, 9, 1\}$

$= \{2, 5, 6, 8, 5, 7, 9, 1\}$

$= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

सूचना: उभयनिष्ठ घटक 5 को $A \cup B$ में केवल एक ही बार लिखा जाता है।

उदाहरण-2. मान लो $A = \{a, e, i, o, u\}$ और $B = \{a, i, u\}$ तो बताइए $A \cup B = A$ होगा।

हल : $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u, a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u\} = A$.

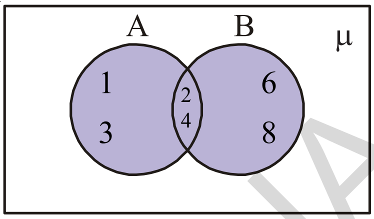
यह उदाहरण सिद्ध करता है कि समुच्चय A तथा उपसमुच्चय B का सम्मिलन A ही होता है।

अर्थात् यदि $B \subset A$ हो तो $A \cup B = A$.

उदाहरण-3. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$ हो तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

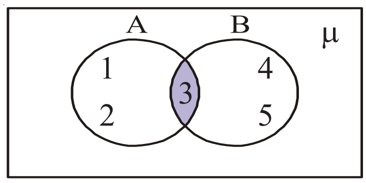
2.7.2 समुच्चयों का उभयनिष्ठ (Intersection of Sets)

मान लीजिए दुबारा फिर से अनुपस्थित विद्यार्थियों के समुच्चय का उदाहरण लेकर समुच्चय L ज्ञात करेंगे उसमें वे विद्यार्थी होंगे जो मंगलवार और बुधवार दोनों दिन अनुपस्थित थे। उसके घटक इस प्रकार होंगे $L = \{\text{रामू}\}$ ।

यहाँ L को A और B का उभयनिष्ट कहते है।

सामान्यतः दो समुच्चय A और B का उभयनिष्ट समुच्चय वह समुच्चय होता है जिसमें A और B दोनों के घटक उपस्थित रहते है। उभयनिष्ट को $A \cap B$ से सूचित करते हैं और इसे “A उभयनिष्ट (intersection) B” पढते हैं। उसे इस प्रकार लिखते हैं।

i.e., $A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$



$A \cap B = \{3\}$

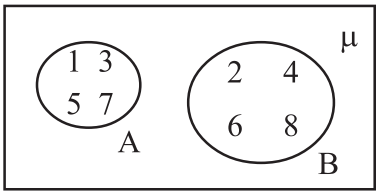
A और B के उभयनिष्ट को वेन चित्र द्वारा रंगीन भाग से उदाहरण 5 में दर्शाया गया है।

उदाहरण-4. यदि $A = \{5, 6, 7, 8\}$ और $B = \{7, 8, 9, 10\}$ हो तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल : A और B के उभयनिष्ठ घटक 7 और 8 है।

$\therefore A \cap B = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$

(उभयनिष्ठ घटक)



$A \cap B = \phi$

उदाहरण-5. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$ हो तो $A \cap B$ के वेन-चित्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : A और B के उभयनिष्ठ को वेन चित्र में इस प्रकार दर्शाया जाता है।

2.8 असंयुक्त समुच्चय (Disjoint Sets)

मान लीजिए $A \{1, 3, 5, 7\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$ यहाँ हम देखते हैं कि A और B में समान या उभयनिष्ठ घटक नहीं है। इस प्रकार के समुच्चयों को असंयुक्त समुच्चय कहते है। असंयुक्त समुच्चय को वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है।

यह कीजिए

1. मानलो $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ और $B=\{3,6,9,12,15\}$ हो तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।
2. यदि $A=\{6, 9, 11\}$ और $B=\{\ \}$ हो तो $A \cup \phi$ ज्ञात कीजिए।
3. यदि $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B=\{2, 3, 5, 7\}$ हो तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए और बताइए कि $A \cap B = B$ होगा।
4. यदि $A=\{4, 5, 6\}$; $B=\{7, 8\}$ हो तो बताइए $A \cup B = B \cup A$ होगा।

प्रयत्न कीजिए

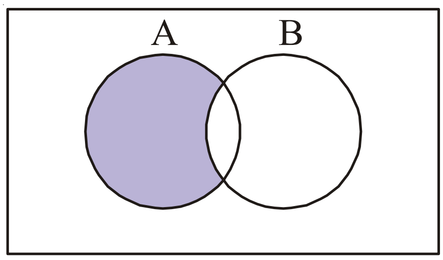
1. A तथा B के कुछ समुच्चय लिखिए कि A और B असंयुक्त समुच्चय हो।
2. यदि $A=\{2, 3, 5\}$ हो तो $A \cup \phi$ और $\phi \cup A$ ज्ञात कीजिए और दोनों की तुलना कीजिए।
3. यदि $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ हो तो $A \cup B$ और $A \cap B$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ A तथा B का उभयनिष्ठ ज्ञात कीजिए।

विचार - विमर्श कीजिए

दो असंयुक्त समुच्चयों का उभयनिष्ट रिक्त समुच्चय होता है। उत्तर के औचित्य को सिद्ध कीजिए।

2.9 समुच्चयों का अंतर (Difference of Sets)

मान लीजिए A 10 से कम विषम संख्याओं का समुच्चय हैं तथा B 10 से कम रुढी संख्याओं का समुच्चय होतो $A=\{1,3,5,...7\}$ और $B=\{2,3,5,7\}$ होगा। यदि हम 10 से कम विषम संख्याओं को लेते है तो ये घटक समुच्चय A के होंगे, लेकीन B के नही। इसे हमे A-B से दर्शाते है और A तथा B का अंतर पढते है।



अब हम A और B के अंतर को परिभाषित करेंगे। A और B का अंतर इस प्रकार होगा। जिसमें A के घटक होंगे लेकिन B के नहीं। इसके अंतर को $A - B$ के रूप में लिखा जाता है। तथा "A घटान (minus) B" पढते है।

$$A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}.$$

उदाहरण-6. मानलो $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $B=\{4, 5, 6, 7\}$ हो तो $A - B$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B = \{4, 5, 6, 7\}$ अब हम ऐसे घटक लेंगे जों A में है लेकिन B में नहीं।

$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$

$\therefore A - B = \{1, 2, 3\}$ अर्थात् 4 और 5 B के घटक होने के कारण उन्हें A में से निकाल दिया गया है।

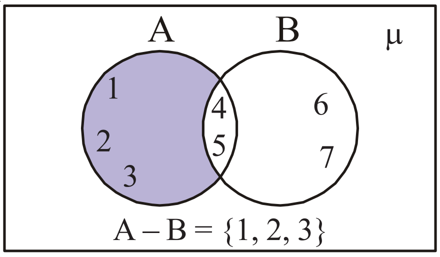
उसी प्रकार $B - A$ के लिए ऐसे घटक लेंगे जो केवल B में हैं।

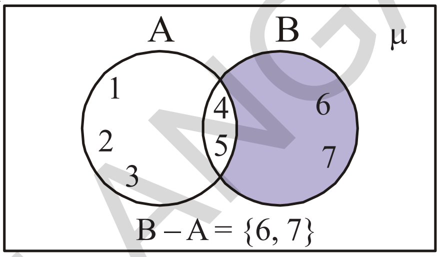
$B - A = \{4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore B - A = \{6, 7\}$ (4 और 5 घटक A में होने के कारण उन्हें B में से निकाल दिया गया है।)

सूचना : $A - B \neq B - A$

$A - B$ और $B - A$ को वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है।





यह कीजिए

1. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $B = \{4, 5, 6, 7\}$ हो तो $A - B$ तथा $B - A$ का मूल्य ज्ञात कीजिए और बताइए कि क्या वे समान होंगे?
2. यदि $V = \{a, e, i, o, u\}$ तथा $B = \{a, i, k, u\}$ हो तो $V - B$ और $B - V$ को ज्ञात कीजिए।

विचार - विमर्श कीजिए

समुच्चय $A - B$, $B - A$ तथा $A \cap B$ तीनों आपस में असंयुक्त समुच्चय होंगे यदि यह सत्य है तो उदाहरण के द्वारा समझाइए।

अभ्यास - 2.2

1. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ हो तो $A \cap B$ और $B \cap A$ को ज्ञात कीजिए क्या वे समान है?
2. यदि $A = \{0, 2, 4\}$ तो $A \cap \phi$ और $A \cap A$ ज्ञात कर उत्तर की चर्चा कीजिए।
3. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ हो तो $A - B$ और $B - A$ ज्ञात कीजिए।
4. यदि A और B दो समुच्चय इस प्रकार है कि $A \subset B$ तो $A \cup B$ क्या होगा?

5. मानलो $A = \{x : x$ एक प्राकृतिक संख्या है।$\}$, $B = \{x : x$ एक सम प्राकृतिक संख्या$\}$
$C = \{x : x$ एक विषम संख्या$\}$ और $D = \{x : x$ एक रूढ संख्या$\}$ हो तो
$A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D$ और $C \cap D$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ और $D = \{5, 10, 15, 20\}$ हो तो
(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$ (v) $C - A$
(vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$ (ix) $C - B$ (x) $D - B$ को ज्ञात करो।

7. निम्न कथन सत्य है या असत्य है बताइए। उत्तर की जाँच कीजिए।
(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ और $\{3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय है।
(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ और $\{a, b, c, d\}$ असंयुक्त समुच्चय है।
(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ और $\{3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय है।
(iv) $\{2, 6, 10\}$ और $\{3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय है।

2.10 समान समुच्चय (Equal Sets)

इन समुच्चयों का अवलोकन कीजिए

A = {सचिन, द्राविड, कोहली}

B = {द्राविड, सचिन, धोनी}

C = {कोहली, द्राविड, सचिन}

ऊपर दिये गये तीन समुच्चय A, B और C में आपने क्या देखा? A में दिए गए सभी खिलाडी C में है लेकिन B में नहीं है। अर्थात् A और C में एक समान घटक है लेकिन A और B के घटक अलग हैं। इसलिए, A और C को समान समुच्चय कहते है लेकिन A और B समान समुच्चय नहीं है।

A और C को समान समुच्चय तभी कह सकते हैं जब A के सभी घटक C में है। (अर्थात् $A \subseteq C$) और C का प्रत्येक घटक A में हो। (अर्थात $C \subseteq A$).

यदि A और C समान समुच्चय हो तो उसे $A = C$ लिखते है। अतएव इसे हम $C \subseteq A$ और $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$ भी दर्शा सकते है। यहाँ $\Leftrightarrow$ का चिन्ह द्वि तत्समक कहलाता है उसे ''केवल यदि केवल'' के रूप में पढते है (उसे संक्षिप्त में "iff" लिखते है।' यदि A और C में समान घटक हो तो उन्हें समान समुच्चय कहते है। अर्थात् $A = C$.

इसका निष्कर्ष यह निकलता है कि ''प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है''।

उदाहरण-7. यदि A = $\{p, q, r\}$ और B = $\{q, p, r\}$ हो तो A=B की जाँच कीजिए।

हल : दिया गया है A = $\{p, q, r\}$ और B = $\{q, p, r\}$.

ऊपर दिये गये समुच्चयों में A का प्रत्येक घटक B में भी हैं। $\therefore A \subseteq B$.

उसी प्रकार B का प्रत्येक घटक A में भी हैं। $\therefore B \subseteq A$.

उपरोक्त दोनों संबंधों में हम A=B कह सकते है।

उदाहरण-8. यदि A = {1, 2, 3, ...} और N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हो तो जाँच कीजिए कि A और N समान समुच्चय है।

हल : $A \subseteq N$ और $N \subseteq A$.

दोनों समुच्चयों में घटक समान है। अर्थात् A और N दोनों प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय है। अर्थात् A और N समान समुच्चय है। अर्थात् A = N.

उदाहरण-9. समुच्चय A = $\{1,2,3\}$ और B = {1, 2, 3, 4} हो तो क्या वे समान समुच्चय है।

A = $\{1,2,3\}$, B = {1, 2, 3, 4}

हल : $A \subseteq B$ लेकीन $B \neq A$ हो तो.

उदाहरण-10. मान लीजिए A 6 से कम रूढ संख्याओं का समुच्चय हैं। और B 30 के रूढी गुणनखण्डों का समुच्चय हो तो दोनों की समानता की जाँच कीजिए।

हल : 6 से कम रूढ संख्याएँ A = { 2,3,5}

30 के रूढी गुणनखण्ड B = { 2,3,5}

अर्थात् A और B के घटक समान है इसलिए A और B समान समुच्चय है।

i.e $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

उदाहरण-11. बताइए कि क्या A और B समान समुच्चय है?

यदि A = $\{x : x$ 'ASSASSINATION' के अक्षर है$\}$

और B = $\{x : x$ STATION के अक्षर है$\}$ तो

हल : दिया गया A = $\{x : x$ 'ASSASSINATION' के अक्षर है$\}$

समुच्चय A को इस प्रकार लिख सकते है A = {A,S,I,N,T,O} इसमें पदों को बिना दोहराए लिखा गया है।

B = $\{x : x$ STATION शब्द के अक्षर है$\}$

समुच्चय 'B' को इस प्रकार लिखा जाता है B = {A,S,I,N,T,O}

अतः A और B के घटक समान हैं और A = B.

i.e. $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

उदाहरण-12. समुच्चय $\phi, A = \{1, 3\}, B = \{1, 5, 9\}$ और $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ का अवलोकन कर रिक्त स्थानों को $\subset$ or $\not\subset$ से भरिए।

(i) ϕ ….. B (ii) A ….. B (iii) A ….. C (iv) B ….. C

हल :

(i) $\phi \subset B$ क्योंकि ϕ सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है।

(ii) $A \not\subset B$, क्योंकि $3 \in A$ लेकिन $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$ क्योंकि $1, 3 \in A$ तथा C.

(iv) $B \subset C$ क्योंकि B के सभी घटक C में भी है।

अभ्यास - 2.3

1. निम्नलिखित में कौनसे समुच्चय समान है?

(i) $A = \{x : x$ शब्द FOLLOW के अक्षर है।$\}$

(ii) $B = \{x : x$ शब्द FLOW के अक्षर है।$\}$

(iii) $C = \{x : x$ शब्द WOLF के अक्षर है।$\}$

2. निम्नलिखित समुच्चयों पर ध्यान दीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति $=$ या $\neq$ का प्रयोग करते हुए इस प्रकार कीजिए कि कथन सत्य हो।

$A = \{1, 2, 3\}$; B = {प्रथम तीन प्राकृतिक संख्याएँ}

$C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{d, c, a, b\}$

$E = \{a, e, i, o, u\}$; F = {अंग्रेजी के स्वर}

(i) A ···· B (ii) A ···· E (iii) C ···· D

(iv) D ···· F (v) F ···· A (vi) D ···· E

(vii) F ···· B

3. नीचे दिये गये समुच्चयों में बताइए कि $A = B$ है या नहीं।

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, a, b\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{x : x, x < 10$ से कम धनात्मक पूर्णांक है$\}$

(iv) $A = \{x : x, 10$ का गुणांक$\}$ $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

4. निम्नलिखित के कारण बताइए :

(i) $\{1, 2, 3, \ldots, 10\} \neq \{x : x \in N$ और $1 < x < 10\}$

(ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1$ और $x \in N\}$

(iii) $\{5, 15, 30, 45\} \neq \{x : x$ 15 के गुणक$\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \neq \{x : x$ रूढी संख्याएँ है$\}$

5. दिए गए समुच्चयों के संभावित उपसमुच्चय लिखिए :-

(i) $B = \{p, q\}$ (ii) $C = \{x, y, z\}$ (iii) $D = \{a, b, c, d\}$

(iv) $E = \{1, 4, 9, 16\}$ (v) $F = \{10, 100, 1000\}$

परिमित और अनंत समुच्चय (Finite & Infinite sets)

निम्नलिखित समुच्चयों का अवलोकन कीजिए

(i) A = {अपनी पाठशाला के विद्यार्थी} (ii) $L = \{p,q,r,s\}$

(iii) $B = \{x : x$ सम संख्याएँ$\}$ (iv) $J = \{x : x$ 7 के गुणक$\}$

क्या आप ऊपर दिये गये समुच्चयों के घटकों की सूचि बना सकते हो? उदाहरण (i) में आपके पाठशाला के सभी विद्यार्थी उसके घटक होंगे। उदाहरण (ii) के समुच्चय L में 4 घटक है। हमने देखा कि समुच्चय A तथा L के घटकों की संख्या को एक पूर्ण संख्या में बता सकते है, ऐसे समुच्चयों को परिमित समुच्चय कहते है।

अब समुच्चय B को देखिए जिसमें सभी सम संख्याएँ हैं क्या हम समुच्चय B के घटकों को गिन सकते है। हम देखते है कि इसमें घटकों की संख्या परिमित नहीं है। समुच्चय B में घटकों की संख्या अनंत है। तथा समुच्चय J में भी घटकों की अनंत ही होगी। ऐसे समुच्चयों को अनंत समुच्चय कहते है।

दिए गए बिन्दु में अनेक सरल रेखाएँ खींच सकते हैं। अर्थात् समुच्चय अनंत है। उसी तरह अंतिम सम या विषम संख्या की प्राप्ति नहीं हो सकती है। अतः हम कह सकते है कि यदि समुच्चय परिमित न हो तो वह अनंत समुच्चय होता है। पुर्णांको का समुह अनंत होता है

कुछ और उदाहरण देखिए :

(i) यदि 'W' सप्ताह के दिनों का समुच्चय हो तो W परिमित समुच्चय होगा।

(ii) यदि 'S' समीकरण $x^2 - 16 = 0$ का हल है तो S परिमित समुच्चय होगा।

(iii) यदि 'G' रेखा पर डाले गए बिन्दुओं का समुच्चय हो तो G एक अनंत समुच्चय है।

उदाहरण-13. निम्नलिखित में अनंत या परिमित समुच्चयों को पहचानिए :-

(i) $\{x : x \in N$ और $(x-1)(x-2)=0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ और $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ और $2x - 2 = 0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ और x रूढ संख्या है$\}$

(v) $\{x : x \in N$ और x विषम संख्या है।$\}$

हल :

(i) x का मूल्य 1 या 2 ले सकते है। $\{1,2\}$ अर्थात् यह परिमित समुच्चय है।

(ii) $x^2 = 4, \in x = +2$ या -2 लेकिन $x \in N$ या x प्राकृतिक संख्या है अर्थात समुच्चय $\{2\}$ यह परिमित समुच्चय है।

(iii) दिये गये समुच्चय में $x = 1$ और $1 \in N$ अर्थात् यह परिमित समुच्चय है।

(iv) दिया गया समुच्चय रूढ़ संख्याओं का समूह है। रूढ़ संख्याएँ अनन्त है। अर्थात् यह अनंत समुच्चय है।

(v) विषम संख्याएँ अनन्त होती है अर्थात् यह अनंत समुच्चय है।

अब इन परिमित समुच्चयों को देखिए।

$A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x$ "INDIA" शब्द के अक्षर$\}$

यहाँ,

समुच्चय A के घटकों की संख्या = 3.

समुच्चय B के घटकों की संख्या = 5.

समुच्चय C में घटकों की संख्या = 4 (I घटक दो बार दोहराया गया) हम जानते हैं कि समुच्चयों के घटक भिन्न होने चाहिए। इसलिए C में घटकों की संख्या 4 है।).

किसी समुच्चय के घटकों की संख्या को उस समुच्चय की कार्डिनल संख्या कहते हैं। समुच्चय A की कार्डिनल संख्या को n(A) = 3 के रूप में दर्शाया जाता है।

उसी प्रकार n(B) = 5 और n(C) = 4.

यदि समुच्चय की कार्डिनल संख्या पूर्ण संख्या हो तो वह परिमित समुच्चय होगा।

सूचना : रिक्त समुच्चय में कोई घटक नहीं रहता हैं इसलिए इसकी कार्डिनल संख्या 0 होती है।

$\therefore n(\phi) = 0$

यह किजिए

1. निम्नलिखित समुच्चयों में कौनसे समुच्चय परिमित है और कौनसे अनन्त है आपके उत्तर के कारण बताइए।

   (i) $A = \{x : x \in N$ और $x < 100\}$ (ii) $B = \{x : x \in N$ और $x \leq 5\}$

   (iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$ (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

   (v) $\{x : x$ सप्ताह के दिन है।$\}$.

2. अनन्त समुच्चयों का चयन कीजिए।

   (A) 10 से कम पूर्ण संख्याओं का समुच्चय (B) 10 से कम रूढ़ संख्याओं का समुच्चय

   (C) 10 से कम पूर्णांकों का समुच्चय (D) 10 के गुणन खण्डों का समुच्चय

विचार - विमर्श कीजिए

एक रिक्त समुच्चय परिमित होता है यह कथन सत्य है या असत्य? क्यों?

अभ्यास - 2.4

1. निम्नलिखित समुच्चय में कौनसे रिक्त समुच्चय है कौनसे नहीं?

   (i) एक बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं का समुच्चय।

   (ii) 2 से विभाजित होने वाली विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।

   (iii) $\{x : x$ एक प्राकृतिक संख्या $x < 5$ और $x > 7\}$

   (iv) $\{x : x$ कोई दो समानान्तर रेखाओं का सामान्य बिन्दु$\}$

   (v) सम रूढ़ संख्याओं का समुच्चय।

2. निम्नलिखित में कौनसे समुच्चय परिमित है या अनन्त है।

   (i) एक वर्ष के महिनों का समुच्चय (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

   (iii) 99 से कम रूढ़ संख्याओं का समुच्चय

   (iv) अंग्रेजी वर्णमाला के शब्द

   (v) X- अक्ष के समानान्तर रेखाओं का समुच्चय

   (vi) 5 से गुणित संख्याओं का समुच्चय

   (viii) मूल बिन्दु (0, 0) से गुजरने वाले वृत्तों का समुच्चय।

विचार - विमर्श कीजिए

1. $n(A), n(B), n(A \cap B)$ तथा $n(A \cup B)$ के बीच क्या संबंध है?

2. यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हों तो आप $n(A \cup B)$ को कैसे ज्ञात करोगे?

प्रस्तावित परियोजना

समुच्चय की अवधारणा, गुणधर्म तथा क्रियायें

- छात्रों की आदतें, खेलों में रूची, विषय सूची, साप्ताहिक मैगजीन्स, टी.वी.चैनल आदि की जानकारी एकत्रित कीजिए। उसका सम्मिलन, उभयनिष्ट और विभिन्न प्रक्रियाओं का वेन चित्र बनाकर, उस पर टिप्पणी लिखिए।

उदाहरण-14. यदि $A = \{1, 2, 3,4,5\}$ और $B = \{2,4,6,8\}$ हो तो $n(A \cup B)$ को ज्ञात कीजिए।

हल : समुच्चय A में 5 घटक है $\therefore n(A) = 5$

और समुच्चय B में 4 घटक है $\therefore n(B) = 4$

लेकिन $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ में 9 घटक नहीं है केवल 7 ही घटक है क्यों?

विस्तार : उपरोक्त सर्वे का हम तीन मनपसंद खेलों / समाचार पत्रों/टी.वी. चानल्स आदि तक विस्तार कर सकते है।

हमने क्या चर्चा किया :-

1. पूर्ण रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह समुच्चय है। या समुच्चय वह है जो पूर्ण रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह है जहाँ अच्छी तरह से परिभाषित है कि

   (i) समुच्चय में सभी वस्तुओं में समान गुण या लक्षण होने चाहिए।

   (ii) यह निश्चित करना संभव है कि कोई दी गई वस्तु समुच्चय का घटक है या नहीं।

2. समुच्चय से संबंधित एक वस्तु समुच्चय का घटक कहलाता है इसे संकेत के रूप में '$\in$' को 'विद्यमान' द्वारा उपयोग में लाते है।

3. समुच्चय को रोस्टर रूप में लिख कर इन्हें अर्धविराम द्वारा अलग करते है और फूल कोष्टक में लिखा जा सकता है।

4. समुच्चय को समुच्चय रचेता के रूप में लिखा जा सकता है।

5. ऐसा समुच्चय जिसमें कोई घटक न हो उसे रिक्त समुच्चय या Null समुच्चय या void समुच्चय कहते है।

6. ऐसे समुच्चय को 'परिमित समुच्चय कहते है जिसमें घटकों की गणना करना संभव हो।

7. हम यह कह सकते है कि कोई समुच्चय परिमित नहीं हो तो वह अनंत समुच्चय होता है।

8. एक समुच्चय में तत्वों की संख्या को निर्धारित प्रमुख संख्या कहा जाता है।

9. सार्वभौमिक समुच्चय को 'μ' से दर्शाया जाता है। सार्वभौमिक समुच्चय को साधारणतः आयत में दर्शाया जाता।

10. A उपसमुच्चय है B का अगर 'a' एक घटक है A का तो 'a' B का भी घटक होगा। इसे $A \subseteq B$ यदि $a \in A \Rightarrow a \in B$, द्वारा लिखा जाता, जहाँ A, B दो समुच्चय है।

11. दो समुच्चय A और B समान होंगे यदि A का प्रत्येक घटक B का भी घटक हो तथा B का प्रत्येक घटक A का भी घटक हो।

12. A सम्मिलन (union) B को $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ के रूप में लिखा जाता है।

13. A उभयनिष्ट (intersection) B को $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$ के रूप में लिखा जाता है।

14. दो समुच्चयों के अंतर A, B को $A - B$ या $B - A$ से सूचित करते है।
$A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\}$

15. दो समुच्चयों के संक्रियाओं को दर्शाने के लिए वेन चित्र सुविधा जनक तरीका है।

अध्याय

3

बहुपदी

(Polynomials)

3.1 प्रस्तावना

बहुपदीयों के बारे में हमने नवी कक्षा में पढा था। अब हम उनके बारे में अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे। हम दो स्थितियों का निरीक्षण करते हैं।

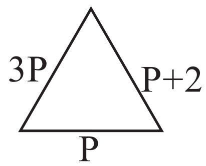
1. एक बगीचे में फूलों की क्यारी त्रिभुज के आकार में है। सबसे बड़ी भुजा, सबसे छोटी भुजा के तीन गुणा है और सबसे छोटी भुजा, तीसरी भुजा से दो इकाई कम है। माना कि सबसे छोटी भुजा की लम्बाई **P** से निरूपित होती है तो **P** के पदों में त्रिभुज का परिमाप क्या होगा?

ऊपर की स्थितियों में, प्रत्येक कथन में कुछ अज्ञात है। प्रथम स्थिति में, मध्य भुजा '**P**' इकाइयाँ दी गई है।

क्योंकि, त्रिभुज का परिमाप = सभी भुजाओं का योग

परिमाप $= P + 3P + P + 2$

$= 5P + 2$



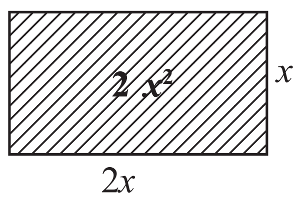
2. एक आयाताकार भोजन कक्ष की लम्बाई, उसकी चौड़ाई का दुगुना है। माना कि कक्ष की चौड़ाई x है। x के पदों में कक्ष के फर्श का क्षेत्रफल क्या होगा? इस स्थिति में लम्बाई उसके चौड़ाई की दुगुनी दी है।

अतः यदि चौड़ाई $= x$ हो तो लम्बाई $= 2x$ होगी

आयत का क्षेत्रफल $= lb$

$= (2x)(x)$

क्षेत्रफल $= 2x^2$



जैसे कि आप जानते हैं, त्रिभुज का परिमाप $5P + 2$ और आयत का क्षेत्रफल $2x^2$ यह भिन्न घातांक के बहुपदी के रूप में है।

3.2 बहुपदी क्या है?

बहुपदी एक बीजगणितीय व्यंजक है जो स्थिरांक और चर राशियों से बनता है। गुणांकों की संक्रिया चारों पर होती है जो अऋणात्मक पूर्णांकों के घातांक के विविध घातांकों में बढ़ा सकते है। उदाहरण के लिए, $2x + 5, 3x^2 + 5x + 6, - 5y, x^3$ ये कुछ बहुपदी हैं।

$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{2x}}, \frac{1}{y-1}, \sqrt{3x^3}$ आदि, ये बहुपदी नहीं हैं।

यह कीजिए।

निम्न में से कौनसी बहुपदी है और कौनसी नहीं है, निश्चित कीजिए। कारणों को बताइए।

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $4z^2+\frac{1}{7}$ (iv) $m^2-\sqrt{2}m+2$ (v) $P^{-2}+1$

3.2.1 बहुपदी का घातांक (Degree of a Polynomial)

स्मरण कीजिए, यदि $p(x)$, x में बहुपदी है, तब x के उच्चतम घातांक को बहुपदी $p(x)$ का घातांक कहते हैं। उदाहरण के लिए, चर x में बहुपदी $3x + 5$ है। इसका घातांक 1 है और इसे रैखिक बहुपदी कहते हैं। $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ आदि, ये कुछ रैखिक बहुपदी द्विघातीय बहुपदी हैं।

घातांक 2 की बहुपदी द्विघातीय बहुपदी कहलाती है। जैसे $x^2 + 5x + 4$ यह चर x में द्विघातीय बहुपदी है। $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}, p^2 - 1, 3 - z - z^2, y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ ये कुछ द्विघातीय बहुपदी के उदाहरण हैं।

व्यंजक $5x^3 - 4x^2 + x - 1$ यह x चर में तृतीय घातांक की बहुपदी है। और इसे घनीय बहुपदी कहते हैं। घनीय बहुपदी के कुछ उदाहरण $2 - x^3, p^3, \ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ हैं।

प्रयत्न कीजिए।

पदों की विभिन्न संख्याओं के साथ 3 द्विघातीय, घनीय और 2 रैखिक बहुपदी लिखिए।

हम किसी भी घातांक की बहुपदी लिख सकते हैं। $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$ यह 6 घातांक की और $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 - 1$ यह 10 घातांक की बहुपदी है।

हम x चर में n घातांक की बहुपदी लिख सकते है जहाँ n एक प्राकृतिक संख्या है।

सामान्यतः, हम कहते हैं

> $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ यह n^{th} घातांक की बहुपदी है जहाँ $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ वास्तविक गुणांक है और $a_0 \neq 0$

उदाहरण के लिए, प्रथम घातांक की एक चर x में बहुपदी का सामान्य रूप $ax+b$ रहता है जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

प्रयत्न कीजिए।

1. सामान्य रूप में x चर में घनीय और द्विघातीय बहुपदी लिखिये।
2. n घातांक की सामान्य बहुपदी $q(z)$ लिखिए जिसके गुणांक $b_0 \ldots b_n$ है। $b_0 \ldots b_n$ पर प्रतिबंध क्या है?

3.2.2 बहुपदी का मान (Value of a Polynomial)

अब मान लीजिये, बहुपदी $p(x) = x^2 - 2x - 3$; किसी भी बिन्दु (point) के लिए उसका मान क्या है? जैसे, $x = 1$ के लिए क्या मान है? बहुपदी में $x = 1$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है, $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. अतः, दिये गये बहुपदी x के स्थान पर 1 रखने पर मान -4 प्राप्त हुआ। यही मान, बहुपदी $x^2 - 2x - 3$ का $x = 1$ के लिए है।

इसी प्रकार $p(0) = 3$ यह $x = 0$ के लिए $p(x)$ का मान है।

तब $p(x)$ में x के स्थान पर k रखने पर प्राप्त हुआ मान, $x = k$ के लिए $p(x)$ का मान रहता है और इसे $p(k)$ द्वारा निर्देशित करते हैं।

यह कीजिए।

(i) यदि $p(x) = x^2 - 5x - 6$, $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ के मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $p(m) = m^2 - 3m + 1$, $p(1)$ और $p(-1)$ के मान ज्ञात कीजिए।

3.2.3 बहुपदी के शून्य (Zeroes of a Polynomial)

$x = 3, -1$ और 2 के लिए $p(x) = x^2 - 2x - 3$ के मान क्या है?

$$p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

$$p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

और $$p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

हम देखते हैं कि $p(3) = 0$ और $p(-1) = 0$. यह बिन्दु $x = 3$ और $x = -1$, यहाँ 3 तथा -1 बहुपदी $p(x) = x^2 - 2x - 3$ के शून्य कहलाते हैं।

$p(x)$ का शून्य, 2 नहीं है । क्योंकि $p(2) \neq 0$

प्रायः, वास्तविक संख्या k, बहुपदी $p(x)$ का शून्य कहलाती है यदि $p(k) = 0$.

यह कीजिए।

(i) माना कि $p(x) = x^2 - 4x + 3$, $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ के मान ज्ञात कीजिए और बहुपदी $p(x)$ के शून्यों को प्राप्त कीजिए।

(ii) बहुपदी $x^2 - 9$ के शून्य -3 और 3 है या नहीं की जाँच कीजिए।

अभ्यास - 3.1

1. यदि $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$, ज्ञात कीजिए

   (i) x^5 का गुणांक (ii) $p(x)$ का घातांक (iii) स्थिर पद

2. निम्न कथनों में से कौनसे सही है और कौनसे गलत है, स्पष्ट कीजिए। आपके चयन के लिए कारण बताइए।

   (i) बहुपदी $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$ का घातांक $\sqrt{2}$ है।

   (ii) बहुपदी $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ में x^2 का गुणांक 2 है।

   (iii) स्थिर पद का घातांक बहुपदी है।

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ द्विघातीय बहुपदी है।

   (v) बहुपदी का घातांक, इसके पदों की संख्या से एक अधिक रहता है।

3. यदि $p(t) = t^3 - 1$, तो $p(1)$, $p(-1)$, $p(0)$, $p(2)$, $p(-2)$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. बहुपदी $x^4 - 16$ के शून्य -2 और 2 है या नहीं की जाँच कीजिए।

5. बहुपदी $p(x)$ के शून्य 3 और -2 है या नहीं की जाँच कीजिए। जब $p(x) = x^2 - x - 6$.

3.3 बहुपदों की उपयोगिता :

रैखिक बहुपदी के शून्य कैसे ज्ञात करते हैं, यह आपने पहले ही पढ़ा है।

जैसे - यदि $p(x) = 2x + 5$ का शून्य k हो तब $p(k) = 0$ अर्थात $2k + 5 = 0$ i.e., $k = \frac{-5}{2}$

सामान्यतः, यदि $p(x) = ax + b, a \neq 0$ का शून्य k है

तब $p(k) = ak + b = 0,$

i.e., $k = \frac{-b}{a}$, अथवा रैखिक बहुपदी $ax + b$ का शून्य $\frac{-b}{a}$ है।

इसतरह, रैखिक बहुपदी के शून्यांकों का संबंध उसके गुणांकों के साथ है जिसमें स्थिर पद सम्मिलित है।

3.4 बहुपदी के शून्यों का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial):

हम जानते है कि वास्तविक संख्या k, बहुपदी $p(x)$ का शून्य रहती है, $p(k) = 0$। अब हम रैखिक और द्विघातीय बहुपदियों का आलेखीय **(graphical)** चित्रण और उनके शून्यों का ज्यामितीय अर्थ देखते है।

3.4.1. रैखिक बहुपदी का आलेखीय चित्रण (Graphical Representation of a Linear Polynomial)

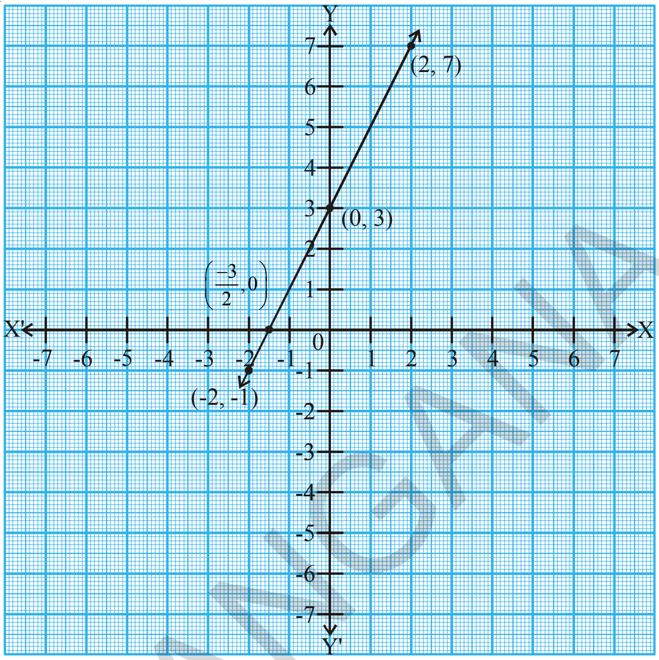
सर्वप्रथम रैखिक बहुपदी $ax + b, a \neq 0$ के बारे में सोचते हैं। आपने नौवीं कक्षा में पढ़ा है कि $y = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा रहती है। जैसे, $y = 2x + 3$ का आलेख एक सरल रेखा रहती है जो Y-अक्ष को $(0, 3)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। यह इन बिंदुओं $(-2, -1)$ और $(2, 7)$ से भी गुजरती हैं।

सारणी 3.1

x	-2	0	2
$y = 2x + 3$	-1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

आलेख में आप देख सकते हैं कि $y = 2x+3$ का आलेख X-अक्ष को $x = -1$ और $x = -2$, के बीच में प्रतिच्छेद करता है, अर्थात बिन्दु $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ पर।

परन्तु $x = \frac{-3}{2}$ यह बहुपदी $2x + 3$. का शून्य भी है । इस तरह, बहुपदी $2x + 3$ का शून्य, उस बिन्दु का x-निर्देशांक रहता है जहाँ $y = 2x + 3$ का आलेख X-अक्ष को काटता है।



यह कीजिए।

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ के आलेख बनाइए और x- अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए। क्या इन बिन्दुओं के x- निर्देशांक, उस बहुपदी के शून्य भी है?

सामान्यतः, रैखिक बहुपदी $ax + b$, $a \neq 0$, के लिए, $y = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा रहता है जो X- अक्ष को केवल एक बिन्दु, $\left(\frac{-b}{a},\right)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

इसलिए रैखिक बहुपदी $ax + b$, $a \neq 0$, को वास्तव में एक शून्य रहता है और वह, उस बिन्दु का x- निर्देशांक रहता है जहाँ $y = ax + b$ का आलेख X-अक्ष को काटता है। यह कटान बिन्दु जो सरल रेखा X - अक्ष का बिन्दु $\frac{-b}{a}$, होगा

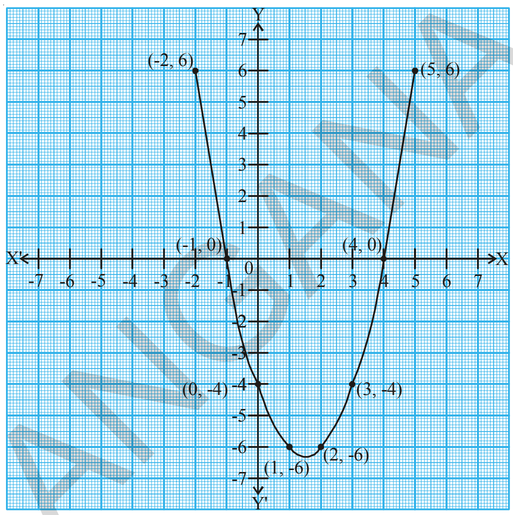
3.4.2. द्विघातीय बहुपदी का आलेखीय चित्रण (Graphical Representation of a Quadratic Polynomial):

अब, हम द्विघातीय बहुपदी के शून्य का ज्यामितीय अर्थ देखते है। माना कि द्विघातीय बहुपदी $x^2 - 3x - 4$ है। अब हम देखते हैं कि $y = x^2 - 3x - 4$ का आलेख कैसा रहता हैं। सारणी 3.2 मे दिये गये, कुछ x के मानों के अनुसार $y = x^2 - 3x - 4$ के लिए कुछ y के मानों की सूची लिखते है।

सारणी 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, -4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$

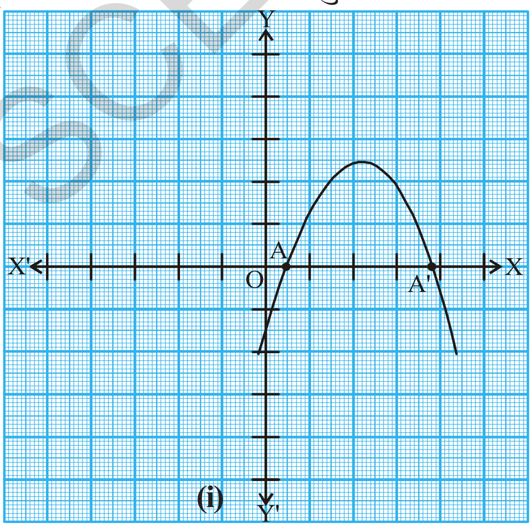
ऊपर की सूची के अनुसार हम आलेख पत्र पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारित करते हैं और आलेख बनाते है । क्या इस द्विघातीय बहुपदी $y = x^2 - 3x - 4$ का आलेख सरल रेखा है? अतः किसी भी द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ का आलेख । यह $\cup$ आकार का वक्र है। यह X- अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है अथवा नीचे की ओर $\cap$ जैसे खुलता है। यह, $a > 0$ अथवा $a < 0$ पर निर्भर रहता है। (ऐसे आकार के वक्रों को परवलय (parabola) कहते हैं।



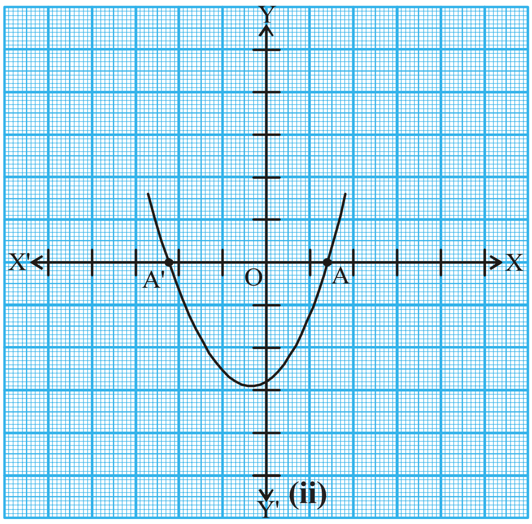
उपरोक्त तालिका से हम यह देखते है कि -1 और 4, द्विघातीय बहुपदी के शून्य है । आलेख से यह सिध्द होता है की, -1 और 4 X- अक्ष के प्रतिच्छेदक बिन्दु परवलय को X- अक्ष पर काटता है। द्विघातीय बहुपदी $x^2 - 3x - 4$ के शून्य, उस बिन्दुओं के x-निर्देशांक रहते है जहाँ $y = x^2 - 3x - 4$ का आलेख X-अक्ष को काटता है। बहुपदी $P(x) = y = 3x^2 - 4$, $P(-1) = 0$ इसका आलेख X-अक्ष को बिन्दु को बिन्दु $(-1, 0)$ पर काटता है चुंकी $P(4) = 0$ वक्र X- अक्ष को बिन्दु $(4, 0)$ पर काटता है। सामान्यत: बहुपदी $P(x)$ यदी $P(a) = 0$ हो तो आलेख X- अक्ष को $(a, 0)$ बिन्दु पर काटता है।

यह किसी भी द्विघातीय बहुपदी के लिए सही है, अर्थात द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ के शून्य, यथार्थ रूप से उन बिन्दुओं के x-निर्देशांक रहते है जहाँ परवलय $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ X-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

स्थिति (i) : यहाँ, वक्र X- अक्ष को दो भिन्न बिंदु A और A′ पर काटता है। इस स्थिति में, A और A′ x-निर्देशांक, द्विघातीय बहुपदी ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ के दो शून्य रहते हैं। परवलय या तो ऊपर की ओर या नीचे की ओर खुलता है।

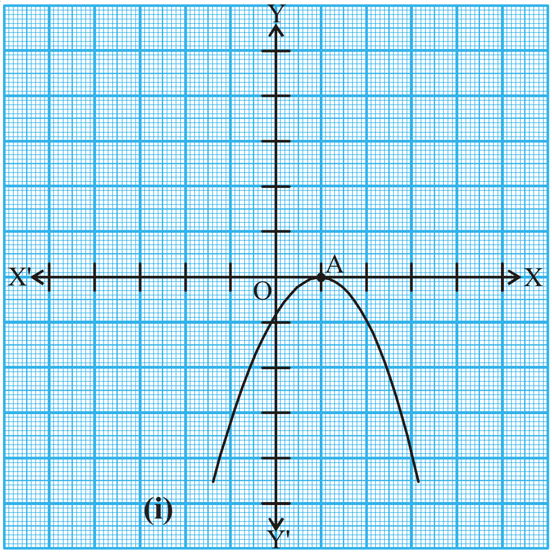


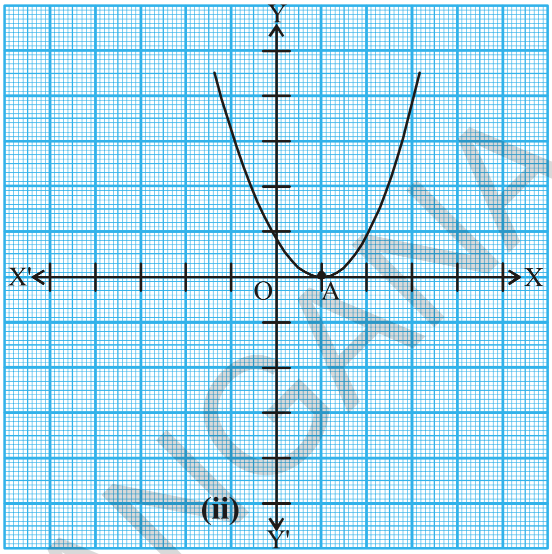
(i)



(ii)

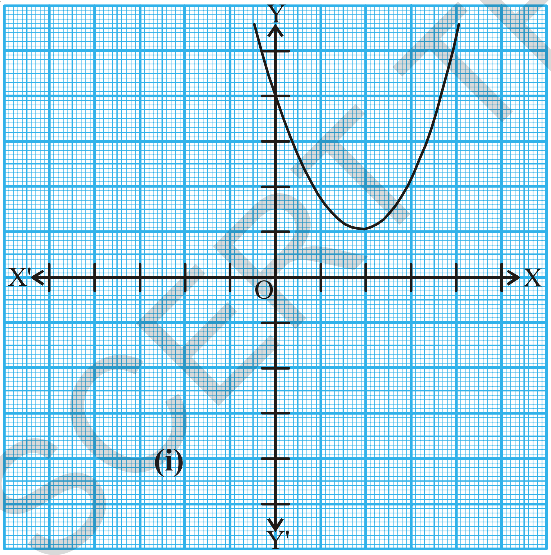
स्थिति (ii) : यहाँ आलेख x- अक्ष को केवल एक बिन्दु पर, अर्थात दो संपाती (coincident) बिंदुओं पर स्पर्श करता है। अतः स्थिति (i) के दो बिंदु A और A' यहाँ एक बिन्दु A होने के लिए संपाती होते है।

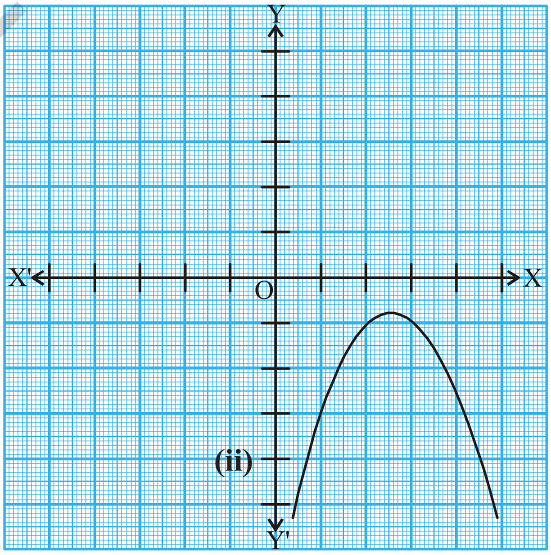




इस स्थिति में द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के लिए A का x - निर्देशांक ही केवल शून्य रहता है।

स्थिति (iii) : यहाँ, आलेख या तो पूर्णतः X- अक्ष से ऊपर रहता है। अथवा पूर्णतः X- अक्ष से नीचे रहता है। X- अक्ष को बिना काटे।





इसलिए, इस स्थिति में द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के शून्य नहीं रहते है।

प्रयत्न कीजिए।

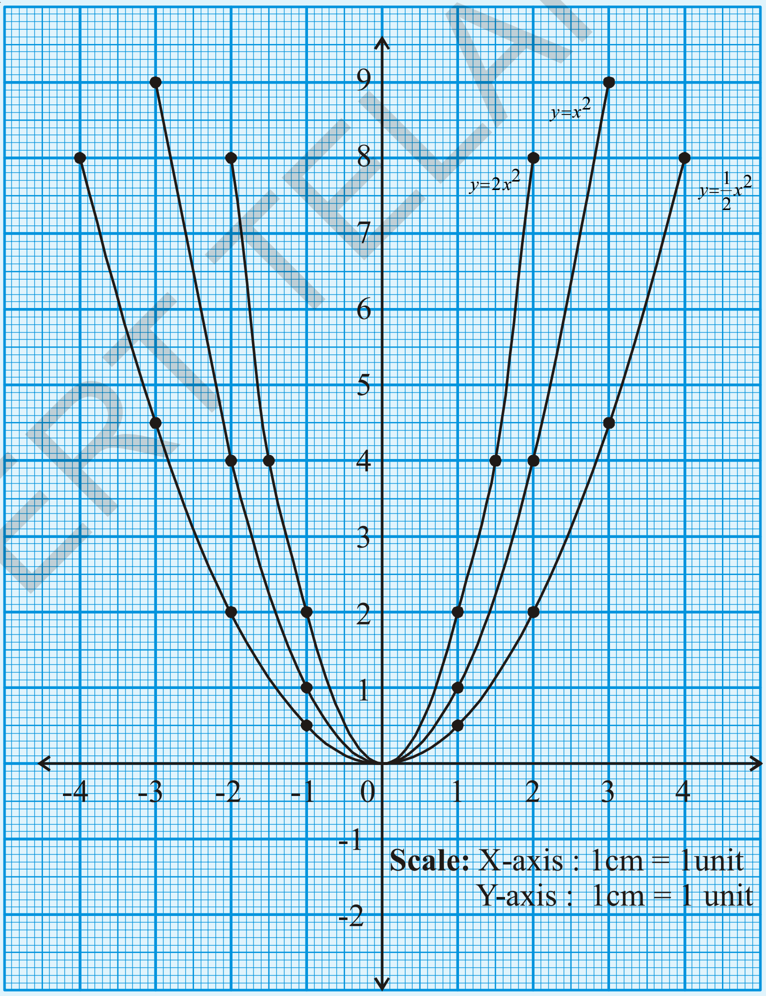
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ के आलेख बनाइए और प्रत्येक स्थिति में शून्यों को ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

प्रयत्न कीजिए।

1. तीन बहुपदी लिखिए जिसमें प्रत्येक के 2 शून्य हो।
2. एक द्विघातीय बहुपदी लिखिए जिसका एक शून्य हो।
3. आप इसकी कैसे जाँच करेंगे यदि किसी द्विघातीय बहुपद में केवल एक शून्य हो।
4. तीन द्विघातीय बहुपदी लिखिए जिसमें x की वास्तविक संख्याओं के लिए शून्य न हो।

विचार - विमर्श किजिए:

m $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$ and $y = 2x^2$. Try to plot some more graphs for $y = x^2+1$, $y = 2x^2+1$. Comment on your observations.



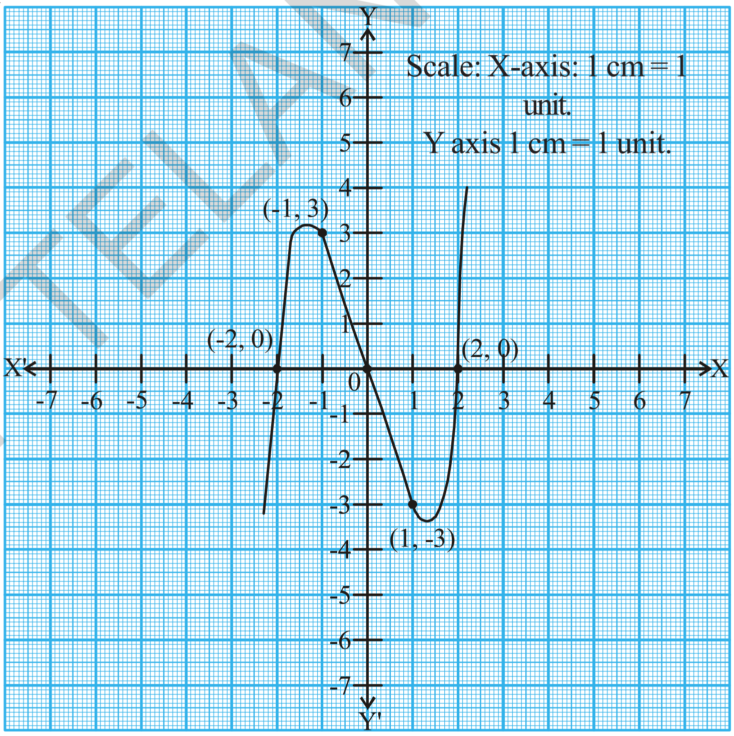
3.4.3 घनीय बहुपदी के शून्यों का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Zeroes of a Cubic Polynomial)

घनीय बहुपदी के शून्यों का ज्यामितीय अर्थ से आप क्या समझते हैं? इसे हम ज्ञात करेंगे। घनीय बहुपदी $x^3 - 4x$ लीजिए। $y = x^3 - 4x$ का आलेख कैसे दिखता है यह जानने के लिए, सारणी 3.3 में x के कुछ मानों के अनुसार y के कुछ मानों की सूची तैयार करते है।

सारणी 3.3

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$

आलेख खींचने पर, हम देखते हैं कि $y = x^3 - 4x$ का आलेख आकृति में दिये जैसा दिखता है।



ऊपर की सारणी द्वारा हम देखते है कि घनीय बहुपदी $x^3 - 4x$ के शून्य -2, 0 और 2 हैं। -2, 0, 2 x - के निर्देशांक हैं जहाँ $y = x^3 - 4x$ का आलेख x-अक्ष को काटता है। अतः इस बहुपदी के तीन शून्य हैं।

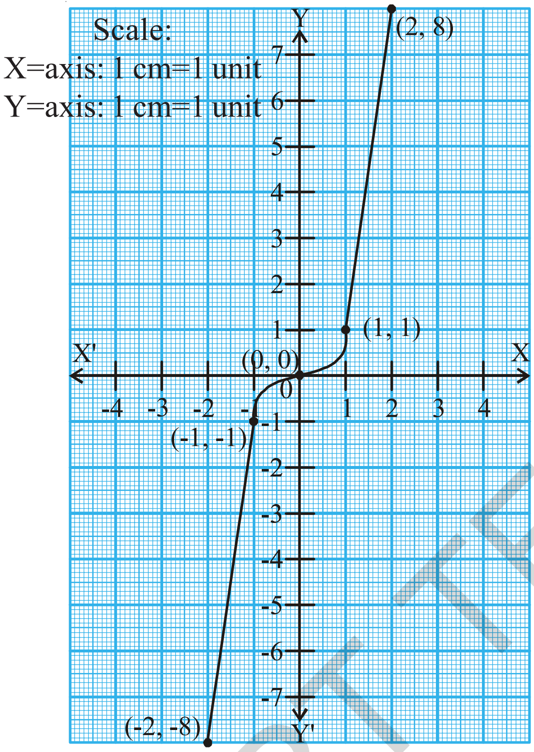
हम और कुछ उदाहरण लेंगे। घनीय बहुपदी x^3 और $x^3 - x^2$ क्रमशः लीजिए। सारणी 3.4 और 3.5 देखिए।

सारणी 3.4

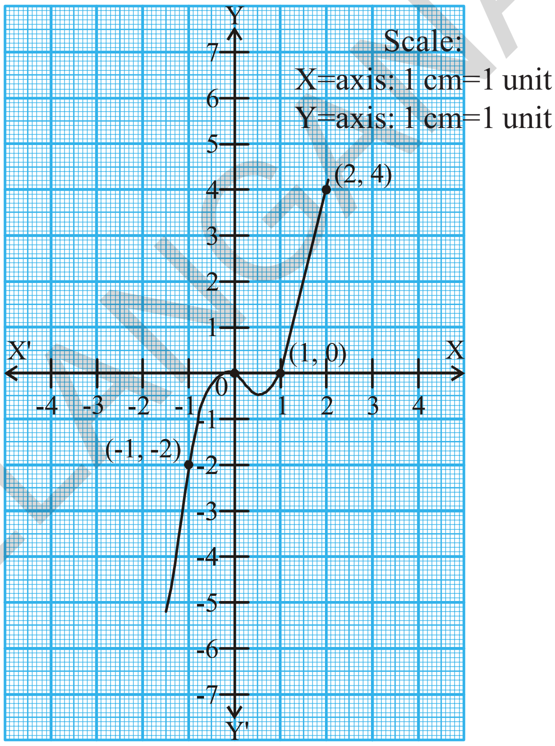
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
(x, y)	$(-2, -8)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 8)$

सारणी 3.5

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$



$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ में, आप देख सकते है कि केवल एक बिन्दु का x-निर्देशांक 0 है जहाँ $y = x^3$ का आलेख X- अक्ष को काटता है। इसलिए बहुपदी केवल एक ही शून्य है। इसी प्रकार, $y = x^3 - x^2$ का आलेख X-अक्ष को काटने वाले बिन्दुओं के x - निर्देशांक केवल 0 और 1 है। इसलिए इस घनीय बहुपदी के दो भिन्न शून्य हैं।

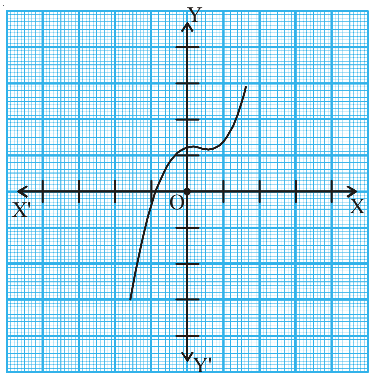
ऊपर दिये गये उदाहरण से हम देखते हैं कि किसी भी घनीय बहुपदी के लिए अधिकतम 3 शून्य रहते हैं। अन्य शब्दों में, 3 घातांकों की किसी भी बहुपदी के अधिकतम 3 शून्य हो सकते है।

प्रयत्न कीजिए।

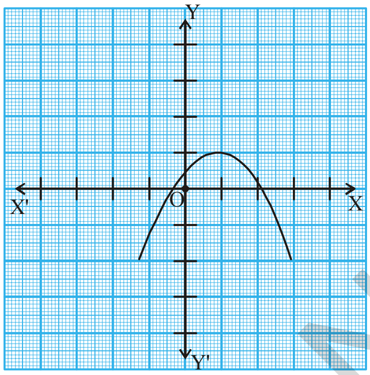
(i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$ घनीय बहुपदियों के, आलेख न खींचते हुए, शून्य ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी : सामान्यतः, दिये गये n घातांक के बहुपदी $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का आलेख x- अक्ष को अधिकतम n बिन्दुओं पर काटता है। इसलिए n घातांक की बहुपदी $p(x)$ के अधिकतम n शून्य रहते हैं।

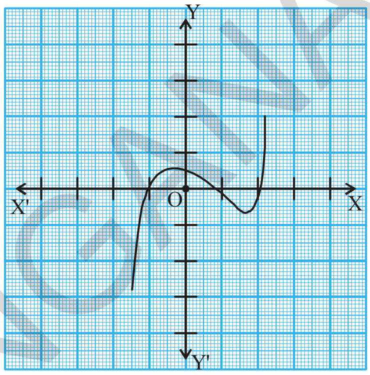
उदाहरण -1. नीचे दिये गये आलेखों को देखिए। हर आकृति $y = p(x)$ का आलेख है, जहाँ $p(x)$ बहुपदी है। प्रत्येक आलेख में x के दिये गये परिसर (range) में $p(x)$ के शून्यों की संख्या बताइए।



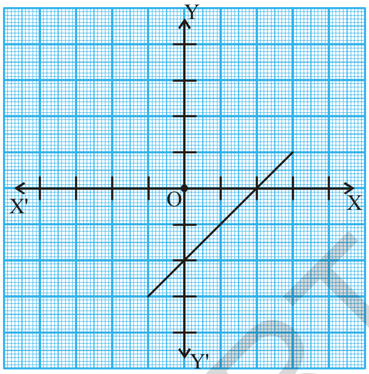
(i)



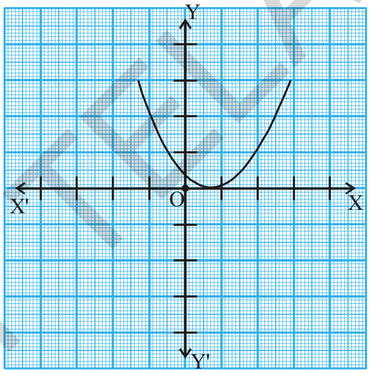
(ii)



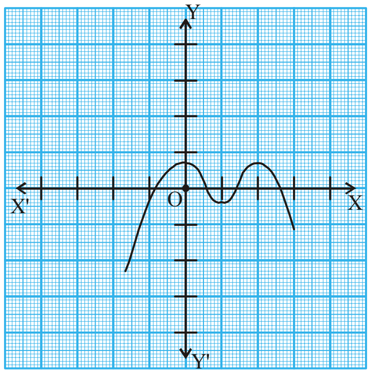
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

हल : दिये गये आलेख में x के परिसर में :

(i) क्योंकि आलेख X- अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटने के कारण शून्यों की संख्या 1 है।

(ii) क्योंकि आलेख X- अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटने के कारण शून्यों की संख्या 2 है।

(iii) शून्यों की संख्या 3 है। (क्यों?)

(iv) शून्यों की संख्या 1 है। (क्यों?)

(v) शून्यों की संख्या 1 है। (क्यों?)

(vi) शून्यों की संख्या 4 है। (क्यों?)

उदाहरण -2. दिये गये बहुपदियों के लिए शून्यों की संख्या बताइए और इनके मान भी बताइए।

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

हल : हम यह आलेख न बताते हुए करेंगे।

(i) $p(x) = 2x + 1$ रैखिक बहुपदी है। इसका केवल एक शून्य रहता है।

शून्य ज्ञात करने के लिए,

माना कि $p(x) = 0$

इसलिए, $2x+1=0$

$\therefore \quad x = \dfrac{-1}{2}$

दिये गए बहुपदी का शून्य $\dfrac{-1}{2}$ है।

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ द्विघातीय बहुपदी है।

इसके अधिकतम दो शून्य रहते हैं।

शून्य ज्ञात करने के लिए, माना कि $q(y) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ अथवा $y = 1$

इसलिए बहुपदी के शून्य -1 और 1 है।

(iii) $r(z) = z^3$ घनीय बहुपदी है। इसके अधिकतम तीन शून्य रहते हैं।

माना कि $r(z) = 0$

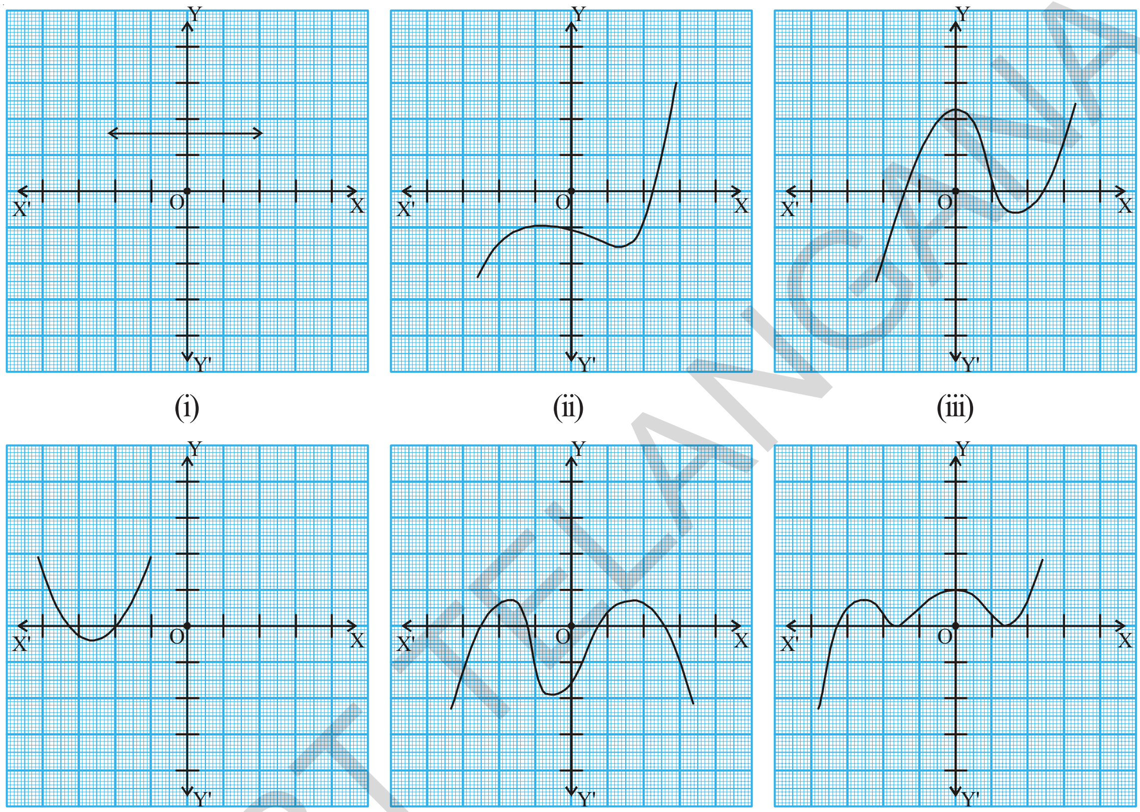
$\Rightarrow z^3 = 0$

$\Rightarrow z = 0$

इसलिए बहुपदी शून्य है।

अभ्यास – 3.2

1. निम्न आकृति में, कोई बहुपदी $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ के आलेख दिए गये है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यों की संख्या बताइए।



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

2. दिए गये बहुपदियों के शून्यों को ज्ञात कीजिए।

   (i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

   (iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. दिये गये बहुपदियों के आलेख बनाइए और शून्यों को ज्ञात कीजिए। उत्तर की जाँच कीजिए।

   (i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

   (iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

   (v) $p(x) = x^2 - 1$

4. बहुपदी $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ के शून्य $\frac{1}{4}$ और -1 क्यों है?

3.5 बहुपदी के गुणांक और शून्यों के बीच संबंध

आपने पहले देखा है कि रैखिक बहुपदी $ax + b$ का शून्य $-\frac{b}{a}$ रहता है। क्या उच्च घातांक वाले बहुपदीयों के शुन्य उनके गुणक से संबंधीत होते है। इसके बारे में विचार कर अपने मित्रों के साथ चर्चा किजिए। अब हम द्विघातीय बहुपदी के गुणांक और शून्यों के बीच के संबंध का अन्वेषण करने का प्रयत्न करेंगे। इसलिए, हम द्विघातीय बहुपदी $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लेते हैं।

नौवीं कक्षा में, हमने द्विघातीय बहुपदी के मध्य-पद को विभाजन द्वारा गुणनखण्ड ज्ञात करना सीखा है। इसलिए, यहाँ हम मध्य पद '$-8x$' को दो पदों के योग के रूप में जिसका गुणनफल $6 \times 2x^2 = 12x^2$, विभाजन करते है। इसलिए, हम लिखते हैं -

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$
$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ शून्य रहता है जब $x - 1 = 0$ अथवा $x - 3 = 0$, अर्थात $x = 1$ अथवा $x = 3$। इसलिए, $2x^2 - 8x + 6$ के शून्य 1 और 3 हैं। अब हम प्रयत्न करते हैं और देखते हैं कि बहुपदी में पदों के गुणांक और शून्यों के बीच क्या संबंध है। x^2 का गुणांक 2 है। x का -8 है और स्थिरांक 6 है जो x^0 का गुणांक है। (अर्थात $6x^0 = 6$)

हम देखते हैं कि शून्यों का योग $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

हम एक अन्य द्विघातीय बहुपदी लेते हैं :

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

मध्य-पद का विभाजन करने पर हम देखते हैं,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$$

$3x^2 + 5x - 2$ का मान शून्य रहता है जब या तो $3x - 1 = 0$ अथवा $x + 2 = 0$

अर्थात, जब $x = \frac{1}{3}$ अथवा $x = -2$.

$3x^2 + 5x - 2$ के शून्य $\frac{1}{3}$ और -2 हैं।

हम देख सकते हैं कि

शून्यों का योग $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

यह कीजिए।

नीचे दी गई द्विघातीय बहुपदियों के शून्यों को ज्ञात कीजिए। शून्यों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए और बहुपदी में पदों के गुणांको के साथ संबंध की जाँच कीजिए।

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

सामान्यतः, यदि द्विघातीय बहुपदी $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ के शून्य α और β हो तो $p(x)$ के गुणनखण्ड $(x - \alpha)$ और $(x - \beta)$ रहते है। इसलिए,

$ax^2 + bx + c = k\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$, जहाँ k स्थिरांक है।

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k\,(\alpha + \beta)\,x + k\alpha\beta$$

दोनों ओर, x^2, x के गुणांक और स्थिरांक की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta) \text{ और } c = k\alpha\beta.$$

इससे प्राप्त होता है, $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

सूचना : ग्रीक अक्षर α, β का उच्चारण क्रमशः 'अल्फा' और 'बीटा' पढते हैं। तत् पश्चात हम अक्षर 'γ', जिसका उच्चारण 'गामा' है, उसका उपयोग करेंगे।

इसलिए, द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के शून्यों का योग $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के शून्यों का गुणनफल $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अब हम कुछ उदाहरणों को देखेंगे।

उदाहरण-3. द्विघातीय बहुपदी $x^2 + 7x + 10$, के शून्यों को ज्ञात कीजिए और गुणांक और शून्यों के बीच संबंध की जाँच कीजिए।

हल : हमें मालूम है,

$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\,(x + 5)$

इस प्रकार, $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य होता है जब $x + 2 = 0$ अथवा $x + 5 = 0$,

अर्थात जब $x = -2$ अथवा $x = -5$.

इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्य -2 और -5 हैं।

अब, शून्यों का योग $= -2 + (-5) = -(7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= -2 \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

उदाहरण-4. बहुपदी $x^2 - 3$ के शून्यों को ज्ञात कीजिए और गुणांक और शून्यों के बीच संबंध की जाँच कीजिए।

हल : स्मरण कीजिए, सर्वसमिका(identity) $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$.

इसका उपयोग करते हुए, हम लिख सकते हैं :

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3}\,)\,(x + \sqrt{3}\,)$$

इस प्रकार, $x^2 - 3$ का मान शून्य होता है जब $x = \sqrt{3}$ अथवा $x = -\sqrt{3}$.

इसलिए, $x^2 - 3$ के शून्य $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं।

शून्यों का योग $= \sqrt{3} + (-\sqrt{3}\,) = 0 = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= (\sqrt{3}\,) \times (-\sqrt{3}\,) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

उदाहरण-5. द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए जिसका योग और गुणा क्रमशः -3 और 2 है।

हल : माना कि द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$, है और इसके शून्य α और β है। हमें पता है,

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

और $\alpha\beta = 2 = \dfrac{c}{a}$.

यदि हम $a = 1$, लेते हैं, तब $b = 3$ और $c = 2$

इस प्रकार, एक द्विघातीय बहुपदी $x^2 + 3x + 2$ है जो दिये हुए प्रतिबंधो के सही है।

इसी प्रकार, हम कोई भी वास्तविक संख्या 'a' के लिए ले सकते हैं। माना कि, यह k है। इससे हमें प्राप्त होता है, $\frac{-b}{k}=-3$ अथवा $b = 3k$ और $\frac{c}{k}=2$ अथवा $c = 2k$। a, b और c, के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त हुई बहुपदी $kx^2 + 3kx + 2k$ है।

उदाहरण-6. द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए और इसके शून्य क्रमशः 2 और $\frac{-1}{3}$ है।

हल : माना कि द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ है और इसके शून्य α और β हैं।

यहाँ $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

शून्यों का योग $= (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

शून्यों का गुणनफल$= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

इसलिए द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c =$

$k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\,\beta]$, जहाँ k स्थिरांक है।

अर्थात् $k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$

हम k के अलग-अलग मान ले सकते हैं।

जब $k = 3$, द्विघातीय बहुपदी $3x^2 - 5x - 2$ होगी।

जब $k = 6$, द्विघातीय बहुपदी $6x^2 - 10x - 4$ होगी।

प्रयत्न कीजिए।

(i) द्विघातीय बहुपदी क्या होगी जिसके शून्यों का योग -2 और $\frac{1}{3}$ है।

(ii) द्विघातीय बहुपदी क्या होगी जिसके शून्यों का योग $\frac{-3}{2}$ और शून्यों का गुणनफल -1 है।

3.6 घनीय बहुपदियाँ (Cubic Polynomials) :

अब हम घनीय बहुपदियों को देखते हैं। क्या आप सोचते हैं कि घनीय बहुपदी के शून्य और इसके गुणांकों के बीच कुछ संबंध होगा?

मान लीजिए $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$.

हम देखते हैं कि $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ के लिए $p(x) = 0$

क्योंकि $p(x)$ के अधिकतम शून्य 3 रहते हैं, $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ के शून्य यही है।

इसके शून्यों का योग $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

इसके शून्यों का गुणा $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{स्थिरांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

तथापि, यहाँ एक अन्य संबंध है। शून्यों के गुणनफल के योग को एक समय में 2 बार लेने पर हमें प्राप्त होता है,

$$= \{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

सामान्यतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि घनीय बहुपदी $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ के शून्य α, β, γ हो तो,

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ बहुपदी α, β, γ शून्यों के साथ है। हम α, β, γ का संबंध a, b, c, d के साथ देखेंगे। क्योंकि α, β, γ शून्य हो, बहुपदी को $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ की तरह लिखा जाता है।

$$= x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$

बहुपदी के साथ तुलना करने के लिये, हम 'a' से गुणा करते हैं और हमें प्राप्त होता है,

$$ax^3 - x^2a(\alpha+\beta+\gamma) + xa(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma.$$

$$\therefore \quad b = -a(\alpha+\beta+\gamma), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

यह कीजिए :

यदि दिये गये घनीय बहुपदी के शून्य α, β, γ हो तो सारणी में दिये गये मान ज्ञात कीजिए।

क्र.स.	घनीय बहुपदी	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

एक उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण-7. जाँच कीजिए कि घनीय बहुपदी के शून्य $3, -1, -\frac{1}{3}$ हैं जहाँ $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$, एक बहुपदी है उसके गुणांक और शून्यों के बीच के संबंध की जाँच कीजिए।

हल: $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ दिया गया बहुपद है।

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

इसलिए, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्य $3, -1, -\frac{1}{3}$ हैं।

अतः, हम $\alpha = 3, \beta = -1$ और $\gamma = -\frac{1}{3}$ लेते हैं।

दी गई बहुपदी की $ax^3 + bx^2 + cx + d$, के साथ तुलना करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$. इससे आगे,

अब, $\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

अभ्यास – 3.3

1. निम्न द्विघातीय बहुपदी के शून्यों को ज्ञात कीजिए और इनके गुणांक और शून्यों के बीच संबंधो की जाँच कीजिए।

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. प्रत्येक स्थिति में द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए, जहाँ उसके शून्यों का योग और गुणनफल क्रमशः संख्याओं में दिया है।

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3. प्रत्येक स्थिति में, α, β शून्यों के लिये द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए।

   (i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. घनीय बहुपदी $x^3 + 3x^2 - x - 3$ के शून्य 1, –1 और –3 रहते है, जाँच कीजिए और इसके गुणांक और शून्यों के बीच के संबंध की जाँच कीजिए।

3.7 बहुपदी के लिए भागकलनविधि (Division Alogorithm)

हम जानते हैं कि घनीय बहुपदी के अधिकतम 3 शून्य रहते हैं। तथापि, यदि आपको केवल एक शून्य दिया जाय तो, क्या आप अन्य दो शून्यों को ज्ञात कर सकते हैं? इसके लिए, घनीय बहुपदी $x^3 + 3x^2 - x - 3$ लेते है। यदि आप इसके शून्यों में से एक शून्य बताते हैं, तब आप जानते होंगे कि यह बहुपदी $x - 1$ से विभाजित है। अतः $x - 1$ से भाग देने पर भागफल $x^2 - 2x - 3$ हमें प्राप्त होता है।

$x^2 - 2x - 3$ के गुणनखण्ड हमें इसके मध्य - पद को विभाजित करने पर प्राप्त होते हैं। इसके गुणनखण्ड $(x + 1)$ और $(x - 3)$ है। इससे हमें पता चलता है,

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

इसलिए, घनीय बहुपदी के तीन शून्य 1, – 1, 3 है।

अब हम एक बहुपदी को दूसरे से भाग देने की विधि को विस्तृत रूप से चर्चा करेंगे। औपचारिक ढंग से कुछ सोपानों को करने से पहले, एक विशेष उदाहरण लेंगे।

उदाहरण-8. $2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

$$
\begin{array}{r}
2x - 1 \\
x+2\,\overline{)\,2x^2 + 3x + 1} \\
2x^2 + 4x \\
- \quad - \\
\hline
-x + 1 \\
-x - 2 \\
+ \quad + \\
\hline
3
\end{array}
$$

हल : ध्यान में रखिए कि जब हम भाग प्रक्रिया को रोकते है तब या तो शेषफल 0 रहता है अथवा इसका घातांक, भाजक के घातांक से कम रहता है। अतः, यहाँ भागफल $2x - 1$ है और शेष 3 है। साथ ही,

$$(2x - 1)\,(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)\,(2x - 1) + 3$$

इसलिए, भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल $+$ शेष

अब हम बहुपदी को द्विघातीय बहुपदी से भाग देने के लिए इसी प्रक्रिया को आगे बढायेंगे।

उदाहरण-9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

$$
\begin{array}{r}
3x - 5 \\
x^2 + 2x + 1\,\overline{)\,3x^3 + x^2 + 2x + 5} \\
3x^3 + 6x^2 + 3x \\
- \qquad - \qquad - \\
\hline
-5x^2 - x + 5 \\
-5x^2 - 10x - 5 \\
+ \qquad + \qquad + \\
\hline
9x + 10
\end{array}
$$

हल: सर्वप्रथम हम भाज्य और भाजक के पदों को उनके घातांकों के अवरोहण क्रम में व्यवस्थित करते हैं। इसी क्रम में पदों को व्यवस्थित करते हैं। (इस क्रम में पदों को व्यवस्थित करने के लिए इसके मानक रूप में बहुपदी को लिखने का ढंग कहते है।) इस उदाहरण में, पहले से ही भाज्य, उसके मानक रूप में हैं, और भाजक भी उसके मानक रूप में है। $x^2 + 2x + 1$.

सोपान 1 : भागफल का प्रथम पद मालूम करने के लिए, भाज्य के उच्चतम घातांक के पद को (i.e., $3x^2$), भाजक के उच्चतम घातांक के पद (x^2) से भाग देते है। यह भाग $3x$ है। तत्पश्चात भाग प्रक्रिया चालू रखते है। शेषफल $5x^2 - x + 5$ आता है।

सोपान 2 : अब भागफल का द्वितीय पद ज्ञात करने के लिए, नये भाज्य का उच्चतम घातांक के पद $(-5x^2)$ को भाजक के उच्चतम घातांक के पद (x^2) से भाग देते है। यह भाग -5 आता है।

सोपान 3 : शेषफल $9x + 10$ रहता है। अब $9x + 10$ का घातांक, भाजक $x^2 + 2x + 1$ के घातांक से कम है। अतः, इससे आगे हम भाग नही कर सकते है। क्यों?

इसलिए, भागफल $3x - 5$ है और शेषफल $9x + 10$ है। इस तरह,

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) &= (3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10) \\
&= 3x^3 + x^2 + 2x + 5
\end{aligned}
$$

यहाँ, हम पुनः देखते है कि भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल $+$ शेषफल

यहाँ प्रयुक्त कलनविधि, 'युक्लिड की भाग कलन विधि' कहलाती है।

यह इस तरह है

यदि $p(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपदी है, $g(x) \neq 0$, तब हम बहुपदियाँ $q(x)$ और $r(x)$ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं कि

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x),$$

जहाँ या तो $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ का घातांक $<$ $g(x)$ का घातांक यदि $r(x) \neq 0$

यह परिणाम, बहुपदियों के लिए 'भाग कलनविधि' नाम से जाना जाता है।

अब, ऊपर की गई चर्चा द्वारा निम्न परिणाम निकलते है।

(i) यदि $q(x)$ रैखिक बहुपदी हो तो $r(x) = r$ स्थिरांक रहता है।

(ii) यदि $q(x) = 1$, का घातांक $= 1$, तब $p(x)$ का घातांक $= 1 + g(x)$ का घातांक

(iii) यदि $p(x)$ बहुपदी $(x - a)$, द्वारा विभाजित है, तब शेषफल $p(a)$ रहता है।

(iv) यदि $r(x) = 0$, हम कहते हैं $p(x)$ को $q(x)$ से नि:शेष भाग किया जाता है। अथवा $p(x)$ का $q(x)$ गुणनखण्ड है।

उदाहरण -10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$, भाग दीजिए और भाग कलनविधि की जाँच कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि दी हुई बहुपदियाँ मानक रूप में नहीं है। भाग पूरा करने के लिए सर्वप्रथम हम भाज्य और भाजक को उनके घातांक के अवरोहण क्रम में विभाजित करते हैं। अवरोही (decreasing) क्रम में लिखते है।

अत:, भाज्य $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ और

भाजक $= -x^2 + x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline -x^2+x-1 & -x^3+3x^2-3x+5 \\ & -x^3+x^2-x \\ & +\quad -\quad + \\ \hline & 2x^2-2x+5 \\ & 2x^2-2x+2 \\ & -\quad +\quad - \\ \hline & 3 \end{array}$$

भाग प्रक्रिया दाहिनी ओर बताई गई है। हम यहाँ कह सकते हैं कि शेषफल का घातांक, भाज्य $(-x^2 + x - 1)$ के घातांक से कम है।

इसलिए, भागफल $= x - 2$, शेषफल $= 3$.

अब, भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल$+$ शेषफल

$$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

इस प्रकार, भागकलन विधि की जाँच की गई।

उदाहरण -11. बहुपदी $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यों को ज्ञात कीजिए, यदि आप जानते है कि इसके शून्यों में से दो शून्य $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं।

हल : क्योंकि इसके दो शून्य $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ है इसलिए हम इसे $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ से भाग दे सकते है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 + 0x - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 \\
 & - \qquad\quad + \\
\hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 + 0x^2 + 6x \\
 & + \qquad\quad - \\
\hline
 & x^2 + 0x - 2 \\
 & x^2 + 0x - 2 \\
 & - \qquad\quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

भागफल का प्रथम पद $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

भागफल का द्विवितीय पद $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

भागफल का तृतीय पद $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

इसलिए, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

अब, मध्यपद $-3x$, के विभाजन द्वारा हम $2x^2 - 3x + 1$ के गुणन खण्ड $(2x - 1)(x - 1)$ प्राप्त कर सकते है। अत:, इसके शून्य $x = \dfrac{1}{2}$ और $x = 1$ है। इसलिए, दिये हुए बहुपदी के शून्य $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 1 और $\dfrac{1}{2}$ हैं।

अभ्यास – 3.4

1. बहुपदी $p(x)$ को बहुपदी $q(x)$ से भाग दीजिए और निम्न में से प्रत्येक के भागफल और शेष ज्ञात कीजिए:

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

2. द्वितीय बहुपदी को प्रथम बहुपदी से भाग देकर जाँच कीजिए कि किस उदाहरण में प्रथम बहुपदी, द्वितीय बहुपदी का गुणनखण्ड है।

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यों को ज्ञात कीजिए। यदि इसके दो शून्य $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को बहुपदी $g(x)$ से भाग देने पर भागफल और शेष क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$, प्राप्त होते हैं। $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

5. बहुपदी $p(x), g(x), q(x)$ और $r(x),$ के उदाहरण दीजिए जो भाग कलनविधि को संतुष्ट करते है और

(i) $p(x)$ का घातांक $=$ $q(x)$ का घातांक (ii) $q(x)$ का घातांक $=$ $r(x)$ का घातांक

(iii) $r(x)$ का घातांक $= 0$

वैकल्पिक अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा में सम्मिलित नहीं है।]

1. जाँच कीजिए कि नीचे दिये हुए घनीय बहुपदी के आगे दी गई संख्याओं के शून्य हैं। प्रत्येक उदाहरण में, उनके गुणांक और शून्यों के बीच संबंध की भी जाँच कीजिए।

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; $(\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $(1, 1, 1)$

2. घनीय बहुपदी ज्ञात कीजिए जिसके शून्यों का योग, दो शून्यों का गुणा एक साथ लेते हुए, इसके गुणनफल का योग, और शून्यों का गुणनफल क्रमशः $2, -7, -14$ है।

3. यदि बहुपदी $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्य $a - b,\ a,\ a + b$ है तो a और b ज्ञात कीजिए।

4. यदि बहुपदी $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्य $2 \pm \sqrt{3}$, हो तो अन्य शून्यों को ज्ञात कीजिए।

5. यदि बहुपदी $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ को दूसरी बहुपदी $x^2 - 2x + k$, से भाग देने पर शेष $x + a$, प्राप्त होता है। k और a ज्ञात कीजिए।

प्रस्तावित परियोजना

दृविघातीय बहुपदी - बहुपदी का शून्य, रेखीय प्रदर्शन

- विभिन्न स्थितियों में बहुपदी $ax^2 + bx + c$ का आरेख खींचना ।

(i) $a > 0$ (ii) $a < 0$ (iii) $a = 0$ (iv) $b > 0$ (v) $b < 0$

(vi) $b = 0$ आरेख पर टिप्पणी लिखिए ।

हमने क्या चर्चा की

इस अध्याय में आपने निम्न बातों को पढा है :

1. घातांक 1, 2 और 3 की बहुपदियाँ क्रमशः रैखिक, दृविघातीय और घनीय बहुपदियाँ कहलाती है।
2. वास्तविक गुणांको के साथ x में एक दृविघातीय बहुपदी का रूप $ax^2 + bx + c$, रहता है जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं।
3. बहुपदी $p(x)$ के शून्य, उन बिन्दुओं के x- निर्देशांक रहते है जो $y = p(x)$ के आलेख में X-अक्ष को प्रतिच्छेद करते हैं।
4. दृविघातीय बहुपदी के अधिकतम शून्य 2 और घनीय बहुपदी के अधिकतम शून्य 3 रह सकते हैं।
5. यदि दृविघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्य α और β हो तो

   $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. यदि घनीय बहुपदी $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ के शून्य α, β, γ हो तो

   $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

   $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

   और $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

7. भागकलन विधि स्पष्ट करती है कि कोई भी दी हुई बहुपदी $p(x)$ और कोई अ-शून्य बहुपदी $g(x)$ के लिए, बहुपदी $q(x)$ और $r(x)$ इस प्रकार रहती है कि

   $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$,

   जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ का घात $<$ $g(x)$ का घात, यदि $r(x) \neq 0$.

अध्याय

4 दो चर राशी के रैखिक समीकरणों का युग्म
(Pair of Linear Equations in Two Variables)

4.1 प्रस्तावना

एक दिन सिरी उसके पिताजी के साथ एक पुस्तक की दूकान पर गई और 3 कापियाँ और 2 पेन खरीदी। इसके लिए उसके पिताजी ने ₹80 दिए। उसकी सहेली लक्ष्मी को कापियाँ और पेन पसंद आए। अतः उसने उसी प्रकार की 4 कापियाँ और 3 पेन ₹110 में खरीदे। पुनः उसकी सहपाठी रुबीना को पेन खरीदना है और जोसेफ को कापियाँ खरीदना है। उन्होंने सिरी को एक पेन का मूल्य और 1 कापी का मूल्य पूछा। परन्तु सिरि को 1 पेन का मूल्य और 1 कापी का मूल्य अलग से ज्ञात नहीं था। इन वस्तुओं का मूल्य वे कैसे ज्ञात कर सकते है?

इस उदाहरण में, 1 कापी और 1 पेन का मूल्य ज्ञात नहीं है। ये अज्ञात परिमाण है। हमारे दैनिक जीवन में ऐसी कई स्थितियाँ आती है।

विचार कीजिए - चर्चा कीजिए।

नीचे दो स्थितियाँ दी हुयी है :

(i) किसी निश्चित दिन पर 1 कि.ग्रा आलू और 2 कि.ग्रा टमाटर का मूल्य ₹30 था। दो दिन पश्चात, 2 कि.ग्रा. आलू और 4 कि.ग्रा. टमाटर का मूल्य ₹66 पाया गया।

(ii) एम. के. नगर विद्यालय के क्रिकेट टीम के शिक्षक ने ₹3900 में 3 बल्ले और 6 गेंद खरीदे। तदन्तर उसने और 1 बल्ला और 2 गेंद ₹1300 में खरीदे।

प्रत्येक स्थिति में अज्ञात राशियाँ पहचानिए। हम देखते है कि प्रत्येक स्थिति में दो अज्ञात राशियाँ हैं।

4.1.1 हम अज्ञात परिमाण कैसे ज्ञात कर सकते है?

प्रस्तावना में, सिरी ने 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी। 1 कापी का मूल्य अथवा 1 पेन का मूल्य हम कैसे ज्ञात कर सकते है?

रुबीना और जोसेफ़ ने अनुमान लगाने का प्रयत्न किया। रुबीना ने कहा कि प्रत्येक कापी की कीमत ₹25 हो सकती है। तब तीन कापियों की कीमत ₹75 होगी और दो पेन का मूल्य ₹5 होगा तथा प्रत्येक पेन ₹2.50 का होगा।

जोसेफ को प्रतीत हुआ कि एक पेन के लिए ₹2.50 बहुत कम थे। यह कम से कम ₹16 की होनी चाहिए। तब प्रत्येक कापी की कीमत भी ₹16 होगी।

हम देख सकते है कि कापी और पेन के एक से अधिक मान संभव है ताकि उनका कुल मूल्य ₹80 होता हो। अतः हम इनका मूल्य कैसे ज्ञात कर सकते है? जिस मूल्य पर सिरी और लक्ष्मी ने उन्हे खरीदा? केवल सिरी की स्थिति का उपयोग करते हुए हम मूल्य ज्ञात नही कर सकते। हमें लक्ष्मी की स्थिति का भी उपयोग करना आवश्यक है।

4.1.2 दोनों समीकरणों को एक साथ उपयोग करना :

लक्ष्मी ने भी उसी प्रकार की कापियाँ और पेन खरीदी जैसे सिरी ने खरीदी। उसने 4 कापियाँ और 3 पेन के लिए ₹110 दिए। अतः हमारे पास दो स्थितियाँ है जो निम्नानुसार निरूपित कर सकते है:

(i) 3 कापियाँ + 2 पेन का मूल्य = ₹80.

(ii) 4 कापियाँ + 3 पेन का मूल्य = ₹110.

1 पेन और 1 कापी का मूल्य ज्ञात करने के लिए क्या इससे हमे सहायता मिलेगी?

रुबीना द्वारा कथित मूल्यों को लीजिए। यदि एक कापी का मूल्य ₹25 और 1 पेन का मूल्य ₹2.50 है तब,

4 कापियों का मूल्य : $4 \times 25 =$ ₹100 होगा।

और 3 पेन का मूल्य : $3 \times 2.50 =$ ₹7.50 होगा।

यदि रुबीना सही है तब लक्ष्मी को ₹100 + ₹7.50 = ₹107.50 देने पडते थे किन्तु उसने ₹110 दिए।

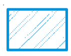
अब, जोसेफ द्वारा कथित मूल्यों को लीजिए। तब, यदि।

कापी का मूल्य ₹16 हो तब 4 कापियों का मूल्य होगा : $4 \times 16 =$ ₹64

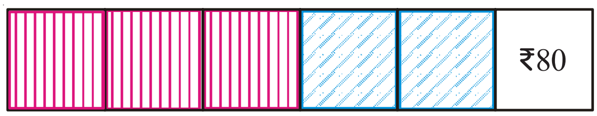
और यदि 1 पेन का मूल्य ₹16 हो तब 3 पेन का मूल्य होगा : $3 \times 16 =$ ₹ 48

यदि जोसेफ सही है तब लक्ष्मी को ₹64 + ₹48 = ₹112 देने पडते थे किन्तु यहाँ उसने जितना मूल्य चुकाया उससे अधिक है। अतः हम क्या करेंगे? कापी और पेन का उचित (exact) मूल्य हम कैसे ज्ञात करते है?

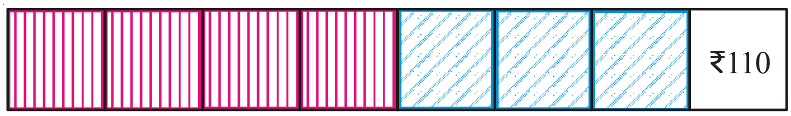
(यदि हमारे पास केवल एक समीकरण है परन्तु दो अज्ञात परिमाण (चर) है, हम बहुत से हल ज्ञात कर सकते है। अतः जब हमारे पास दो चर है, तब हमें इसका अद्‌वितीय (unique) हल प्राप्त करने के लिए कम से कम दो स्वतंत्र समीकरणों की आवश्यकता है। अज्ञात परिमाण ज्ञात करने का एक प्रकार, प्रतिरूप (Model) पद्‌धति का उपयोग है। इस पद्‌धति में, आयत अथवा आयत के भागों को अज्ञात परिमाण को निर्देशित करने के लिए उपयोग में लिए जाते है। प्रतिरूप पद्‌धति का उपयोग करते हुए प्रथम स्थिति का अवलोकन कीजिए।)

सोपान-1 : कापियों को  और पेन को  द्वारा निर्दिष्ट कीजिए।

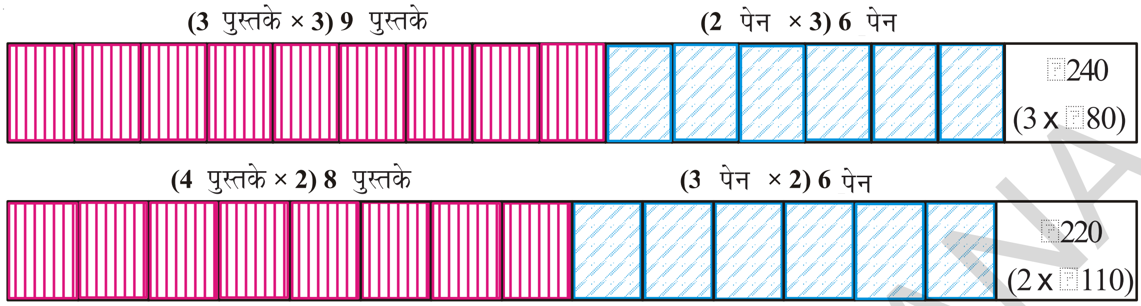
सिरी ने 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी।



लक्ष्मी ने 4 कापियाँ और 3 पेन ₹110 में खरीदी।



सोपान-2 : दोनो स्थितियों में, कोई एक परिमाण (मात्रा) बराबर बनाने के लिए मात्राओं को समानुपात में बढाइए अथवा घटाइए। यहाँ हम पेन की संख्या समान बनाते है।



सोपान 2 में, हम सरल समानुपात का अवलोकन (reasoning) करते है।

क्योंकि सिरी 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी। इसलिए 9 कापियाँ और 6 पेन के लिए:

$3 \times 3 = 9$ कापियाँ और $3 \times 2 = 6$ पेन का मूल्य होगा : $3 \times 80 =$ ₹240 (1)

इसी प्रकार, लक्ष्मी 4 कापियाँ और 3 पेन ₹110, में खरीदी। इसलिए

$2 \times 4 = 8$ कापियाँ और $2 \times 3 = 6$ पेन का मूल्य होगा : $2 \times 110 =$ ₹220 (2)

(1) और (2), तुलना करने पर, हम आसानी से 1 अधिक कापी का मूल्य बता सकते है :

₹ 240 - ₹ 220 = ₹ 20. अतः एक कापी का मूल्य ₹ 20 है।

अतः, एक कापी का मूल्य ₹20 है। सिरी 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी। क्योंकि 1 कापी का मूल्य ₹ 20 होने के कारण, 3 कापियों का मूल्य ₹ 60 होगा। अतः 2 पेन का मूल्य ₹ 80 - ₹60 = ₹20.

इसलिए 1 पेन का मूल्य ₹20 ÷ 2 = ₹10.

इन मूल्यों का उपयोग हम लक्ष्मी की स्थिति में करने का प्रयत्न करते है। 4 कापियों का मूल्य ₹80 और 3 पेन का मूल्य ₹ 30 अर्थात कुल मूल्य ₹110, होता है, जो सत्य है।

ऊपर की गई चर्चा और गणना से यह स्पष्ट है कि यथार्थ एक (अद्‌वितीय या unique) हल प्राप्त करने के लिए हमें कम से कम "दो स्वतंत्र, समान चरों के रैखिक समीकरणों" (two independent linear equations) की आवश्यकता है।

सामान्यतः, $ax + by + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ है और जहाँ a अथवा b में कम से कम एक अशून्य हो, इस रूप का समीकरण x और y में "द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरण" (Linear Equation in two variables) कहलाता है।

प्रयास कीजिए।

निम्न प्रश्नो में सही विकल्प चिन्हित कीजिए।

1. निम्न समीकरणों में कौनसा रैखिक समीकरण नहीं है?

   a) $5 + 4x = y + 3$ b) $x + 2y = y - x$

   c) $3 - x = y^2 + 4$ d) $x + y = 0$

2. निम्न में से कौनसा एक चर में रैखिक समीकरण है?

   a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

   c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. निम्न मे से कौनसी संख्या, समीकरण $2(x + 3) = 18$ के लिए हल है?

   a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4. समीकरण $2x - (4 - x) = 5 - x$ को संतुष्ट करनेवाला x का मान होगा।

   a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5. समीकरण $x - 4y = 5$ को :......... है

   a) हल नही b) अद्‌वितीय हल

   c) दो हल d) अनन्त हल

4.2 दो चर राशि के रैखिक समीकरणों के युग्मों का हल (Solutions of Pairs of Linear Equations in two variables)

कापियों के और पेन के परिचित उदाहरण में, हमारे पास कितने समीकरण थे? हमारे पास दो समीकरण थे अथवा दो चर राशि में रैखिक समीकरणों का युग्म था। रैखिक समीकरणों के युग्म के हल का अर्थ क्या है?

चर x और y के मूल्यों का युग्म जो एक साथ समीकरणों में से प्रत्येक को संतुष्ट करता है, रैखिक समीकरणों के युग्म का हल कहलाता है।

4.2.1 रैखिक समीकरणों के युग्म का हल ज्ञात करने की आलेखीय पद्‌धति (Graphical Method of finding solutions of a pair of Linear Equations):

द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरणों के युग्म के लिए समाधानों की (हल) संख्या क्या होगी? क्या यह अनंत अथवा अद्‌वितीय के नहीं होंगे?

प्रारंभिक विभाग में हमने रैखिक समीकरणों का युग्म हल करने के लिए प्रतिरूप पद्‌धति का उपयोग किया। अब हम समीकरणों को हल करने के लिए आलेख का उपयोग करेंगे।

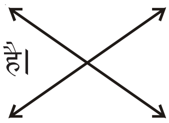
माना कि : $a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0;\ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म बनता है।

द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरण का आलेख, एक सरल रेखा रहती है। रेखा पर स्थित बिन्दु जो वास्तविक संख्याओं (x, y) के क्रमित युग्म से निर्देषांक है, समीकरण के हल रहते है। और वास्तविक संख्या (x, y) के क्रमित युग्म से निर्दिष्ट बिन्दु जो रेखा पर नहीं है, हल नहीं रहते है।

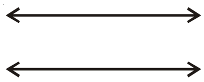
यदि एक ही समतल मे दो रेखाएँ है तो इनमे कौनसा संबंध संभव हो सकता है? इस संबंध का महत्व क्या है?

जब दो रेखाएँ एक ही समतल में खींची गई हों तब निम्न तीन स्थितियों में से केवल कोई एक स्थिति संभव है :

i) दो रेखाएँ, एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करना संभव है।



ii) दो रेखाएँ प्रतिच्छेद नही करेंगी अर्थात, वे समानान्तर है।



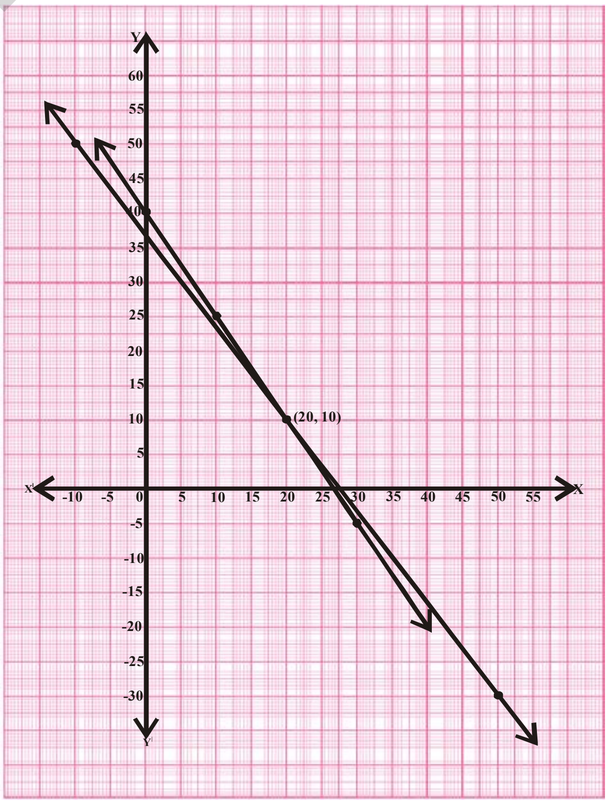
iii) दो रेखाएँ संपाती (coincident) रहना संभव है।

(वस्तुतः दोनों रेखायें समान है।)

अब हम प्रथम उदाहरण के समीकरणों को x और y के पदों में लिखते है जहाँ एक कापी का मूल्य x और एक पेन का मूल्य y है। तब समीकरण होंगे : $3x + 2y = 80$ और $4x + 3y = 110$.

समीकरण $3x + 2y = 80$ के लिए		
x	$y = \frac{80-3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{80-3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \frac{80-3(10)}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \frac{80-3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \frac{80-3(30)}{2} = -5$	(30, -5)

समीकरण $4x + 3y = 110$ के लिए		
x	$y = \frac{110-4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \frac{110-4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \frac{110-4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \frac{110-4(50)}{3} = -30$	(50, -30)



कार्तियन समतल में ऊपर के बिन्दुओं को आलेखित करने के पश्चात, हमे पता चलता है कि दो सरल रेखाएँ बिन्दु (20, 10) पर प्रतिच्छेद करती है।

x और y के मान, समीकरणों में प्रति स्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है: $3(20) + 2(10) = 80$ और $4(20) + 3(10) = 110$. जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है।

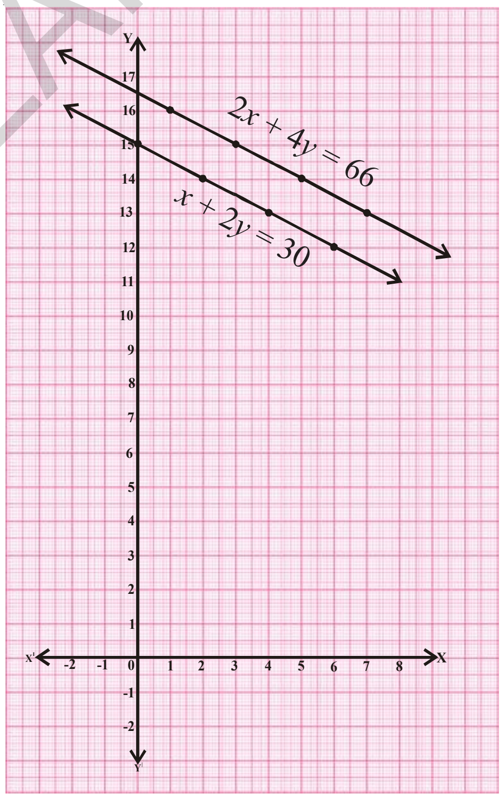
इस तरह, आलेखीय पद्धति द्वारा निर्धारित, प्रत्येक कापी का मूल्य ₹20 और प्रत्येक पेन का मूल्य ₹10 है। याद कीजिए कि प्रतिरूप पद्धति का उपयोग करते हुए हमे यही हल प्राप्त हुआ था।

क्योंकि (20, 10) यह केवल एक सामान्य बिंदु है, इस द्वितीय रैखिक समीकरणों के युग्म का केवल एक हल है। ऐसे समीकरण, रैखिक समीकरणों के सुसंगत (consistent) युग्म कहलाते है। इनका अद्वितीय हल रहता है।

अब, प्रथम उदाहरण देखिए और विचार करते हुए इस विभाग की चर्चा कीजिये। हमें एक किलो ग्राम आलू का मूल्य और एक कि.ग्रा. टमाटर का मूल्य ज्ञात करना है। माना कि 1 कि.ग्रा. आलू का मूल्य ₹x और 1 कि.ग्रा. टमाटर का मूल्य ₹y है। तब समीकरण $1x+2y=30$ और $2x+4y=66$ होंगे।

समीकरण $x + 2y = 30$ के लिए		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

समीकरण $2x + 4y = 66$ के लिए		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$	(7, 13)



यहाँ, हम निरीक्षण करते हैं कि, इस स्थिति का आलेख दो समानान्तर रेखाओं द्वारा निर्देशित किया गया है। क्योंकि रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, समीकरणों का संयुक्त हल नही रहता। इसका अर्थ है कि आलू और टमाटर का मूल्य दोनों में भिन्न रहता है। यह हम वास्तविक जीवन में भी देखते हैं। हम आशा नहीं कर सकते हैं कि प्रत्येक दिन सब्जियों का मूल्य समान रहेगा। यह परिवर्तनशील रहता है। और परिवर्तन भी स्वतंत्र रहता है।

ऐसे रैखिक समीकरणों के युग्म जिनका संयुक्त हल नहीं है, रैखिक समीकरणों के असंगत (in consistent) युग्म कहलाते है।

दूसरे उदाहरण को विचार करते हुए, विभाग की चर्चा करते हैं। माना कि एक बल्ले (bat) का मूल्य ₹x और 1 गेंद मूल्य ₹y है। तब हम समीकरणों को इस प्रकार लिख सकते है: $3x + 6y = 3900$ और $x + 2y = 1300$.

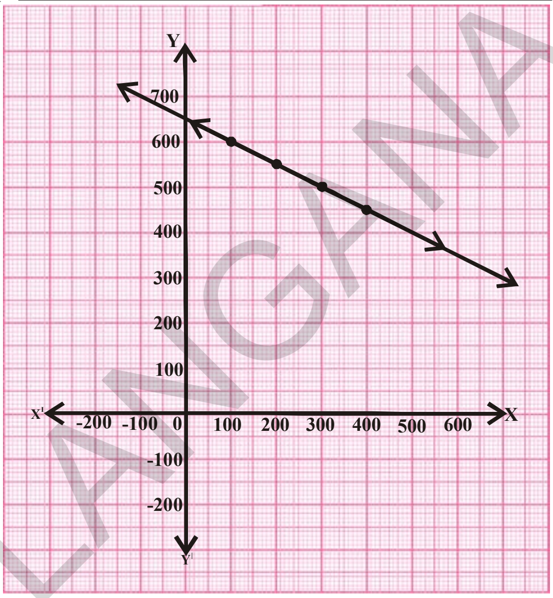
समीकरण $3x + 6y = 3900$ के लिए		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

समीकरण $x + 2y = 1300$ के लिए		
x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)

200	$y = \frac{3900-3(200)}{6} = 550$	(200, 550)
300	$y = \frac{3900-3(300)}{6} = 500$	(300, 500)
400	$y = \frac{3900-3(400)}{6} = 450$	(400, 450)

200	$y = \frac{1300-200}{2} = 550$	(200, 550)
300	$y = \frac{1300-300}{2} = 500$	(300, 500)
400	$y = \frac{1300-400}{2} = 450$	(400, 450)

हम देखते हैं कि समीकरणों को ज्यामितीय रूप से संपाती (coincident) रेखाओं द्वारा दर्शाया है। यदि समीकरणों के हल, उभयनिष्ठ (common) बिन्दुओं द्वारा दिये जाते हैं, तब इस स्थिति में उभयनिष्ट बिन्दु क्या है?



आलेख से हम अवलोकन करते हैं कि रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु, दोनों समीकरणों का उभयनिष्ट हल है। क्योंकि दोनों समीकरण समतुल्य है इसलिए इनके अनंत हल रहते हैं। ऐसे समीकरणों के युग्मों को, दो चरों में रैखिक समीकरणों का निर्भर **(dependent)** युग्म कहते है।

प्रयत्न कीजिए।

ऊपर दिये हुए उदाहरण में, क्या आप प्रत्येक बल्ला और गेंद का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं?

सोचिए - चर्चा कीजिए।

क्या रैखिक समीकरणों का निर्भर युग्म हमेशा सुसंगत (consistent) रहता है? क्यों?

यह कीजिए।

1. निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाकर उनके हल की चर्चा किजिए।

   i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$ ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$ iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाकर उनके हल की चर्चा किजिए।

   $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$. तो इस स्थिति को ज्यामितीय रूप से निरूपित करते है।

4.2.3 समीकरणों के प्रणाली की प्रकृति और गुणांको (Coefficient) के बीच संबंध

माना कि, दो चरों में रैखिक समीकरणों के दिये हुए युग्म के गुणांक a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 है। तब, ऊपर के उदाहरणों में $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ के मान लिखिए और तुलना कीजिए।

रेखाओं का युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	बीजगणितीय विश्लेषण	आलेखिय निर्देशन	हल
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	सुसंगत और निराश्रित	प्रतिच्छेदित	एक हल
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	असंगत	समानान्तर	हल नही
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	सुसंगत और निर्भर (आश्रित)	संपाती	अनंत और अनेक हल

कुछ उदाहरण देखिए :

उदाहरण -1. दिये गये समीकरणों का युग्म प्रतिच्छेदी, समानान्तर या संपाती रेखाओं को निर्देशित करता है, इसकी जाँच कीजिए। यदि समीकरण सुसंगत (consistent) हो तो हल ज्ञात कीजिए।

$2x + y - 5 = 0, \quad 3x - 2y - 4 = 0$

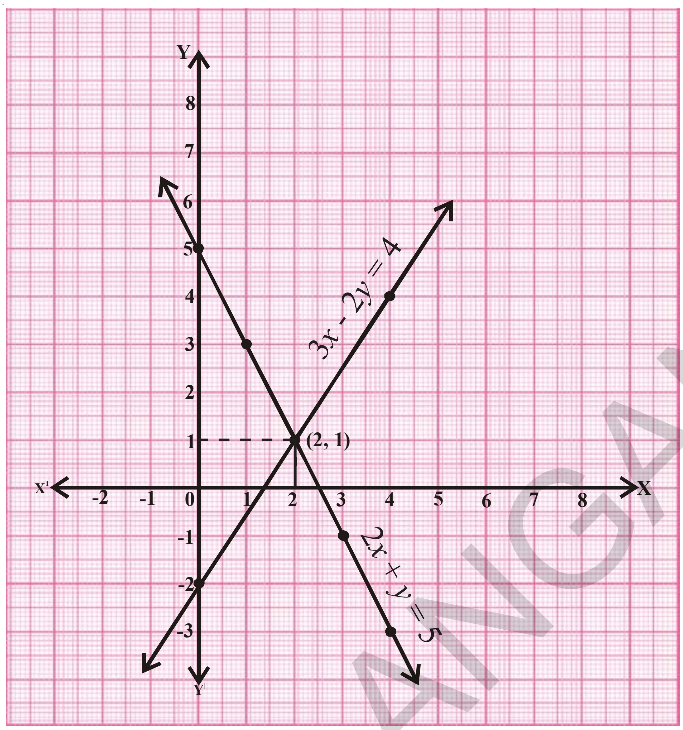
हल : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

क्यूँकि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, इसलिए ये प्रतिच्छेदी रेखाएँ है। अतः यह रैखिक समीकरणों का सुसंगत युग्म है।

समीकरण $2x + y = 5$ के लिए		
x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

समीकरण $3x - 2y = 4$ के लिए		
x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)

यह समीकरणों के युग्म का अद्‌वितीय हल (2,1) है।



उदाहरण -2. निम्न समीकरणों का युग्म सुसंगत है या नहीं, इसकी जाँच कीजिए। $3x + 4y = 2$ और $6x + 8y = 4$. आलेखीय निरूपण द्वारा जाँच कीजिए।

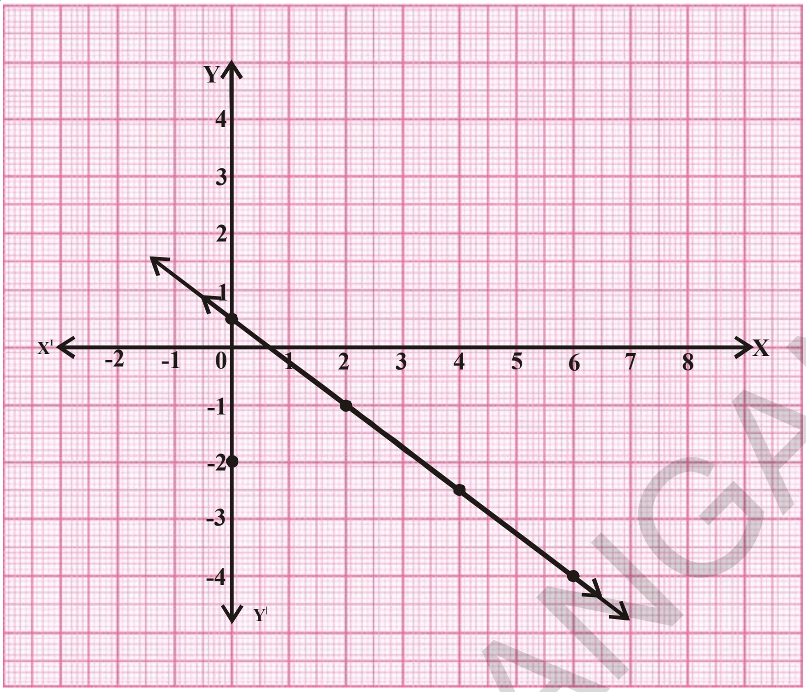
हल : $3x + 4y - 2 = 0,\quad 6x+8y - 4 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

क्योंकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, इसलिये, ये संपाती रेखाएँ हैं। अतः रैखिक समीकरणों का युग्म निर्भर है और इसके अनन्त हल हैं।

समीकरण $3x + 4y = 2$ के लिए		
x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)

समीकरण $6x + 8y = 4$ के लिए		
x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)



उदाहरण -3. समीकरण 2x-3y = 5 और 4x-6y = 15 सुसंगत हैं या नहीं इसकी जाँच कीजिए। आलेखीय निरूपण द्वारा भी जाँच कीजिए।

हल : 4x-6y - 15 = 0 , 2x-3y - 5 = 0

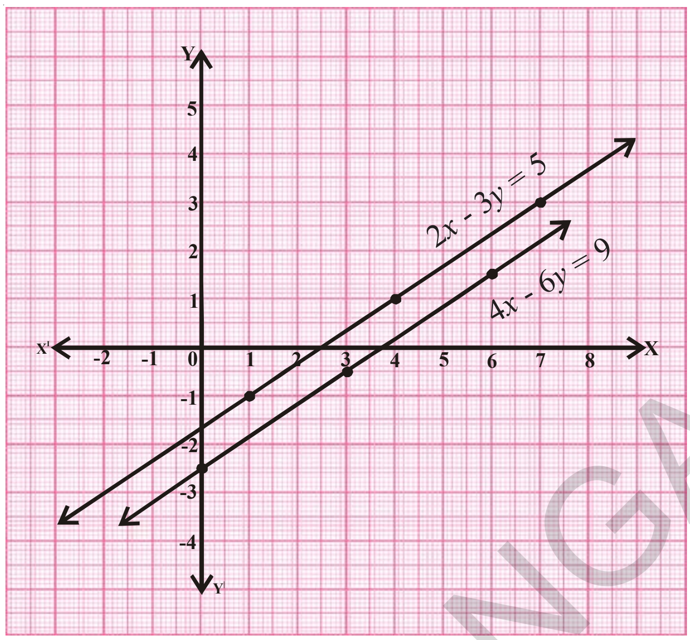
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1}$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः, समीकरण असंगत (in consistent) है और इसका आलेख, समानान्तर रेखाओं का रहता है।

समीकरण **4x - 6y = 15** के लिए		
x	$y = \frac{15-4x}{-6}$	(x, y)
0	$y = \frac{15-0}{-6} = \frac{-5}{2}$	(0, -2.5)
3	$y = \frac{15-4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$	(3, -0.5)
6	$y = \frac{15-4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$	(6, 1.5)

समीकरण **2x - 3y = 5** के लिए		
x	$y = \frac{5-2x}{-3}$	(x, y)
1	$y = \frac{5-2(1)}{-3} = -1$	(1, -1)
4	$y = \frac{5-2(4)}{-3} = 1$	(4, 1)
7	$y = \frac{5-2(7)}{-3} = 3$	(7, 3)



यह कीजिए।

दिये गये समीकरणों की तालिका में प्रत्येक को यह देखने के लिए जाँच कीजिए कि उनके अद्‌वितीय हल, अनन्त हल है अथवा हल नहीं हैं। इन्हें आलेख द्‌वारा हल कीजिए।

(i) $2x+3y=1$	(ii) $x+2y=6$	(iii) $3x+2y=6$
$3x-y=7$	$2x+4y=12$	$6x+4y=18$

प्रयत्न कीजिए।

1. 'p' के किस मान के लिए, निम्न समीकरणों के युग्म का अद्‌वितीय हल रहता है?
   $2x + py = -5$ और $3x + 3y = -6$
2. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरणों का युग्म $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 = 0$ समानान्तर रेखाओं का निरूपण करता है।
3. 'k' के किस मान के लिए, $3x + 4y + 2 = 0$ और $9x + 12y + k = 0$ समीकरणों का युग्म, संपाती रेखाओं का निरूपण करता है?
4. 'p' के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों को युग्म के अनंत हल रहते है?
   $px + 3y - (p - 3) = 0$, $12x + py - p = 0$

और कुछ उदाहरणों को देखिए।

उदाहरण-4. एक बगीचे में कुछ भौंरे और फूल हैं। यदि प्रत्येक फूल पर एक भौंरा बैठा हो तब एक फूल खाली रहता है। भौरों की संख्या और फूलों की संख्या बताइए।

हल : माना कि भौरों की संख्या = x और

फूलों की संख्या = y

यदि एक भौंरा प्रत्येक फूल पर बैठता है तो एक फूल खाली बचता है। अतः, $x = y + 1$

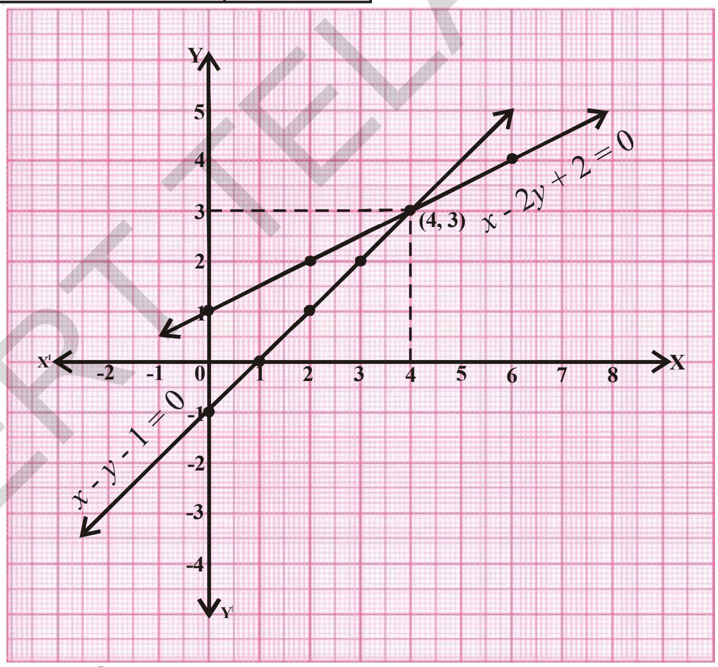
अथवा $x - y - 1 = 0$ ... (1)

यदि दो भौंरे प्रत्येक फूल पर बैठे तो 1 फूल खाली रहता है। अतः, $x = 2(y - 1)$

अथवा $x - 2y + 2 = 0$ ... (2)

समीकरण $x - y - 1 = 0$ के लिए		
x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

समीकरण $x - 2y + 2 = 0$ के लिए		
x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)



इसलिए, 4 भौंरे और 3 फूल है।

उदाहरण-5. एक आयताकार भूखण्ड का परिमाप 32 मी. है। यदि इसकी लम्बाई 2 मी. से बढाई जाये और चौडाई 1 मी. कम कर दी जाये, तब भूखण्ड का क्षेत्रफल समान रहता है। भूखण्ड की लम्बाई और चौडाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि आयताकार भूखण्ड की लम्बाई और चौडाई क्रमशः l और b है।

क्षेत्रफल $= lb$ और परिमाप $= 2(l + b) = 32$ मी.

$l + b = 16$ अथवा $l + b - 16 = 0$ ... (1)

जब लम्बाई 2 मी. से बढाई जाए तो नई लम्बाई $(l+2)$ होगी। और चौडाई 1 मी. से कम कर दी जाये तो चौडाई $(b - 1)$

तब, क्षेत्रफल $= (l+2)(b-1)$

क्योंकि क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

$(l+2)(b-1) = lb$

$lb - l + 2b - 2 = lb$ अथवा $lb - lb = l - 2b + 2$

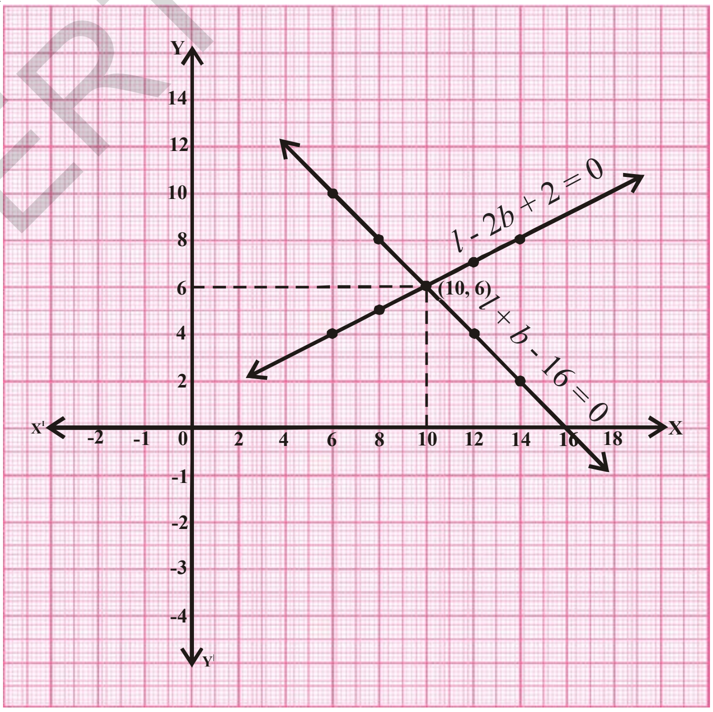
$l - 2b + 2 = 0$ ... (2)

समीकरण $l + b - 16 = 0$ के लिए		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

समीकरण $l - 2b + 2 = 0$ के लिए		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

अतः, भूखण्ड की मूल लम्बाई 10 मी. है और इसकी चौडाई 6 मी. है।

X-अक्ष पर लम्बाई के माप और Y- अक्ष पर चौडाई के माप लेकर, हमें निम्न आलेख प्राप्त होता है।



अभ्यास - 4.1

1. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$, अनुपातों की तुलना करते हुए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों द्वारा निरूपित रेखाएँ, किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं या समानान्तर हैं अथवा संपाती हैं, यह ज्ञात कीजिए।

   a) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$
   b) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$
   c) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

2. निम्न समीकरण सुसंगत और निर्भर सुसंगत और निर्भर नही रहने वाले और असंगत है इसकी जाँच किजिए और आलेख द्वारा हल किजिए।

   a) $3x + 2y = 5$, $2x - 3y = 7$
   b) $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 9$
   c) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$, $9x - 10y = 12$
   d) $5x - 3y = 11$, $-10x + 6y = -22$
   e) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$, $2x + 3y = 12$
   f) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
   g) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
   h) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
   i) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

3. नेहा कुछ पैंट और स्कर्ट खरीदने के लिए एक 'दुकान' में गई। जब उसके दोस्त ने उसे पूछा कि उसने प्रत्येक कितने खरीदे तब उसने उत्तर दिया, "स्कर्ट्स की संख्या, खरीदे हुए पैंट की संख्या की दुगुने से दो कम हैं। तथा स्कर्ट्स की संख्या, खरीदे हुए पैंट की संख्या के चार गुणा से चार कम हैं।" नेहा ने कितने पैंट और स्कर्ट खरीदे यह जानने के लिए उसके दोस्त की सहायता कीजिए।

4. 10 वीं कक्षा के 10 छात्रों ने गणित की कूट प्रश्नावली (quiz) में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लडकों की संख्या से 4 अधिक है तो कूट प्रश्नावली में भाग लिए हुए लडकों की संख्या और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. 5 पेन्सिल और 7 पेन का कुल मूल्य ₹50 है जबकि 7 पेन्सिल और 5 पेन का कुल मूल्य ₹46 है। एक पेन का मूल्य और 1 पेन्सिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार बगीचे की लम्बाई, उसकी चौडाई से 4 मी. अधिक है। और परिमाप का आधा भाग 36 मी. है। बगीचे का माप (dimensions) ज्ञात कीजिए।

7. हमारे पास रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ है। एक दूसरा द्वि-चरीय रैखिक समीकरण इस प्रकार लिखिए कि बने हुए युग्म का आलेखीय निरूपण, प्रतिच्छेदी रेखाएँ हो।

   अब, और दो रैखिक समीकरण इस प्रकार के लिखिए कि दिए हुए समीकरण के साथ एक से "समानान्तर रेखाओं" का युग्म बने और दूसरे के साथ "संपाती रेखाएँ" बन जाए।

8. यदि एक आयत की लम्बाई 5 इकाई से कम की जाये और चौडाई 2 इकाइयों से बढाई जाए तो इसको क्षेत्रफल में 80 वर्ग इकाई की कमी होती है। यदि हम इसकी लम्बाई में 10 इकाई से बढोतरी की और चौडाई को 5 इकाई से कम कर दी तो क्षेत्रफल में 50 वर्ग इकाई की बढोतरी होगी। आयत की लम्बाई और चौडाई ज्ञात कीजिए।
9. 10 वीं कक्षा में, यदि प्रत्येक बेंच (bench) पर 3 छात्र बैठते हैं, तो एक छात्र के लिए स्थान उपलब्ध नहीं रहता है। यदि एक बेंच पर 4 छात्र बैठते हैं तो एक तख्त खाली रहता है। उस कक्षा में छात्रों की संख्या और तख्तों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4.3 रैखिक समीकरणों के युग्म के लिए हल ज्ञात करने की बीजगणितीय पद्धतियाँ

(Algebraic Methods of Finding the solutions for a pair of Linear Equations) :

हमने रैखिक समीकरणों का युग्म आलेख द्वारा कैसे हल करते हैं, सीखा है। परन्तु, आलेख पद्धति ऐसी स्थितियों में सुविधाजनक नहीं रहती जहाँ हल को निरूपित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक पूर्णांक नहीं होते। उदाहरण के लिए, जब हल $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ आदि के रूप में होता है। ऐसे निर्देशांक पढते समय, गलतियाँ होने की संभावना अधिक रहती है। क्या कोई वैकल्पिक पद्धति, हल ज्ञात करने के लिए है? ऐसी विविध बीजगणितीय पद्धतियाँ है, जिसकी अब हम चर्चा करेंगे।

4.3.1 प्रतिस्थापना (Substitution) पद्धति

यह पद्धति द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म हल करने के लिए उपयुक्त है जहाँ एक चर, दूसरे चर के पदों में सरलता पूर्वक लिख सकते है। इस पद्धति को समझने के लिए इसे क्रम से देखेंगे।

सोपान-1 : किसी एक समीकरण में, एक चर को, दूसरे चर के पदों में व्यक्त कीजिए। जैसे y को x के पदों में,

सोपान-2 : सोपान - 1 में y का प्राप्त मान, दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए।

सोपान-3 : सोपान - 2 में प्राप्त समीकरण का सरलीकरन कीजिए और x का मान ज्ञात कीजिए।

सोपान-4 : सोपान - 3 में प्राप्त x का मान, किसी भी समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए और इसे y के लिए हल कीजिए।

सोपान-5 : प्राप्त हल, दोनों मूल समीकरणों में x और y के मान प्रतिस्थापित करते हुए जाँच कीजिए।

उदाहरण-6. प्रतिस्थापन पद्धति द्वारा दिए हुए समीकरणों का युग्म हल कीजिए।

$2x - y = 5, \quad 3x + 2y = 11$

हल : $2x - y = 5 \qquad (1)$

$3x + 2y = 11 \qquad (2)$

समीकरण (1) इस प्रकार लिख सकते है।

$y = 2x - 5$

समीकरण (2) में प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$3x + 2(2x - 5) = 11$

$3x + 4x - 10 = 11$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$

समीकरण 1 में $x = 3$ रखने पर

$2(3) - y = 5$

$y = 6 - 5 = 1$

समीकरण (2) में x और y के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है $3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$ यह मान समीकरण (2) को संतुष्ट करता है। $x = 3$ और $y = 1$ द्वारा संतुष्ट होते हैं।
इसलिए, अपेक्षित हल $x = 3$ और $y = 1$ है।

यह कीजिए।

प्रतिस्थापन पद्धति द्वारा समीकरणों का प्रत्येक युग्म हल कीजिए।

1) $3x - 5y = -1$, $x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$, $2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$, $3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$, $3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 विलोपन (Elimination) पद्धति

इस पद्धति में, सर्वप्रथम हम किसी एक चर के गुणांकों को समान करते हुए, उसका लोप करते है. इससे हमें एक समीकरण प्राप्त होता है जो दूसरे का मान ज्ञात करने के लिए हल किया जा सकता है। इस पद्धति को समझने के लिए इसे क्रम से देखिए।

सोपान -1 : दोनों समीकरणों को $ax + by = c$ के रूप में लिखिए।

सोपान -2 : किसी एक चर 'x' के गुणांक, प्रत्येक समीकरण को किसी उचित वास्तविक संख्या से गुणा करके, संख्या में बराबर बनाइए।

सोपान-3 : यदि दोनों समीकरणों में चर, जिसे लुप्त करना है, समान चिन्हों वाले हो तब दोनो समीकरणों को घटाइए जिससे एक चर का समीकरण प्राप्त होता है। यदि उनके चिन्ह विपरीत हो तब उनका योग कीजिए।

सोपान -4 : शेष चर के लिए समीकरण हल कीजिए।

सोपान -5 : इस चर का मान किसी भी मूल समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए और लुप्त हुए चर का मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण-7 विलोपन पद्धति द्वारा निम्न रैखिक समीकरणों का युग्म हल कीजिए।

$3x + 2y = 11,$ $\qquad$ $2x + 3y = 4$

हल: $3x + 2y = 11$ (1)

$2x + 3y = 4$ (2)

दिए हुए समीकरणों से अब हम 'y' का लोप करते है।

दिए हुए समीकरणों में 'y' के गुणांक 2 और 3 है। 2 और 3 का ल.स.अ 6 है। अतः, समीकरण (1) को 3 से और समीकरण (2) को 2 से गुणा करते है।

समीकरण (1) × 3 $\quad 9x + \cancel{6y} = 33$

समीकरण (2) × 2 $\quad 4x + \cancel{6y} = 8$

$\underline{(-)\quad(-)\quad(-)}$

$5x = 25$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

समीकरण (1) में $x = 5$, प्रतिस्थापित करने पर, $3(5) + 2y = 11$

$$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$$

इसलिए, अपेक्षित हल $x = 5, y = -2$ है।

यह कीजिए।

प्रतिस्थापन पद्धति द्वारा निम्न समीकरणों के युग्मों में से प्रत्येक को हल कीजिए।

1. $8x + 5y = 9$
   $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$
   $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$
   $5x - 6y = -9$

प्रयत्न कीजिए।

दिए हुए रैखिक समीकरणों के युग्म को हल कीजिए।

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

कुछ और उदाहरण देखते हैं :

उदाहरण-8. रुबीना बैंक में से ₹2000 निकालने के लिए गई। उसने रोकड़िये (cashier) से नकदी रकम केवल ₹50 और ₹100 के नोट देने के लिए कहा। उसे कुल 25 नोट मिले। क्या आप बता सकते हैं कि उसे ₹50 और ₹100 के कितने नोट प्राप्त हुए?

हल : माना कि, ₹50 के नोटों की संख्या x है और

₹100 के नोटों की संख्या y है, तब $x + y = 25$ (1)

और $50x + 100y = 2000$ (2)

कविता ने प्रतिस्थापन पद्धति का उपयोग किया।

समीकरण (1) से, $x = 25 - y$

समीकरण (2) में रखने पर, $50(25 - y) + 100y = 2000$

$1250 - 50y + 100y = 2000$

$50y = 2000 - 1250 = 750$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$x = 25 - 15 = 10$

अतः, रुबीना को ₹50 के 10 नोट और ₹100 के 15 नोट प्राप्त हुए।

श्वेता ने इसका हल ज्ञात करने के लिए विलोपन पद्धति का उपयोग किया।

समीकरणों में,, x के गुणांक क्रमशः 1 और 50 है। अतः

समीकरण (1) × 50 : $50x + 50y = 1250$

समीकरण (2) × 1 : $50x + 100y = 2000$ (समान चिन्ह, इसलिए घटाइए)

$$\begin{array}{rcl} (-) & (-) & (-) \\ \hline & -50y = -750 & \end{array}$$

$$y = \frac{-750}{-50} = 15$$

समीकरण (1) में y का मान रखने पर, $x + 15 = 25$

$x = 25 - 15 = 10$

अतः, रुबीना को ₹50 के 10 नोट और ₹100 के 15 नोट प्राप्त हुए।

उदाहरण-9. एक प्रतियोगिता परीक्षा में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 3 अंक प्रदान करना है और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1 अंक घटाना है। इस परीक्षा में मधु को 40 अंक प्राप्त हुए। यदि प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक प्रदान करते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 2 अंक काटते हैं, तो मधु को 50 अंक प्राप्त होते हैं। परीक्षा में कुल कितने प्रश्न हैं? (मधु ने सभी प्रश्न हल किए।))

हल : माना कि, सही उत्तरों की संख्या x है और गलत उत्तरों की संख्या y है।

जब प्रत्येक सही उत्तर के लिए 3 अंक दिये गये और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1 अंक काटा गया, तब उसे 40 अंक प्राप्त हुए।

अतः $3x - y = 40$ (1)

जब उसके अंक 50 होते हैं तब प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक दिये जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 2 अंक काटे जाते हैं।

इसलिए $4x - 2y = 50$ (2)

प्रतिस्थापना पद्धति :

समीकरण (1) से, $y = 3x - 40$

समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर $4x - 2(3x - 40) = 50$

$4x - 6x + 80 = 50$

$-2x = 50 - 80 = -30$

$x = \frac{-30}{-2} = 15$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$3(15) - y = 40$

$45 - y = 40$

$y = 45 - 40 = 5$

$\therefore$ प्रश्नों की कुल संख्या $= 15 + 5 = 20$

यह कीजिए

ऊपर दिया गया उदाहरण-9 हल करने के लिए विलोपन पद्धति का उपयोग कीजिए।

उदाहरण-10. मेरी ने उसकी बेटी से कहा, "7 वर्ष पूर्व, मेरी आयु, आपकी उस समय की आयु के 7 गुणा थी। और अब से तीन वर्ष पश्चात, मेरी आयु आपकी आयु के तीन गुणा होगी।" मेरी और उसकी बेटी की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि मेरी की वर्तमान आयु x वर्ष है और

उसकी बेटी की वर्तमान आयु $x - 7$ और बेटी की आयु $y - 7$ थी।

$x - 7 = 7(y - 7)$

$x - 7 = 7y - 49$

$x - 7y + 42 = 0$ (1)

तीन वर्ष पश्चात, मेरी की आयु $(x + 3)$ और बेटी की आयु $(y + 3)$ होगी।

$x + 3 = 3(y + 3)$

$x + 3 = 3y + 9$

$x - 3y - 6 = 0$ (2)

विलोपन पद्धति

समीकरण (1) $\cancel{x} - 7y = -42$

समीकरण (2) $\cancel{x} - 3y = 6$

$\underline{(-) \quad (+) \quad (-)}$ x के समान चिन्ह, अतः घटाइए।

$-4y = -48$

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

y का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित कीजिए।

$$x - 3\,(12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

इसलिए, मेरी की वर्तमान आयु 42 वर्ष और उसकी बेटी की आयु 12 वर्ष है।

यह कीजिए।

उदाहरण-10 प्रतिस्थापन पद्धति से हल कीजिए।

उदाहरण-11. एक प्रकाशक, पाठ्य पुस्तक तैयार करने की योजना बना रहा है। स्थायी मूल्य (पुनरावलोकन, संपादन, अक्षर योजना, इत्यादि) ₹3,20,000 है। इसके अतिरिक्त उसने पुस्तक तैयार करने में ₹31.25 प्रति पुस्तक खर्च किये। थोक मूल्य (प्रकाशक द्वारा प्राप्त रकम) (whole sale price) प्रति पुस्तक ₹43.75 बेचना चाहिए जिससे बिना हानि-लाभ के व्यापार हो (to break even) अर्थात उत्पाद मूल्य और आमदनी (revenue) बराबर हो?

> वह बिंदु जो दर्शाता है कि आपको कितनी राशी अर्जित करनी है, जो उत्पादन के समान है, वह लाभ-हानि की आमदनी कहलाती है।

हल : प्रकाशक बिना हानि-लाभ के व्यापार करता है अर्थात लागत और प्राप्त बराबर रहती है। यदि छपी हुई और विक्रय की गई पुस्तकों की संख्या x है और बिना लाभ-हानि की आमदनी (break even point) y है तब प्रकाशक के लिए मूल्य और आमदनी के समीकरण होंगे :

लागत समीकरण दिया जाता है: $\quad y = 320000 + 31.25x \quad$ (1)

प्राप्त समीकरण दिया जाता है: $\quad y = 43.75x \quad$ (2)

प्रथम समीकरण में y के प्रतिस्थापन के लिए समीकरण (2) का उपयोग करते हुए,

$$43.75x = 3{,}20{,}000 + 31.25x$$

$$12.5x = 3{,}20{,}000 \quad = \quad x = \frac{3{,}20{,}000}{12.5} = 25{,}600$$

इस तरह, प्रकाशक का बिना हानि-लाभ का व्यापार होगा जब उसने 25,600 पुस्तकों की छपाई की और उनका विक्रय किया।

अभ्यास - 4.2

निम्न प्रश्नों में प्रत्येक के लिए रैखिक समीकरणों का युग्म बनाइए और इनका हल ज्ञात कीजिए।

1. दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रतिमाह ₹2000 की बचत करता है, तो उनकी प्रतिमाह आय ज्ञात कीजिए।
2. कोई दो अंको की संख्या है। इनके अंकों का स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंको में अन्तर 2 हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी कितनी संख्याएँ है?

3. दो अनुपूरक (Supplementary) कोणों में बडा कोण, छोटे कोण से 18° अधिक है। कोण ज्ञात कीजिए।
4. हैदराबाद में, तय की गई दूरी के लिए किराये (charges) में दो घटक है। निश्चित किराया तथा प्रति किलोमीटर का किराया। कि.मी. दूरी के लिए किराया ₹220 दिया। 15 कि.मी. यात्रा के लिए किराया ₹310 दिया गया है।
   i. निश्चित (fixed) किराया और प्रति कि.मी. किराया क्या है?
   ii. एक व्यक्ति को 25 कि.मी. दूरी तय करने के लिए कितना किराया देना होगा?
5. एक भिन्न के अंश और हर दोनों में यदि 1 मिलाया जाए तो भिन्न $\frac{4}{5}$ बनता है। और यदि अंश और हर दोनों से यदि 5 घटाया गया तो भिन्न $\frac{1}{2}$ बनता है। भिन्न क्या है?
6. राजपथ (highway) पर दो स्थान A और B एक दूसरे से 100 कि.मी. दूरी पर है। एक ही समय पर, असमान वेग से एक कार A से और दूसरी कार B से प्रारंभ होती है। यदि दोनों कार एक ही दिशा में जा रहे हैं तो, वे 5 घण्टे में मिलती है। दोनों कार के वेग बताइए।
7. दो कोण, पूरक (complementary) हैं। बडा कोण, छोटे कोण के माप के दुगने से 3° कम है। प्रत्येक कोण के माप ज्ञात कीजिए।
8. बीजगणित के पाठ्यपुस्तक में कुल 1382 पृष्ठ हैं। यह दो भागों में हो गया। पुस्तक के दूसरे भाग में, प्रथम भाग से 64 पृष्ठ अधिक है। पुस्तक के प्रत्येक भाग में पृष्ठों की संख्या कितनी होगी?
9. एक रसायनज्ञ (chemist) के पास भंडार में हायड्रोक्लोरिक आम्ल के दो घोल (solution) हैं। एक 50% घोल है और दूसरा 80% घोल है। 68% घोल का 100 मि.ली. प्राप्त करने के लिए प्रत्येक का कितना घोल उपयोग में लेना चाहिए?
10. मान लीजिए, आप को ₹12000 निवेश करना है। आपको इसमें से कुछ धनराशि 10% से और शेष 15% से निवेश करना है। कुल निवेशित धनराशी पर 12% लाभ पाने के लिए आपको प्रत्येक दर से कितना धन निवेश करना चाहिए?

4.4 समीकरण जो द्विचरीय रैखिक समीकरणों के युग्म में लघुकृत होते हैं (Equations Reducible to a Pair of Linear Equations in Two Variables) :

अब हम समीकरणों के युग्म के हल की चर्चा करेंगे जो रैखिक नहीं है परन्तु उचित प्रतिस्थापन द्वारा उन्हे रैखिक समीकरणों में लघुकृत कर सकते है।

उदाहरण-12. निम्न समीकरणों का युग्म हल कीजिए। $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

हल : दिये हुए समीकरणों के युग्म को ध्यान से देखिए। ये रैखिक समीकरण नहीं है। (क्यों?)

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \qquad (2)$$

यदि हम $\frac{1}{x}=p$ और $\frac{1}{y}=q$, प्रतिस्थापित करते है, तो हमें निम्न रैखिक समीकरणों का युग्म प्राप्त होता है:

$$2p+3q=13 \qquad (3)$$

$$5p-4q=-2 \qquad (4)$$

q के गुणांक 3 और 4 हैं और उनका ल.स.अ. 12 है। विलोपन पद्धति का उपयोग करते हुये,

समीकरण (3) × 4 $\quad 8p+12q=52$

समीकरण (4) × 3 $\quad \underline{15p-12q=-6}$ 'q' के पदों के विपरीत चिन्ह है, अतः हम दो समीकरणों का योग करते है।)

$$23p=46$$

$$p=\frac{46}{23}=2$$

p का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$2(2)+3q=13$$

$$3q=13-4=9$$

$$q=\frac{9}{3}=3$$

किन्तु, $\frac{1}{x}=p=2 \qquad \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y}=q=3 \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

उदाहरण-13. कविता ने उसके घर में और 2 कमरे बनाने का निश्चय किया। उसने मजदुर तथा समय के बारे में पूछताछ की। उसे पता चला कि 6 पुरुष और 8 स्त्रियाँ यह कार्य 14 दिनों में पूर्ण कर सकते है। किन्तु वह इस कार्य को केवल 10 दिनों में पूर्ण करना चाहती है। जब उसने दुसरी जगह पूछताछ की, उसे बताया गया कि 8 पुरूष और 12 स्त्रियाँ इस कार्य को 10 दिन में पूर्ण कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि यदि इस कार्य को केवल 1 पुरुष अथवा 1 स्त्री अकेले कितने दिनों में पूर्ण कर सकते हैं?

हल : मान लीजिए, एक आदमी द्वारा कार्य पूर्ण करने के लिए लिया गया समय $= x$ दिन।

एक पुरूष द्वारा 1 दिन में किया हुआ कार्य $= \frac{1}{x}$

माना कि 1 स्त्री द्वारा कार्य पूर्ण करने के लिये लिया गया समय $= y$ दिन

1 स्त्रि द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{y}$

अब, 8 पुरूष और 12 स्त्रियाँ कार्य को 10 दिन में पूर्ण कर सकते हैं।

अतः, 8 पुरूष द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{10}$ (1)

और 8 पुरूष द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $8 \times \frac{1}{x}. = \frac{8}{x}$

इसी तरह, 12 स्त्रियों द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

1 दिन में 8 पुरूष और 12 स्त्रियों द्वारा किया गया कार्य $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ (2)

समीकरण (1) और (2) को समीकृत (equating) करने पर, $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \qquad (3)$$

इस तरह 6 पुरुष और 8 स्त्रियाँ यह कार्य 14 दिन में पूर्ण कर सकते है।

6 पुरुष और 8 स्त्रियों द्वारा 1दिन में किया गया कार्य $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \qquad 14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \qquad (4)$$

समीकरण (3) और (4) का निरीक्षण कीजिए। क्या ये रैखिक समीकरण है? इसे हम कैसे हल करेंगे?

हम इन्हे $\frac{1}{x} = u$ और $\frac{1}{y} = v$ प्रतिस्थापित करते हुए रैखिक समीकरणों में परिवर्तित कर सकते है।

समीकरण (3) होता है : $80u + 120v = 1$ (5)

समीकरण (4) होता है : $84u + 112v = 1$ (6)

80 और 84 का ल स (L.C.M.) 1680 है। विलोपन पद्धति का उपयोग करते हुए,

समीकरण (3) × 21 $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

समीकरण (4) × 20 $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$\begin{array}{r} \cancel{1680u}+2520v = 21 \\ \cancel{1680u}+2240v = 20 \\ (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline 280v = 1 \end{array}$$

u, का समान चिन्ह है, अतः घटाइये

$$v = \frac{1}{280}$$

समीकरण (5) में प्रतिस्थापित करने पर, $80u + 120 \times \frac{1}{280} = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{\cancel{4}^{1}}{7} \times \frac{1}{\cancel{80}_{20}} = \frac{1}{140}$$

अतः, 1 पुरुष अकेला इस कार्य को 140 दिनों में पूर्ण कर सकता है और 1 स्त्री अकेली इस कार्य को 280 दिनों में पूर्ण कर सकती है।

उदाहरण-14. एक व्यक्ति 370 कि.मी. की दूरी कुछ रेलगाड़ी से और कुछ दूरी कार से तय करता है। यदि वह 250 कि.मी. की दूरी रेलगाडी द्वारा और शेष कार के द्वारा तय करता है तब उसे 4 घण्टे लगते हैं। किन्तु यदि वह 130 कि.मी. रेलगाडी द्वारा और शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तब उसे 18 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाडी का वेग और कार का वेग ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि, रेलगाडी का वेग प्रति घण्टा x कि.मी. है। कार का वेग प्रति घण्टा y कि.मी. है।

हम यह भी जानते है कि समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{वेग}}$

प्रथम स्थिति में, रेलगाडी द्वारा लिया गया समय $= \frac{250}{x}$ घण्टे।

और कार द्वारा लिया गया समय $= \frac{120}{y}$ घण्टे।

अतः, कुल समय = रेलगाडी में व्यतीत (spent) किया गया समय + कार में व्यतीत किया गया समय

$$= \frac{250}{x} + \frac{120}{y}$$

किन्तु, सफर के लिए व्यतीत किया गया कुल समय 4 घण्टे है, अतः

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \qquad \rightarrow (1)$$

पुनः, जब वह 120 कि.मी. की दूरी रेलगाडी द्वारा और शेष कार द्वारा तय करता है,

130 कि.मी. की दूरी तय करने के लिए रेलगाडी द्वारा लगा समय = $\frac{130}{x}$ घण्टे

(370 - 130) 240 कि.मी. दूरी कार द्वारा तय करने के लिए लगा समय = $\frac{240}{y}$ घण्टे.

कुल समय = $\frac{130}{x} + \frac{240}{y}$

किन्तु, दिया गया है कि सफर का समय 4 घण्टे 18 मिनट अर्थात, $4\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{60}_{10}}$ घण्टे = $4\frac{3}{10}$ घण्टे।

अतः, $\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10}$ (2)

समीकरण (1) और (2) में $\frac{1}{x} = a$ और $\frac{1}{y} = b$ रखने पर

$125a + 60b = 2$ (3)

$130a + 240b = 43/10$ (4)

60 और 240 का ल स (l.c.m.) 240 है। विलोपन पद्धति का उपयोग करने पर,

समीकरण (3) × 4 $\quad 500a + 240b = 8$

समीकरण (4) × 1 $\quad 130a + 240b = \frac{43}{10}$ (समान चिन्ह, अतः घटाइये)

(-) (-) (-)

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\cancelto{10}{370}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$, समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\cancelto{5}{125} \times \frac{1}{\cancelto{4}{100}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancelto{20}{60}} = \frac{1}{80}$$

अतः, $a = \frac{1}{100}$ और $b = \frac{1}{80}$

इसलिए, $\frac{1}{x} = \frac{1}{100}$ और $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$

$\therefore$ $x = 100$ कि.मी./ घण्टा और $y = 80$ कि.मी./ घण्टा

इसलिए, रेलगाडी का वेग 100 कि.मी./ घण्टा है और कार का वेग 80 कि.मी./ घण्टा है।

अभ्यास - 4.3

निम्न समीकरणों के युग्म में से प्रत्येक को रैखिक समीकरणों के युग्म में संक्षिप्त करते हुए, हल कीजिए।

i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

ii) $\frac{x+y}{xy} = 2$

$\frac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x+3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

v) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$

vi) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ जहाँ $x \neq 0, y \neq 0$ $\qquad$ $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ जहाँ $x \neq 0, y \neq 0$

vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$ $\qquad$ viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$ $\qquad$ $\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. निम्न समस्याओं को समीकरणों के युग्म जैसे सूचित कीजिए और तदन्तर इनके हल ज्ञात कीजिए।

i. एक नाव नदी की धारा के प्रतिकूल 30 कि.मी. और धारा के साथ 44 कि.मी. की दूरी 10 घण्टों में तय करती है। वह 13 घण्टे में, धारा के प्रतिकूल 40 कि.मी.और धारा के साथ 55 कि.मी. जा सकती है। प्रवाह (stream) का वेग और निश्चल पानी में नाव के वेग का निर्धारण कीजिए।

ii. रहीम उसके घर तक की 600 कि.मी. की दूरी कुछ रेलगाडी से और कुछ कार से तय करता है। यदि वह 120 कि.मी. रेलगाडी द्वारा और शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तो यात्रा 8 घण्टे की रहती है। यदि वह 200 कि.मी. रेलगाडी से और शेष कार से जाता है तो उसे 20 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाडी और कार का वेग ज्ञात कीजिए।

iii. 2 स्त्रियाँ और 5 पुरूष इकट्ठा एक कसीदा कारी (embroidary) कारी का कार्य 4 दिन में पूर्ण कर सकते हैं। जब कि 3 स्त्रियाँ और 6 पुरुष उस कार्य को 3 दिन में पूर्ण कर सकते हैं। वह कार्य पूर्ण करने के लिए एक अकेली स्त्री और एक अकेले पुरुष को कितना समय लगेगा?

वैकल्पिक अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।]

1. निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ $\qquad$ (ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$ $\qquad$ $\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$ $\qquad$ (iv) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$ $\qquad$ $\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b$ $\qquad$ (vi) $2^x + 3^y = 17$

$ax - by = 2ab$ $\qquad$ $2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. जंतुओं को किसी प्रयोग में सख्ती से नियमित आहार पर रखा जाता है। प्रत्येक जन्तु को दूसरे वस्तुओं से 20 ग्रा. प्रोटीन और 6 ग्रा. वसा (fat) प्राप्त होना चाहिए। प्रयोगशाला प्रबिधिज्ञ (laboratory technicians) ने दो आहारज्य मिश्रण A और B खरीदे। मिश्रण A में 10% प्रोटीन और 6% वसा है। मिश्रण B में 20% प्रोटीन और 2% वसा है। प्रत्येक मिश्रण के कितने ग्राम उपयोग में लाना चाहिए।

प्रस्तावित परियोजना

- दैनिक जीवन की घटनाओं से रैखिक समीकरणों के युग्मों को तैयार कर उसे आरेख द्वारा हल कीजिए ।

हमने क्या चर्चा की:

1. दो समान चरों में, दो रैखिक समीकरण, द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म कहलाता है।

   $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$

   $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$

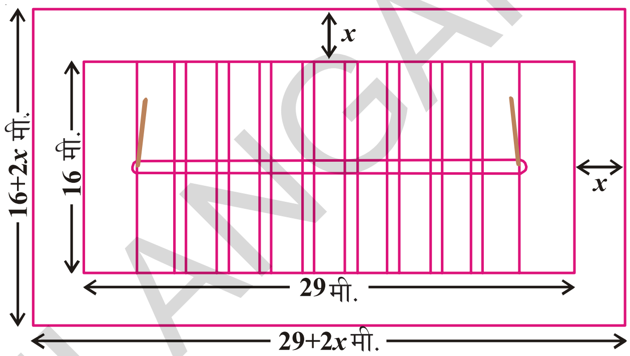
   जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्याएँ हैं।
2. विविध पद्धतियों का उपयोग करते हुए द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म हल किया जा सकता है।
3. द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों के युग्म का आलेख, दो रेखाओं द्वारा निर्देशित होता है।
   i. यदि रेखाएँ किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है तब दो समीकरणों का अद्वितीय (unique) हल वह बिन्दु रहता है। ऐसी स्थिति में, समीकरणों का युग्म सुसंगत रहता है।
   ii. यदि रेखाएँ संपाती हो, तब समीकरणों के अनन्त हल रहते है रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का हल रहता है। ऐसी स्थिति में रेखाओं का युग्म निर्भर रहता है।
   iii. यदि रेखाएँ समानान्तर हो तब समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं रहता। ऐसी स्थिति में समीकरणों का युग्म असंगत रहता है।
4. हमने रैखिक समीकरणों के युग्म का हल ज्ञात करने के लिए निम्न पद्धतियों की चर्चा की।
   i. प्रतिरूप (Model) पद्धति   ii. आलेखीय पद्धति
   iii. बीजगणितीय पद्धतियाँ :- प्रतिस्थापना पद्धति और विलोपन पद्धति
5. समीकरणों की प्रणाली के प्रकार (nature) और गुणांको (co-efficients) के बीच संबंध रहता है।
   i. यदि $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ तब रैखिक समीकरणों का युग्म सुसंगत रहता है।
   ii. यदि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ तब रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत रहता है।
   iii. यदि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ तब रैखिक समीकरणों का युग्म सुसंगत और निर्भर रहता है।
6. ऐसी विविध स्थितियाँ है जो गणितीय रूप में दो समीकरणों द्वारा प्रारंभ में जो रैखिक नहीं है, निर्देशित कर सकते हैं। किन्तु हम उन्हे बदल सकते हैं ताकि वह रैखिक समीकरणों के युग्म लघुकृत होते है।

अध्याय

5 द्विघातीय समीकरण
(Quadratic Equations)

5.1 प्रस्तावना

धन्नूर उच्च माध्यमिक पाठशाला की खेल समिति 29 मी. × 16 मी. वाला खो-खो का मैदान तैयार करना चाहती है। यह 558 वर्ग. मी. क्षेत्र से घिरा हुआ आयत होगा। वे लोग मैदान के चारो ओर समान चौडाई वाली जगह दर्शकों के लिए छोडना चाहते हैं। दर्शकों के लिए छोडी गयी जगह की चाड़ाई क्या होगी? क्या वह जगह पर्याप्त होगी?



मान लिजिए उस जगह की चौड़ाई x मीटर होगी। अतः चित्र में दर्शाये अनुसार उस स्थल की लंबाई $(29 + 2x)$ मी. होगी।

तथा उस स्थल की चौडाई $= (16 + 2x)$ मी

इसलिए आयताकार स्थल का क्षेत्रफल = लंबाई × चौडाई

$= (29 + 2x)(16 + 2x)$

क्योंकि स्थल का क्षेत्रफल = 558 वर्ग. मीटर

$\therefore \quad (29 + 2x)(16 + 2x) = 558$

$\therefore \quad 4x^2 + 90x + 464 = 558$

$4x^2 + 90x - 94 = 0$ (2 से भाग देने पर)

$2x^2 + 45x - 47 = 0$

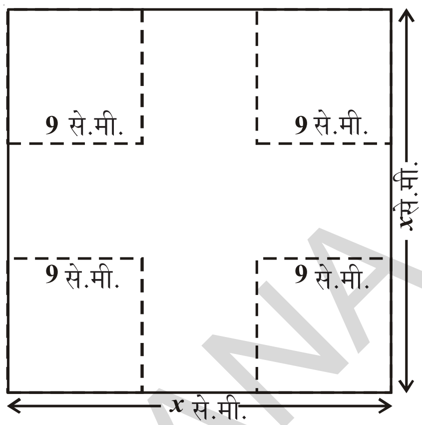
$2x^2 + 45x - 47 = 0$ ..... (1)

हमने पिछली कक्षाओं में $ax + b = c$ के रूप में दिये गये रैखिक समीकरणों को 'x' का मान ज्ञात करने के लिए हल किया था। उसी प्रकार उपरोक्त समीकरण को हल कर हम दर्शकों के लिए रखे गये स्थल की चौडाई ज्ञात कर सकते हैं।

क्या आप कुछ और उदाहरण बता सकते हैं। जिसमें हमें समीकरण प्राप्त होते हो।

रानी के पास एक वर्गाकार धातु की चादर है। उसने 9 से. मी. वाले वर्ग को चारों शीर्षों के पास से काटा और चित्र में दर्शाये अनुसार उसे मोड़कर एक खुले डिब्बे का आकार बनाया। उस डिब्बे का घनत्व 144 घ.ई.(cm^3) है। क्या अब हम उस धातु की चादर का परिमाप ज्ञात कर सकते है?

र



मान लीजिए वर्गाकार धातु की चादर की भुजा 'x' से.मी. है।

तब डिब्बे का परिमाप

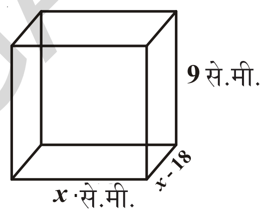
9 से.मी. × (x-18) से.मी. × (x-18) से.मी. होंगे।

क्योंकि डिब्बे का आयतन 144 घ.ई.(cc) दिया गया है।

$$9\,(x-18)\,(x-18) = 144$$
$$(x-18)^2 = 16$$
$$x^2 - 36x + 308 = 0$$

अतः धातु की चादर की भुजा 'x' इस समीकरण को संतृप्त करेगी।

$$x^2 - 36x + 308 = 0 \qquad ..... (2)$$



समीकरण (1) तथा (2) के L.H.S का निरीक्षण कीजिए।

क्या वे द्विघातीय बहुपद व्यंजक हैं?

हमने पूर्व अध्यायों में द्विघातीय बहुपद व्यंजक को $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ के रूप में अध्ययन किया है।

अतः उपरोक्त समीकरणों में उनका L.H.S. द्विघातीय बहुपद व्यंजक होने के कारण उन्हें द्विघातीय समीकरण कहते हैं।

इस अध्याय में हम द्विघातीय समीकरणों तथा उनके मूलों को ज्ञात करने की विधि के बारे में जानेंगे।

5.2 द्विघातीय समीकरण (Quadratic Equations)

x चरराशि वाले एक द्विघातीय समीकरण को $ax^2 + bx + c = 0$, के रूप में दर्शाया जाता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ तथा $a \neq 0$ होगा। उदाहरणार्थ $2x^2 + x - 300 = 0$ एक द्विघातीय समीकरण है। उसी प्रकार $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ तथा $1 - x^2 + 300 = 0$ भी द्विघातीय समीकरण होंगे।

कोई भी समीकरण जो $p(x) = 0$, जहाँ $p(x)$ 2 घात वाला बहुपद व्यंजक हो वह द्विघातीय समीकरण कहलाता है। लेकिन जब हम $p(x)$ को घात के अवरोही क्रम में लिखेंगे तब हमें समीकरण का उचित मानक रूप प्राप्त होगा। अर्थात **$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ को द्विघातीय समीकरण का मानक रूप कहा जाता है। तथा $y = ax^2 + bx + c$ को द्विघातीय फलन कहते है।**

प्रयत्न कीजिए।

दिये गये समीकरण द्विघातीय है या नहीं उसकी जाँच कीजिए।

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\ (x \neq 0)$

(v) $(2x + 1)(3x + 1) = b(x - 1)(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

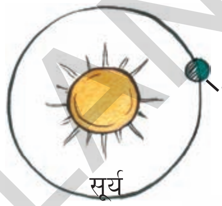
द्विघातीय फलन के अनेक उपयोग होते है। उनमें से कुछ यहाँ दिये गये है।:-

1. जब रॉकेट को ऊपर की ओर छोडा जाता है तब उसके मार्ग को 'द्विघातीय फलन' द्वारा परिभाषित करते है।
2. उपग्रह छतरी का आकार, टेलीस्कोप का परावर्तन काँच, चश्में के लेन्स, नक्षत्र मण्डल के वस्तुओं के कक्ष को द्विघातीय समीकरणों द्वारा परिभाषित किया जाता है।

उपग्रह - छतरी

परावर्तित दर्पण

ऐनक के लेन्स



3. असतर (projectile) के मार्ग को द्विघातीय फलन द्वारा परिभाषित करते है।

4. जब किसी गाडी को ब्रेक लगाते है तब उसके रूकने की दूरी को द्विघातीय समीकरण से ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण-1. निम्न स्थितियों को गणितीय विधि द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

i. श्रीधर और राजेन्दर दोनों के पास 45 कंचे है। दोनों ने 5-5 कंचे घुमा दिए अब दोनो के कंचो का गुणनफल 124 होगा। हमें उनके पास पहले कितने कंचे थे? ज्ञात करना होगा।

ii. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण 25 से.मी. है। दूसरी भुजाओं का अंतर 5 से.मी. दिया गया है। उन दो भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: i. मान लीजिए श्रीधर के कंचो की संख्या x होगी।

अतः राजेन्दर के पास कंचो की संख्या $= 45 - x$ (क्यों?).

5 कंचे गुमाने के पश्चात् श्रीधर के पास कंचो की संख्या $= x - 5$

5 कंचे गुमाने के पश्चात् राजेन्दर के पास कंचो की संख्या = $(45 - x) - 5 = 40 - x$

इसलिए गुणनफल $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= - x^2 + 45x - 200$

अतः, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (गुणनफल 124 दिया गया है।)

अतः, $-x^2 + 45x - 324 = 0$

अतः, $x^2 - 45x + 324 = 0$ (-1 से गुणा करने पर)

अर्थात् राजू के पास कंचों की संख्या 'x' इस द्विघातीय समीकरण

$x^2 - 45x + 324 = 0$ को संतृप्त करता है।

ii. यही गणितीय विधि द्वारा इस प्रश्न का इच्छित प्रदर्शन होगा।

मान लीजिए छोटी भुजा की लम्बाई x से.मी. होगी।

तब बडी भुजा की लम्बाई $= (x + 5)$ से.मी. होगी।

दिये गये है कर्ण की लम्बाई = 25 से.मी. होगी।

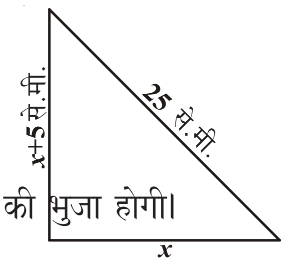
हमें ज्ञात है कि समकोण त्रिभुज में (कर्ण)^2 = (भुजा)^2 + (भुजा)^2

अथात्, $x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

$2x^2 + 10x - 600 = 0$

$x^2 + 5x - 300 = 0$



ऊपरी समीकरण में x का संभावित मान दिये गए समकोण त्रिभुज की भुजा होगी।

उदाहरण-2. निम्नलिखित समीकरण द्विघातीय है या नहीं जाँच कीजिए।

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

हल : i. LHS $= (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

इसलिए $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ को हम $x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ भी लिख सकते है।

अतः $x^2 - 6x + 8 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0.$

अतएव दिया गया समीकरण द्विघातीय समीकरण है।

ii. यहाँ $\text{LHS} = x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$

$\text{RHS} = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

इसलिए, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$

अतः, $x + 12 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में नहीं है।

अतएव दिया गया समीकरण द्विघातीय समीकरण नहीं है।

iii. यहाँ $\text{LHS} = x\,(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

अतः $x\,(2x + 3) = x^2 + 1$ को हम

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ के रूप में लिख सकते है।

इसलिए, हमें $x^2 + 3x - 1 = 0$ प्राप्त होता है।

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है।

$\therefore$ दिया गया समीकरण द्विघातीय समीकरण है।

iv. यहाँ, $\text{LHS} = (x + 2)^3$

$$\begin{aligned}
&= (x + 2)^2\,(x + 2)\\
&= (x^2 + 4x + 4)\,(x + 2)\\
&= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8\\
&= x^3 + 6x^2 + 12x + 8
\end{aligned}$$

अर्थात् $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ को हम

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ के रूप में लिख सकते है।

अतः $6x^2 + 12x + 12 = 0$ या $x^2 + 2x + 2 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0.$ के रूप में है।

अतएव दिया गया समीकरण द्विघातीय समीकरण है।

सूचना : उपरोक्त समीकरणों में (ii) द्विघातीय समीकरण जैसा दिखता है लेकिन वह द्विघातीय समीकरण नहीं है।

(iv) में समीकरण, घन समीकरण (Cubic Equations) जैसा दिखता है तथा द्विघातीय समीकरण जैसा नहीं लेकिन वह हल करने पर द्विघातीय समीकरण के रूप में परिवर्तित हुआ है। हमें पता चलता है कि किसी भी समीकरण को द्विघातीय है या नहीं बताने के लिए उसे हल करने की आवश्यकता पडती है।

अभ्यास - 5.1

1. दिए गए समीकरण द्विघातीय है या नहीं जाँच कीजिए:

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. दी गयी स्थितियों को द्विघातीय समीकरण के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

i. एक आयताकार स्थान (plot) का क्षेत्रफल 528 वर्ग.मी. है। उसकी लम्बाई, चौडाई की दुगुनी से एक मीटर अधिक है। हमें उस स्थल की लम्बाई तथा चौडाई ज्ञात करनी है।

ii. दो क्रमागत धन पूर्णांको का गुणनफल 306 है हमें उन पूर्णांको को ज्ञात करनाहै।

iii. रोहन की माँ की आयु उससे 26 वर्ष अधिक है। तीन वर्ष के पश्चात उनकी आयु का गुणनफल 360 वर्ष होगा। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।

iv. एक रेल 480 कि.मी. की दूरी को समान वेग से पार करती है यदि उसका वेग 8 कि.मी./घं कम कर दिया जाय तो उस दूरी को पार करने के लिए तीन घंटे का अधिक समय लगेगा। हमें उस रेल का वेग ज्ञात करना है।

5.3 गुणनखण्ड विधि द्वारा द्विघातीय समीकरणों का हल : (Solution of a Quadratic Equation by Factorisation)

हमने 'x' चरराशि द्वारा दैनिक जीवन की घटनाओं को द्विघातीय समीकरण के रूप में कैसे प्रदर्शित करना सीखा है।

अब हमें x का मूल्य ज्ञात करना सीखना है।

द्विघातीय समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$. को लीजिए। यदि x के स्थान पर 1 लगाते है तो हमें $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ RHS प्राप्त होगा। क्योंकि 1 दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है। इसलिए हम 1 को $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का मूल कहेंगे।

$\therefore$ $x = 1$ यह इस समीकरण का हल होगा।

सामान्यतः वास्तविक संख्या α को द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, का मूल कहते हैं। तब $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. होगा। हम $\boldsymbol{x} = \alpha$ को द्विघातीय समीकरण का हल कहेंगे या ऐसे कह सकते है कि α इस समीकरण को संतुष्ट करता है।

चलिए अब हम द्विघातिय समीकरणों के वर्गों को ज्ञात करने की विधि की चर्चा करेंगे।

उदाहरण-3. समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$, के मूलों को गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

हल: सबसे पहले हम मध्य पद को दृविभाजित करेंगे । मध्य पद को दृविभाजित करने के लिए हमें p तथा q इस प्रकार चाहिए जिसमें $p + q = -5$ तथा $p \times q = 2 \times 3 = 6$ प्राप्त हो।

इसके लिए हमें 6 के सभी संभावित खण्डो के युग्मों की सूचि बनानी पडेगी। वे खण्ड इस प्रकार होंगे (1, 6), (–1, –6); (2, 3); (–2, –3) इस सूची से प्राप्त खण्डों में (–2, –3) दिए गए प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है। $p + q = -5$ तथा $p \times q = 6$.

मध्य पद '$-5x$' को '$-2x - 3x$' के रूप में लिख सकते है।

इसलिए $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

अब, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ इस समीकरण को $(2x - 3)(x - 1) = 0$ के रूप में लिख सकते है।

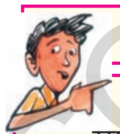
इसलिए x के वह मूल्य जो समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के लिए होंगे वही मूल्य $(2x - 3)(x - 1) = 0$ के लिए भी संतुष्ट करेंगे।

अर्थात $2x - 3 = 0$ या $x - 1 = 0$.

अब, $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ तथा $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ देते है।

इसलिए , $x = \frac{3}{2}$ तथा $x = 1$ समीकरण के हल होंगे।

इसी को हम समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल 1 तथा $\frac{3}{2}$ होंगे कह सकते है।



प्रयत्न कीजिए।

समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$. के मूल ज्ञात किजिए तथा इसके मुल 1 तथा $\frac{3}{2}$ होंगे इसकी जाँच कीजिए।

नोट कीजिए $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूलों को गुणनखण्ड विधि दृवारा प्रत्येक मूल को शून्य लेकर मूल्य ज्ञात किया गया है।

उदाहरण 4 : द्विघातीय समीकरण $x-\frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ $(x \neq 0)$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : $x-\frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल x के वह मूल्य होंगे जिससे $(3x - 2)(2x + 1) = 0$

अतः $3x - 2 = 0$ or $2x + 1 = 0$ होगा।

अर्थात्: $x = \frac{2}{3}$ या $x = -\frac{1}{2}$

अतः $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल $\frac{2}{3}$ या $-\frac{1}{2}$ होंगे।

हम समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$. $\frac{2}{3}$ या $-\frac{1}{2}$ होंगे।

उदाहरण-5. वर्ग 5.1 में चर्चित दर्शकों के स्थल की चौडाई ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग 5.1 में यदि दर्शकों के स्थल की चौडाई को x मी. ली जाय, तो x का मूल्य $2x^2 + 45x - 47 = 0$. को संतुष्ट करना पडेगा। गुणनखण्ड विधि से इसे इस प्रकार लिखते है।

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x\,(x - 1) + 47\,(x - 1) = 0$$

अर्थात् $(x - 1)\ (2x + 47) = 0$

इसलिए दिये गये समीकरण के मूल $x = 1$ या $x = \frac{-47}{2}$. होंगे। जैसा कि हम जानते है 'x' स्थल की चौडाई है जो ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\therefore$ चौडाई 1 मी. होगी। अतः यह स्थल की चौड़ाई के लिए पर्याप्त नहीं है।

अभ्यास - 5.2

1. गुणनखण्ड विधि में निम्नलिखित समीकरणों के मूलों को ज्ञात कीजिए।

i. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii. $2x^2 + x - 6 = 0$ iii. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

iv. $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ v. $100x^2 - 20x + 1 = 0$ vi. $x(x + 4) = 12$

vii. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ viii. $x - \frac{3}{x} = 2$ $(x \neq 0)$ ix. $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

2. उन दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका भागफल 27 तथा गुणनफल 182 है।
3. दो क्रमागत धन पूर्णांकों के वर्गों का योग 613 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार से 7 से.मी. कम है। उसके कर्ण की लम्बाई 13 से.मी. है, उसकी दो भुजायें ज्ञात कीजिए।
5. एक लघु उद्योग वाले एक दिन में कुछ मिट्टी के बर्तन बनाते है। यह ज्ञात हुआ कि एक दिन बनने वाली वस्तुओं से उनका लागत मूल्य उसके दुगुने से ₹3 अधिक है। यदि उस दिन का कुल लागत मूल्य ₹90 हो तो, उस दिन बनायी गयी वस्तुओं की संख्या तथा उसका दर ज्ञात कीजिए।
6. उस आयत के परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी परिमिति 28 मी. तथा क्षेत्रफल 40 वर्ग.मी. है।
7. त्रिभुज का आधार उसकी ऊँचाई से 4 से.मी. लम्बा है यदि उसका क्षेत्रफल 48 व.से.मी. हो तो उस त्रिभुज का आधार तथा ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. दो रेल गाडियाँ प्लाटफार्म से एक साथ निकलती है। पहली गाडी पश्चिम दिशा में तथा दूसरी गाडी उत्तरी दिशा में जा रही है। पहली गाडी का वेग दूसरी से 5 की.मी./घ. अधिक है। दो घण्टे बाद दोनों 50 कि.मी. की दूरी पर हो तो दोनो गाडियों का औसत वेग ज्ञात कीजिए।
9. 60 विद्यार्थियों की कक्षा में प्रत्येक बालक ने बालिकाओं की संख्या के बराबर अनुदान दिया है तथा प्रत्येक बालिका ने बालकों की संख्या के बराबर अनुदान दिया यदि कुल रकम ₹1600. एकत्रित की गई तो बताइए कक्षा में बालकों की संख्या कितनी होगी?
10. एक यांत्रिक नाव नदी में ऊपर की ओर 24 की.मी. की दूरी, 3 कि.मी./घंटा की दर से तय करता है। यदि उसका एक बार ऊपर जाकर वापस आने के लिए 6 घंटे का समय लगता है। तो उसकी गति स्थिर मानकर उसके वेग को ज्ञात कीजिए।

5.4 पूर्ण वर्ग द्वारा द्विघातीय समीकरण का हल (Solution of a Quadratic Equation by Completing the Square)

हमने पिछले भाग में गुणनखण्ड विधि द्वारा समीकरण के मूलों को ज्ञात करना सीखा। क्या गुणनखण्ड विधि सभी प्रकार के समीकरणों पर लागू हो सकती है? आइए अब इस समीकरण $x^2 + 4x - 4 = 0$ को हल करने की कोशिश करेंगे।

दिए गए समीकरण $x^2 + 4x - 4 = 0$ को गुणनखण्ड विधि से हल करने के लिए हमें P तथा q को इस प्रकार ज्ञात करना होगा जिससे $p + q = 4$ तथा

$$p \times q = -4$$

हमारे पास पूर्णांक p, q नहीं है जो उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करें। अर्थात् गुणनखण्ड विधि द्वारा इस समीकरण को हल करना संभव नहीं है। अतः हम दूसरी विधि का अध्ययन करेंगे।

इस स्थिति का अवलोकन कीजिए

सुनीता की आयु का गुणनफल आज से दो वर्ष पूर्व तथा आज से चार वर्ष बाद के उसकी वर्तमान आयु के दुगुने से एक वर्ष अधिक है। तो बताइए उसकी वर्तमान आयु कितनी होगी?

इस का उत्तर ज्ञात करने के लिए हम उसकी वर्तमान आयु को x वर्ष मानेंगे। दो वर्ष पूर्व की आयु $= x - 2$ तथा 4 वर्ष बाद की आयु $= x + 4$ होगी तथा उनका गुणनफल $(x - 2)(x + 4)$ होगा।

अतः $\quad (x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

अर्थात् $\quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$x^2 - 9 = 0$

इसलिए सुनीता की वर्तमान आयु समीकरण $x^2 - 9 = 0$ को संतुष्ट करेगी।

हम इसे $x^2 = 9$ के रूप में भी लिख सकते है। इसका वर्गमूल लेने पर हमें $x = 3$ या $x = -3$. प्राप्त होगा। क्योंकि आयु धनात्मक संख्या होगी। $x = 3$.

इसलिए सुनीता की वर्तमान आयु 3 वर्ष होगी।

अब हम एक और समीकरण को देखेंगे $(x + 2)^2 - 9 = 0$. इसे हल करने के लिए हमें $(x + 2)^2 = 9$. के रूप में लिखना होगा। वर्गमूल लेने पर हमें $x + 2 = 3$ या $x + 2 = -3$ प्राप्त होगा।

अतः $\quad x = 1$ या $x = -5$

इसलिए समीकरण $(x + 2)^2 - 9 = 0$ का मूल 1 तथा -5 होंगे।

उपरोक्त दोनों उदाहरणों में x राशि वाला पद पूर्ण वर्ग है। तथा हम आसानी से इनका वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं। लेकिन समीकरण $x^2 + 4x - 4 = 0$. को हल करने के लिए गुणनखण्ड का उपयोग नहीं कर सकते हैं।

इसलिए अब हम वर्गों को पूर्ण करने की विधि का उपयोग करेंगे। इस विधि का मूल रहस्य इसके L.H.S. को करना होता है जिससे वह एक पूर्ण वर्ग समीकरण बने।

इसकी विधि कुछ इस प्रकार है।

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$$

$$x^2 + 2 . x . 2 = 4$$

अब LHS $a^2 + 2ab$ के रूप प्राप्त होगा यदि हम इसमें b^2 को जोड़ेंगे तब वह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में पूर्ण वर्ग समीकरण बनेगा। अतः दोनो ओर $b^2 = 2^2 = 4$ को जोडने पर हमें प्राप्त होगा।

$$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$$

$$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

अब $3x^2 - 5x + 2 = 0$ समीकरण को देखिए। नोट कीजिए x^2 का गुणक 1 नहीं है। इसलिए हम पूरे समीकरण को 3 से भाग देंगे जिससे x^2 का गुणक 1 हो सके।

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$ ($\left(\frac{5}{6}\right)^2$ को दोनो ओर जोडने पर)

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$ (दोनो ओर वर्गमूल लेने पर)

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

इसलिए , $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ या $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

अर्थात्, $x = 1$ या $x = \frac{4}{6}$

अथात् $x = 1$ या $x = \frac{2}{3}$

अतः समीकरण के मूल 1 तथा $\frac{2}{3}$ होंगे।

उपरोक्त उदाहरण में हम अल्गोरिदम (algorithm) द्वारा पूर्ण वर्ग प्राप्त करेंगे।

अल्गोरिदम : मान लीजिए द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ होगा।

चरण **-1** : प्रत्येक पद को 'a' से भाग देंगे।

चरण-**2** : समीकरण इस तरह व्यवस्थित कीजिए जिससे स्थिर पद c/a दायी ओर हो (RHS)

चरण-**3** : $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ को दोनो ओर जोडने पर L.H.S. पूर्ण वर्ग बनेगा।

चरण-**4** : LHS को वर्ग के रूप में लिखकर R.H.S. को हल कीजिए।

चरण-**5** : उसे हल कीजिए।

उदाहरण-6. पूर्ण वर्ग विधि से $5x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल : $5x^2 - 6x - 2 = 0$ दिया गया है।

अब हम अल्गोरिदम का उपयोग करेंगे।

चरण-**1** : $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (दोनों ओर 5 से भाग देने पर)

चरण **-2** : $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

चरण **-3** : $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (दोनो ओर $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ को जोडने पर)

चरण **-4** : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

चरण-**5** : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 - \sqrt{19}}{5}$$

उदाहरण-7. समीकरण $4x^2 + 3x + 5 = 0$ के मूलों को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा कीजिए।

हल : दिया गया $4x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

लेकिन $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ का ऋणात्मक मूल्य नहीं हो सकता (क्यों?) इसलिए x का कोई भी वास्तविक मूल्य समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। अतः दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं है।

यह कीजिए।

पूर्ण वर्ग विधि द्वारा दिए गए समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

हमने पूर्ण वर्ग विधि द्वारा कुछ उदाहरणों को हल किया था। अब हम इसे मानक समीकरण $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ में लगाएँगे।

चरण 1 : समीकरण के प्रत्येक पद को 'a' से विभाजित करने पर

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

चरण 2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

चरण 3 : $x^2+\frac{b}{a}x+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ [दोनो ओर $\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ जोडने पर]

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x\frac{b}{2a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

चरण 4 : $\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

चरण 5 : यदि $b^2-4ac\geq 0$, हो तो उसका वर्गमूल ज्ञात करने पर,

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ प्राप्त होगा।

अतः, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

इसलिए $ax^2+bx+c=0$ के मूल $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, होंगे यदि $b^2-4ac\geq 0$.

यदि $b^2-4ac<0$, हो तो इस समीकरण के वास्तविक मूल नहीं होते है। (क्यों?)

अतएव यदि $\boldsymbol{b^2-4ac\geq 0}$, हो तो द्विघातीय समीकरण $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ के मूल $\boldsymbol{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ होते हैं।

द्विघातीय समीकरण के मूलों को ज्ञात करने के इस सूत्र को 'द्विघातीय सूत्र' कहते हैं।

आइए, अब हम इस सूत्र द्वारा कुछ उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-8. अभ्यास 5.1 के प्रश्न 2(i) को द्विघातीय सूत्र द्वारा हल कीजिए।

हल : मान लीजिए क्षेत्र (plot) की चौडाई x मी. है।

उसकी लम्बाई $(2x+1)$ मी. होगी।

क्योंकि आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 528 व.मी. दिया गया है।

हम इसे $x(2x+1)=528$, लिख सकते है, अर्थात् $2x^2+x-528=0$.

यह $ax^2+bx+c=0$, के रूप में है जहाँ $a=2, b=1, c=-528$. होंगे

इसलिए द्विघातीय सूत्र द्वारा इसका हल इस प्रकार होगा।

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

अर्थात् $\quad x = \frac{64}{4}$ or $x = \frac{-66}{4}$

अर्थात् $\quad x = 16$ or $x = -\frac{33}{2}$

क्योंकि x का मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए क्षेत्र की चौडाई 16 मी. होगी तथा लंबाई $(2x + 1) = 33$ मी. होगी।

आपको यह जाँच करनी पडेगी कि प्राप्त मूल्य दिये गये प्रश्न को संतुष्ट करते है।

विचार-विमर्श कीजिए।

हमने द्विघातीय समीकरणों को हल करने की तीन विधियों को सीखा। इन तीनों में से आप कौनसी विधि का उपयोग करना चाहेंगे? (क्यों?)

उदाहरण-9. दो क्रमागत धन विषम संख्याओं के वर्गों का योग 290 हो तो, उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए पहली धन विषम संख्या x हो तो दूसरी संख्या $x + 2$ होगी।

दिए गए प्रश्न के अनुसार $x^2 + (x + 2)^2 = 290$

अर्थात् $\quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

अर्थात् $\quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$

अर्थात् $\quad x^2 + 2x - 143 = 0$

जो x राशि वाला द्विघातीय समीकरण है।

द्विघातीय सूत्र के उपयोग से $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

हमें प्राप्त होगा $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$

अर्थात् : $\quad x = 11$ या $x = -13$

लेकिन दिया गया है कि x एक धन विषम संख्या है। अतः $x=11$ या $x \neq -13$

अतएव दो क्रमागत धन विषम संख्याएँ 11 तथा $(x + 2) = 11 + 2 = 13$

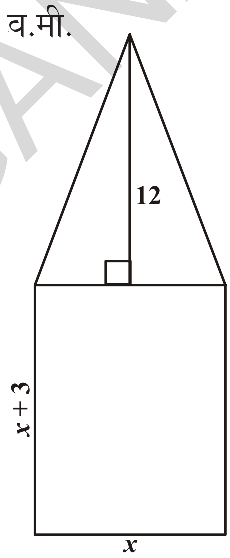
जाँचः $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

उदाहरण-10. एक आयताकार उद्यान (park) की संरचना करनी है जिसकी चौडाई, लम्बाई से 3 मी. कम होनी चाहिए। इस उद्यान का क्षेत्रफल समद्विबाहु त्रिभुजाकार उद्यान के क्षेत्रफल से 4 मी. अधिक होना चाहिए। जिसकी ऊँचाई 12 मी. है। आयताकार उद्यान की लम्बाई तथा चौडाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए आयताकार उद्यान की चौडाई x मी. होगी।

अतः लम्बाई $= (x + 3)$ मी. होगी।

इसलिए आयताकार उद्यान का क्षेत्रफल $= x(x + 3)$ व.मी. $= (x^2 + 3x)$ व.मी.



अब समद्विबाहु त्रिभुज का आधार $= x$ मी. होगा।

अतः उसका क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ व.मी.

हमारी आवश्यकता अनुसार

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

अर्थात् $\quad x^2 - 3x - 4 = 0$

द्विघातीय सूत्र की सहायता से

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \quad = 4 \text{ या } -1$$

लेकिन $x \neq -1$ (क्यों?). अतः, $x = 4$. होगा।

इसलिए उद्यान की चौडाई $= 4$मी. तथा लम्बाई $x + 3 = 4 + 3 = 7$मी.

जाँच : आयताकार उद्यान का क्षेत्रफल $= 28$ व.मी.

त्रिभुजाकार उद्यान का क्षेत्रफल $= 24$ व.मी. $= (28 - 4)$ व.मी.

उदाहरण-11. दिए गए द्विघातीय समीकरणों के मूल यदि प्राप्त हो तो सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए:

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ $\qquad$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$

हल : (i) $x^2 + 4x + 5 = 0$. यहाँ, $a = 1, b = 4, c = 5$. अतः $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

क्योंकि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता। इसलिए $\sqrt{b^2 - 4ac}$ का कोई भी वास्तविक मूल्य प्राप्त नहीं होगा।

अतः इस समीकरण के कोई वास्तविक मूल प्राप्त नहीं होंगे।

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. यहाँ, $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$.

अतः $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

इसलिए $x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ *i.e.,* $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

अतः मूल $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. होंगे।

उदाहरण-12. दिये गये समीकरण के मूलों को ज्ञात कीजिए।

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

हल:

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$. समीकरण के दोनों ओर के पदों को x से गुणा करने पर $x^2 + 1 = 3x$

अर्थात् $x^2 - 3x + 1 = 0$, एक दविघातीय समीकरण है।

यहाँ, $a = 1, b = -3, c = 1$

अतः $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

इसलिए, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (क्यों?)

अतएव $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ तथा $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. समीकरण के मूल होंगे।

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2.$

जैसे कि $x \neq 0, 2$, समीकरण को $x\,(x-2)$, से गुणा करने पर

$(x-2) - x = 3x\,(x-2)$

$= 3x^2 - 6x$ हमें प्राप्त होगा।

अतः दिया गया समीकरण $3x^2 - 6x + 2 = 0$, के रूप में प्राप्त होगा

जहाँ, $a = 3, b = -6, c = 2$. अतः, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

इसलिए, $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

इसलिए $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ तथा $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$. समीकरण के मूल होंगे।

उदाहरण-13. एक यंत्रिक नाव जिसका वेग शांत पानी में 18कि.मी./घंटा है। उसे झरने में ऊपर पहुँचने के लिए नीचे आने की अपेक्षा घंटा अधिक समय लेता है जो 24 कि. मी. की दूरी तय कर रहा है। झरने के पानी का वेग ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए झरने का वेग x कि.मी./घ. होगा।

इसलिए नाव का ऊपर की ओर वेग $= (18 - x)$ कि.मी./घं तथा

नाव का नीचे की ओर वेग $= (18 + x)$ कि.मी./घं तथा

ऊपर जाने के लिए लगा समय $= \dfrac{\text{दूरी}}{\text{वेग}} = \dfrac{24}{18-x}$ घंटे

उसी प्रकार नीचे आने के लिए लगा समय $= \dfrac{24}{18+x}$ घंटे

प्रश्न के अनुसार $\dfrac{24}{18-x} - \dfrac{24}{18+x} = 1$

अर्थात् $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)\,(18 + x)$

अर्थात् $x^2 + 48x - 324 = 0$

सूत्र की सहायता से $x = \dfrac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \dfrac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$

$= \dfrac{-48 \pm 60}{2} = 6$ या -54

क्योंकि x झरने का वेग है। वह ऋणात्मक नहीं हो सकता। अतः हम $x = -54$.को छोड देंगे। हम $x = 6$ से हमें झरने का वेग 6 कि.मी./घं प्राप्त होता है।.

अभ्यास - 5.3

1. यदि दिए गए समीकरणों के मूल प्राप्त हो तो उन्हें पूर्ण वर्ग विधि से ज्ञात कीजिए।

   i. $2x^2 + x - 4 = 0$ ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

   iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$ iv. $x^2 + 5 = -6x$

2. ऊपर प्रश्न 1 में दिए गए समीकरणों के मूलों को सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए।

(i) $x-\frac{1}{x}=3, x\neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}, x\neq -4,7$

4. यदि रहमान की आयु का व्युक्रम जो आज से 3 वर्ष पहले थी तथा आज से 5 वर्ष बाद होगी का योगफल $\frac{1}{3}$ हो तो, उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

5. एक कक्षा में मौलिका के गणित तथा अंग्रेजी की परीक्षा में प्राप्त अंको का योग 30 है। यदि उसे गणित में 2 अंक अधिक तथा अंग्रेजी में 3 अंक कम प्राप्त हो तो उन अंको का गुणनफल 210 होगा। उसके दोनो विषयों में प्राप्त अंको को ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार क्षेत्र का कर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मी बडा है। तथा उसकी बडी भुजा छोटी भुजा से 30 मी. बड़ी हो तो उस क्षेत्र का परिमाप ज्ञात कीजिए।

7. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बडी संख्या का 8 गुना है। उन दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

8. एक रेलगाडी 360 कि.मी. दूरी स्थिर वेग से तय कर रही है। यदि उसका वेग 5 कि.मी./ घं बढा दिया जाय तो उसको 1 घंटा कम समय लगेगा तो उस गाडी का वेग ज्ञात कीजिए।

9. दो नल एक टंकी को $9\frac{3}{8}$ घंटे में भर सकते है। यदि दोनों को अलग खोला जाय तो बडी व्यास वाला नल टंकी को भरने के लिए छोटी से 10 घंटे का कम समय लेता है। तो बताइए कि दोनों नल अलग-अलग टंकी को भरने के लिए कितना समय लेंगे।

10. मैसूर से बैंगलुरु के बीच की 132 कि.मी. दूरी को तय करने के लिए एक एक्सप्रेस गाडी, सार्वजनिक गाडी से 1 घंटे का कम समय लेती है। (उनके रुकने के समय पर ध्यान मत दीजिए।) यदि एक्सप्रेस गाडी का औसत वेग 11 कि.मी./ घं सार्वजनिक गाडी से अधिक हो तो दोनो गाडियों का औसत वेग ज्ञात कीजिए।

11. यदि दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 .व.मी. है तथा उनकी परिमिति का अंतर 24 मी है तो दोनो वर्गों की भुजाओं को ज्ञात कीजिए।

12. $S=ut-\frac{1}{2}gt^2$ दूरी S को ज्ञात करने वाले सूत्र से एक गेंद को ऊपरी दिशा में आरंभिक वेग 4 मी/सें तथा g गुरुत्वबल 10 मी/सें दिया गया है। (i) यदि गेंद को 16 फिट/से. की वेग से 96 फिट ऊपरी दिशा में फेंका जाय तो 1 सेकेण्ड पश्चात् उसकी दूरी क्या होगी? (ii) 8 मी. की ऊँचाई को छूने के लिए गेंद को कितना समय लगेगा। (iii) समय के दो भिन्न मूल्य प्राप्त होने के कारण क्या हो सकता है ?

13. यदि 'n' भुजा वाले बहुभुज के कर्ण $\frac{1}{2}n(n-3)$ हो तो 65 कर्णों वाले बहुभुज में कितनी भुजायें होंगी? क्या 50 कर्णों वाला कोई बहुभुज होगा?

5.5 मूलों के लक्षण (NATURE OF ROOTS)

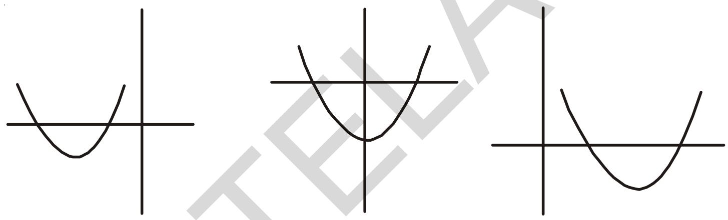
हमने पिछले भाग में समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों को $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ के रुप में अध्ययन किया था।

अब हम उनके लक्षणों को जानने का प्रयत्न करेंगे। याद कीजिए शून्य वह बिन्दु है जहाँ बहुपद व्यंजक का मूल्य शून्य प्राप्त होता है। या हम कह सकते हैं जहाँ पर बहुपद व्यंजक का वक्र X- अक्ष को प्रतिच्छेदित करता है।

उसी प्रकार, द्विघातीय समीकरणों के मूल वे बिन्दु है जहाँ पर वक्र X- अक्ष को प्रतिच्छेदित करता है।

स्थिति-**1 :** यदि $b^2 - 4ac > 0$;

यहाँ पर हमें दो अलग मूल $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ प्राप्त होंगे। द्विघातीय समीकरण के आलेख खींचने पर हमें इस प्रकार के चित्र प्राप्त होंगे।

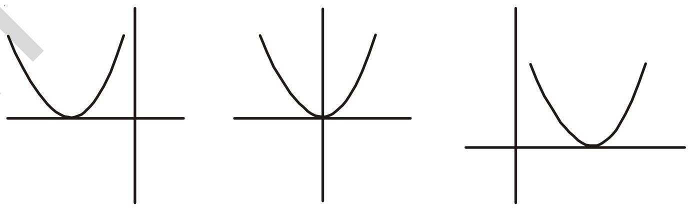


चित्र में दर्शाया गया है कि द्विघातीय समीकरण x- अक्ष को दो अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करता है।

स्थिति-**2** : यदि $b^2 - 4ac = 0$

$$x=\frac{-b+0}{2a}$$

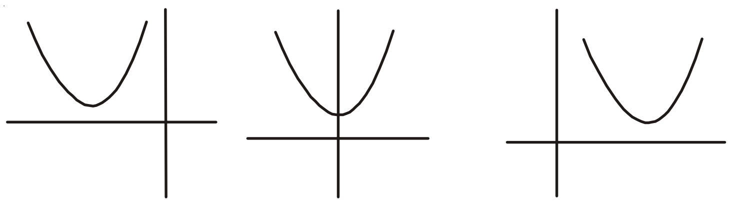
अतः $x=\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b}{2a}$



चित्र दर्शाता है कि द्विघातीय समीकरण का वक्र X- अक्ष को केवल एक बिन्दु पर स्पर्श कर रहा है।

स्थिति-**3** : $b^2 - 4ac < 0$

यहाँ पर कोई वास्तविक मूल नहीं होंगे। मूल काल्पनिक होंगे।



इस स्थिति में वक्र X- अक्ष को स्पर्श भी नहीं करता है तथा प्रतिच्छेदित भी नहीं करता है। अतः वास्तविक मूल नहीं होंगे।

जैसे कि $b^2 - 4ac$ द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ के मूल वास्तविक है या नही को निर्धारित करता है अतः $b^2 - 4ac$ को द्विघातीय समीकरण का विविक्तिकर (discriminant) कहते हैं।

अतः समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ में

i. यदि $b^2 - 4ac > 0$, हो तो दो भिन्न वास्तविक मूल प्राप्त होंगे।

ii. यदि $b^2 - 4ac = 0$, हो तो दो समान वास्तविक मूल प्राप्त होंगे।

iii. यदि $b^2 - 4ac < 0$. हो तो कोई वास्तविक मूल प्राप्त नही होंगे।

चलिए अब हम कुछ उदाहरणों का अध्ययन करेंगे।

उदाहरण-14. समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$, के रूप में है। जहाँ उसके मूलों के लक्षणों को बताइए।

हलः दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, के रूप में है। जहाँ $a = 2$, $b = -4$ तथा $c = 3$. इसलिए विविक्तिकर

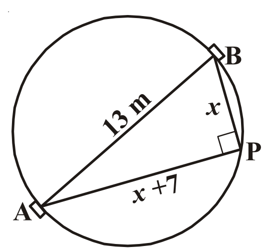
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

अतः दिए गए समीकरण के वास्तविक मूल नहीं होंगे।

उदाहरण-15. एक वृत्ताकार बगीचा जिसका व्यास 13 मी. है उसमें एक खंभे को इस प्रकार लगाना है जिसकी दो समुख द्वार A और B से 7 मी. की दूरी पर स्थित हो। क्या ऐसा करना संभव है? यदि हाँ तो दोनो गेटों (A और B) से कितनी दूरी पर खंभा लगाया गया?

हल : आइए पहले हम चित्र बनाएँगे।

मान लीजिए P खंभे का इच्छित स्थल है। मान लीजिए B से खंभे की दूरी x मी. है। अर्थात् $BP = x$ मी. अब दोनो गेटों से P की दूरी $= AP - BP$ (या $BP - AP$) $= 7$ मी. होगी, इसलिए $AP = (x + 7)$ मी.



अब $AB = 13$मी, जैसे कि AB व्यास है।

$\angle BAC = 90^0$ (क्यों?)

इसलिए $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

अर्थात् $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

अर्थात् $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

अर्थात् $2x^2 + 14x - 120 = 0$

अतः गेट B से खंभे की दूरी 'x' का मूल्य समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

यदि इस समीकरण के वास्तविक मूल हो तो ही खंभे को लगाना संभव होगा इसे जानने के लिए हमें इसका विवक्तिकर ज्ञात करना होगा।

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$$

अतः इस समीकरण के दो वास्तविक मूल प्राप्त होंगे अर्थात् बगीचे के किनारे पर खंभा लगाना संभव है।

सूत्र की सहायता से समीकरण को हल करने पर $x^2 + 7x - 60 = 0,$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

इसलिए, $x = 5$ या -12.

क्योंकि x गेट B से खंभे की दूरी होने के कारण x का मूल्य धनात्मक होना चाहिए।

इसलिए, $x = -12$ को छोडकर, $x = 5$ लेना चाहिए।

अतः खंभे को बगीचे के किनारे पर गेट B से 5 मी. की दूरी पर तथा गेट A से 7 मी की दूरी पर लगाया जाएगा।

प्रयत्न कीजिए।

1. किसी भी समीकरण को हल करने से पहले उसके विविक्तिकर के ज्ञान का लाभ कैसे होता है। उसका मूल्य किसकी जानकारी प्रदान करता है?
2. ऐसे तीन द्वीघातीय समीकरण लिखिए जिसमें एक के दो भिन्न वास्तविक मूल प्राप्त हो। दूसरे के कोई भी वास्तविक मूल न हो और तीसरे के केवल एक वास्तविक मूल हों।

उदाहरण-16. समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विक्तिकर ज्ञात कर उसके मूलों के लक्षण बताइए। यदि वे वास्तविक हो तो उनके मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a = 3, b = -2$ तथा $c = \frac{1}{3}$

अतः विवक्तिकर $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

अतः इस समीकरण के दो वास्तविक समान मूल होंगे।

इसलिए $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a},$ अर्थात् $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}, = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}.$

अभ्यास - 5.4

1. निम्नलिखित समीकरणों के मूलों के लक्षण बताइए। यदि मूल वास्तविक हो तो उनका मूल्य ज्ञात कीजिए।

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. यदि दिये गये समीकरणों के दो समान वास्तविक मूल हो तो k का मूल्य ज्ञात कीजिए।

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x-2) + 6 = 0$ $(k \neq 0)$

3. क्या इस प्रकार के आम के बगीचे का निर्माण कर सकते है जिसमें उसकी लम्बाई, चौडाई की दुगुनी हो तथा क्षेत्रफल 800 व.मी. हो? यदि हाँ तो उसकी लम्बाई तथा चौडाई ज्ञात कीजिए।

4. दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु का गुणन फल 48 वर्ष थी क्या ऐसी स्थिति की संभावना है? यदि हाँ तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

5. क्या एक ऐसे आयत का निर्माण हो सकता है जिसकी परिमिति 80 मी. तथा क्षेत्रफल 400 व.मी. हो? यदि हाँ तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए। (आपको प्राप्त हुए उत्तर की समीक्षा कीजिए।)

अतिरिक्त अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं हैं।]

1. एक तल पर कुछ बिन्दु ऐसे डाले गये है कि उनमें से कोई तीन असंरेखीय है। प्रत्येक बिन्दु को शेष सभी बिंदुओं को जोड़कर रेखा खण्ड खींचे गये। यदि 10 रेखाएँ हो तो बिन्दुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

2. दो अंको वाली संख्या में अंको का गुणनफल 8 हैं यदि उसमें 18 को जोडा जाय तो उनके स्थान परिवर्तित हो जाते है उस संख्या को ज्ञात कीजिए।

3. एक 8 मी. लम्बाई वाले तार के दो भाग किए गए 1 और प्रत्येक भाग को वर्गाकार में मोडा गया। इस तार को कहाँ से काटा जाय जिससे वर्गों के क्षेत्रफल का योग 2 व.मी. होगा।

$$\left[\text{सूचना} \; : x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2\right]$$

4. विनय तथा प्रवीण एक घर को 6 दिनों में रंगते है। विनय अकेला उस काम को प्रवीण से 5 दिन कम में पूरा कर सकता है। विनय अकेला उस काम को कितने दिनों में पूरा कर सकता है?

5. बताइए द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलो का योग $\frac{-b}{a}$ $(a \neq 0)$ होगा।

6. बताइए कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का गुणनफल '$\frac{c}{a}$' होगा।

7. यदि उस भिन्न तथा व्युक्रम का योग $2\frac{16}{21}$ हो तो उस भिन्न को ज्ञात कीजिए।

प्रस्तावित परियोजना

द्विघातीय समीकरणों को रेखीय पद्धति से हल करना

- दो या तीन द्विघातीय बहुपदीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ $(a \neq 0)$ लेकर भिन्न -भिन्न स्थिती जैसे $a > 0, a < 0, b = 0$ को आलेखिय पध्दती व्दारा हल करो।

हमने क्या चर्चा की

इस अध्याय में हमने इन तथ्यों की चर्चा की।

1. x चरराशी वाले द्विघातीय समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ होता है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ तथा $a \neq 0$ होगा।
2. वास्तविक संख्या α को समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ का मूल कहते है, यदि $a\alpha^2 + + b\alpha + c = 0$ होगा।
3. यदि हम $ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$, के दो खण्ड गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करेंगे तब उनके खण्डों का शून्य लेकर मूलों को ज्ञात किया जाता है।
4. एक समीकरण को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा भी हल किया जाता है।
5. द्विघातीय सूत्र : समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ के मूलों को

   इस $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, जहाँ $b^2 - 4ac \geq 0$. रूप में प्राप्त कर सकते है।
6. एक द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ में

   (i) यदि $b^2 - 4ac > 0$, हो तो दो भिन्न वास्तविक मूल प्राप्त होंगे।

   (ii) यदि $b^2 - 4ac = 0$, हो तो दो समान वास्तविक मूल प्राप्त होंगे।

   (iii) यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो तो वास्तविक मूल नहीं होंगे।

अध्याय

6

श्रेणियाँ
(Progressions)

6.1 प्रस्तावना

सृष्टि में, आपने अवलोकन किया होगा कि अनेक वस्तुएँ कुछ निश्चित पैटर्न की होती है जैसे सूर्यमुखी की पंखुडियाँ, मधुमक्खी के छत्ते के रन्ध्र, मकई (Maizecole) के दाने, अनान्नस और देवदारु-फल के ऊपर की सर्पिली आकृतियाँ आदि।

दिये हुए प्रत्येक उदाहरण में क्या आप पैटर्न देख सकते हैं? हम इनमें प्राकृतिक पैटर्न देखते है जो लगातार आते हैं परन्तु इसमें वृद्धि नहीं होती है। सूर्यमुखी की पंखुडियाँ समान्यतः दूरी पर बढती हैं। मधुमक्खी के छत्ते में अभिन्न पट्भुजाकार सेल, प्रत्येक षट्भुज के चारों ओर सममित रूप से व्यवस्थित रहते है। इसी तरह, अनान्नस,.... आदि के सर्पिल आकृतियों में अन्य प्राकृतिक पैटर्न ज्ञात कर सकते है।

आप कुछ अन्य पैटर्न देख सकते हैं जो हमारे दैनिक जीवन में घटते हैं। कुछ उदाहरण है:-

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... के मानों में अंतिम अंको की (इकाई के स्थान के अंको की) सूची $4, 6, 4, 6, 4, 6,$ ...... है।

(ii) मेरी बैंक परीक्षा की प्रारंभिक तैयारी में पैटर्न पर आधारित समस्याएँ कर रही है। इनमें से एक है, ‘‘निम्न पैटर्न में अगले दो पद ज्ञात कीजिए: $1, 2, 4, 8, 10, 20, 22$ ....

(iii) उषा ने नौकरी के लिए आवेदन किया और चयनित हुई। उसका प्रारंभिक मासिक वेतन ₹8000 और ₹500 की वार्षिक वृद्धि के साथ नौकरी मिली। उसका प्रथम, द्वितीय, तृतीय,.... वर्ष में वेतन (रूपयों में) क्रमशः $8000, 8500, 9000$ ..... होगा।

(iv) सीढी पर डण्डे की लम्बाईयाँ नीचे से ऊपर एक समान 2 से.मी. से कम होती है। नीचे के डण्डे की लम्बाई 45 से.मी. है। ऊपर से नीचे की ओर प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... 8वें डण्डे की लम्बाईयाँ (से.मी.में) क्रमशः $45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31$ रहती है।

ऊपर लिखे हुए संख्याओं के पैटर्न में, क्या आप पदों में कुछ संबंध देख सकते हैं? उदाहरण (i) में, दिये हुए पैटर्न में दो पदों में संबंध है, वे एक के बाद एक आते है, अर्थात 4 और 6 एकान्तर क्रम में बार-बार आते है।

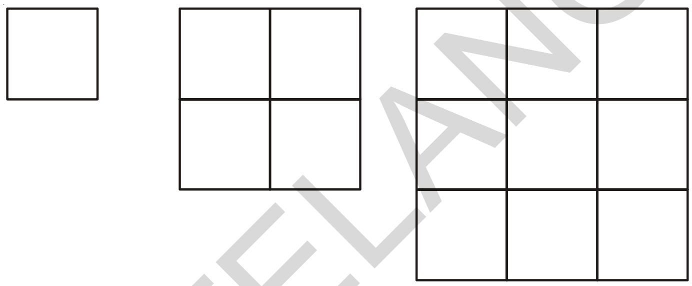
अब हम उदाहरण (ii) का पैटर्न ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। उदाहरण (iii) और (iv) मे, प्रत्येक सूची में अंको में संबंध, कुछ निश्चित अंक से बढ रहा है। दी हुई सूची 8000, 8500, 9000, ... में प्रत्येक अनुवर्ती (succeeding) पद, उसके पूर्ववर्ती (preceding) पद में 500 मिलाने पर प्राप्त होता है।

जब कि 45, 43, 41, ... में प्रत्येक अनुवर्ती पद उनके पूर्ववर्ती पद में '-2' मिलाने पर प्राप्त होता है। अब हम प्रगामी पैटर्न के और अधिक उदाहरण देख सकते हैं।

(a) एक बचत-योजना में, एक धनराशि 3 वर्ष पश्चात उसके $\frac{5}{4}$ गुना होती है। ₹8000 निवेश की 3, 6, 9 वर्ष पश्चात परिपक्व धनराशि (₹ मे.) क्रमशः 10000, 12500, 15625, 19531.25 होगी।

(b) 1, 2, 3, ... इकाई भुजा के वर्गों में क्रमशः इकाई वर्गों की संख्या क्रमशः

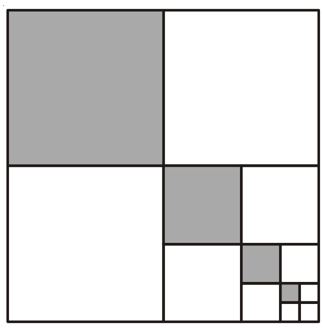
$1^2, 2^2, 3^2$, ... होगी।



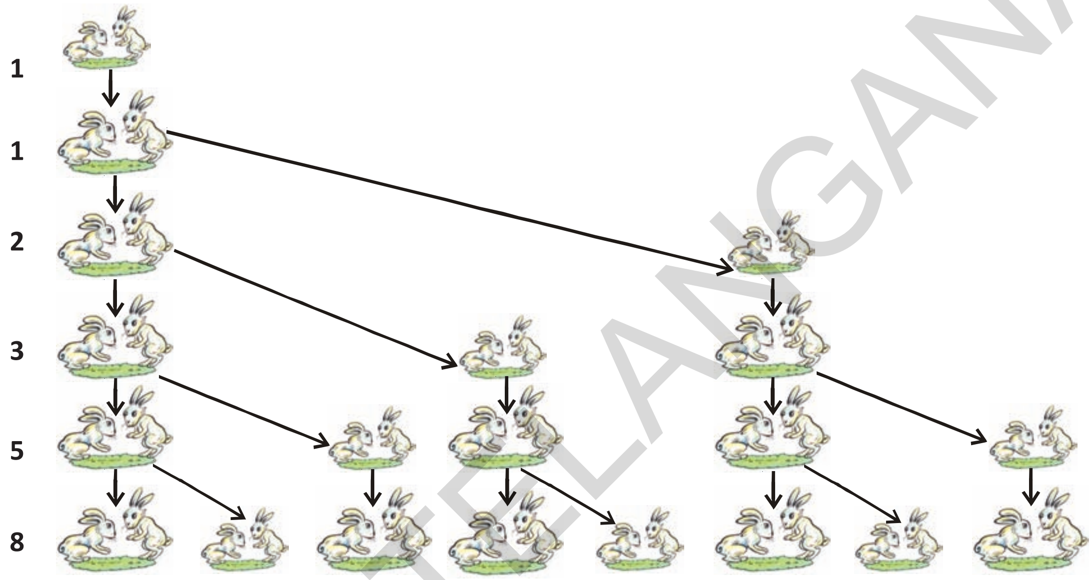
(c) हेमा की बेटी जब एक वर्ष की थी तब उसने गुल्लक में ₹1000 रखे। और प्रतिवर्ष उस धनराशि को ₹500 से बढाया गया। गुल्लक में उसके प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ,....... जन्मदिन पर जमा धनराशि (₹ में) क्रमशः 1000, 1500, 2000, 2500, ... होगी।

(d) निम्न आकृति में, वर्ग के प्रथम, द्वितीय, तृतीय .... छायांकित क्षेत्र को भिन्न क्रमशः

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$, ... होंगे।



(e) एक खरगोश का युग्म, उनके प्रथम मास मे, निर्माण करने के लिए बहुत छोटे रहते है। द्विघातीय मास और प्रत्येक बाद के माह में, वे एक नया युग्म निर्माण करते है। खरगोश का प्रत्येक नया युग्म उनके द्वितीय माह में और प्रत्येक उतरवर्ती माह में (नीचे आकृति देखिए।) एक नया युग्म निर्माण करते है। एक भी खरगोश की मृत्यु नहीं होती है, ऐसा मानते हुए प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... छठे माह के प्रारंभ में खरगोश के युग्मों की संख्या क्रमशः 1, 1, 2, 3, 5, 8 होगी।



ऊपर के उदाहरणों में, हम कुछ पैटर्न देखते हैं। इनमें से कुछ में, हमें ज्ञात होता है कि अनुवर्ति पदों को कोई **निश्चित संख्या से जोडने पर,** और कुछ में **किसी निश्चित संख्या से गुणा करने पर**, अगले पद प्राप्त होते हैं, और दूसरे उदाहरणों में हम देखते हैं कि वे क्रमिक संख्याओं के वर्ग है, आदि

इस अध्याय में, इनमें से कुछ पैटर्न की चर्चा करेंगे जिनमें अनुवर्ती पद, उसके पूर्ववर्ती पद में कुछ निश्चित संख्या मिलाने पर प्राप्त होता है अथवा पूर्ववर्ती पद को कुछ निश्चित संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है। हम, इनका n वाँ पद कैसे प्राप्त करते हैं और n क्रमिक पदों का योग भी कैसे ज्ञात करते हैं, यह देखेंगे? और इसका उपयोग हमारे दैनिक जीवन में आनेवाली समस्याओं के लिए करते हैं।

इतिहास : 400 वर्ष ई. पूर्व 'बेबीलोनियन्स' अंकगणित और गुणोत्तर श्रेणी जानते थे ऐसे प्रमाण मिले। वोथिन्स (570 CE) के अनुसार, ये श्रेणियाँ पुरातन ग्रीक लेखकों को ज्ञात थी। भारतीय गणितज्ञों में, आर्यभट्ट (470 CE) प्रथम थे जिन्होंने उनके प्रसिद्ध पुस्तक 'आर्यभट्टीयम' जो 499 CE में लिखी गई, में प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग और घन का योग ज्ञात करने के लिए सूत्र दिए। उन्होंने समानान्तर श्रेणी जो p पद से प्रारंभ होती है, n पदों का योग ज्ञात करने के लिए भी सूत्र दिए हैं। भारतीय गणितज्ञ ब्रहमगुप्त (598 CE), महावीर (850 CE) और भास्कर (1114-1185 CE) ने भी वर्गों का और घनों का योग ज्ञात करने में योगदान दिया।

6.2 समानान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression)

निम्न संख्याओं की सूची लीजिए:

(i) 1, 2, 3, 4, . . .   (ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . .   (iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

सूची में प्रत्येक संख्या **पद** कहलाती है।

ऊपर की प्रत्येक सूची में पद दिये गये हैं तो क्या आप इसके आगे के पद लिख सकते हैं? यदि हाँ तो आप इसे कैसे लिखेंगे? शायद पैटर्न या नियम के अनुसार अब अवलोकन करते हैं, और नियम लिखते हैं।

(i) में, प्रत्येक पद, पूर्वपद से 1 अधिक है।

(ii) में, प्रत्येक पद, पूर्वपद से 30 कम है।

(iii) में प्रत्येक पद, पूर्वपद में 1 मिलाने पर प्राप्त होता है।

(iv) में, सूची में सभी पद 3 है। अर्थात प्रत्येक पद, पूर्वपद में 0 मिलने से प्राप्त होता है।

(v) में, प्रत्येक पद, पूर्वपद में – 0.5 मिलाने पर (अर्थात इसमे से 0.5 घटाने पर) प्राप्त होता है।

ऊपर की सभी सूचियों में, हम देखते हैं कि अनुवर्ती पद, इसके पूर्ववर्ती पद में कुछ निश्चित मिलाने पर या घटाने पर प्राप्त होता है। संख्याओं की ऐसी सूची, समानान्तर श्रेणी **(AP)** कहलाती है।

प्रयत्न कीजिए।

(i) इनमें से कौनसी समानान्तर श्रेणी है और क्यों?

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ...   (b) 2, 5, 7, 10, 12, 15, ...

(c) -1, -3, -5, -7, ...

(ii) कोई भी तीन समानान्तर श्रेणियाँ लिखिए।

6.2.1 समानान्तर श्रेणी क्या है?

हम देखते हैं कि "**समानान्तर** श्रेणी एक संख्याओं की सूची है जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त, प्रत्येक पद, उसके पूर्व पद में कुछ निश्चित संख्या मिलाने पर प्राप्त होती है।"

यह निश्चित संख्या, A.P. का "**सार्व अन्तर**" कहलाता है। याद रखिए कि यह धन, ऋण या शून्य भी हो सकता है।

माना कि A.P. का प्रथम पद, a_1, द्वारा, द्वितीय a_2, द्वारा, . . ., n वा पद a_n द्वारा और सर्व अन्तर d द्वारा निर्दिष्ट है। तब AP होगी: $a_1, a_2, a_3, . . ., a_n$.

इसलिए, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = . . . = a_n - a_{n-1} = d$.

अब हम AP के कुछ और उदाहरण देखते हैं :

(a) एक विद्यालय के सुबह की सभा में एक कतार में खडे कुछ विद्यार्थियों की ऊँचाई (से.मी.में) 147 , 148, 149, . . ., 157 हैं।

(b) एक शहर में जनवरी माह में, एक सप्ताह के लिए दर्ज किया गया न्यूनतम तापमान (सेल्सियस डिग्री में), आरोही क्रम में व्यवस्थित किया है:

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) ₹1000 के कुल ऋण का 5% प्रतिमाह देने पर शेष धनराशि (₹ में) 950, 900, 850, 800, . . ., 50 है।

(d) एक विद्यालय द्वारा 1 से 12 तक कक्षाओं के सर्वोत्तम छात्र को दिये गये नकद पुरस्कार क्रमशः 200, 250, 300, 350, . . ., 750 है।

(e) यदि प्रति माह 50 रु. की बचत की गई तो 10 माह के लिए प्रत्येक माह के बाद कुल बचत (₹ में) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500. होगी।

सोचिए - चर्चा कीजिए

1. ऊपर दी गई सूची के प्रत्येक, कैसे A.P. बनती है, सोचिए। अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए।
2. ऊपर की सूची में प्रत्येक का सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए। कब यह धन (+ve) रहता है, सोचिए।
3. धनात्मक समानान्तर श्रेणी बनाइए जिसमें सार्व अन्तर, छोटा धन परिमाण होगा।
4. समानान्तर श्रेणी बनाइए जिसमें सार्वअन्तर, बडा धन परिमाण होगा।
5. सामानान्तर श्रेणी बनाइए जिसमें सार्व अन्तर ऋणात्मक होगा।

A.P. का सामान्य रूप : प्रत्येक A.P. को लिख सकते हैं:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . .$$

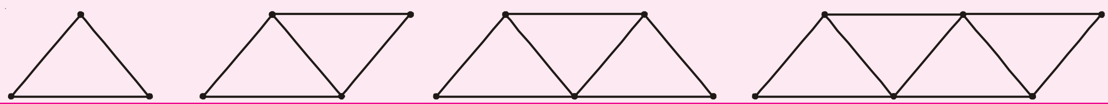
यह A.P का सामान्य रूप कहलाता है जहाँ प्रथम पद 'a' और सार्वअन्तर 'd' है।

उदाहरण के लिए, 1, 2, 3, 4, 5, ...में प्रथम पद 1 है और सार्व अंतर भी 1 है।

2, 4, 6, 8, 10 ..... में प्रथम पद और सार्वअन्तर क्या है?

क्रियाकलाप

(i) निम्न आकृतियों को माचिस की तीलियों से (Match sticks) बनाइए।



(ii) प्रत्येक आकृति के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या लिखिए।

(iii) सूची के संख्याओं में, क्या आप सार्वअन्तर ज्ञात कर सकते है?

(iv) क्या इन संख्याओं की सूची, AP बनाती है?

6.2.2 समानान्तर श्रेणी के प्रायल (PARAMETERS)

ध्यान दीजिए कि 6.2.1 विभाग में, ऊपर के उदाहरण (a), (e) में, सीमित पद है। ऐसी AP सीमित A.P. कहलाती है। इन समानान्तर श्रेणियों के अंतिम पद भी हैं। विभाग 6.2 में, उदाहरण (i) से (v) में समानान्तर श्रेणी कहलाती है। ऐसी श्रेणियों के अंतिम पद नहीं रहते हैं। तथा इनका अंत कभी नहीं होता।

यह कीजिए।

तीन उदाहरण सीमित A.P. के और 3 उदाहरण अनन्त AP के लिए लिखिए।

अब, A.P. के बारे में जानने के लिए, आपको कौनसी न्यूनतम जानकारी होना आवश्यक है? क्या प्रथम पद जानना पर्याप्त है? अथवा क्या केवल सार्वअन्तर जानना पर्याप्त है?

हम देख सकते हैं कि हमें दोनों अर्थात प्रथम पद a और सार्व अन्तर d. जानना आवश्यक है। हमारे लिए, समानान्तर श्रेणी पूर्ण करने के लिए ये दो प्रयत्न पर्याप्त है।

उदाहरणार्थ, यदि प्रथम पद $a = 6$ है और सार्व अन्तर d 3 है, तब A.P. 6, 9,12, 15, . . . होगी।

और यदि a, 6 है और d, – 3 है, तब समानान्तर श्रेणी 6, 3, 0, –3, . . .होगी।

इसी प्रकार, जब

$a = -7$, $d = -2$, तब A.P. – 7, – 9, – 11, – 13, . . . होगी।

$a = 1.0$, $d = 0.1$, तो A.P. 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, . . . होगी।

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, तो A.P. is 0, $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$, 6, . . . होगी।

$a = 2$, $d = 0$, तो A.P. is 2, 2, 2, 2, . . . होगी।

अतः,यदि आप जानते हैं कि a और d क्या है, जानते है, तब A.P. की सूची तैयार कर सकते है।

अब, दूसरे प्रकार से सोचते हैं। यदि आपको संख्याओं की सूची दी गई है, आप कैसे बता सकते हैं कि ये A.P. है या नहीं है?

उदाहरण के लिए, संख्याओं की सूची 6, 9, 12, 15, . . . , के लिए:

हम अनुवर्ती पदों में अन्तर की जाँच करते है। दी हुई सूची में, $a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

हम देखते हैं कि $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \ldots = 3$

यहाँ किसी भी दो क्रमित पदों में अन्तर 3 है। अतः दी हुई सूची A.P. है जिसका प्रथम पद a 6 है और सार्वअन्तर d, 3 है।

संख्याओं की सूची : 6, 3, 0, – 3, . . ., के लिए,

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$$

इसलिए, यह भी A.P. है जिसका प्रथम पद 6 और सार्वअन्तर –3 है. अतः हम देखते है कि यदि अनुवर्ती पदों में अन्तर, निश्चित संख्या रहती है, तब यह समानांतर श्रेणी रहती है।

सामान्यतः, A.P. $a_1, a_2, \ldots, a_n$, हम कह सकते हैं,

$$d = a_{k+1} - a_k \quad \text{जहाँ } k \in \mathrm{N}; k \geq 1$$

जहाँ a_{k+1} और a_k क्रमशः $(k + 1)$ वा और k वा पद है।

मान लीजिए, संख्याओं की सूची 1, 1, 2, 3, 5, ... है। इसकी ओर देखने पर, आप बता सकते हैं कि कोई भी दो क्रमित संख्याओं के बीच का अन्तर समान नहीं है। अतः, यह A.P. नहीं है।

सूचना : A.P. में d ज्ञात करने के लिए, जहाँ A.P. : 6, 3, 0, – 3, . . .,है, हमने 3 में से 6 घटाया है तथा 6 में से 3 नहीं घटाया। हमें $(k + 1)$ वे पद में से k वा पद घटाना चाहिए यद्यपि (k+1) वाँ पद छोटा हो सकता है और दिए हुए A.P. में 'd' ज्ञात करने के लिए, हमें सभी $a_2 - a_1, a_1 - a_2 \ldots.$. ज्ञात करना आवश्यक नहीं है। इनमें से केवल कोई एक ज्ञात करना पर्याप्त है।

यह कीजिए

1. कोई भी समानान्तर श्रेणी लीजिए।
2. A.P. के प्रत्येक पद की एक निश्चित संख्या मिलाइए।
3. इसी तरह, A.P. के प्रत्येक पद से एक निश्चित संख्या घटाइए। परिणामी संख्याओं की सूची बनाइए।
4. A.P. के प्रत्येक पद को एक निश्चित संख्या से गुणा कीजिए या भाग कीजिए और परिणामी संख्याओं की सूची बनाइए।
5. प्रत्येक स्थिति में परिणामी सूचि A.P. है या नहीं इसकी जाँच कीजिए।
6. आपका निष्कर्ष क्या है?

अब, कुछ उदाहरणों पर विचार करते है:

उदाहरण-1. A.P. : $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ ...., के लिए, प्रथम पद a और सार्व अन्तर d. लिखिए। और 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $a = \frac{1}{4}$; $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

ध्यान रखिए कि, जब हम जानते हैं कि दी हुई संख्याएँ A.P. में है, किसी भी क्रमित पदों को उपयोग करते हुए हम 'd' ज्ञात कर सकते हैं।

7 वा पद होगा : $\frac{-5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-11}{4}$

उदाहरण-2. निम्न में से कौनसी A.P. बनाती है? यदि वहA.P. है तो आगामी दो पदों को लिखिए।

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . . (iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) $x, 2x, 3x, 4x$ ......

हल: (i) $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

अर्थात् प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ समान है।

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची से A.P. बनाती है जिसका सार्व अन्तर $d = 6$.

अगले दो पद होंगे : $22 + 6 = 28$ और $28 + 6 = 34$.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

अर्थात, प्रत्येक समय $a_{k+1} - a_k$ समान है।

अतः दी हुई संख्याओं की सूची A.P. बनाती है। जिसमें सार्व अन्तर $d = -2$.

अगले दो पद होंगे : $-5 + (-2) = -7$ और $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

क्योंकि $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, दी हुई संख्याओं की सूची A.P. नही है।

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

यहाँ, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

अतः दी हुई संख्याओं की सूची से A.P. नही बनती।

(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

अर्थात, प्रत्येक समय $a_{k+1} - a_k$ बराबर है।

$\therefore$ इसलिए दी हुई सूची A.P. है।

अगले दो पद $4x + x = 5x$ और $5x + x = 6x$.

अभ्यास - 6.1

1. नीचे दी हुई कौनसी स्थिति में, सम्मिलित संख्याओं की सूची समानान्तर श्रेणी बनाती है, और क्यों?

   (i) एक टैक्सी का किराया प्रथम कि.मी. के लिए ₹ 20 है और तत्पश्चात प्रति कि.मी. टैक्सी किराया ₹ 8 बढता है।

   (ii) बेलन (cylinder) में भरी हुई हवा की मात्रा जब प्रत्येक समय बेलन की $\frac{1}{4}$ हवा निर्वात पम्प द्वारा निकलती है।

   (iii) एक कुँए की खुदाई करने का मूल्य, प्रति मीटर खुदाई करने के बाद यदि प्रथम मीटर की खुदाई के लिए ₹150 और तदन्तर प्रत्येक मीटर के ₹50 बढता है।

   (iv) प्रत्येक वर्ष के अंत में खाते में जमा धन राशि जब ₹10000 चक्रवृद्धि ब्याज 8 % प्रति वर्ष से जमा किये हो।

2. A.P. के प्रथम चार पदों को लिखिए, जब प्रथम पद a और सार्वअन्तर d नीचे दिए है:

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. निम्न A.P. के लिए, प्रथम पद और सार्व अन्तर लिखिए।

(i) 3, 1, – 1, – 3, . . . (ii) – 5, – 1, 3, 7, . . .

(iii) $\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{9}{3},\frac{13}{3},....$ (iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, . . .

4. निम्न में से कौन से A.P. में है? यदि वे A.P. बनाती हैं, सार्व अन्तर d ज्ञात कीजिए, तथा अगले 3 पदों को लिखिए।

(i) 2, 4, 8, 16, . . . (ii) $2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},....$

(iii) – 1.2, – 3.2, – 5.2, – 7.2, . . . (iv) – 10, – 6, – 2, 2, . . .

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2},....$ (vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, . . .

(vii) 0, – 4, – 8, –12, . . . (viii) $-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},....$

(ix) 1, 3, 9, 27, . . . (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2},\sqrt{8},\sqrt{18},\sqrt{32},.....$

(xiii) $\sqrt{3},\sqrt{6},\sqrt{9},\sqrt{12},.....$

6.3 समानान्तर श्रेणी का n वाँ पद (n^{th} Term of Arithmatic Progression):

मान लीजिए, उषा ने एक नौकरी के लिए आवेदन किया था और उस में उसका चयन किया गया। उसे प्रारंभिक मासिक वेतन ₹8000 का प्रस्ताव, वार्षिक वृद्धि ₹500 के साथ, किया था। पाँचवे वर्ष उसका मासिक वेतन क्या होगा?

इसका उत्तर देने के लिए, सर्वप्रथम हमें द्वितीय वर्ष का मासिक वेतन कितना होगा? यह जानना होगा।

वह ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500.

इसी प्रकार से हम तृतीय, चतुर्थ और पाँचवे वर्ष का मासिक वेतन, पूर्व वर्ष के वेतन में ₹500 योग करने के द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

अतः, तृतीय वर्ष के लिए वेतन = ₹(8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (तृतीय वर्ष के लिए)

= ₹ 9000

चतुर्थ वर्ष के लिए वेतन = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

$= ₹\ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(4-1)} \times 500]$ (चतुर्थ वर्ष के लिए)

$= ₹\ 9500$

पाँचवे वर्ष के लिए वेतन $= ₹\ (9500 + 500)$

$= ₹\ (8000+500+500+500+500)$

$= ₹\ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(5-1)} \times 500]$ (पाँचवे वर्ष के लिए)

$= ₹\ 10000$

ध्यान से देखिए, हमें संख्याओं की सूची प्राप्त हो रही है।

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ये संख्याएँ समानान्तर श्रेणी में हैं।

उपरोक्त संख्याओं के क्रम को देखते हुए क्या हम उसका 6 वें वर्ष में, 15 वें वर्ष में का मासिक वेतन ज्ञात कर सकते हैं? तथा अभी तक वह उसी स्थान में कार्यरत हैं ऐसा मान कर उसका 25 वें वर्ष में मासिक वेतन क्या होगा? यहाँ हम पूर्व वर्ष के वेतन में ₹500 जोडकर वर्तमान वेतन ज्ञात कर सकते हैं। क्या हम इस प्रक्रिया को छोटा बना सकते हैं? आपको पहले ही उपरोक्त वेतन प्राप्त की हुई विधि से, कुछ विचार धारणाएँ आयी होंगी।

15 वे वर्ष के लिए वेतन = 14 वे वर्ष का वेतन + ₹500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ बार}}\right] + ₹500$$

$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(15-1)} \times 500] = ₹\ 15000$

अर्थात, प्रथम वेतन $+ (15-1) \times$ वार्षिक वृद्धि

इसी तरह, 25 वे वर्ष का मासिक वेतन होगाः

$₹\ [8000 + \mathbf{(25-1)} \times 500] = ₹\ 20000$

= प्रथम वेतन $+ \mathbf{(25-1)} \times$ वार्षिक वृद्धि

इस उदाहरण से हम 15 वाँ पद, अथवा 25 वाँ पद लिखते हैं इसके बारे में कुछ अनुमान लगा सकते हैं। इसी अनुमान का उपयोग करते हुए, अब हम A.P. का n वाँ पद ज्ञात करते हैं।

माना कि $a_1, a_2, a_3, \ldots$ AP है जिसका प्रथम पद a_1 यह a है और सार्वअन्तर d है।

तब, द्वितीय पद $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2-1)}\, d$

तृतीय पद $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

चतुर्थ पद $a_4 = a3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

बनावट (पैटर्न) को देखने पर हम कह सकते हैं कि ***n*th** पद $a_n = a + (n - 1)\, d$.

अतः, समानान्तर श्रेणी जिसका प्रथम पद **'*a*'** और सार्व अन्तर ***d*** है, का ***n*** वा पद $a_n = a + \mathbf{(n - 1)\, d}$. द्वारा दिया जाता है।

$\boldsymbol{a_n}$ समानान्तर श्रेणी A.P. का सामान्य पद कहलाता है।

यदि A.P. में *m* पद हो तब अंतिम पद को $\boldsymbol{a_m}$ से निर्देशित करते हैं जिसे कभी कभी ***l*** द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

A.P. के पदों को ज्ञात करना : ऊपर दिए गए सुझाव द्वारा हम समानान्तर श्रेणी के विभिन्न पदों को ज्ञात कर सकते हैं। कुछ उदाहरणों को ध्यान से देखिए :

उदाहरण-3. समानान्तर श्रेणि 5, 1, –3, –7 . . . का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $a = 5,\ d = 1 - 5 = -4$ और $n = 10$.

हमें ज्ञात है, $a_n = a + (n - 1)\, d$

अतः, $a_{10} = 5 + (10 - 1)(-4) = 5 - 36 = -31$

इसलिए, दिये हुए ए.पी. का 10 वाँ पद = – 31.

उदाहरण-4. समानान्तर श्रेणी 21, 18, 15, . . . का कौनसा पद – 81 होगा क्या कोई पद 0 होगा? आपके उत्तर का कारण दीजिए।

हल: यहाँ, $a = 21,\ d = 18 - 21 = -3$ और यदि $a_n = -81$, हमें *n*. ज्ञात करना है।

जैसे,
$$a_n = a + (n - 1)\, d,$$
$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$
$$-81 = 24 - 3n$$
$$-105 = -3n$$

अतः, $n = 35$

इसलिए, दिए हुए A.P. का 35 वाँ पद – 81 रहता है। दूसरा, हम जानना चाहते हैं कि क्या कोई 'n' है जिसके लिए $a_n = 0$. यदि ऐसा *n* उपलब्ध है, तब

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

अर्थात्, $3(n - 1) = 21$

i.e., $n = 8$

अतः, आठवाँ पद '0' है।

उदाहरण-5. A.P. को निर्धारण कीजिए जिसका तीसरा पद 5 और 7 वा पद 9 है।

हल : हमें ज्ञात है,

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

और
$$a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

रैखिक समीकरण (1) और (2), के युग्म को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$a = 3,\ d = 1$$

इसलिए, अपेक्षित समानान्तर श्रेणी 3, 4, 5, 6, 7, . . . है।

उदाहरण-6. क्या 5, 11, 17, 23, ... संख्याओं की सूची का 301 पद है, इसकी जाँच कीजिए।

हल: हमें प्राप्त है

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6,\ a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6,\ a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

क्योंकि $(a_{k+1} - a_k)$ $k = 1, 2, 3,$ आदि के लिए समान है, दी हुई संख्याओं की सूची AP में है।

अब, इस समानान्तर श्रेणी के लिए, हमें ज्ञात है $a = 5$ और $d = 6$.

हम इस पूर्वधारणा के साथ आरंभ करते हैं कि इस समानान्तर श्रेणी का 'n' वाँ पद मान लीजिए, 301 है। हम देखते हैं कि कौनसे $a_n = 301$ के लिए 'n' अस्तित्व में है।

हमें ज्ञात है,

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

अतः, 301 पद रहने के लिए, यह रहना चाहिए।

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

अथवा $\qquad 301 = 6n - 1$

अतः, $\qquad n = \dfrac{302}{6} = \dfrac{151}{3}$

किन्तु, n धन पूर्णांक रहना चाहिए। (क्यों?)

अतः दी हुई संख्याओं की सूची का 301 पद नहीं है।

उदाहरण-7. कितनी दो अंकों की संख्याएँ तीन से विभाजित हैं?

हल : 3 से विभाजित दो अंकों की संख्याओं की सूची है।

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

क्या यह AP है ? हाँ, यह A.P. है। यहाँ, $a = 12, d = 3, a_n = 99.$

क्योंकि $\qquad a_n = a + (n - 1)\, d,$

हमें प्राप्त है $99 = 12 + (n - 1) \times 3$

अर्थात, $87 = (n - 1) \times 3$

अर्थात, $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

अर्थात, $n = 29 + 1 = 30$ (अत: 99 तीसरा पद है।)

अतः, 3 से विभाजित 0 दो-अंकों की संख्याएँ 30 है।

उदाहरण-8. नीचे दी गई A.P. श्रेणी के अंत से 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

A.P. : 10, 7, 4, . . ., – 62.

हल : यहाँ, $a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62$,

$l = a + (n - 1) d$

अंतिम पद से ग्यारहवाँ पद ज्ञात करने के लिए, हम A.P. में कुल पदों की संख्या ज्ञात करते है।

अतः, $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

अर्थात $-72 = (n - 1)(-3)$

अर्थात $n - 1 = 24$

या $n = 25$

इसलिए, दिए हुए A.P. में 25 पद है।

अंत से 11वाँ पद, श्रेणी का 15 वाँ पद होगा। (ध्यान दीजिए कि यह 14 वाँ पद नहीं होगा। क्यों?)

इसलिए, $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

अर्थात, आखिर से ग्यारहवाँ पद – 32 होगा।

सूचना : आखिर से 11वाँ पद A.P. के 11 वें पद के समान रहता है जिसका प्रथम पद – 62 और अंतर 3 है।

उदाहरण-9. ₹ 1000 की धन-राशि 8% प्रतिवर्ष सरल ब्याज की दर से निवेश की गई। प्रत्येक वर्ष के अन्त में ब्याज की गणना कीजिए। क्या यह ब्याज की संख्याएँ, समानान्तर श्रेणी में रहती है? यदि हाँ, तो 30 वर्ष के आखिर में ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि सरल ब्याज की गणना करने के लिए सूत्रः

सरल ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

अतः, प्रथम वर्ष के अन्त में ब्याज $=$ ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100} =$ ₹ 80

द्वितीय वर्ष के अन्त में ब्याज $=$ ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100} =$ ₹ 160

तृतीय वर्ष के अन्त में ब्याज = $\dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹240$

इसी तरह, हम चतुर्थ, पाँचवे, छठे, इत्यादि वर्षों के अन्त में ब्याज मालूम कर सकते हैं। अतः, प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... वर्ष के अन्त में क्रमशः ब्याज होगा -

$$80, 160, 240, \ldots$$

यह समानान्तर श्रेणी है क्योंकि सूची में दो क्रमिक पदों में अन्तर 80 है।

अर्थात $d = 80$. और $a = 80$.

इसलिए, 30 वर्ष के अन्त में ब्याज ज्ञात करने के लिए, हम a_{30} ज्ञात करेंगे।

अब, $a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

अतः, 30 वर्षों के आखिर में ब्याज ₹2400 होगा।

उदाहरण-10. एक फूलों की क्यारी में, प्रथम पंक्ति में 23 गुलाब के पौधे, द्वितीय में 21, तृतीय में 19 इत्यादि है। अंतिम पंक्ति में 5 गुलाब के पौधे हैं। फूलों की क्यारी में कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल: प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... पंक्तियों में गुलाब के पौधों की संख्या :

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

इन अंकों से समानान्तर श्रेणी बनती है। (क्यों?)

माना कि फूलों की क्यारी में पंक्तियों की संख्या n है।

तब, $a = 23, d = 21 - 23 = -2, a_n = 5$

जैसे कि, $a_n = a + (n - 1)\,d$

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

अर्थात $-18 = (n - 1)(-2)$

अर्थात $n = 10$

अतः, फूलों की क्यारी में 10 पंक्तियाँ है।

अभ्यास - 6.2

1. निम्न सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए, दिया है कि AP में प्रथम पद a सार्व अन्तर d और n^{th} पद a_n है।

S. No.	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0

(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. ज्ञात कीजिए
   (i) A.P. 10, 7, 4 ...... का 30 वाँ पद
   (ii) A.P. : $-3, \frac{-1}{2}, 2, \ldots$.. का 11 वाँ पद
3. निम्न समानान्तर श्रेणियों के लिए अपेक्षित पदों को ज्ञात कीजिए।
   (i) $a_1 = 2;\ a_3 = 26$, a_2 ज्ञात कीजिए।
   (ii) $a_2 = 13;\ a_4 = 3$, a_1, a_3 ज्ञात कीजिए।
   (iii) $a_1 = 5; a_4 = 9\frac{1}{2}$, a_2, a_3 ज्ञात कीजिए।
   (iv) $a_1 = -4; a_6 = 6$, a_2, a_3, a_4, a_5 ज्ञात कीजिए।
   (v) $a_2 = 38;\ a_6 = -22$, a_1, a_3, a_4, a_5 ज्ञात कीजिए।
4. 3, 8, 13, 18, . . . , समानान्तर श्रेणी में कौनसा पद 78 होगा?
5. निम्न A.P. के प्रत्येक में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
   (i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$
6. A.P.: 11, 8, 5, 2 .... श्रेणि का –150 पद होगा, इसकी जाँच कीजिए।
7. A.P. का 31 वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 11वाँ पद 38 और 16 वाँ पद 73 है।
8. यदि A.P. का तीसरा और नौवाँ पद क्रमशः 4 और – 8 है, तो इस AP का कौनसा पद शून्य होगा?
9. किसी A.P. का 17 वाँ पद, इसके 10 वें पद से 7 अधिक है। सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।
10. दो A.P. के समान सार्व अन्तर हैं। इनके 100 वें पदों में अंतर 100 है। इनके 1000 वें पदों में अन्तर क्या होगा?
11. कितनी तीन-अंकों की संख्याएँ 7 से विभाजित हैं?
12. 10 और 250 के बीच 4 के कितने गुणज (multiple) है?
13. n के किस मान के लिए, दो APs: 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, . . . का n वाँ पद बराबर होगा?
14. A.P. का निर्धारण कीजिए जिसका तृतीय पद 16 है और 7 वाँ पद, 5 वें पद से 12 अधिक है।

15. A.P. : 3, 8, 13, . . ., 253 के आखिर से 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

16. A.P. के चौथे और आठवें पदों का योग 24 है और छठे और दसवें पदों का योग 44 है। A P के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

17. सुब्बाराव ने 1995 में वार्षिक वेतन ₹ 5000 से नौकरी करना प्रारंभ किया और उसे प्रतिवर्ष ₹ 200 की वृद्धि प्राप्त हुई। कौनसे वर्ष में उसकी आय ₹ 7000 होगी?

6.4 समानान्तर श्रेणी में प्रथम *n* पदों का योग (Sum of First N terms in Arithmetic Progression):

हम पुनः, विभाग 6.1 में दी हुई स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें, हेमा की बेटी जब एक वर्ष की थी तब उसने गुल्लक में ₹1000 रखे है, उसके द्वितीय जन्मदिवस पर ₹1500 उसके तृतीय जन्मदिवस पर ₹2000 रखती है और इसी प्रकार से इसे आगे जारी रखती है। जब उसकी बेटी 21 वर्ष की होगी तब गुल्लक में कितना धन जमा होगा?

यहाँ प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ, ... जन्मदिन पर क्रमशः गुल्लक में धनराशि (रूपयों में) क्रमशः 1000, 1500, 2000, 2500, . . . 21 वे जन्मदिन पर गुल्लक में कुल धनराशि ज्ञात करने के लिए, हमें ऊपर की सूचि में के 21 संख्याओं को लिखना होगा तदन्तर इन्हे जोडना होगा। क्या तुम नहीं सोचते, यह विधि बहुत क्लिष्ट और समय का अत्यधिक व्यय करने वाली है? क्या हम लघु विधि बना सकते हैं?

यदि हम यह योग करने की पद्धति ज्ञात कर सकते हैं तब यह संभव है।

6.4.1 'गॉस' ('Gauss') ने पदों का योग कैसे ज्ञात किया?

कार्ल फ्रेड्रिच गॉस (1777-1855) जर्मन के महान गणितज्ञ थे।

हम जानते हैं, जब गौस की आयु केवल 10 वर्ष थी, तब उसे हल करने के लिए प्रश्न दिया गया। उसे, 1 से 100 तक धन पूर्णांको का योग ज्ञात करने के लिए पूछा गया था। उसने तुरन्त उत्तर दिया कि योग 5050 है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि वे इसे कैसे कर सके? उसने लिखाः

मान लो $S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$

तदन्तर, अंको का क्रम बदलकर उसने लिखा

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

इन दोनों का उसने योग किया तो एक के बाद एक पद पाया। अतः, उसने योग किया -

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101$ (100 बार) (इसकी जाँच कीजिए और चर्चा कीजिए)

अतः, $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050,$ अर्थात योग $= 5050.$

6.4.2 A.P. के n पदों का योग (Sum of n terms of an AP)

अब, हम उसी तकनीक का उपयोग करेंगे जो A.P. के प्रथम n पदों का योग ज्ञात करने के लिए गॉस द्वारा किया गया था। $a, a + d, a + 2d, \ldots$

इस AP का n वाँ पद $a + (n - 1)\, d$ रहता है।

माना कि S_n से AP के प्रथम n पदों का योग निर्दिष्ट है।

क्रम बदलने पर हमें प्राप्त होगा।

$$\therefore S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + a + (n - 1)d$$

$$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \ldots + a$$

इन पदों को जोडने पर, $2S_n = (2a + (n - 1)d) + (2a + (n - 1)d) + \ldots + (2a + (n - 1)d)$ (n बार)

$$= n(2a + (n - 1)d)$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}] = \frac{n}{2} \text{ [प्रथम पद + अंतिम पद] } = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

यदि AP के प्रथम और अंतिम पर दिये हुए है और सार्व अन्तर दिया हुआ नहीं है तब S_n ज्ञात करने के लिए

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ बहुत उपयुक्त है। या $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ जहाँ l अंतिम पद है।

हेमा की बेटी के लिए धन

अब हम प्रारंभ में पूछे गए प्रश्न की ओर वापिस लौटेंगे। हेमा की बेटी के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ, ... जन्मदिन पर गुल्लक में जमा किया धन (रू.में.) क्रमशः 1000, 1500, 2000, 2500, . . ., है।

यह AP है। हमें उसके 21 वें जन्मदिन पर गुल्लक में जमा कुल धनराशि ज्ञात करना है, अर्थात इस AP के प्रथम 21 पदों का योग ज्ञात करना है।

यहाँ, $a = 1000$, $d = 500$ और $n = 21$. सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 1000 + (21 - 1) \times 500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000 + 10000]$$

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

अतः, उसके 21 वें जन्मदिवस पर जमा की गई धनराशि ₹12600 है।

हम AP के प्रथम n पदों का योग निर्देशित करने के लिए S के स्थान पर S_n का उपयोग करते हैं जिससे हम जानते हैं कि हमने कितने पदों का योग किया। AP के प्रथम 20 पदों का योग निर्दिष्ट करने के लिए हम S_{20} लिखते हैं। प्रथम n पदों के योग के लिए सूत्र चार परिणामों को, S_n, a, d और n को सम्मिलित करता है। यदि हम इनमें से कोई भी तीन जानते हैं, तब हम चतुर्थ भी जान सकते है।

टिप्पणी : AP के प्रथम n पदों का योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग में अंतर, इसका n वाँ पद रहता है। अर्थात, $a_n = S_n - S_{n-1}$.

यह कीजिए।

निम्न A.P. में प्रत्येक की सूचित संख्या का योग ज्ञात कीजिए।

(i) 16, 11, 6 .....; 23 पद (ii) –0.5, –1.0, –1.5, ...; 10 पद

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$....., 10 पद

कुछ और उदाहरण देखिए:

उदाहरण-11. यदि AP के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है और प्रथम पद 10 है। 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $S_n = 1050; n = 14, a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a+13d] = 140+91d$$

$$910 = 91d$$

$$\therefore \quad d = 10$$

$$\therefore \quad a_{20} = 10 + (20 - 1)\, 10 = 200$$

उदाहरण-12. AP : 24, 21, 18, . . .के कितने पद लेना चाहिए जिससे उनका योग 78 हो?

हल : यहाँ, $a = 24, d = 21 - 24 = -3, Sn = 78$. हमें n ज्ञात करना आवश्यक है। माना कि A.P. में पदों की संख्या n है, अतः हमें n ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि, $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

अतः, $78 = \frac{n}{2}[48+(n-1(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$

अथवा $3n^2 - 51n + 156 = 0$

या $\quad n^2 - 17n + 52 = 0$

या $\quad (n-4)(n-13) = 0$

या $\quad n = 4$ अथवा 13

n के दोनों मान स्वीकृत है। अतः, पदों की संख्या या तो 4 अथवा 13 है।

टिप्पणियाँ:

1. इस स्थिति में, प्रथम 4 पदों का योग = प्रथम 13 पदों का योग= 78.
2. दो उत्तर संभाव्य है क्योंकि 5 वें से 13 वें पदों तक का योग शून्य होगा। क्योंकि a धनात्मक और d ऋणात्मक रहने के कारण ऐसा है ताकि कुछ पद धन (+ve) और कुछ पद ऋण (-ve) है और एक दूसरे का निरसन (cancel) करते है।

उदाहरण-13. योग ज्ञात कीजिए :

(i) प्रथम 1000 प्राकृतिक संख्या (ii) प्रथम n प्राकृतिक संख्या

हल :

(i) माना कि $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ AP के प्रथम n पदों के योग के लिए सूत्र

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ का उपयोग करते हुए,

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

अतः, प्रथम 1000 धनात्मक पूर्णांकों का योग 500500 है।

(ii) माना कि $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

यहाँ $a = 1$ और अंतिम पद l यह n है।

इसलिए $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ अथवा $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

> अतः, प्रथम $\boldsymbol{n}$ धन पूर्णांको का योग दिया जाता है: $\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

उदाहरण-14. संख्याओं की सूची के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसकी n वाँ पद, $a_n = 3 + 2n$ द्वारा दिया गया है।

हल : क्योंकि $a_n = 3 + 2n$,

अतः, $a_1 = 3 + 2 = 5$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$
$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$
$$\ldots$$

संख्याओं की सूची 5, 7, 9, 11, . . होगी।

यहाँ, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ इत्यादि।

अतः, इनसे AP बनती है जिसका सार्व अंतर $d = 2$.

S_{24}, ज्ञात करने के लिए, हमारे पास $n = 24, a = 5, d = 2$. है।

इसलिए, $$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12(10 + 46) = 672$$

अतः, संख्याओं की सूची के प्रथम 24 पदों का योग 672 होगा।

उदाहरण-15. एक TV सेट निर्माता, ने तृतीय वर्ष में 600 सेट और सातवें वर्ष में 700 सेट तैयार किये हैं। वे मानते हैं कि प्रतिवर्ष उत्पादन निश्चित संख्या में एक समान बढता है। ज्ञात कीजिए।

(i) प्रथम वर्ष में उत्पादन (ii) 10वें वर्ष में उत्पादन

(iii) प्रथम 7 वर्ष में कुल उत्पादन

हल : (i) क्योंकि प्रतिवर्ष उत्पादन में निश्चित संख्याओं में एक समान वृद्धि होती है, प्रथम, द्वितीय, तृतीय,..... वर्षों में निर्मित TV सेट्स की संख्याओं से AP बनेगा।

माना कि, n वर्ष में निर्मित TV सेट्स की संख्या a_n से निर्देशित है।

तब, $a_3 = 600$ और $a_7 = 700$

अथवा $a + 2d = 600$

ओर $a + 6d = 700$

इस समीकरण को हल करने से, हमें $d = 25$ और $a = 550$.

इसलिए, प्रथम वर्ष में TV सेट्स का उत्पादन 550

(ii) अब $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

अतः, 10 वें वर्ष में TV सेट्स का उत्पादन 775 है।

(iii) $$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

इसतरह, प्रथम 7 वर्ष में TV सेट्स का कुल उत्पादन 4375 है।

अभ्यास- 6.3

1. निम्न A.P. के योग ज्ञात कीजिए।

   (i) 2, 7, 12, . . ., 10 पदों तक (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 पदों तक

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . .,100 पदों तक (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, ...,$ पदों तक

2. नीचे दी गई संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

   (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + . . . + 10$

   (iii) $-5 + (-8) + (-11) + . . . + (-230)$

3. A.P. में,

   (i) दिया गया है, $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ तो n और S_n ज्ञात कीजिए।

   (ii) दिया गया है, $a = 7$, $a_{13} = 35$ तो d और S_{13} ज्ञात कीजिए।

   (iii) दिया गया है, $a_{12} = 37$, $d = 3$ तो a और S_{12} ज्ञात कीजिए।

   (iv) दिया गया है, $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ तो d और a_{10} ज्ञात कीजिए।

   (v) दिया गया है, $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ तो n और a_5 ज्ञात कीजिए।

   (vi) दिया गया है, $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ तो n और a ज्ञात कीजिए।

   (vii) दिया गया है, $l = 28$, $S = 144$, और कुल 9 पद हो तो a ज्ञात कीजिए।

4. A.P. का प्रथम और अंतिम पद क्रमशः 17 और 350 है। यदि सार्व अंतर 9 हो तो इसमें कितने पद रहते है? और इनका योग क्या होगा?

5. A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका द्वितीय और तृतीय पद क्रमशः 14 और 18 है।

6. यदि A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 और 17 पदों का योग 289 हो तो प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

7. बताइए कि $a_1, a_2, . . ., a_n, . . .$ से A.P. बनती है। जहाँ a_n निम्न के अनुसार परिभाषित है:

   (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

   प्रत्येक स्थिति में प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

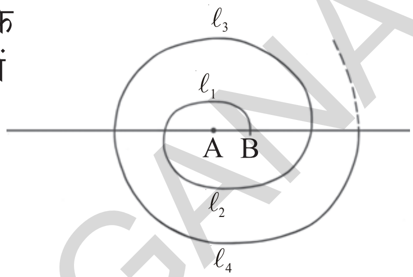
8. यदि A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ हो तो प्रथम पद क्या होगा? (याद कीजिए, प्रथम पद S_1 रहता है) प्रथम दो पदों का योग क्या होगा? द्वितीय पद क्या होगा? इसी तरह तृतीय, 10 वाँ और n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

9. 6 से विभाजित प्रथम 40 धन पूर्णांको का योग ज्ञात कीजिए।

10. एक पाठशाला के छात्रों को उनके समग्र शैक्षिक निष्पादन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹ 700 की धनराशी उपयोग में लाई जाती है। यदि प्रत्येक पुरस्कार इसके पूर्व पुरस्कार से ₹ 20 कम हो तो प्रत्येक पुरस्कार का मान बताइए।

11. एक पाठशाला में, विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए पाठशाला में और चारों ओर वृक्षारोपण करने का सोचा। ऐसा निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक विभाग, जिस कक्षा में वे पढ़ रहे है, उस कक्षा के समान वृक्षों का रोपण करेंगे, जैसे कक्षा I का विभाग 1 वृक्ष लगायेगा, कक्षा II का विभाग दो वृक्ष लगायेंगे, इस प्रकार कक्षा 12 तक वृक्षों का रोपण करेंगे। प्रत्येक कक्षा के तीन विभाग है। विद्यार्थियों द्वारा कितने वृक्षों का रोपण किया गया?

12. एक पेयक (Spiral) निरन्तर अर्थवृत्तों से बना है जिसके केन्द्र बारी-बारी से A और B पर रहते हैं। आकृति 5.4 में बताइये जैसे केन्द्र A से प्रारंभ होकर अर्थव्यास 0.5 से.मी., 1.0 से.मी., 1.5 से.मी., 2.0 से.मी. के अर्थवृत बना है। ऐसे 13 क्रमिक अर्थ वृत्तों से बने हुए पेयक की लम्बाई क्या होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



[संकेत: निरन्तर अर्धवृत्तों की लंबाईयाँ क्रमशः $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ और केन्द्र A, B, A, B, . . ., है।]

13. 200 लट्ठों को नीचे की भाँति ढेर लगाया गया : अंतिम (bottom) की पंक्ति में 20 , अगली पंक्ति में 19, इसके आगामी पंक्ति में 18 इस तरह लट्ठे रखे गए। 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गये और शीर्ष पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?

14. बालटी और गेंद दौड में, प्रारंभिक बिंदु पर एक बालटी रखी गई जो प्रथम गेंद से 5 मी. दूर है और दूसरे गेंद सरल रेखा में एक दूसरे से 3 मी.की दूरी पर रखे है। सरल रेखा पर 10 गेंद हैं।

धावक, बालटी से प्रारंभ करती है, प्रथम गेंद उठाकर वापिस दौडती है और इसे बालटी में छोड देती है। पुनः दूसरा गेंद उठाने के लिए दौडती है, इसे बालटी में छोड ने के लिए दुबारा बालटी की ओर दौडती है, इसी प्रकार सभी गेंद बालटी में डालने तक वह लगातार दौडती है। धावक को कुल कितनी दूरी दौडना पडा है?

[संकेत: प्रथम और द्वितीय गेंद उठाकर बालटी में डालने के लिए, धावक द्वारा दौडी गयी कुल दूरी (मीटर में) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

6.5 गुणोत्तर श्रेणी (Geometric Progressions)

दिए गए पैटर्न को देखिए।

(i) 30, 90, 270, 810 ..... (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}.....$

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

ऊपर की सूचियों में से प्रत्येक में, पद दिया हो तो क्या हम आगे का पद लिख सकते हैं?

(i) में, प्रत्येक पद, पूर्व पद को 3 से गुणा करने पर अलग पद प्राप्त होता है।

(ii) में प्रत्येक पद, पूर्व पद को $\frac{1}{4}$ से गुणा करने पर अलग पद प्राप्त होता है।.

(iii) में प्रत्येक पद, पूर्व पद को 0.8 से गुणा करने पर अलग पद प्राप्त होता है।

ऊपर की सभी सूचियों में, हम देखते हैं कि पूर्व पद को कुछ निश्चित संख्या से गुणा करने पर क्रमित पद प्राप्त होते हैं। ऐसी संख्याओं की सूची से गुणोत्तर श्रेणी **(G.P.)** बनती है। यह निश्चित संख्या G.P. का सार्व अनुपात (Common ratio) 'r' कहलाता है। अतः ऊपर के उदाहरण (i), (ii), (iii) में सार्व अनुपात क्रमशः 3, $\frac{1}{4}$, 0.8 हैं।

G.P. के प्रथम पद को 'a' और सार्व अनुपात को r से निर्दिष्ट करते हैं। द्वितीय पद प्राप्त करने के लिए, G.P. के नियमानुसार हमें प्रथम पद को सार्व अनुपात r से गुणा करना चाहिए। जहाँ $a \neq 0$, $r \neq 0$ और $r \neq 1$

$\therefore$ द्वितीय पद $= ar$

तृतीय पद $= ar \,.\, r = ar^2$

$\therefore$ a, ar, ar^2 ..... यह GP का सामान्य रूप कहलाता है।

ऊपर के G.P. में, कोई भी पद (प्रथम पद के अलावा) और इसके पूर्व पद में अनुपात 'r' रहता है।

i.e., $\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = ... = r$

यदि,G.P. के प्रथम पद को a_1, द्वितीय पद को a_2 ..... n के पद की a_n से निर्दिष्ट करते है तब

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

$\therefore$ $a_1, a_2, a_3 .... a_n ...$ संख्याओं की सूची, गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) कहलाती है यदि प्रत्येक पद अशून्य है और $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ जहाँ n प्राकृतिक संख्या है $r \neq 1$ और $n \geq 2$.

यह कीजिए।

निम्न में से कौनसी G.P. नहीं है, ज्ञात कीजिए।

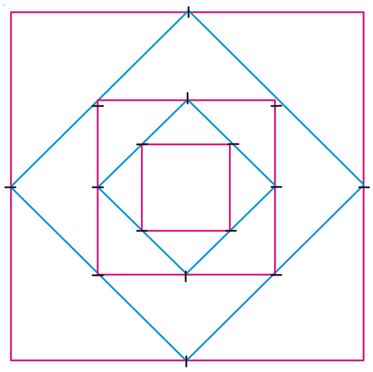
1. 6, 12, 24, 48, ...
2. 1, 4, 9, 16, ...
3. 1, –1, 1, –1, ...
4. –4, –20, –100, –500, ...

G.P. के कुछ और उदाहरण हैं :

(i) एक व्यक्ति उसके चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह उनमें से प्रत्येक को उस पत्र की प्रतिलिपि बनाने को कहता है और इसी सूचना के साथ चार भिन्न व्यक्तियों को देने के लिए कहता है ताकि उसी प्रकार से पत्रों की श्रृंखला आगे बढाई जाए। यह श्रृंखला टूटी नहीं ऐसा मानते हुए, प्रथम, द्‌वितीय, तृतीय,.......चरण पर पत्रों की संख्या क्रमशः 1, 4, 16, 64, 256 .... होगी।

(ii) यदि एक बैंक में ₹500/- 10% प्रतिवर्ष की चक्रवृद्‌धि ब्याज की दर से जमा कराने पर प्रथम, द्‌वितीय, तृतीय, ... वर्ष के अन्त में कुल धनराशि

550, 605, 665.5 ......होगी।



(iii) दिए गये वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोडकर वर्ग बनाया गया। इसी प्रकार से दूसरे वर्ग के अंतर्गत तीसरा वर्ग बनाया गया है। यह प्रक्रिया निरंतर जारी रखी गई। यदि प्रथम वर्ग की भुजा 16 से.मी. हो तब प्रथम, द्‌वितीय, तृतीय, ... वर्ग के क्षेत्रफल क्रमशः

256, 128, 64, 32, ...होंगे।

(iv) प्रारंभ में, एक दोलन 18 से.मी. के चाप से दोलन करता है। प्रत्येक क्रमिक दोलन में चाप की पूर्व लम्बाई के 0.9 गुना होती है। अतः, प्रथम, द्‌वितीय, तृतीय ..... दोलन में चाप की लम्बाई क्रमशः

18, 16.2, 14.58, 13.122...... होगी।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

1. ऊपर की सूची में से प्रत्येक G.P. क्यों है?
2. G.P. के बारे में जानने के लिए हमें कम से कम कौनसी जानकारी आवश्यक है?

अब, जब प्रथम पद 'a' और सार्व अनुपात 'r' दिया है तब G.P. कैसे तैयार करते हैं, यह हम सीखते हैं, और दी गई संख्याओं की सूची, G.P. है या नहीं इनकी जाँच कैसे करते हैं, यह भी सीखते हैं।

उदाहरण-16. यदि प्रथम पद $a = 3$, और सार्व अनुपात $r = 2$ है तो G.P. लिखिए।

हल : क्योंकि इसका प्रथम पद 'a' है, यह आसानी से लिखा जा सकता है।

हम जानते है कि G.P. में, प्रत्येक पूर्ववर्ती पद सार्व अनुपात 'r' से गुणा करने पर प्राप्त किया जाता है। अतः द्वितीय पद प्राप्त करने के लिए हमें प्रथम पद $a = 3$ को सार्वअनुपात $r = 2$ से गुणा करना चाहिए।

$\therefore$ द्वितीय पद $= ar = 3 \times 2 = 6$ ($\because$ प्रथम पद $\times$ सार्वअनुपात)

इसी तरह तृतीय पद = द्वितीय पद $\times$ सार्व अनुपात

$= 6 \times 2 = 12$

यदि इसी प्रकार से हम अग्रसर होते हैं, हमें निम्न G.P. प्राप्त होती है। 3, 6, 12, 24,..... .

उदाहरण-17. G.P. लिखिए यदि $a = 256$, $r = \dfrac{-1}{2}$

हल : G.P. का सामान्य रुप $= a, ar, ar^2, ar^3, ...$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), 256\left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32 ......$$

उदाहरण-18. G.P. $25, -5, 1, \dfrac{-1}{5}$ का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि यदि G.P. के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... पद क्रमशः a_1, a_2, a_3 .... है तब

सार्वअनुपात $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = ...$

यहाँ $a_1 = 25$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$.

अतः सार्व अनुपात $r = \dfrac{-5}{25} = \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-1}{5}$.

उदाहरण-19. निम्न संख्याओं की सूची में कौनसी G.P. है?

(i) 3, 6, 12, ... (ii) 64, −32, 16, (iii) $\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{8}, ...$

हल : (i) हम जानते हैं कि $a_1, a_2, a_3, ...a_n .....$ संख्याओं की सूची G.P. कहलाती है जबकि प्रत्येक पद अशून्य रहना चाहिए और $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ...\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

यहाँ सभी पद अशून्य हैं। तथा

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2 \text{ ओर } \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$$

अर्थात, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची, G.P. बनाती है जिसका सार्व अनुपात 2 है।

(ii) सभी पद अशून्य हैं।

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2} \qquad \text{और} \qquad \frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$$

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची, G.P. बनाती है जिसका सार्व अनुपात $\frac{-1}{2}$ है।

(iii) सभी पद अशून्य हैं।

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

यहाँ $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची, G.P. नहीं है।

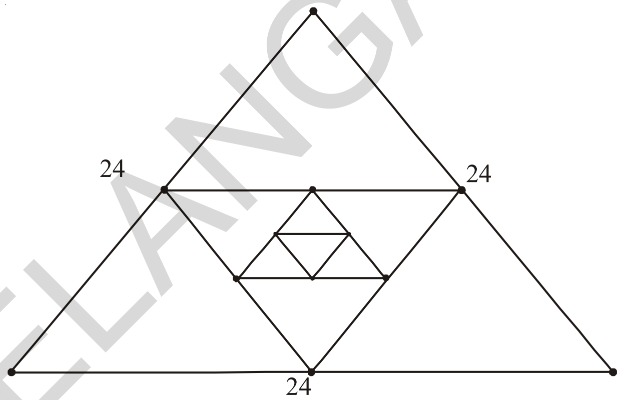
अभ्यास - 6.4

1. निम्न स्थितियों में से किस स्थिति में, इससे सम्मिलित संख्याओं की सूची G.P. बनाती है?

    (i) शर्मीला का प्रथम वर्ष के लिए वेतन ₹ 5,00,000 है और प्रतिवर्ष 10% की वृद्धि के साथ वेतन पाना अपेक्षित है।

    (ii) यदि जीने (Stair case) के कुल 30 सोपान है तो प्रत्येक सोपान बनाने के लिए आवश्यक इंटों की संख्याओं की सूची .... तल का सोपान बनाने के लिए 100 इंटो की आवश्यकता है और आगामी प्रत्येक सोपान को, पूर्ववर्ती सोपान से 2 इंटे कम लगती है।

    (iii) एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 24 से.मी. है। इसके मध्य बिंदुओं को मिलाकर दूसरा त्रिभुज बनाया गया, जिसके मध्य बिंदुओं को मिलाकर और एक त्रिभुज बनाया गया और यह प्रक्रिया निरंतर जारी रखी गई।



2. G.P. के तीन पदों को लिखिए जब प्रथम पद 'a' और सार्व अनुपात 'r' दिया है?

    (i) $a = 4;\quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5}\,;\quad r = \frac{1}{5}$

    (iii) $a = 81;\quad r = \frac{-1}{3}$ (iv) $a = \frac{1}{64}\,;\quad r = 2$

3. निम्न में से कौनसी G.P. है? यदि वह G.P. है, तो और तीन पद लिखिए।

    (i) 4, 8, 16 ..... (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}$.....

    (iii) 5, 55, 555, ... (iv) $-2, -6, -18$ .....

    (v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$..... (vi) $3, -3^2, 3^3$, ...

    (vii) $x, 1, \frac{1}{x}$,..... (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}$.....

    (ix) 0.4, 0.04, 0.004, ...

4. x ज्ञात कीजिए ताकि $x, x+2, x+6$ ये गुणोत्तर श्रेणी के क्रमित पद हो।

6.6 G.P. का *n* वाँ पद

मान लीजिए, एक ''जीवाणु संवर्धन'' (culture) में प्रति घण्टा जीवाणु-समूह (bcteria) की संख्या, तिगुना होती है, इस समस्या का परीक्षण करते है। मूलतः एक संवर्ध में वर्तमान समय पर 30 जीवाणु - समूह हैं। तब 4 घण्टे में जीवाणु - समूह की संख्या क्या होगी? इसका उत्तर देने के लिए सर्वप्रथम द्वितीय घण्टे में जीवाणु- समूह की संख्या कितनी होगी, ज्ञात कीजिये।

क्योंकि प्रति घण्टा यह तिगुनी होती है,

द्वितीय घण्टे में जीवाणु -समूह की संख्या= $3 \times$ प्रथम घण्टे में जीवाणु समूह की संख्या

$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$

$= 30 \times 3^{(2-1)}$

$= 90$

तृतीय घण्टे में जीवाणु की संख्या= $3 \times$ द्वितीय घण्टे में जीवाणु की संख्या

$= 3 \times 90 \qquad = 30 \times (3\times3)$

$= 30 \times 3^2 \qquad = 30 \times 3^{(3-1)}$

$= 270$

चतुर्थ घण्टे की जीवाणु की संख्या = $3 \times$ तृतीय घण्टे में जीवाणु की संख्या

$= 3 \times 270 \qquad = 30 \times (3\times3\times3)$

$= 30 \times 3^3 \qquad = 30 \times 3^{(4-1)}$

$= 810$

ध्यान से, संख्याओं की प्राप्त सूची देखिए,

30, 90, 270, 810, ...

ये संख्याएँ G.P. में हैं। (क्यों?)

अब ऊपर बने हुए पैटर्न को देखने से, क्या आप 20 वें घण्टे में जीवाणु की संख्या ज्ञात कर पाओगे?

हमने ऊपर जिस प्रकार से जीवाणु की संख्या प्राप्त की है, उससे आपको पहले ही कुछ अनुमान लगा होगा। उसी पैटर्न का उपयोग करते हुए, 20 वें घण्टे में जीवाणु की संख्या की हम गणना करेंगे।

20 वें घण्टे में जीवाणु की संख्या $= 30 \times \underbrace{(3 \times 3 \times \ldots \times 3)}_{\text{19 terms}}$

$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$

इस उदाहरण से आपने G.P. का 25 वाँ पद, या 35 वाँ पद या n वाँ पद कैसे लिखते हैं, इसकी कुछ धारणा बनायी होगी। माना कि a_1, a_2, a_3 ..... G.P. में है जिसका प्रथम पद a_1 और सार्व अनुपात r है।

तब द्‌वितीय पद $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

तृतीय पद $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

चतुर्थ पद $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

....

....

उपरोक्त पदों को देखने पर, हम कह सकते हैं कि n वाँ पद $a_n = ar^{n-1}$

अतः, G.P. का n वाँ पद जिसका प्रथम पद 'a' और सार्वअनुपात 'r' है, दिया जाता है, $a_n = ar^{n-1}$.

कुछ उदाहरण देखिए:

उदाहरण-20. G.P. का 20 वाँ और n पद ज्ञात कीजिए:

G.P. : $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$.......

हल : यहाँ $a = \frac{5}{2}$ और $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

तब $a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{20}}$

और $a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$

उदाहरण-21. G.P. : 2, $2\sqrt{2}$, 4 ..... का कौनसा पद 128 होगा ?

हल : यहाँ $a = 2$ $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

माना कि G.P. का n वाँ पद = 128

तब $a_n = ar^{n-1} = 128$

$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$

$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \quad n = 13.$$

इसलिये, G.P. का 13 वाँ पद 128 है।

उदाहरण-22. G.P. में तृतीय पद 24 और छठा पद 192 है। 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a_3 = ar^2 = 24 \quad ...(1)$

$a_6 = ar^5 = 195 \quad ...(2)$

(2) को (1) से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है, $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{195}{24}$

$$\Rightarrow \quad r^3 = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow \quad r = 2$$

$r = 2$ मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम $a = 6$ प्राप्त करते है।

$\therefore \; a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072.$

अभ्यास-6.5

1. प्रत्येक G.P. के लिए सार्व अनुपात 'r' ज्ञात कीजिए और तदन्तर a_n ज्ञात कीजिए।

 (i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}.........$ (ii) $2, -6, 18, -54$

 (iii) $-1, -3, -9, -27$ .... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}.........$

2. G.P. : 5, 25, 125, ...का 10 वाँ पद और n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

3. प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी का निर्दिष्ट पद ज्ञात कीजिए।

 (i) $a_1 = 9;\; r = \frac{1}{3};\; a_7$ ज्ञात कीजिए। (ii) $a_1 = -12;\; r = \frac{1}{3};\; a_6$ ज्ञात कीजिए।

4. G.P. का कौनसा पद

 (i) 2, 8, 32, ... 512 होगा? (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ ...... 729 होगा ?

 (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}.....\; \frac{1}{2187}$ होगा?

5. G.P. का 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 8 वाँ पद 192 और सार्व अनुपात 2 है।

6. गुणोत्तर श्रेणी का चतुर्थ पद $\frac{2}{3}$ और 7 वाँ पद $\frac{16}{81}$ है। गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

7. यदि 162, 54, 18 ..... और $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}$.... गुणोत्तर श्रेणी के n वाँ पद समान हैं। n का मान ज्ञात कीजिए।

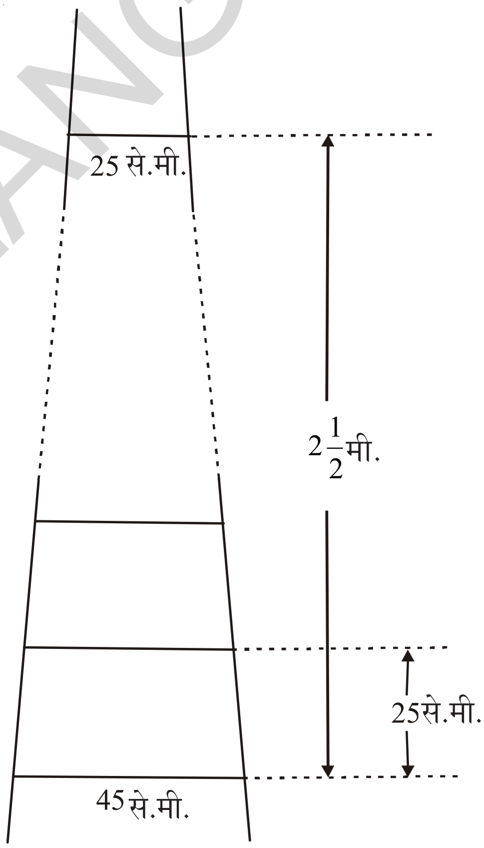
वैकल्पिक अभ्याय

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।]

1. A.P. : 121, 117, 113, . . ., का कौनसा प्रथम पद ऋणात्मक होगा?
[संकेत : $a_n < 0$ के लिए n ज्ञात कीजिए।]

2. A.P. के तृतीय और सातवें पद का योग 6 और उनका गुणनफल 8 है। A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

3. एक सीढ़ी के 25 डण्डे पृथक है। डण्डे की लम्बाई एक समान (uniformly) रूप से नीचे से ऊपर तक 45 से.मी. से 25 से.मी. तक घटती है। यदि शीर्ष और तल के डण्डे $2\frac{1}{2}$ मी. दूरी पर हो तब सीढी के लिए कितनी लंबाई की लकडी अवश्यक है?
[संकेत: डण्डों की संख्या = $\frac{250}{25}+1$]

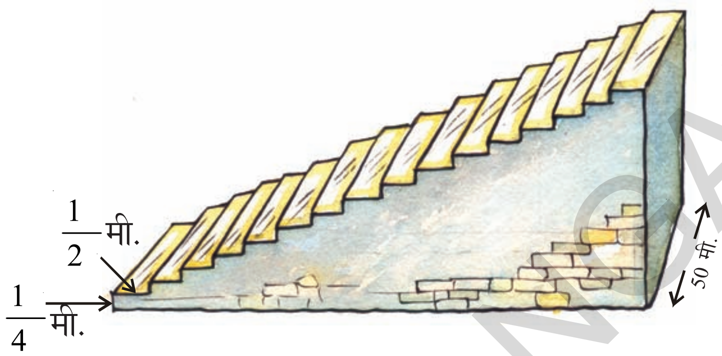


4. एक गली (row) के घरों को क्रम से 1 से 49 तक अंकित किया गया। बताइए कि x का मान इस प्रकार है कि x से अंकित घर के पूर्व के घरों के चिन्हित अंको का योग, इसके आमागी घरों के चिन्हित अंको के योग के बराबर होगा। x का मान ज्ञात कीजिए।
[संकेत: $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. एक फुटबॉल के मैदान के चारो ओर बैठने की जगह जिसमें 15 सोपान समाविष्ट हैं। प्रत्येक सोपान 50 मी. लंबा है और ठोस कांक्रिट से बना है।

प्रत्येक सोपान $\frac{1}{4}$ मी. ऊँचा और ऊपरी तल $\frac{1}{2}$ मी. (आकृति 5.8 देखिए) है। सीढ़ी बनाने के लिए कांक्रिट के कुल आयतन की गणना कीजिए।

[संकेत : प्रथम सोपान बनाने के लिए आवश्यक कांक्रीट का आयतन $= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 50$ मी^{3}]



6. 150 मज़दूर 1 कार्य को कुछ निश्चित दिनों में पूर्ण करने के लिए वचनबद्ध हैं। दूसरे दिन चार मज़दूर कार्य छोडकर चले गए। तीसरे दिन चार मज़दूर कार्य छोडकर चले गए और यही प्रक्रिया जारी रही। कार्य पूर्ण करने के लिए 8 दिन अधिक लगे। कार्य कितने दिनों में पूर्ण हुआ?

[माना कि, कार्य पूर्ण करने के लिए कुल दिनों की संख्या 'x' है।

तब $150x = \frac{x+8}{2}[2\times150+(x+8-1)(-4)]$

[उत्तर $x = 17 \Rightarrow x + 8 = 17 + 8 = 25$]

7. एक मशीन का मूल्य ₹ 5,00,000 है। यदि प्रथम वर्ष में 15% द्वितीय वर्ष में $13\frac{1}{2}$% तृतीय वर्ष में 12% दर से। इसके मूल्य का अवमूल्यन (depreciates) होता है। 10 वें वर्ष के अन्त में इसका मूल्य कितना होगा, जब सभी % दर, लागत मूल्य पर प्रयुक्त हैं?

[कुल अवमूल्यन $= 15 + 13\frac{1}{2} + 12 + \ldots$ दस पदों तक

$S_n = \frac{10}{2}[30 - 13.5] = 82.5\%$

$\therefore$ 10 वर्ष पश्चात का मूल्य $=100 - 82.5 = 17.5$ अर्थात 5,00,000 का 17.5%)

प्रस्तावित परियोजना

- **ग्रीड पेपर द्वारा जाँच किजिए की दी गई श्रेणी (A.P.) है या नही।**
- **ग्रीड पेपर के उपयोग से (A.P.) के n पदों को योगफल ज्ञात किजिए।**

हमने क्या चर्चा की ?

इस अध्याय में आपने निम्न बातें सीखी :

1. समानान्तर श्रेणी (A.P.) यह संख्याओं की सूची है जिसमें प्रत्येक पद, उसके पूर्व पद में निश्चित संख्या d जोडने पर, (प्रथम पद के अलावा) प्राप्त होता है। निश्चित संख्या सार्व अंतर d कहलाती है। A.P. के पद a, a+d, a+2d, a+3d, ... रहते हैं।

2. दी हुई संख्याओं की सूची $a_1, a_2, a_3, \ldots$ A.P. रहती है, यदि $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, अंतर समान मान के रहते हैं, अर्थात, यदि $a_{k+1} - a_k$ का मान k के विभिन्न मानों के लिए समान रहता है।

3. यदि A.P. में प्रथम पद a सार्व अन्तर 'd', n वाँ पद (अथवा सामान्य पद) a_n हो तो $a_n = a + (n-1)d$ द्वारा दिया जाता है।

4. A.P. के प्रथम 'n' पदों का योग दिया जाता है।

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. यदि परिमित (finite) A.P. का अंतिम पद (कहिए, n वाँ पद) l है, तब A.P. के सभी पदों का योग दिया जाता है:

$$S = \frac{n}{2}(a + l).$$

6. गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) यह संख्याओं की सूची है जिसमें प्रत्येक पद उसके पूर्व पद को कुछ निश्चित संख्या 'r' से गुणा करने पर (प्रथम पद के अतिरिक्त) प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या सार्व अनुपात 'r' कहलाता है।

   GP का a, ar, ar^2, ar^3 ....

7. यदि GP का प्रथम पद और सार्व अनुपात क्रमशः a और r हैं तब n व पद $a_n = ar^{n-1}$.

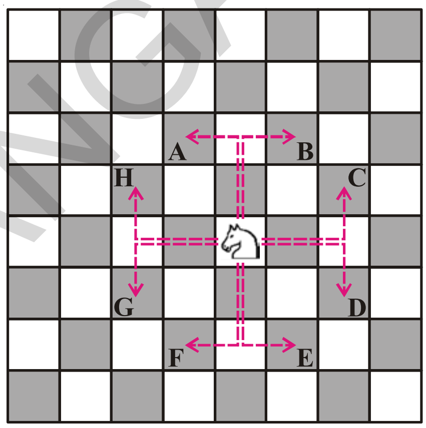
अध्याय

7

निर्देशांक ज्यामिति
(Coordinate Geometry)

7.1 प्रस्तावना

आप जानते ही होंगे कि शतरंज का घोडा 'L' आकार या ढाई घर आगे बढता है वह दूसरे गोटियों के ऊपर से पार कर आगे बढ सकता है। शतरंज का ऊँट अपनी तिरछी (diagonally) दिशा में जितने चाहे उतने घर आगे बढ सकता है।



पता लगाइए कि दूसरे मोहरे किस चाल से आगे बढते है। शतरंज की बिसात पर घोडे, ऊँट तथा दूसरे मोहरों को रखकर उनकी चाल का अवलोकन कीजिए।

मान लीजिए घोडा मूलबिन्दु (0, 0) पर खडा है। वह अपने चारों ओर चित्र में दर्शाए अनुसार घूम सकता है। चित्र की दर्शायी रेखाओं के अनुसार उसकी चाल के बाद उसकी स्थिति के निर्देशांको को ज्ञात कीजिए।

✻ मानलो वह B पर है तो उसकी स्थिती को F_6 से दर्शायी जाती है।

यह कीजिए

i. चित्र में दर्शाए गए A, B, C, D, E, F, G, H बिन्दुओं के निर्देशांको को लिखिए।

ii. शतरंज के घोडे द्वारा 8 चालों में तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए, अर्थात बिन्दु A, B, C, D, E, F, G तथा H की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए।

iii. बिन्दु H तथा C के बीच की दूरी क्या होगी? और बिन्दु A तथा B के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

7.2 दो बिन्दुओं के मध्य दूरी (Distance Between two Points)

चित्र में दर्शाए अनुसार दो बिन्दु (2, 0) तथा (6, 0) X- अक्ष पर स्थित होंगे।

बिन्दु A तथा B के मध्य दूरी 4 इकाई आसानी से देखी जा सकती है।

X-अक्ष पर स्थित बिन्दुओं के मध्य दूरी x-निर्देशांको के बीच का अंतर ही होगा।

(–2, 0) तथा (–6, 0) के मध्य दूरी क्या होगी?

x- निर्देशांको का अंतर

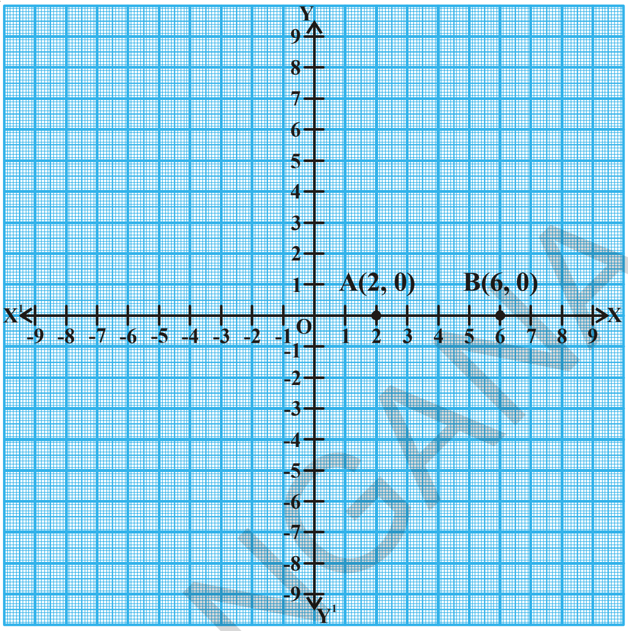
$(-6) - (-2) = -4$ (ऋणात्मक) होगा।

हम दूरी को ऋणात्मक मूल्यों में नहीं दर्शा सकते।

इसलिए हम दूरी का परम मूल्य ज्ञात करेंगे।

अथात् दूरी

$= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ इकाई.



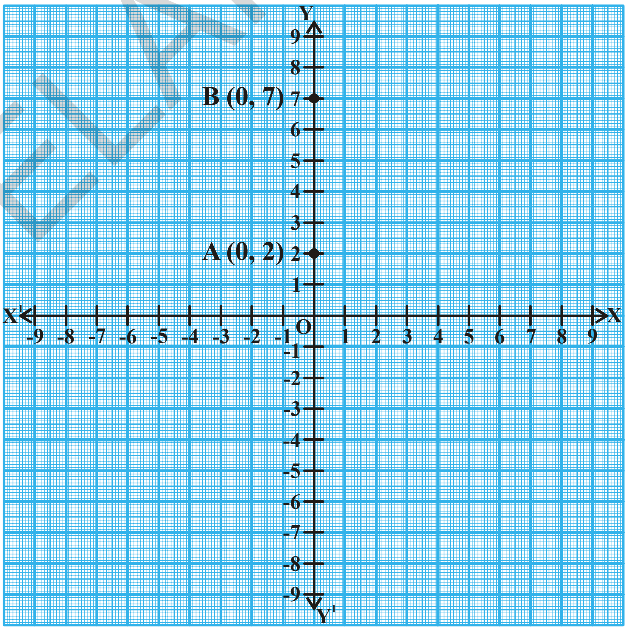
सामान्यतः बिन्दु $A(x_1, 0)$, तथा $B(x_2, 0)$ जो X-अक्ष पर स्थित होंगे उनके मध्य-दूरी $|x_2 - x_1|$ होगी।

इसीप्रकार यदि दो बिन्दु Y- अक्ष पर स्थित होंगे तो बिन्दु A तथा B के मध्य-दूरी y निर्देशांको का अंतर होगा।

दो बिन्दु $(0, y_1)$ तथा $(0, y_2)$ के मध्य-दूरी $|y_2 - y_1|$ होगी।

उदाहरणार्थ : मान लीजिए बिन्दु A(0, 2) तथा B(0, 7) है।

तो बिन्दु A तथा B के मध्य-दूरी $|7 - 2| = 5$ इकाई होगी।



यह कीजिए।

1. (–4, 0), (2, 0), (6, 0) तथा (–8, 0) बिन्दु निर्देशांक क्षेत्र में कहाँ स्थित होंगे?
2. बिन्दु के मध्य दूरी क्या होगी ? (i) (–4, 0) तथा (6, 0); (ii) (–4, 0) तथा (–8, 0)?

प्रयत्न कीजिए।

1. (0, –3), (0, –8), (0, 6) तथा (0, 4) बिन्दु एक निर्देशांक क्षेत्र में कहाँ पर स्थित होंगे?
2. बिन्दु के मध्य दूरी क्या होगी?
   (i) (0, –3) तथा (0, 6); (ii) (0, –3) तथा (0, –8)?

विचार-विमर्श कीजिए।

उन बिन्दुओं के मध्य दूरी कैसे ज्ञात करोगे जिनके x या y निर्देशांक समान है लेकिन शून्य नहीं है।

7.3 अक्षों के समानांतर रेखाओं पर स्थित दो बिन्दुओं के मध्य दूरी :- (Distance Between Two Points on a Line Parallel to the Coordinate Axes)

मान लीजिए बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_1)$ होंगे। y-निर्देशांक समान होने के कारण दिए गए बिन्दु X-अक्ष के समानांतर रेखा पर स्थित होंगे।

AP तथा BQ को X-अक्ष पर लम्ब डाला गया है।

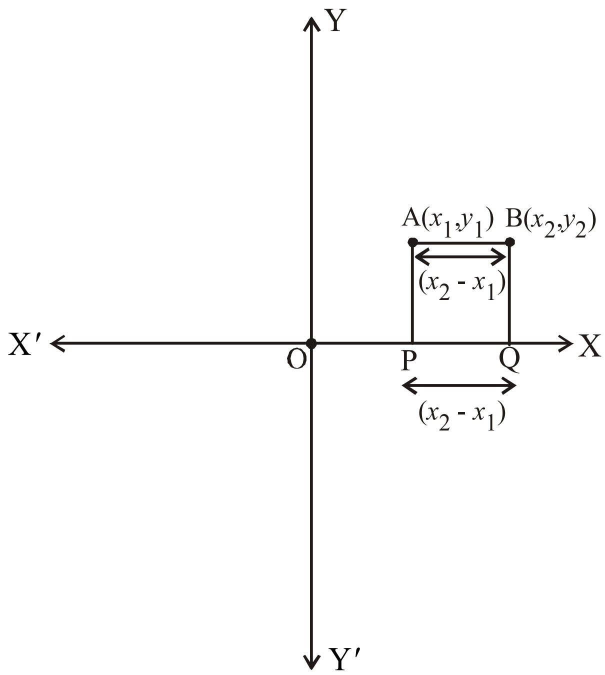
चित्र का अवलोकन कीजिए। A तथा B की दूरी P तथा Q के मध्य दूरी के समान होगी।

इसलिए AB = PQ

AB की दूरी = PQ की दूरी

$= |x_2 - x_1|$

(अर्थात् x निर्देशांकों का अंतर होगा।)



उसी प्रकार दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_1, y_2)$ को जोडने वाली रेखा Y-अक्ष के समानान्तर होगी तथा उनके मध्य दूरी $|y_2 - y_1|$ होगी। (अर्थात् y निर्देशांको का अंतर होगा।)

उदाहरण-1. बिन्दु A (4,0) तथा B (8, 0) के मध्य-दूरी क्या होगी?

हल : x निर्देशांको का अंतर $|x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$ इकाई होगा।

उदाहरण-2. A तथा B दो बिन्दु (8, 3), (–4, 3) दिए गए है।

A तथा B के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ x_1 तथा x_2 बिन्दु अलग-अलग क्रदांत में स्थित होंगे तथा y-के निर्देशांक समान है।

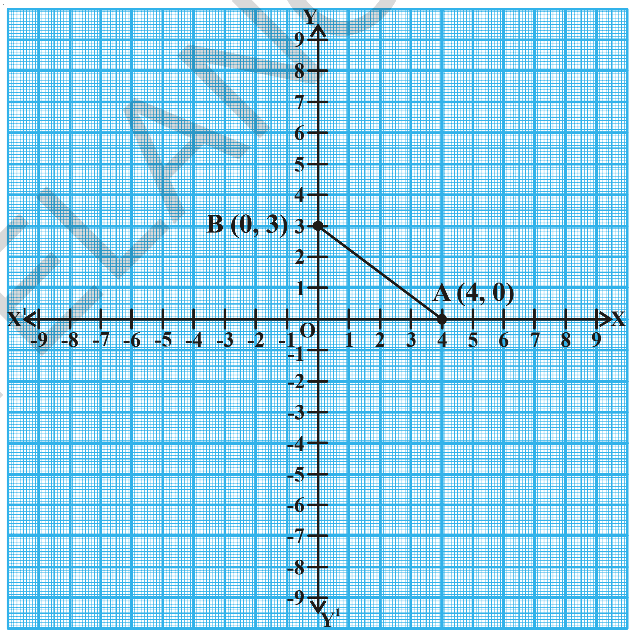
AB की दूरी $= |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$ इकाई

यह कीजिए।

निम्नलिखित बिंदुओं की मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

i. (3, 8), (6, 8) ii. (–4,–3), (–8,–3) iii. (3, 4), (3, 8) (iv) (–5, –8), (–5, –12)

मान लीजिए बिन्दु A तथा B का मूल्य (4, 0) तथा (0, 3) दिया गया है तथा 'O' मूल बिन्दु होगा।



ΔAOB एक समकोण त्रिभुज होगा।

चित्र के अनुसार

OA = 4 इकाई (x-निर्देशांक)

OB = 3 इकाई (y-निर्देशांक)

तो AB की दूरी कितनी होगी?

पायथागोरस प्रमेय के अनुसार

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 4^2 + 3^2$

$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ इकाई । AB के मध्य-दूरी 5 इकाई होगी।

यह कीजिए।

दिए गए बिन्दुओं के मध्य-दूरी ज्ञात कीजिए। (i) A = (2, 0) तथा B(0, 4)

(ii) P(0, 5) तथा Q(12, 0)

प्रयत्न कीजिए।

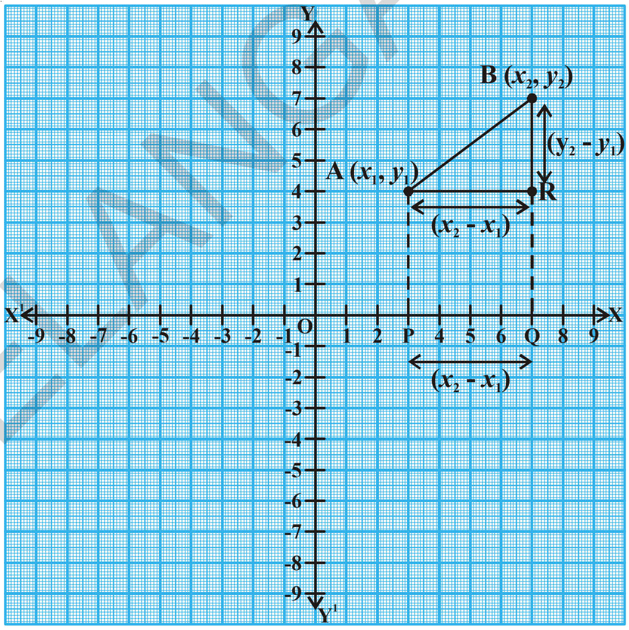
'O' (मूल बिन्दु) तथा 'A' (7, 4) के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

विचार-विमर्श कीजिए।

1. रामू कहता है कि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ की मूल बिन्दु $O(0, 0)$ से दूरी $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ होगी। क्या आप रामू के कथन से सहमत है या नहीं? क्यों?

7.4 x-y तल की रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं के मध्य दूरी : (Distance Between Any Two Points on a line in the x-y plane)

मान लीजिए $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ तल की किसी रेखा पर स्थित दो बिन्दु चित्र में दर्शाए अनुसार होंगे।



AP तथा BQ X-अक्ष पर लम्ब खींचिए

बिन्दु A से BQ पर AR एक लम्ब खींचिए।

तब $OP = x_1,\ OQ = x_2$

इसलिए $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

APQR के आकार का अवलोकन कीजिए। यह एक आयताकार होगा।

इसलिए $PQ = AR = x_2 - x_1$.

तथा $QB = y_2,\ QR = y_1,$

इसलिए $BR = QB - QR = y_2 - y_1$

ΔARB (समकोण त्रिभुज से)

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

अर्थात् $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

A तथा B के मध्य दूरी $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ यह दूरी का सूत्र होगा।

विचार-विमर्श कीजिए।

1. रामू ने दूरी का सूत्र इस प्रकार लिखा $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (क्यों?)

उदाहरण-3. दो बिन्दु A(3, 2) तथा B(8, 6) के मध्य-दूरी ज्ञात करेंगे।

हल : दिए गए बिन्दुओं की तुलना (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2)

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$

दूरी के सूत्र द्वारा

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

दूरी AB $= \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ इकाई

यह कीजिए।

दिए गए बिन्दुओं के मध्य-दूरी ज्ञात कीजिए।

(i) (7, 8) तथा (–2, 3) (ii) (–8, 6) तथा (2, 0)

प्रयत्न कीजिए।

A(1, –3) तथा B(–4, 4) के मध्य-दूरी को दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए

विचार-विमर्श कीजिए।

श्रीधर ने T(5, 2) तथा R(–4, –1) के मध्य-दूरी को दशमलव के एक स्थान तक 9.5 इकाई प्राप्त किया है।

अब आप P (4, 1) तथा Q (-5, -2). के मध्य-दूरी ज्ञात कीजिए। इन दो परिणामों में आपने क्या देखा ?

अब हम कुछ उदाहरणों को देखेंगे :

उदाहरण-4. सिद्ध कीजिए बिन्दु A (4, 2), B (7, 5) तथा C (9, 7) तीन संरेखीय बिन्दु है।

हल : अब हम AB, BC तथा AC की दूरी ज्ञात करेंगे दूरी के सूत्र द्वारा

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

इसलिए, AB = $\sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ इकाई

BC = $\sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ इकाई

AC = $\sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$ इकाई

अब $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$. इसलिए बिन्दु (4, 2), (7, 5) तथा (9, 7) तीनों एक ही रेखा पर स्थित बिन्दु है। (एक ही रेखा पर स्थित बिन्दुओं को संरेखीय बिन्दु कहते है।)

उदाहरण -5. क्यों ये बिन्दु (3, 2), (–2, –3) तथा (2, 3) त्रिभुज के शिर्ष होंगे?

हल: PQ, QR तथा PR, की दूरी ज्ञात करने के लिए दूरी का सूत्र लगाएँगे जहाँ P(3, 2), Q(–2, –3) तथा R(2, 3) दिए गए बिन्दु है।

इसलिए PQ = $\sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07$ इकाई (लगभग)

QR = $\sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2+(6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$ इकाई (लगभग)

PR = $\sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ इकाई (लगभग)

क्योंकि दो दूरियों का योग तीसरी दूरी से अधिक है, इसलिए बिन्दु P, Q तथा R त्रिभुज के शीर्ष होंगे जिसमें तीनों भुजायें असमान है।

उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, 7), (4, 2), (–1, –1) तथा (–4, 4) एक वर्ग के शीर्षों को दर्शाते है।

हल : मान लीजिए A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) तथा D(–4, 4) दिए गए बिन्दु है।

ABCD को वर्ग दर्शाने के लिए हम उसके लक्षण और चारों भुजायें समान होती है तथा उसके कर्ण समान होते है इसका उपयोग करेंगे।

इसलिए उसकी भुजाएँ AB = $\sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ इकाई

BC = $\sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ इकाई

CD = $\sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ इकाई

$$DA = \sqrt{(-4-1)^2+(4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ इकाई}$$

तथा कर्ण $AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ इकाई

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \text{ इकाई}$$

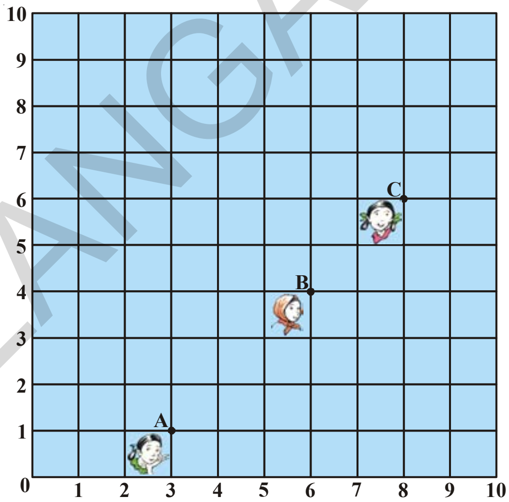
क्योंकि $AB = BC = CD = DA$ तथा $AC = BD$. इसलिए चतुर्भुज ABCD जिसकी चार भुजायें समान है तथा कर्ण AC तथा BD समान है।

उदाहरण-7. इस चित्र में एक कक्षा के विद्यार्थियों की बैठने की व्यवस्था को दर्शाया गया है।

माधुरी, मीना तथा पल्लवी क्रमशः A(3, 1), B(6, 4) तथा C(8, 6) पर बैठे है।

क्या आप कह सकते है कि वे तीनों एक सरल रेखा पर बैठे है?

आपके उत्तर का कारण बताइए।



हल : दूरी के सूत्र द्वारा

$$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

इकाई $BC=\sqrt{(18-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ इकाई

$AC=\sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ इकाई

क्योंकि $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = AC$, इसलिए हम कह सकते है कि A, B और C संरेखीय बिन्दु है। अतः वे एक सरल रेखा पर बैठे है।

उदाहरण-8. (x, y) के मध्य संबंध ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (7, 1) तथा (3, 5) से समदूरी पर स्थित है।

हल : दिया गया है $P(x, y)$ बिन्दु A(7, 1) तथा B(3, 5) से समदूरी पर स्थित है।

$\therefore$ $AP = BP$. इसलिए $AP^2 = BP^2$

अर्थात् $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

अर्थात् $(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$

$(x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$

$-8x + 8y = -16$

i.e., $x - y = 2$ यह इच्छित संबंध है।

उदाहरण-9. y- अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $A(6, 5)$ तथा $B(-4, 3)$ से सम दूरी पर हो।

हल : हम जानते हैं कि Y- अक्ष पर स्थित बिन्दु $(0, y)$ के रूप में होता है।

इसलिए :- बिन्दु $P(0, y)$ ऐसा बिन्दु है जो A तथा B से समदूरी पर है

तो $\quad PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$

$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$

$PA^2 = PB^2$

इसलिए, $\quad (6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

अर्थात् $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

अर्थात् $4y = 36$

अर्थात् $y = 9$

इसलिए इच्छित बिन्दु $(0, 9)$ होगा।

अब हम अपने उत्तर की जाँच करेंगे :$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

$(0, 9)$ वह बिन्दु है जो $(6, 5)$ तथा $(4, 3)$ से समदूरी पर स्थित है।

अभ्यास 7.1

1. दिए गए बिन्दुओं के मध्य-दूरी ज्ञात कीजिए।

   (i) $(2, 3)$ तथा $(4, 1)$ (ii) $(-5, 7)$ तथा $(-1, 3)$

   (iii) $(-2, -3)$ तथा $(3, 2)$ (iv) (a, b) तथा $(-a, -b)$

2. बिन्दु $(0, 0)$ तथा $(36, 15)$ के मध्य-दूरी ज्ञात कीजिए।

3. बिन्दु $(1, 5)$, $(2, 3)$ तथा $(-2, -1)$ संरेखीय है या नहीं जाँच कीजिए।

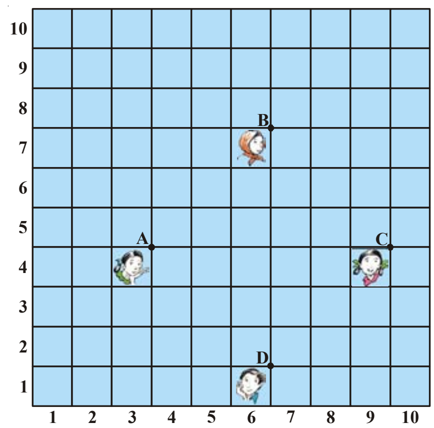
4. $(5, -2), (6, 4)$ तथा $(7, -2)$ समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष है या नहीं जाँच कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए $A(a, 0), B(-a, 0)$ तथा $C(0, a\sqrt{3})$ समबाहु त्रिभुज के शीर्ष है।
6. सिद्ध कीजिए $(-7, -3), (5, 10), (15, 8)$ तथा $(3, -5)$ क्रमानुसार समानान्तर चतुर्भुज के बिन्दु है। तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   (सूचना: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ कर्णों का गुणनफल)
7. सिद्ध कीजिए शीर्ष $(-4, -7), (-1, 2), (8, 5)$ तथा $(5, -4)$ दिए गए क्रमानुसार समचतुर्भुज के शीर्ष है।
8. दिए गए बिन्दुओं से यदि कोई चतुर्भुज बनता है तो उसका नाम लिखकर कारण बताइए।

   (i) $(-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$ (ii) $(-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$

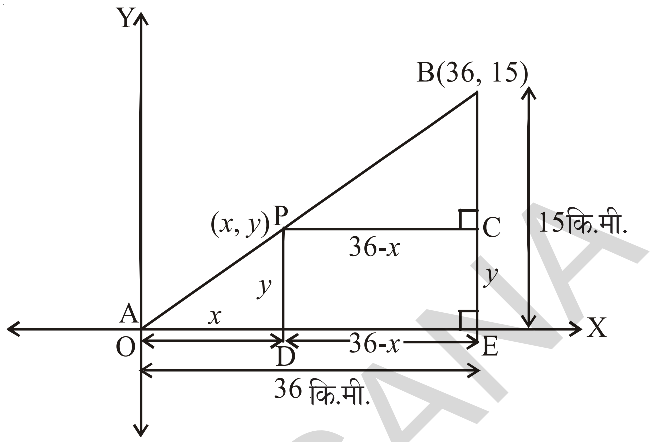
   (iii) $(4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)$
9. x- अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ तथा $(-2, 9)$ से समदूरी पर हो।
10. यदि दो बिन्दु $(x, 7)$ तथा $(1, 15)$ के मध्य दूरी 10 हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
11. y का मूल्य ज्ञात कीजिए जिससे $P(2, -3)$ तथा $Q(10, y)$ के मध्य दूरी 10 हो।
12. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र बिन्दु $(3, 2)$ है तथा जो $(-5, 6)$ से गुजरता है।
13. क्या आप $(1, 5), (5, 8)$ तथा $(13, 14)$ से त्रिभुज का निर्माण कर सकते है? कारण बताइए।
14. x तथा y के मध्य इस प्रकार संबंध ज्ञात कीजिए जिससे वह बिन्दु $(x, y), (-2, 8)$ तथा $(-3, -5)$ से समदूरी पर स्थित हो।
15. एक कक्षा में चार सहेलियाँ A, B, C तथा D चित्र में दर्शाए अनुसार बैठे हैं। जरीना तथा फणी कक्षा में प्रवेश करते है। कुछ क्षणों तक निरीक्षण करने के पश्चात जरीना, फणी से कहती है "क्या तुम्हें नहीं लगता कि ABCD एक वर्ग है?" फणी उससे सहमत नहीं है।

    दूरी के सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए कि कौन सही है और क्यों?



16. x तथा y के मध्य संबंध ज्ञात किजिए जो कि बिन्दु $(7, 1)$ तथा $(3, 5)$, (x, y) से सम दुरी पर है?

7.5 विभाजन सूत्र (Section Formula)



मान लीजिए एक टेलीफोन कंपनी प्रसारण टावर P को A तथा B के मध्य इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहती हैं जिससे टावर तथा B के मध्य दूरी A से दुगुनी हो यदि P, AB पर स्थित हो तो वह AB को 1 : 2 में विभाजित करता है। (चित्र देखिए।) हम A को मूल बिन्दु के रूप में लेकर 1 कि.मी को एक इकाई मानकर दोनों अक्षों पर बिन्दुओं को दर्शाया गया है, B के निर्देशांक (36, 15) होंगे। टावर की स्थिति को जानने के लिए हमें P के निर्देशांको को जानना जरुरी होगा। हम इन निर्देशांको को कैसे ज्ञात करेंगे?

मान लीजिए P के निर्देशांक (x, y) होंगे। P तथा B से X- अक्ष पर लम्ब डालिए जो क्रमशः D तथा E पर स्पर्श करते हैं। PC को BE पर लम्ब डालिए। तब AA समरूपता के अनुसार ΔPOD तथा ΔBPC समरूप होंगे।

इसलिए, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ तथा $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$.

$2x = (36 - x)$ $\qquad$ $2y = 15 - y$

$3x = 36$ $\qquad$ $3y = 15$

$x = 12$ $\qquad$ $y = 5$

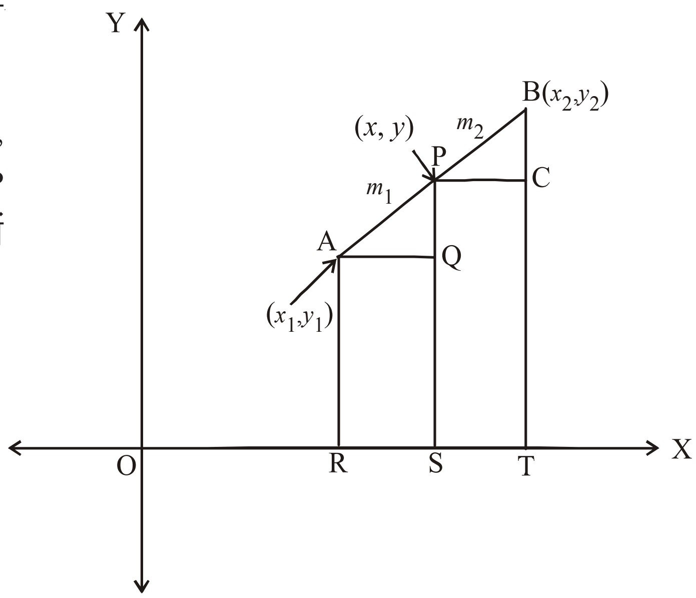
इन समीकरणों द्वारा $x = 12$ तथा $y = 5$ प्राप्त होते है।

P(12, 5), OP : PB = 1 : 2 को संतृप्त करता है इसकी जाँच कर सकते है।

कोई दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ लीजिए तथा मान लीजिए बिन्दु P (x, y) AB को $m_1 : m_2$, के अनुपात में अंतर्गत विभाजन करता है।

अर्थात् $\frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ ..... (1)

चित्र को देखिए



AR, PS, BT को X- अक्ष पर लम्ब खींचिए।

AQ तथा PC को X- अक्ष के समानान्तर खींचिए। AA समरूपता नियमानुसार

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

इसलिए, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$ .....(2)

अब, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

इन मूल्यों को समीकरण (1) में लगाने पर

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \left[\because \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ समीकरण (1) से}\right]$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, लेने पर $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ हमें प्राप्त होगा।

उसी प्रकार $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, लेने पर $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$ हमें प्राप्त होगा।

अतः बिन्दु $P(x, y)$ जो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$, को जोडने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ अनुपात में अंतर्गत विभाजित करता है।

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \quad .....(3)$$

इसको विभाजन सूत्र कहते है।

इसको A, P तथा B को Y- अक्ष पर लम्ब डालकर भी प्राप्त किया जा सकता है।

यदि P, AB को $k : 1$, के अनुपात में विभाजित करता है तो बिन्दु P के निर्देशांक

$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right)$. होंगे।

विशेष स्थिति : मानलो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ कोई दो बिन्दु हो तो किसी भी रेखा का मध्यबिन्दु उसे 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। इसलिए $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को जोडने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

आइए अब हम विभाजन सूत्र पर आधारित कुछ उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-10. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4, -3)$ तथा $(8, 5)$ को जोडने वाली रेखा में 3 : 1 को अंतर्गत विभाजन करता है।

हल : मान लीजिए $P(x, y)$ इच्छित बिन्दु है। विभाजन सूत्र द्वारा

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right), \text{ हमें प्राप्त होगा।}$$

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$P(x, y) = (7, 3)$ इच्छित बिन्दु होंगे।

उदाहरण -11. बिन्दु $(3, 0)$ तथा $(-1, 4)$ को जोडने वाली रेखा का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को जोडने वाली रेखा का मध्य बिन्दु $M(x, y)$ होगा।

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$\therefore$ $(3, 0)$ तथा $(-1, 4)$ को जोडने वाली रेखा का मध्य बिन्दु

$$M(x, y) = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2) \text{ होगा।}$$

यह कीजिए।

1 उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो $(3, 5)$ तथा $(8, 10)$ को जोडने वाली रेखा को 2 : 3 में अंतर्गत विभाजन करता है।

2.$(2, 7)$ तथा $(12, -7)$ को जोडने वाली रेखा का मध्यबिन्दु ज्ञात कीजिए।

7.7 रेखा का त्रिभाजक बिन्दु (Trisectional Points of a Line)

उदाहरण-12. रेखा के त्रिभाजक बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। (बिन्दु जो किसी रेखा को तीन समान भागों में बाँटते है उन्हें त्रिभाजक बिन्दु कहते है।) जो बिन्दु A(2,–2) तथा B(–7, 4) को जोडती है।

हल : मान लीजिए P तथा Q बिन्दु AB के त्रिभाजक बिन्दु है।

अर्थात् AP=PQ=QB (नीचे दिए गए चित्र को देखिए).

अर्थात् बिन्दु P, AB को 1 : 2 में विभाजित करता है।

P के निर्देशांक (विभाजन सूत्र द्वारा)

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

अब Q भी AB को 2:1 के अंतर्गत विभाजित करता है।

अर्थात् Q के निर्देशांक

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

अर्थात् $\left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$

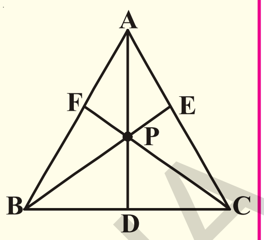
इसलिए रेखा के त्रिभाजक बिन्दु P(-1, 0) तथा Q(-4, 2) होंगे।

यह कीजिए।

1. (2, 6) तथा (–4, 8) को जोडने वाली रेखा का त्रिभाजक बिन्दु ज्ञात कीजिए।
2. बिन्दु (–3, –5) तथा (–6, –8) को जोडने वाली रेखा का त्रिभाजक बिन्दु ज्ञात कीजिए।

प्रयत्न कीजिए।

मान लीजिए A(4, 2), B(6, 5) तथा C(1, 4) ΔABC के शीर्ष है।



1. BC पर डाली गयी मध्यिका AD हो तो बिन्दु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
2. AD पर बिन्दु P के निर्देशांक इस प्रकार ज्ञात कीजिए जो AP : PD = 2 : 1. होगा।
3. मध्यिका BE तथा CF पर बिन्दु Q तथा R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो रेखा खण्ड BE को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करती है तथा CF को भी 2 : 1 में विभाजित करती है।
5. आपने क्या देखा?

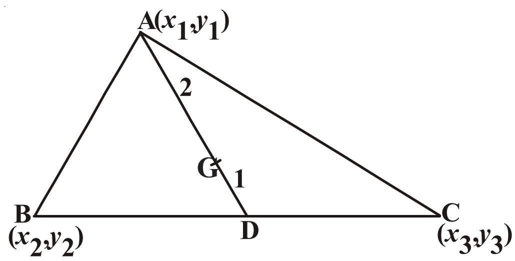
   अतः जो बिन्दु प्रत्येक मध्यिका का 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है उसे गुरुत्व केन्द्र (centroid) कहते है।

7.6 त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र (Centroid of a Triangle)

मध्यिकाओं का कटान बिन्दु त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र कहलाता है।

मान लीजिए Δ ABC के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ है।

मान लीजिए मध्यिका AD त्रिभुज के आधार को समद्विभाजित करती है।



अतः $\quad D = \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$

अब AD पर बिन्दु G उसे 2 : 1 के अनुपात में अंतर्गत विभाजित करता है वह उसका गुरुत्व केन्द्र होगा।

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\dfrac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

अतः हम गुरुत्व केन्द्र के निर्देशांक इस प्रकार लिख सकते है।

$$\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right].$$

उदाहरण-13. उस त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके  , (10, –2) होंगे।

हल : गुरुत्व केन्द्र के निर्देशांक = $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$\therefore$ बिंदु (3, –5), (–7, 4) और (10, –2) का गुरुत्व केंद्र

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2, -1)$$

$\therefore$ गुरुत्व केन्द्र (2, –1).

यह कीजिए।

उस त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–4, 6), (2, –2) तथा (2, 5) होंगे।

प्रयत्न कीजिए।

बिन्दु (2, 3), (x, y), (3, –2) त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु है यदि उसका गुरुत्व केन्द्र भी (x, y) हो तो (x, y) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उदाहरण-14. बिन्दु A(– 6, 10) तथा B(3, – 8) को जोडने वाली रेखा को बिन्दु (–4, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : मान लीजिए बिन्दु (– 4, 6) रेखा AB को अंतर्गत $m_1 : m_2$.अनुपात में विभाजित करता है। हमें विभाजन सूत्र द्वारा यह प्राप्त होगा।

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad .....(1)$$

हमें ज्ञात है कि यदि $(x, y) = (a, b)$ हो तो $x = a, y = b$.

अतः, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$, $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

अब, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ प्राप्त हुआ

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

अर्थात्, $7m_1 = 2m_2$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

अर्थात् $m_1 : m_2 = 2 : 7$

हमें इस अनुपात को y-निर्देशांक के साथ जाँच करनी पडेगी।

अब, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$ (m_2 से विभाजित करने पर)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{-16}{7} + 10}{\frac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

इसलिए बिन्दु (–4, 6) रेखा को 2 : 7 में विभाजित करता है।

विचार - विमर्श कीजिए।

न्दु A(6, 9) तथा B(–6, –9) को जोडने वाली रेखा देती है

(a) मूलबिन्दु $\overline{AB}$ को किस अनुपात में विभाजित करता है? $\overline{AB}$ के लिए इसे क्या कहेंगे?

(b) बिन्दु P(2, 3), $\overline{AB}$ को किस अनुपात में विभाजित करता है?

(c) बिन्दु Q(–2, –3) $\overline{AB}$ को किस अनुपात में विभाजित करता है?

(d) P तथा Q द्वारा $\overline{AB}$ को कितने समान भागों में बाँटा जा सकता है?

(e) P तथा Q को $\overline{AB}$ के लिए क्या कहा जा सकता है?

उदाहरण-15. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो कि (5, –6) तथा (–1, –4) बिन्दुओं को जोडने वाली रेखा को Y-अक्ष पर काटती। उस कटान बिन्दु के मूल्य बताइए।

हल : मान लीजिए अनुपात K : 1 होगा। विभाजन सूत्र द्वारा कटान बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{K(-1) + 1(5)}{K + 1}, \frac{K(-4) + 1(-6)}{K + 1}\right)$$

अर्थात् $$\left(\frac{-K + 5}{K + 1}, \frac{-4K - 6}{K + 1}\right)$$

यह बिन्दु Y- अक्ष पर स्थित होने के कारण उसका कोटि (Abscissa) 0 होगा।

$$\therefore \quad \frac{-K+5}{K+1} = 0$$

$$-K + 5 = 0 \Rightarrow K = 5.$$

इसलिए अनुपात $K : 1 = 5 : 1$ होगा

सूत्र में $K = 5$ का मूल्य लगने पर हमें कटान बिन्दु ज्ञात होगा।

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

उदाहरण-16. सिद्ध कीजिए कि A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) तथा D(9, 4) दिए गए क्रमानुसार समानान्तर चतुर्भुज के शीर्ष होंगे।

हल : मान लीजिए बिन्दु A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) तथा D(9, 4) समानान्तर चतुर्भुज के शीर्ष है।

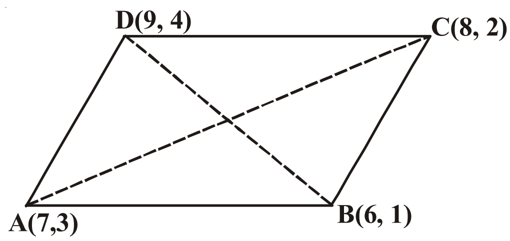
हमें ज्ञात है कि समांतर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

$\therefore$ कर्ण AC तथा DB के मध्य बिन्दु समान होंगे।

अब, हम AC तथा DB के मध्य बिन्दु सूत्र $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ द्वारा ज्ञात करेंगे।

AC का मध्य बिन्दु $= \left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

DB का मध्य बिन्दु $= \left(\frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$



अतः AC का मध्य बिन्दु और DB का मध्य बिन्दु

इसलिए A, B, C, D समानान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

उदाहरण -17. यदि बिन्दु A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) तथा D(p, 3) समानान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो p का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: हमें पता है कि समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

अर्थात् AC का मध्य बिन्दु = BD का मध्य बिन्दु

अतः $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2} \qquad 15 = 8 + p \Rightarrow p = 7.$$

अभ्यास - 7.2

1. बिन्दु $(-1, 7)$ तथा $(4, -3)$ को जोड़ने वाली रेखा को $2:3$ में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

2. बिन्दु $(4, -1)$ तथा $(-2, -3)$ को जोड़ने वाली रेखा के त्रिभाजक बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

3. $(-3, 10)$ तथा $(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखा खण्ड को बिन्दु $(-1, 6)$ किस अनुपात में विभाजित करती है।

4. यदि $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ तथा $(3, 5)$ समानान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x तथा y का मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो वृत्त का व्यास (diameter) AB का केन्द्र बिन्दु $(2, -3)$ तथा B $(1, 4)$ है।

6. यदि A तथा B क्रमशः $(-2, -2)$ तथा $(2, -4)$ हो तो बिन्दु P के निर्देशांक इस प्रकार ज्ञात कीजिए जिसमें $AP = \frac{3}{7} AB$ तथा P, AB पर स्थित एक बिन्दु है।

7. $A(-4, 0)$ तथा $B(0, 6)$ को जोडने वाले रेखा खण्ड को चार समान भागों में बांटने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. $A(-2, 2)$ तथा $B(2, 8)$ को जोडने वाले रेखाखण्ड को चार समान भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

9. $(a + b, a - b)$ तथा $(a - b, a + b)$ बिन्दुओं को जोडने वाले रेखा खण्ड को $3:2$ में अंतर्गत विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

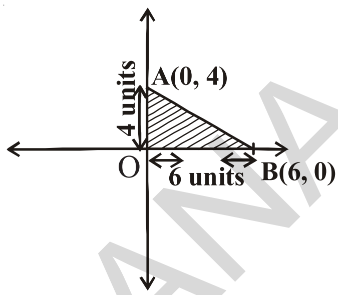
10. निम्नलिखित त्रिभुजों के गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए।

    i. $(-1, 3)$, $(6, -3)$ तथा $(-3, 6)$ ii. $(6, 2)$, $(0, 0)$ तथा $(4, -7)$

    iii. $(1, -1)$, $(0, 6)$ तथा $(-3, 0)$

7.8 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of the Triangle)

बिन्दु A(0, 4) तथा B(6, 0) को देखिए जो मूल बिन्दु O के साथ त्रिभुज का निर्माण करते है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।



ΔAOB का क्षेत्रफल क्या होगा?

ΔAOB एक समकोण त्रिभुज है जिसका आधार 6 इकाई (अर्थात् x अक्ष का निर्देशांक) तथा ऊँचाई 4 इकाई (अर्थात् y अक्ष का निर्देशांक)

$$\therefore \Delta AOB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ वर्ग. इकाई}$$

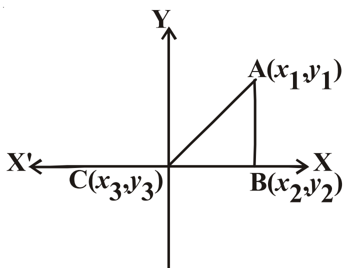
प्रयत्न कीजिए।

X- अक्ष पर बिन्दु A तथा Y- अक्ष पर बिन्दु B लीजिए तथा Δ AOB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। अपने मित्रों के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

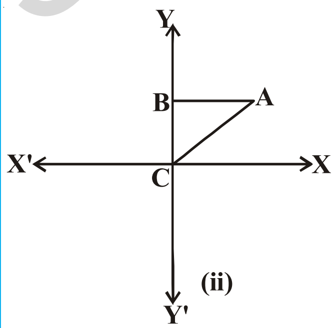
विचार-विमर्श कीजिए।

मान लीजिए $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

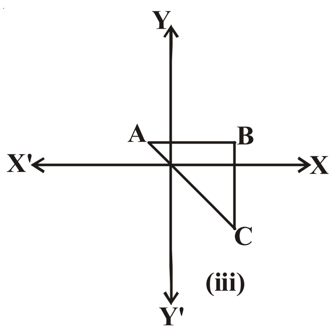
तब दिए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए मित्रों के साथ त्रिभुज के क्षेत्रफल पर चर्चा कीजिए।



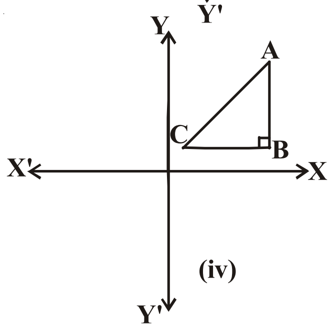
(i)



(ii)



(iii)



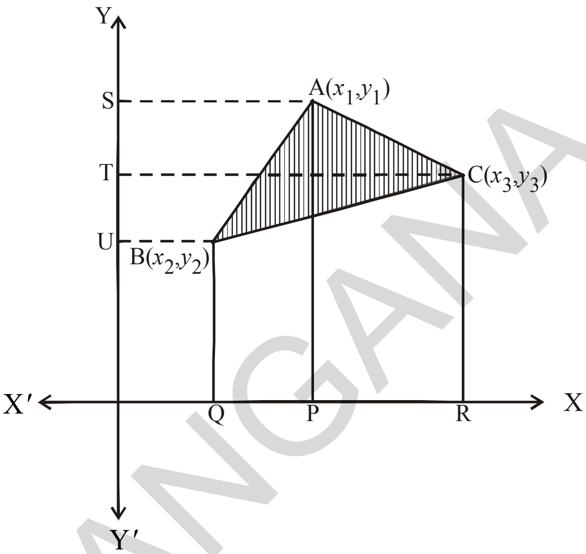
(iv)

त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of the Triangle)

मान लीजिए ABC एक त्रिभुज जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ है।

A, B तथा C से AP, BQ तथा CR x-अक्ष पर लम्ब डालिए।

ABQP, APRC तथा BQRC चित्र में दर्शाये अनुसार तीन समलम्ब चतुर्भुज बनेंगे।



चित्र से यह सिद्ध होता है कि
ΔABC का क्षेत्रफल = ABQP समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल + APRC समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल – BQRC समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$\because$ समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) (उनके बीच की दूरी)

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR \qquad \text{.... (1)}$$

अब चित्र से

$BQ = y_2$, $AP = y_1$, $QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3$, $PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल (समीकरण (1) से)

$$= \frac{1}{2}\left|(y_2 + y_1)\,(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)\,(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_3)\,(x_3 - x_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|$$

अतः ΔABC के क्षेत्रफल को इस प्रकार प्रदर्शित कर सकते है

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

इस पर आधारित कुछ उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-18. बिन्दु (1, –1), (–4, 6) तथा (–3, –5) से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ के द्वारा

A(1, –1), B(–4, 6) तथा C(–3, –5), शीर्षों से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल ऊपर दिए गए सूत्र के अनुसार

$$= \frac{1}{2}\left|1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|11 + 16 + 21\right| = 24$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई है।

उदाहरण-19. शीर्षों A(5, 2), B(4, 7) तथा C(7, –4) द्वारा बनाए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : A(5, 2), B(4, 7) तथा C(7, –4) द्वारा बनाए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{1}{2}\left|5(7+4) + 4(-4-2) + 7(2-7)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|55 - 24 - 35\right| = \left|\frac{-4}{2}\right| = \left|-2\right|$$

सूचना :- क्योंकि क्षेत्रफल एक मापन है जिसे हम ऋणात्मक नहीं दर्शा सकते है इसलिए हम $|-2|$ का परम मूल्य $= 2$ लेंगे।

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 2$ वर्ग इकाई

यह कीजिए।

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष

1. (5, 2) (3, –5) तथा (–5, –1)
2. (6, –6), (3, –7) तथा (3, 3) होंगे।

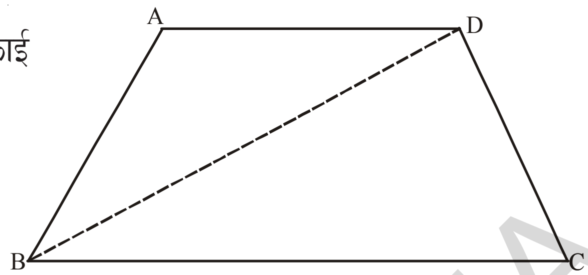
उदाहरण-20. यदि A(–5, 7), B(–4,–5), C(–1, –6) तथा D(4,5) एक चतुर्भुज के शीर्ष हो तो, चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : B से D, को जोडने पर हमें दो Δ ABD तथा Δ BCD प्राप्त होंगे।

ΔABD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\left|-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|50+8+48| = \frac{|106|}{2} = 53 \text{ वर्ग इकाई}$$



और ΔBCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)|$$

$$= \frac{1}{2}|44-10+4| = 19 \text{ वर्ग इकाई}$$

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल + ΔBCD का क्षेत्रफल

= 53+19 = 72 वर्ग इकाई

प्रयत्न कीजिए।

(0, –1), (2, 1) (0, 3) तथा (–2, 1) शीर्षों वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

विचार-विमर्श कीजिए।

दिए गए बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुजो के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) (2, 0), (1, 2), (–1, 6)

(ii) (3, –1), (5, 0), (1, –2)

(iii) (–1.5, 3), (6, –2), (–3, 4)

आपने क्या देखा?

इन बिन्दुओं से तीन अलग-अलग ग्राफ उतारिए। आपने क्या देखा?

क्या 0 (शून्य) वर्ग इकाई वाला त्रिभुज हो सकता है?इसका क्या अर्थ होगा?

7.8.1. संरेखिता (Collinearity)

हम जानते हैं कि एक सरल रेखा पर स्थित बिंदुओं को संरेखीय बिंदु कहते हैं।

मान लीजिए बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ एक रेखा पर स्थित है। अर्थात् वे त्रिभुज नहीं बना सकते अतः ΔABC का क्षेत्रफल शून्य (0) होगा।

जब किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य हो तो वे बिन्दु समरेखीय होते है।

उदाहरण-21. किसी तल पर स्थित तीन बिन्दु (3, –2) (–2, 8) तथा (0, 4) है। सिद्ध कीजिए कि दिए गए बिन्दु समरेखीय बिन्दु है।

हल : त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र द्वारा

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\left|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|12 - 12\right| = 0$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 है, अतः दिए गए बिन्दु समरेखीय बिन्दु होंगे।

उदाहरण-22. यदि बिन्दु A(1,2), B(–1, b), C(–3, –4) समरेखीय हो तो '*b*' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए दिए गए बिन्दु A(1, 2), B(–1, *b*), C(–3, –4)

तब $x_1 = 1, y_1 = 2;$ $x_2 = -1, y_2 = b;$ $x_3 = -3,$ $y_3 = -4$ हमें ज्ञात है कि

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\left|1(b+4)+(-1)(-4-2)+(-3)(2-b)\right| = 0$$

($\because$ दिए गए बिन्दु समरेखीय है।)

$$|b + 4 + 6 - 6 + 3b| = 0$$
$$|4b + 4| = 0$$
$$4b + 4 = 0$$
$$\therefore b = -1$$

यह कीजिए।

दिए गए बिन्दु समरेखीय है या नहीं जाँच कीजिए

(i) (1, –1), (4, 1), (–2, –3)

(ii) (1, –1), (2, 3), (2, 0)

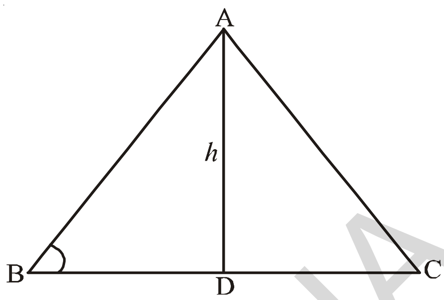
(iii) (1, –6), (3, –4), (4, –3)

7.8.2. 'हिरोन्स सूत्र' द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle- 'Heron's Formula')

हमें ज्ञात है कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

दिया गया त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज या समद्विबाहु त्रिभुज हो सकता है। क्या हम इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते है?

यदि हमें आधार तथा ऊँचाई ज्ञात हो तो हम उपरोक्त सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते।



यदि हमें त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात न हो तो क्षेत्रफल कैसे ज्ञात कर सकते है?

हेरेन एक प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ, ने त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र बताया जिसमें उनकी भुजाओं की लम्बाई $a, b\ c$ होगी।

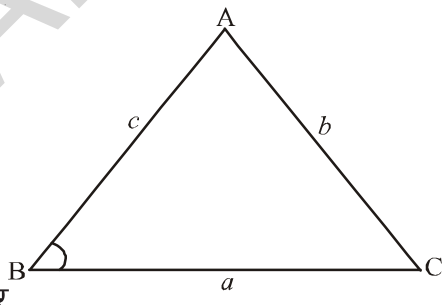
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

उदाहरण के लिए हम उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे जिसकी भुजायें 12मी., 9मी., 15मी. है।

हिरोन्स सूत्र द्वारा

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

$s = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18$ मी.



अतः $s - a = 18 - 12 = 6$ मी.

$s - b = 18 - 9 = 9$ मी.

$s - c = 18 - 15 = 3$ मी.

$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54$ वर्ग. मीटर

यह कीजिए।

(i) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजायें 15मी., 17मी., तथा 21मी., है (हेरेन सूत्र द्वारा) आपके उत्तर की जाँच $A = \frac{1}{2}bh$ द्वारा कीजिए।

(ii) (0, 0), (4, 0), (4, 3) बिन्दुओं से त्रिभुज का क्षेत्रफल हेरेन सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

अभ्यास - 7.3

1. निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (i) (2, 3) (−1, 0), (2, −4) (ii) (−5, −1), (3, −5), (5, 2)
   (iii) (0, 0), (3, 0) and (0, 2)
2. समरेखीय बिन्दुओं के लिए 'K' का मूल्य ज्ञात कीजिए।
   (i) (7, −2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, −4), (2, −5)
   (iii) (K, K) (2, 3) तथा (4, −1).
3. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो (0, −1), (2, 1) तथा (0, 3) से बनने वाले त्रिभुज के मध्य बिन्दुओं को जोडने से बनता है। इस त्रिभुज के क्षेत्रफल का अनुपात दिए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ ज्ञात कीजिए।
4. (−4, −2), (−3, −5), (3, −2) तथा (2, 3) शीर्ष बिन्दुओं से निर्मित चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. (−1, 2), (5, 2) तथा (2, 5) बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल हिरोन्स सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

7.9 सरल रेखाएँ (Straight Lines)

भरद्वाज तथा मीना दो चरराशी वाले रैखिक समीकरण के हल को प्राप्त करने की चर्चा कर रहे है।

भारद्वाज : क्या तुम $2x + 3y = 12$ को हल कर सकती हो?

मीना : हाँ, देखो मैने कर दिया है।

x	0	3	6	−3
y	4	2	0	6

$$2x+3y = 12$$

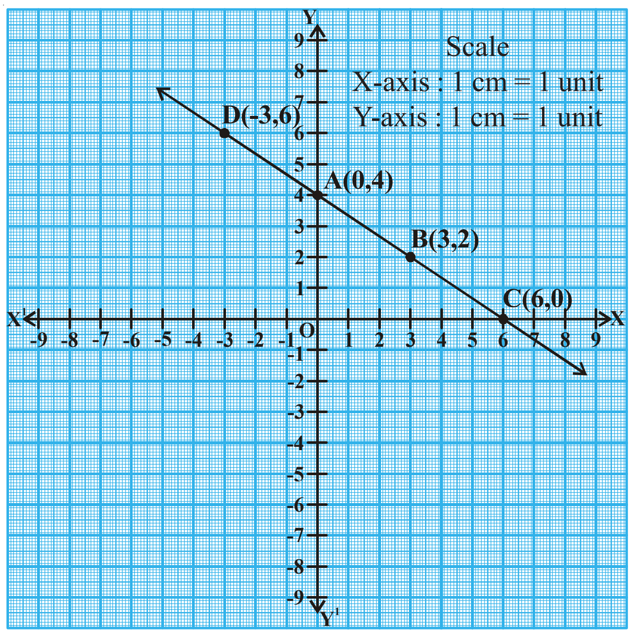
$$3y = 12 - 2x$$

$$y = \frac{12-2x}{3}$$

मीना : क्या आप इसे क्रमित युग्म के रूप में लिख सकते हैं?

भरद्वाज : हाँ, (0, 4), (3, 2), (6, 0), (−3, 6)

मीना : देखो मैने इसे इस प्रकार दर्शाया है।



भारद्वाज: आपने क्या देखा?

यह रेखा क्या दर्शाती है?

मीना : यह एक सरल रेखा है।

भारद्वाज : क्या आप इस रेखा पर कुछ और बिन्दुओं की पहचान कर सकती हो कुछ और बिन्दुओं को प्राप्त करने में क्या आप मीना की सहायता कर सकते हैं?

.................., ..., ..., ...

इसे रेखा में $\overline{AB}$ को क्या कहेंगे?

$\overline{AB}$ एक रेखा खण्ड है।

यह कीजिए।

इन बिन्दुओं को निर्देशांक तल पर डालकर उन्हें मिलाइए:

1. A(1, 2), B(–3, 4), C(7, –1)
2. P(3, –5) Q(5, –1), R(2, 1), S(1, 2)

इनमें से कौनसी सरल रेखा है और कौनसी नहीं क्यों?

विचार-विमर्श कीजिए।

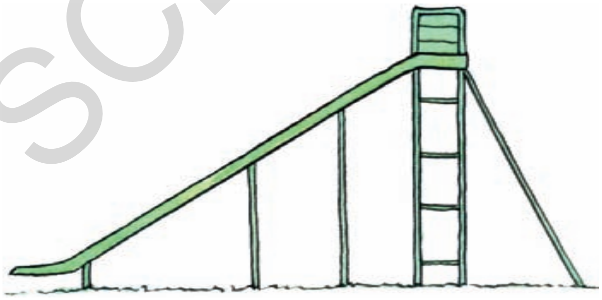
क्या $y = x + 7$ सरल रेखा को दर्शाता है? निर्देशित तल पर रेखा खींचिए।

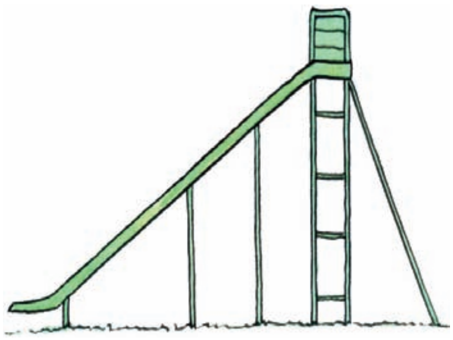
यह रेखा Y- अक्ष को किस बिन्दु पर काटती है?

यह रेखा X- अक्ष पर कितने अंश (degree) का कोण बनाती है? इसकी चर्चा अपने मित्रों के साथ कीजिए।

7.9.1 सरल रेखा की प्रवणता (Slope of the straight line)

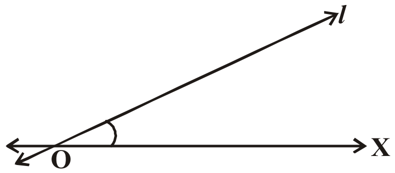
आपने पार्क में स्लाइडर (Slider) देखा ही होगा। यहाँ दो स्लाइडर दिये गये है। कौनसे स्लाइडर पर तेज़ फिसल (slide) सकते है?

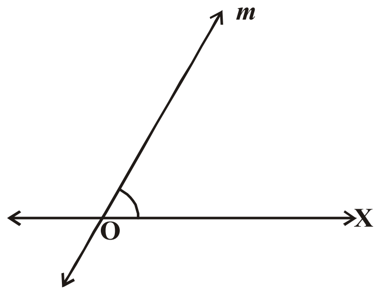




निश्चित ही आपका उत्तर होगा दूसरा "क्यों?"

इन चित्रों को देखिए।





कौनसी रेखा OX से बडा कोण बनाएगी?

क्योंकि “*m*” रेखा "*l*" की अपेक्षा OX पर बडा कोण बनाती है।

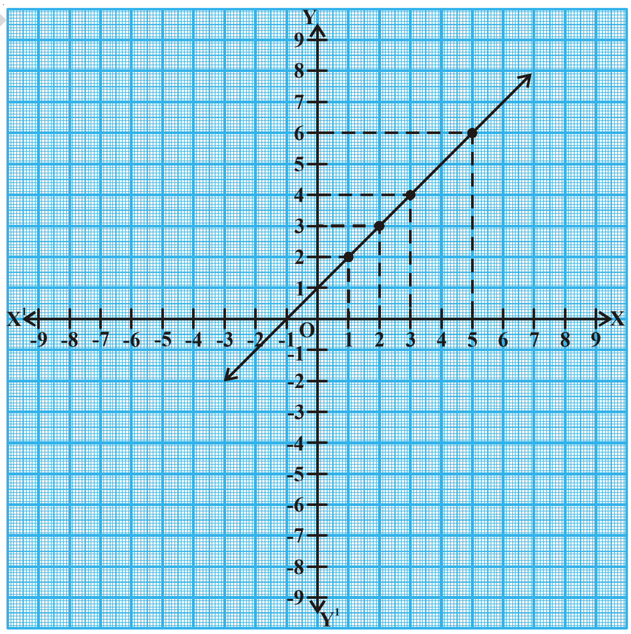
रेखा ‘*m*’ की प्रवणता रेखा ‘*l*’ की अपेक्षा अधिक होगी। हम इस रेखा को ‘‘झुकाव’’ (“Steepness”) भी कह सकते है।

रेखा की प्रवणता कैसे ज्ञात करोगे?

कार्यकलाप

नीचे चित्र में दिए गए रेखा का निरिक्षण कर उस पर स्थित बिन्दुओं से इस तालिका को पूर्ण कीजिए।

x coordinate	0	1	2	3	4
y coordinate	0	2	4	6	8



हमने देखा कि x के निर्देशांक में भी परिवर्तन आता है। जब y निर्देशांक में $y_1 = 0$ से $y_2 = 2$, की बढत होती है

अतः y का परिवर्तन = ...

तब संबंधित ‘x’ का परिवर्तन = ...

$$\therefore \frac{y \text{ निर्देशांको में परिवर्तन}}{x \text{ निर्देशांको में परिवर्तन}}$$

जब yनिर्देशांक में $y_1 = 2$ से $y_3 = 4$ की बढत होती है

तब y निर्देशांक में परिवर्तन = ...

संबंधित x निर्देशांक में परिवर्तन ....

$$\text{अतः} \quad \frac{y \text{ निर्देशांको में परिवर्तन}}{x \text{ निर्देशांको में परिवर्तन}}$$

आप रेखा के दूसरे बिन्दुओं से तालिका को भरिए

y का मूल्य	x में परिवर्तन	$\dfrac{y \text{ में परिवर्तन}}{x \text{ में परिवर्तन}}$
2	1	$\frac{2}{1} = 2$

उपरोक्त क्रिया कलाप से आपने क्या निष्कर्ष निकाला?

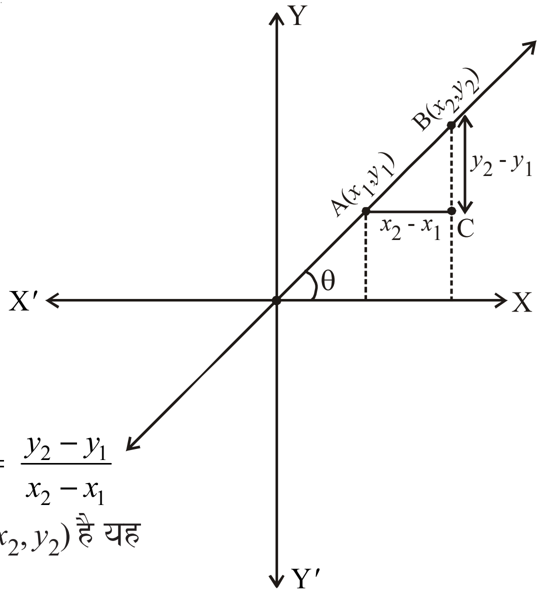
7.9.2 दो बिन्दुओं को जोडने वाली रेखा की प्रवणता (Slope of a line joining Two Points)

मान लीजिए $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ रेखा 'l' पर स्थित दो बिन्दु है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।

रेखा की प्रवणता $= \dfrac{y \text{ के निर्देशांक में परिवर्तन}}{x \text{ के निर्देशांक में परिवर्तन}}$

$\overline{AB}$ की प्रवणता $= m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

हम प्रवणता को 'm' से दर्शाएँगे तथा रेखा 'l' X - अक्ष पर कोण θ बनाती है।



अतः रेखा खण्ड AB वही कोण θ, AC के साथ भी बनता है।

$\therefore \tan\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की संगत भुजा}}$

$= \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ अतः $\therefore m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

रेखा खण्ड $\overline{AB}$ जिसके अंतिम बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) है यह उसकी प्रवणता का सूत्र होगा।

यदि θ, X- अक्ष के साथ बनने वाला कोण हो तो $m = \tan\theta$ होगा।

उदाहरण-22. यदि रेखाखण्ड के अंतिम बिन्दु (2, 3) तथा (4, 5) हो तो उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाखण्ड के बिन्दु (2, 3), (4, 5) हो तो उसकी प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

रेखा की प्रवणता 1 होगी।

यह कीजिए।

दिए गए बिन्दुओं से $\overleftrightarrow{AB}$ की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

1. A(4, –6) B(7, 2)
2. A(8, –4), B(–4, 8)
3. A(–2, –5), B(1, –7)

प्रयत्न कीजिए।

$\overleftrightarrow{AB}$ पर स्थित बिन्दुओं से प्रवणता ज्ञात कीजिए।

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(–4, 2), B(–4, –2)
3. A(–2, 8), B(–2, –2)
4. Y- अक्ष के समानान्तर रेखाखण्ड $\overleftrightarrow{AB}$ की प्रवणता के बारे में आप क्या कहेंगे? क्यों?

विचार - विमर्श कीजिए।

$\overleftrightarrow{AB}$ रेखा पर स्थित बिन्दु A(3, 2), (–8, 2) हो तो उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए। यदि रेखा X- अक्ष के समानान्तर हो तो उसकी प्रवणता क्या होगी? क्यों?

अपने मित्रों के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

उदाहरण-23. बिन्दु P(2,5) तथा Q(x, 3) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता 2 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: P(2, 5) तथा Q(x, 3) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता 2 है।

यहाँ $x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ x_2 = x,\ y_2 = 3$

$$\overline{PQ} \text{ प्रवणता } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{x-2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow \frac{-2}{x-2} = 2$$

$$\Rightarrow -2 = 2x - 4 \qquad \Rightarrow 2x = 2 \qquad \Rightarrow x = 1$$

अभ्यास - 7.4

1. दिए गए बिन्दुओं को जोडने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
   (i) $(4, -8)$ और $(5, -2)$
   (ii) $(0, 0)$ और $(\sqrt{3}, 3)$
   (iii) $(2a, 3b)$ और $(a, -b)$
   (iv) $(a, 0)$ और $(0, b)$
   (v) $A(-1.4, -3.7)$, तथा $B(-2.4, 1.3)$
   (vi) $A(3, -2)$, तथा $B(-6, -2)$
   (vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$ तथा $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$
   (viii) $A(0, 4)$, $B(4, 0)$

अतिरिक्त अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।]

1. एक वृत्त का केन्द्र Q, Y- अक्ष पर स्थित है। यह वृत्त बिन्दु $(0, 7)$ तथा $(0, -1)$ से गुजरता है। यह वृत्त X- अक्ष को धनात्मक दिशा में बिन्दु $(P, 0)$ पर काटता है। तो 'P' का मूल्य क्या होगा?
2. ΔABC बिन्दु $A(2, 3)$, $B(-2, -3)$, $C(4, -3)$ से निर्मित है। कोण A का समद्विभाजक का भुजा BC पर कटान बिन्दु क्या होगा?
3. समबाहु ΔABC की एक भुजा BC X- के समानान्तर है। भुजा BC, CA तथा AB की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
4. एक समकोण त्रिभुज की भुजायें 'a' तथा 'b' है जहाँ $a > b$. से यदि समकोण को समद्विभाजित करेंगे तो निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से छोटे त्रिभुज के लंब केन्द्र की दूरी ज्ञात कीजिए।
5. रेखा $2x + 3y - 6 = 0$ से मूल बिन्दु पर बनने वाले त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए।

प्रस्तावित परियोजना

- ग्राफ पेपर की सहायता से रेखाखण्ड को अन्तर्गत विभाजित करने वाले निर्देशांक बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए ।

हमने क्या चर्चा की।

1. दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ के मध्य दूरी $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ होगी।

2. मूल बिन्दु से बिन्दु $P(x, y)$ की दूरी $\sqrt{x^2+y^2}$ होगी।

3. Y- अक्ष के समानांतर रेखा पर स्थित दो बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_1, y_2) की दूरी $|y_2 - y_1|$ होगी।

4. X - अक्ष के समानांतर रेखा पर स्थित दो बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) की मध्य दूरी $|x_2 - x_1|$ होगी।

5. बिन्दु $P(x, y)$ के निर्देशांक जो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा के अंतर्गत $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभक्त करती है तो $P(x, y) = \left[\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right]$.

6. बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ होगा।

7. त्रिभुज की मध्यिकाओं का प्रतिच्छेदित बिन्दु गुरुत्व केन्द्र होता है अतः गुरुत्व केन्द्र के निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ होंगे। जहाँ (x_1, y_1) (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) त्रिभुज के शीर्ष होंगे।

8. त्रिभुज की मध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु गुरुत्व केन्द्र कहलाता है।

9. बिन्दु (x_1, y_1) (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

   $\dfrac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ होगा।

10. हेरेन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल

   $$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \because \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

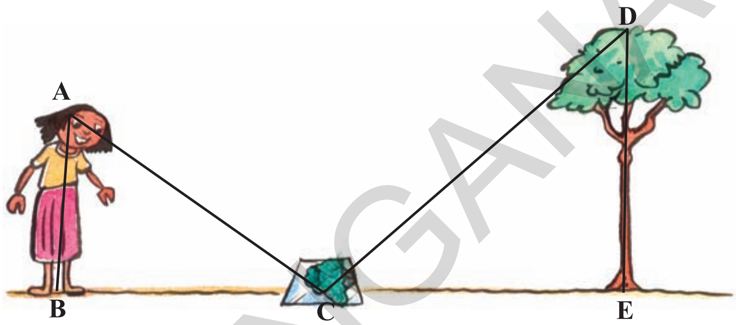
11. बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $(x_1 \neq x_2)$ होगी।

अध्याय

8

समरूप त्रिभुज
(Similar Triangles)

8.1 प्रस्तावना



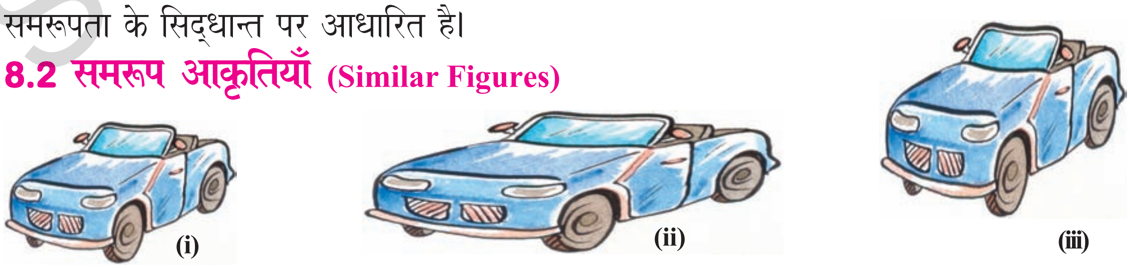
स्निग्धा के घर के पीछे आँगन में एक लम्बा पेड है। वह उस पेड की ऊँचाई ज्ञात करना चाहती है, लेकिन उसे यह नहीं पता है कि वह कैसे ज्ञात किया जाता है। इस बीच उसके मामा घर पधारे। स्निग्धा ने उनसे वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात करने में सहायता करने का अनुरोध किया। उन्होंने एक पल के लिये सोचकर उसे एक दर्पण लाने को कहा। उन्होंने उसको पेड के आधार से कुछ दूरी पर रखा। उसके पश्चात उन्होंने स्निग्धा को दर्पण के दूसरी ओर ऐसे स्थान पर खडे रहने को कहा जहाँ से वह पेड के ऊपरी सतह को दपर्ण में देखे।

ऊपर बताये गये अनुसार जब हम AB (लडकी) से दर्पण (C) तक और दर्पण से पेड (DE) तक चित्र खींचेंगे तो हम ΔABC और ΔDEC का निरीक्षण करेंगे। अब, आप इन दो त्रिभुजों के बारे में क्या कहेंगे? क्या ये अनुरूप है? नहीं, क्योंकि उनका आकार समान होने पर भी उनका परिमाण भिन्न है। उन्हें क्या कहा जाता है जिनका आकार समान हो लेकिन परिमाण भिन्न हो? ऐसे त्रिभुज समरूप आकृतियाँ कहलाते हैं। क्या आप अनुमान लगाते हैं कि पेडों की ऊँचाई पर्वत या दूरस्थ वस्तुओं जैसे सूर्य की दूरी कैसे ज्ञात की जायेगी?

- हम वृक्षों तथा की ऊंचाई कैसे ज्ञात कर सकते है?
- बहुत दुर वाली वस्तुएँ जैसे सुर्य तथा चन्द्र की दुरी हम कैसे ज्ञात कर सकते है?

क्या आप सोचेंगे कि ऐसी दूरियाँ मापन टेप से ज्ञात की जायेंगी? सत्य तो यह है कि ये सभी ऊँचाइयाँ और दूरियाँ कुटिल या टेढा-मेढा मापन के विचार से मापी जाती हैं जो आकृतियों की समरूपता के सिद्धान्त पर आधारित है।

8.2 समरूप आकृतियाँ (Similar Figures)



(i) (ii) (iii)

उपरोक्त वस्तु (कार) का निरीक्षण कीजिए।

यदि उसकी चाड़ाई को वही रखते हुये, लम्बाई को दुगना किया जाय तो वह चित्र (ii) की तरह दिखेगा।

चित्र (i) में यदि लम्बाई को वही रखते हुये चौडाई को दुगना करें तो वह चित्र (iii) जैसा दिखेगा।

अब, चित्र (i) और (iii) के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या ये चित्र(i) के जैसे हैं? हम देखते हैं कि ये चित्र अपने बिगडे हुये रूप में हैं। क्या आप उन्हें समरूप कहेंगे? नहीं, उनकी आकृति समान है लेकिन वे समरूप नहीं हैं।

सोचिये, एक फोटोग्राफर क्या करता होगा जब वह एक ही फिल्म (नेगेटिव) से विभिन्न परिमाण के फोटो छापता होगा? आप स्टैंप परिमाण, पासपोर्ट परिमाण और पोस्ट कार्ड परिमाण के फोटो के बारे में सुने होंगे। वह सामान्यतः एक छोटे परिमाण जैसे 35 मि.मि. बडे परिमाण जैसे 45 मि.मि. (या 55मि.मि.) का बनाता है। हम निरीक्षण करेंगे कि छोटे फोटो की हर रेखाखण्ड को 35 : 45 (या 35 : 55). के अनुपात में बढाया गया है। आगे हम देखते हैं कि ये दो फोटो जो भिन्न परिमाण के तो हैं, लेकिन उनके कोण संलग्न समान हैं। इसलिये ये फोटो ''समरूप'' हैं।

(i) (ii) (iii)

इसी तरह ज्यामिति में दो बहुभुज जिनकी भुजा की संख्या समान हो वे समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण समान हो और संगत भुजायें वही निष्पत्ति और समानुपात में हो।

बहुभुज जिसकी सभी भुजाएँ और कोण समान हो वह समबहुभुज (Regular Polygon) कहलाता है।

संगत कोणों का अनुपात एक ''मापन के दलील'' (Scale factor) or (representative factor) जैसा निर्देशित करता है। वास्तविक जीवन में भवन निर्माण के कार्य में नीला छाप (blue print) इसी ''मापान के दलील'' के उपयोग से किया जाता है।

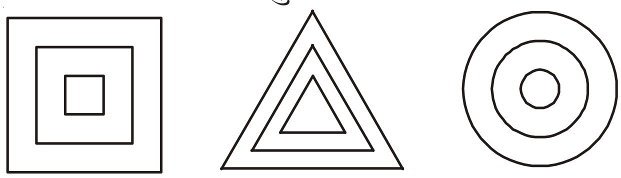
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

क्या आप अपने दैनिक जीवन के कुछ उदाहरण देंगे जहाँ पर ''मापन के दलील'' का उपयोग किया जा रहा है?

जिसकी भुजाओं की संख्या समान हो वे सभी बहुभुज समरूप होते हैं। उदाहरण के लिये, सभी वर्ग समरूप हैं, सभी समबाहु त्रिभुज समरूप हैं, आदि।

समान त्रिज्या वाले वृत्त अनुरूप होते हैं और भिन्न त्रिज्या के अनुरूप नहीं होते हैं। लेकिन सभी वृत्तों की आकृति तथा माप समान होने के कारण वे सभी समरूप हैं।

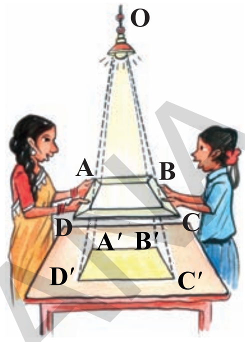
हम कहेंगे कि सभी अनुरूप चित्र समरूप हैं, लेकिन समरूप चित्र अनुरूप रहना आवश्यक नहीं है।



समरूप वर्ग *समरूप त्रिभुज* *समरूप वृत्त*

चित्रों की समरूपता को ठीक से समझने के लिये, हम निम्न कार्यविधि करेंगे।

कार्यविधि :



आप की कक्षा में एक मेज़ पर पारदर्शी प्लास्टिक का टुकड़ा छत से ऊर्ध्वाधर लटकाइए। निलंबित बिंदु पर एक प्रकाशित बल्ब लटकाइए। एक कार्डबोर्ड को बहुभुज को ABCD को काट कर पारदर्शी शीट पर लगाइए। उसकी बाहरी बिंदुओं से चतुर्भुज ABCD बनेगा। चतुर्भुत की परछाई की रूपरेखा को $A'B'C'D'$ से अंकित कीजिए।

अब यह चतुर्भुज $A'B'C'D'$ चतुर्भुज ABCD का आवर्धक (magnification) या विस्तार (Enlargement) रूप है। आगे, हम देखते हैं कि A' OA पर है जहाँ 'O' बल्ब है, B' $\overrightarrow{OB}$ पर है, C', $\overrightarrow{OC}$ पर और D' $\overrightarrow{OD}$ पर है। चतुर्भुज ABCD और $A'B'C'D'$ समान आकृति के हैं लेकिन भिन्न परिमाण के हैं।

A का संगत शीर्ष A' है और हम इसे $A' \leftrightarrow A$. से सूचित करेंगे। इसी तरह $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ और $D' \leftrightarrow D$ हैं।

कोणों और भुजाओं को ठीक से मापने पर हम यह जाँच करेंगे कि,

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ और

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

यह बल देता है कि दो बहुभुज जिसकी भुजाओं की संख्या समान हो वे समरूप होते हैं यदि

(i) संगत के सभी कोण समान हो और

(ii) सभी संगत की भुजायें समानुपात में हों।

क्या एक वर्ग, आयत के समरूप हैं? दोनों चित्रों में संगत-कोण समान हैं लेकिन संगत-भुजायें अनुपात में नहीं हैं। इसलिए, ये समरूप नहीं हैं। बहुभुज समरूप होने के लिये उपरोक्त कोई एक नियम पर्याप्त नहीं है, दोनों नियम संतृप्त होना चाहिए।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

- क्या आप कहेंगे कि एक वर्ग और एक समचतुर्भुज समरूप है? अपने मित्रों से चर्चा कीजिए
- क्या दो आयात समरुप होते है?

यह कीजिए

1. समरूप है या नहीं से रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।
   (i) सभी वर्ग .... हैं।
   (ii) सभी समबाहु त्रिभुज .... है।
   (iii) सभी समद्विबाहु त्रिभुज .... है।
   (iv) दो बहुभुज जिसकी भुजाओं की संख्या समान हो .... हैं यदि उनके संगत के कोण समान हैं और संगत की भुजायें समान हैं।
2. निम्न कथन में सत्य / असत्य कौन से है लिखिए
   (i) कोई दो समरूप चित्र अनुरूप हैं।
   (ii) कोई दो अनरूप चित्र समरूप हैं।
   (iii) दो बहुभुज समरूप हैं यदि उनके संगत के कोण समान हैं।
3. निम्न जोडियों के दो उदाहरण दीजिये।
   (i) समरूप चित्र (ii) असमरूप चित्र

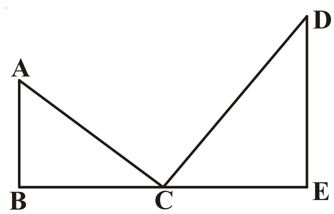
8.3 त्रिभुजों की समरूपता (Similarity of Triangles)

स्निग्धा द्वारा पेड़ की ओऊँचाई ज्ञात करने वाले उदाहरण में हमने दो त्रिभुज खींचे हैं जो समरूपता के सिद्धान्त को प्रदर्शित करते हैं।

(i) संगत के कोण समान हैं और
(ii) संगत की भुजाओं की लम्बाई समानुपात में हैं।

ΔABC और ΔDEC की प्रस्तावना में

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle ECD$



यह भी है कि $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{DC}{AC} = K$ (स्थिरांक)

अर्थात् ΔABC, ΔDEC के समरूप हैं।

सांकेतिक रूप से हम इस प्रकार लिखेंगे : $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

(चिह्न '~' समरूप पढा जाता है।)

क्यों कि हमने K को स्थिरांक कहा है, इसलिये

यदि $K > 1$ हमें व्यापक चित्र प्राप्त होंगे।

$K = 1$ हमें अनुरूप चित्र प्राप्त होंगे।

$K < 1$ हमें छोटे चित्र प्राप्त होंगे।

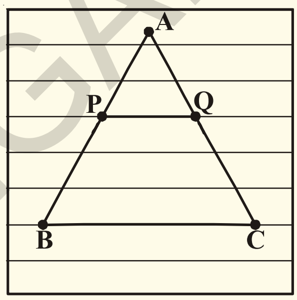
आगे, ΔABC और ΔDEC में संगत की भुजाएँ समान हैं। इसलिये ये समकोणीय त्रिभुज कहलाते हैं। दो समकोणीय त्रिभुज की संगत भुजाओं का अनुपात सदा समान होता है। इसे सिद्ध करने के लिये हम ''मौलिक समानुपात प्रमेय'' का उपयोग करेंगे। यह ''थेल्स प्रमेय'' से प्रचलित है।

मौलिक अनुपात सिद्धांत

मौलिक समानुपात प्रमेय या थेल्स प्रमेय समझने के लिये हम निम्न क्रिया-कलाप करेंगे।

क्रियाविधि

एक रूलदार कागज़ लेकर उस पर कोई एक रेखा को आधार मान कर एक त्रिभुज खींचिये। ΔABC को कई रेखायें काटेंगी। उनमें से एक रेखा को चुनकर वह भुजा AB और AC को जहाँ मिलती है वहाँ P और Q अंकित कीजिए।



$\frac{AP}{PB}$ और $\frac{AQ}{QC}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए। आप क्या निरीक्षण करेंगे? अनुपात समान होते हैं। क्यों? क्या यह सदा सत्य है? विभिन्न प्रतिच्छेदी रेखाओं के साथ प्रयास कीजिए। हमें पता है कि रूलदार कागज़ पर सभी रेखायें समानान्तर हैं, और हम देखते हैं कि अनुपात हमेशा समान है।

$\therefore$ ΔABC में यदि $PQ \parallel BC$ तो $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ यह मौलिक समानुपात प्रमेय का निष्कर्ष है।

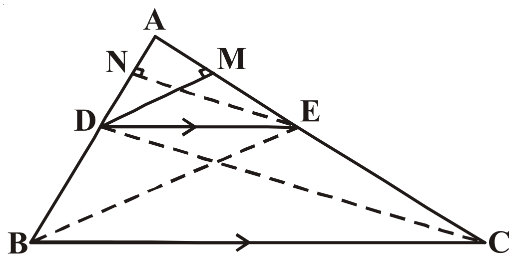
8.3.1 मौलिक समानुपात प्रमेय (थेल्स प्रमेय) (Basic Proportionality Theorem (Thales Theorem))

प्रमेय-8.1 : त्रिभुज को एक भुजा के समांतर यदि रेखा खींची जाय जो अन्य दो भुजाओं के विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तो वे दो भुजायें समान अनुपात में विभाजित होंगे।

दिया गया है : ΔABC में $DE \parallel BC$ है जो भुजा AB और AC को D और E पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है **(RTP) :** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना: B, E और C, D को मिलाकर, $DM \perp AC$ और $EN \perp AB$. की रचना कीजिए।



उपपत्ति: ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

इसलिये, $\dfrac{\Delta \text{ ADE का क्षेत्रफल}}{\Delta \text{ BDE का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \dfrac{AD}{BD}$ ...(1)

फिर भी ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

ΔCDE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$\dfrac{\text{क्षे. } \Delta \text{ ADE}}{\text{क्षे. } \Delta \text{ BDE}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \dfrac{AE}{EC}$ ...(2)

ध्यान दीजिये कि ΔBDE और ΔCDE एक ही आधार DE पर है और समांतर रेखायें BC और DE के मध्य हैं।

इसलिये क्षे. (ΔBDE) = क्षे. (ΔCDE) ...(3)

(1) (2) और (3), से हम प्राप्त करेंगे

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

इस तरह सिद्ध किया गया।

क्या उपरोक्त प्रमेय का विलोम (converse) सत्य है? इसका परीक्षण करने के लिये हम निम्न कार्य कलाप करेंगे।

कार्यविधि :

आपकी कापी में एक कोण XAY खींचिए और किरण AX, पर B_1, B_2, B_3, B_4 और B बिन्दु अंकित कीजिए जो समान दूरी पर है। जिससे $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$से.मी. (लगभग)

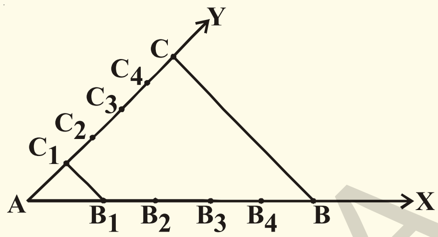
इसी तरह किरण AY, पर C_1, C_2, C_3, C_4 और C अंकित कीजिए जिससे

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ से.मी. (लगभग)

B_1, C_1 और B, C. को मिलाइए।

निरीक्षण कीजिए कि $\dfrac{AB_1}{B_1B} = \dfrac{AC_1}{C_1C} = \dfrac{1}{4}$ और $B_1C_1 \parallel BC$

इसी तरह B_2C_2, B_3C_3 और B_4C_4, को मिलाने पर आप देखते हैं कि



$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3} \text{ और}$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2} \text{ और}$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1} \text{ और}$$

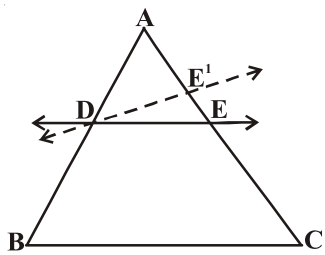
$C_1B_1 \parallel C_2B_2 \parallel C_3B_3 \parallel C_4B_4 \parallel CB$ की जाँच कीजिए?

इस से हमें वह प्रमेय प्राप्त होगा जो थेल्स प्रमेय का विलोम है।

प्रमेय-8.2 : यदि एक रेखा त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर है।

दिया गया है: ΔABC, में एक रेखा DE खींची गई जिससे $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

सिद्ध करना है (RTP): $DE \parallel BC$



उपपत्ति: मान लीजिए DE, BC के समांतर नहीं है DE^1 को BC से समांतर खींचिये।

जिस से $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (क्यों?)

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (क्यों?)

दोनों ओर 1 जोडने पर, हम देखते हैं कि E और E' एक दूसरे पर होते हैं। (क्यों?)

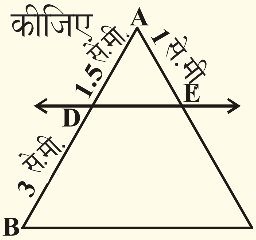
प्रयास कीजिए।

1. ΔPQR पर दो बिन्दु E और F क्रमशः दो भुजाएँ PQ और PR पर हैं। निम्न में प्रत्येक के लिये यह कथन दीजिए कि $EF \parallel QR$ है या नहीं?
   (i) PE = 3.9 से.मी. EQ = 3 से.मी. PF = 3.6 से.मी. और FR = 2.4 से.मी.
   (ii) PE = 4 से.मी. QE = 4.5 से.मी. PF = 8 से.मी. और RF = 9 से.मी.
   (iii) PQ = 1.28 से.मी. PR = 2.56 से.मी. PE = 1.8 से.मी. और PF = 3.6 से.मी.

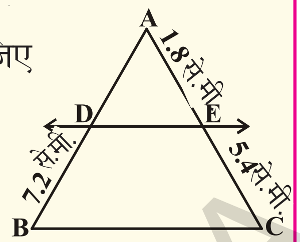
से.मी.

2. निम्न चित्र में DE || BC.

(i) EC ज्ञात कीजिए

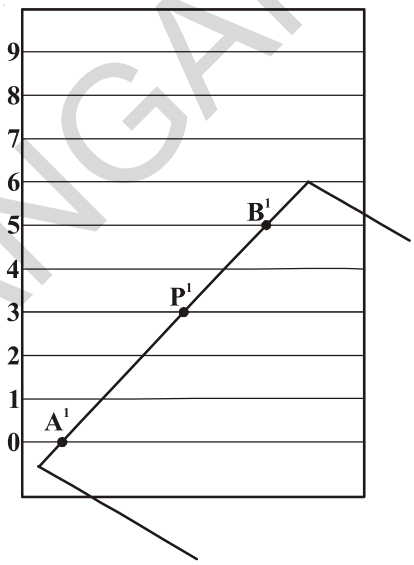


(ii) AD ज्ञात कीजिए



रचनायें : रेखा खण्ड को विभाजित करना (थेल्स प्रमेय के उपयोग से)

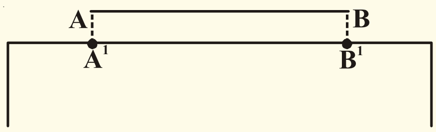
माधुरी ने एक रेखा खण्ड खींची। वह इस रेखा खण्ड को 3 : 2 में विभाजित करना चाहती है। उसने एक पटरी से उसको माप कर आवश्यक अनुपात में विभाजित किया। इस बीच उसकी बडी बहन वहाँ आई। उसने यह देखा और माधुरी को सुझाव दिया कि वह रेखाखण्ड को बिना मापे, आवश्यक अनुपात में विभाजित करें। माधुरी चौंक गई और उसकी बहन को, ऐसा करने में सहायता माँगी। उसकी बहन ने समझाया। आप भी निम्न कार्यकलाप द्वारा कर पायेंगे।



कार्यविधि :

रूलदार कापी से एक कागज़ लीजिए। नीचे की रेखाओं से आरंभ करते हुये 0, 1, 2, 3, ... संख्याएँ अंकित कीजिए।

एक मोटा कार्ड-पेपर लेकर रेखाखण्ड AB के साथ रखकर उसकी लम्बाई को कार्ड की लम्बाई के साथ मिलाइए। A और B के संगत बिन्दु कार्ड पर A^1 और B^1 होंगे।



अब A^1 को रेखांकित पेपर के शून्य की रेखा पर रखकर कार्ड को A^1 के साथ ऐसा घुमाइए जब तक B^1 पाँचवी रेखा पर न मिले (3 + 2).

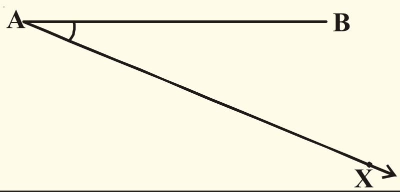
जब तीसरी रेखा फैल-कार्ड को छूती है तब उसे P^1 से अंकित कीजिए।

दिये गये रेखाखण्ड पर कार्ड रखकर P^1 तक हटाइए और बिन्दु 'P' से अंकित कीजिए।

इस तरह P वह बिन्दु है जो दिये गये रेखाखण्ड को 3:2 में विभाजित किया।

आइए अब हम यह सीखें कि यह रचना कैसे की जायेगी।

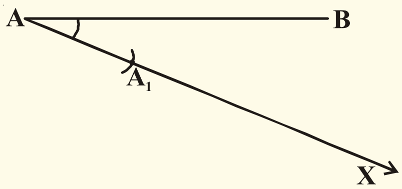
एक रेखाखण्ड AB दिया गया है। हम इस रेखा को m : n के अनुपात में विभाजित करना चाहते हैं। जहाँ m और n दोनों धन पूर्णांक हैं। मान लीजिए m = 3 और n = 2 हैं।

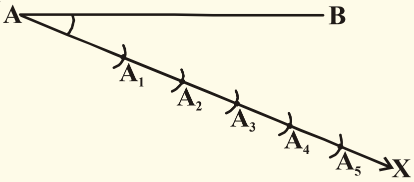


सीढियाँ :

1. A से गुजरते हुए एक किरण AX खींचिए जो AB के साथ न्यूनकोण बनाती है।

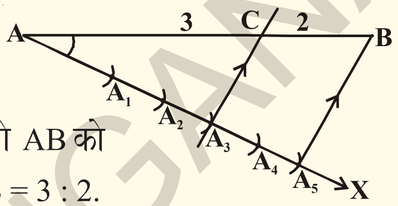
2. 'A' को केन्द्र मानकर कोई अर्धव्यास लेकर किरण AX पर एक चाप खींचिये जो A_1 पर काटेगा।





3. उसी प्रकार और उसी त्रिज्या से A_1 को केन्द्र मान कर दूसरा चाप खींचिये जो A_2 पर काटता है।

4. इस तरह पाँच बिन्दु $(=m+n)$ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 अंकित कीजिए जिससे $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$

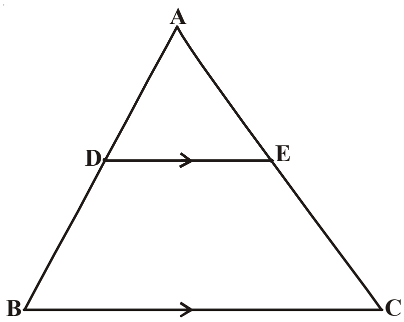


5. A_5B को मिलाइये। अब बिन्दु $A_3(m=3)$ A_5B तक एक समांतर रेखा खींचिये ($\angle A$ के समान कोण बनाते हुये) जो AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। निरीक्षण कीजिए कि $AC : CB = 3 : 2$.

अब हम थेल्स प्रमेय और उसके विलोम पर कुछ उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण-1. ΔABC में $DE \parallel BC$ और $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$.

$AC = 5.6$ से.मी. AE ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में $DE \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (थेल्स प्रमेय से)}$$

लेकिन $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ इसलिए $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

दिया गया है $AC = 5.6$ और $AE : EC = 3 : 5$.

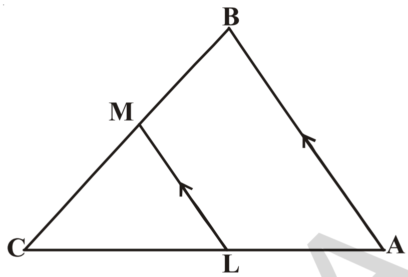
$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} = \frac{3}{5} \text{ (तिरछा गुणा से)}$$

$$5(AE) = (3 \times 5.6) - 3AE$$

$$8AE = 16.8$$

$$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1 \text{ से.मी.}$$



उदाहरण-2. दिये गये चित्र में $LM \parallel AB$ है। और

$AL = x - 3,\ AC = 2x,\ BM = x - 2$

और $BC = 2x + 3$ हैं। x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में $LM \parallel AB$

$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC} \text{ (थेल्स प्रमेय से)}$$

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5} \text{ (तिरछा गुणा)}$$

$$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3)$$

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

Þ $\quad 2x - x = -6 + 15$

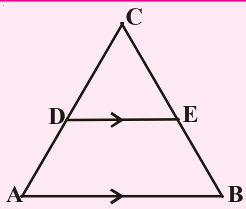
$$x = 9$$

यह कीजिए।

1. दिये गये चित्र में x का मुल्य ज्ञात किजिए?

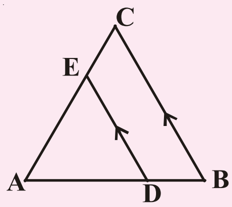
   $AD = 8x + 9,\ CD = x + 3$

   $BE = 3x + 4,\ CE = x.$



2. ΔABC, $DE \parallel BC$. $AD = x$, $DB = x - 2$,

   $AE = x + 2$ और $EC = x - 1$.



उदाहरण -3. चतुर्भुज ABCD के कर्ण एक दूसरे को इस तरह प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. सिद्ध कीजिए कि ABCD समलम्ब चतुर्भुज है।

हल : दिया गया है : चतुर्भुज ABCD में , $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

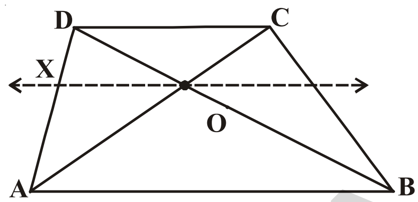
सिद्ध करना है : ABCD समलम्ब चतुर्भुज है।

रचना : 'O' से AB पर एक समांतर रेखा खींचिए DA को X पर मिलती है।

उपपत्ति : ΔDAB, $XO \parallel AB$ (रचना से)

$$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB} \quad \text{(BPT से)}$$

$$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD} \quad \text{..... (1)}$$



दुबारा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (दिया गया है।)

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD} \quad \text{..... (2)}$$

(1) और (2) से

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$$

ΔADC, XO एक ऐसी रेखा है जिस से $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$

$\Rightarrow XO \parallel DC$

$\Rightarrow AB \parallel DC$

चतुर्भुज ABCD, $AB \parallel DC$

$\Rightarrow$ ABCD समलम्ब चतुर्भुज (परिभाषा से)

अतः सिद्ध किया गया है।

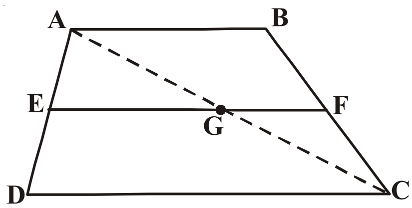
उदाहरण-4. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, $AB \parallel DC$ है। E और F दो बिन्दु है जो AD और BC के समानान्तर भुजाओ पर हैं, जिस से $EF \parallel AB$. बताइए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

हल : आइए A और C को इस तरह मिलाये कि वह EF को G पर प्रतिच्छेद करें।

$AB \parallel DC$ और $EF \parallel AB$ (दिया गया है)

$\Rightarrow EF \parallel DC$ (दो रेखायें जो एक रेखा के समांतर हैं वे एक दूसरे के समांतर होते हैं।)

ΔADC, $EG \parallel DC$



इसलिए $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (BPT से) ...(1)

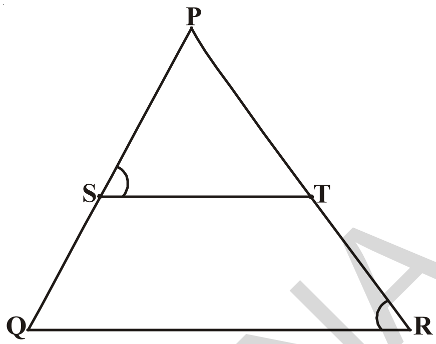
इसी तरह, ΔCAB, में $GF \parallel AB$

$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB}$ (BPT से) i.e., $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ...(2)

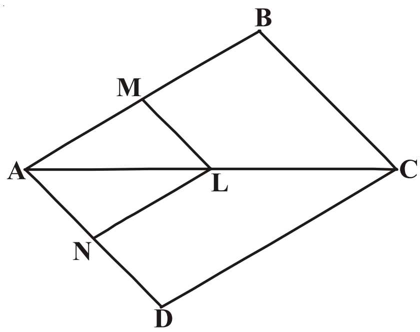
(1) और (2) से $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

अभ्यास - 8.1

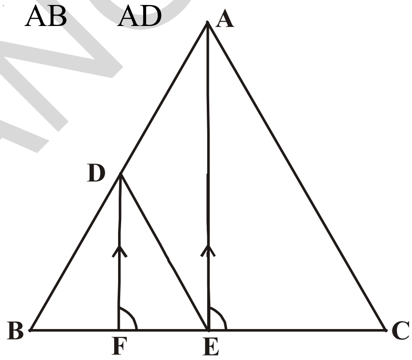
1. ΔPQR में रेखा ST इस तरह है कि $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$



और $\angle PST = \angle PRQ$.
सिद्ध कीजिए कि ΔPQR समद्विबाहु त्रिभुज है।



2. दिये गये चित्र में $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$

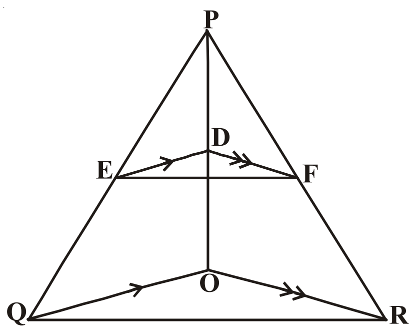


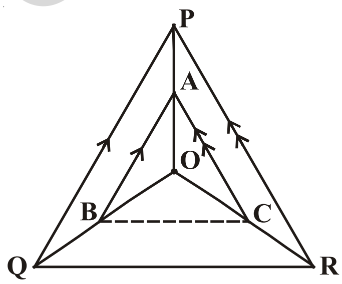
3. दिये गये चित्र में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ सिद्ध कीजिए $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.

4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु के समानान्तर से खींची गई रेखा तीसरी भुजा को प्रतिच्छेद करेगी।

5. ''त्रिभुज की कोई दो भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा के समानान्तर है।'' सिद्ध कीजिए।

6. दिये गये चित्र में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$. बताइए कि $EF \parallel QR$.





7. दिये गये चित्र में A, B तथा C बिन्दू OP, OQ तथा OR पर डाले गये बिन्दु है जैसे $AB \parallel PQ$ तथा $AC \parallel PR$ तो बताइए $BC \parallel QR$.

8. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB||DC और उसके कर्ण एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं। बताइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

9. 7.2 से.मी. की एक रेखाखण्ड को 5 : 3 के अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए, लिखिए।

आप अपने मित्रों से यह चर्चा कीजिए कि त्रिभुजों की समरूपता, बहुभुजों की समरूपता से कैसे भिन्न हैं।

8.4 त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ (या मापदण्ड या नियम) (Criteria for Similarity of Triangles)

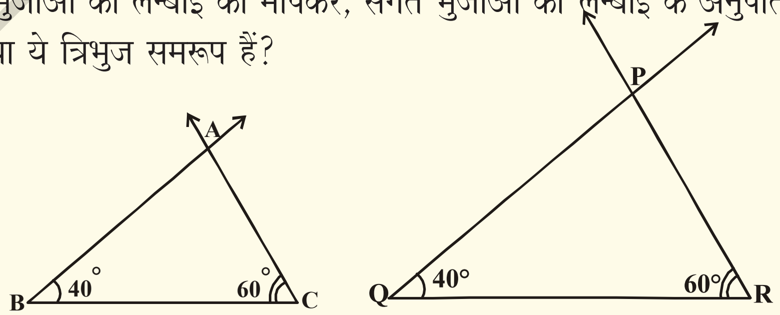
हम जानते हैं कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत-कोण समान हो और संगत भुजायें समानुपात में हों। दो त्रिभुजों की समरूपता की जाँच करने के लिये, हमें उनके संगत कोणों की समानता की जाँच और संगत-भुजाओं के अनुपात की समानता की जाँच करनी चाहिये। आइये हम अब प्रयास करें कि दो त्रिभुजो की समरूपता की कसौटी पर खरे उतरें। आइये हम निम्न कार्यकलाप करें।

कार्यविधि

एक पटरी और चाँदे की सहायता से दो प्रतिरूप (जो अनुरूप नहीं) (non-congruent) त्रिभुजों की रचना कीजिए जिससे प्रत्येक त्रिभुज में 40° और 60° के कोण हों। आपके द्वारा बनाये गये दोनों त्रिभुजों के तीसरे कोण माप कर जाँच कीजिए।

वह प्रत्येक कोण 80° का होना चाहिए (क्यों?)

त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाई को मापकर, संगत भुजाओं की लम्बाई के अनुपात की गणना कीजिए। क्या ये त्रिभुज समरूप हैं?



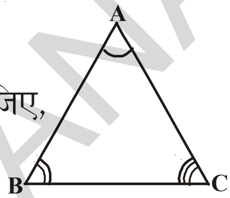
यह कार्यविधि हमें, त्रिभुजों की समरूपता के निम्न कसौटी की ओर अग्रसर करती है।

8.4.1 AAA त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी

प्रमेय-8.3 : दो त्रिभुजों में, यदि उनके कोण समान हैं, तो उनकी सम्मुख भुजायें समान अनुपात (या समानुपात) में होंगी और इसलिये वे दो त्रिभुज समरूप है।

दिया गया है : त्रिभुज ABC और DEF में,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

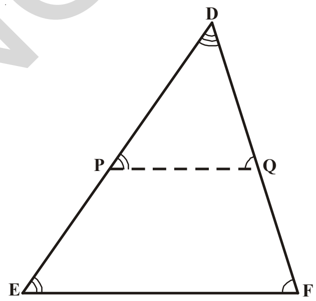


सिद्‌ध करना है कि : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

रचना : यदि AB < DE हो तो DE और DF पर क्रमशः P और Q अंकित कीजिए, इस तरह के AB = DP और AC = DQ, PQ. को मिलाइए।

उपपत्तिः $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (क्यों?)

यह देगा $\angle B = \angle P = \angle E$ और $PQ \parallel EF$ (कैसे?)



$\therefore \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (क्यों?)

i.e., $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (क्यों?)

इस तरह $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ और $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

अतः सिद्‌ध किया गया।

विचार-विमर्श - उपर्युक्त रचना में यदि AB = DE या AB > DE हो तो क्या होगा?

सूचना : यदि एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के समान हैं तो त्रिभुज के कोणों के योग के नियम के अनुसार उनके तीसरे कोण भी समान होंगे।

इसलिए AA समरूपता इसतरह व्यक्त की जाती है कि यदि एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के समान हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप हैं।

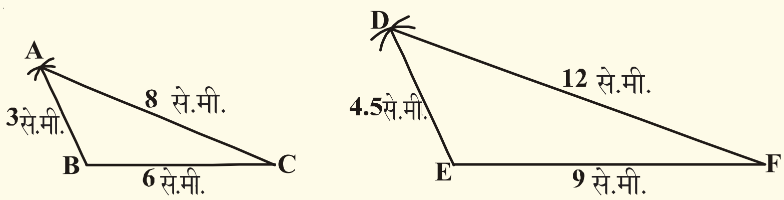
उपरोक्त कथन का विलोम (Converse) क्या होगा?

यदि एक त्रिभुज की भुजायें क्रमशः दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपात हैं, तो क्या यह सत्य होगा कि उनके संगत कोण भी समान होंगे?

आइए हम इसे एक कार्यकलाप द्वारा अभ्यास करें। (exercise)

कार्यविधि

दो त्रिभुज ABC और DEF इस तरह उतारिये कि AB = 3 से.मी., BC = 6 से.मी. CA = 8 से.मी., DE = 4.5 से.मी., EF = 9 से.मी. और FD = 12 से.मी.



आप प्राप्त करते हैं कि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$.

अब दोनों त्रिभुजों के कोणों को मापिए। आप क्या निरीक्षण करेंगे? आप संगत कोणों के बारे में क्या कहेंगे? वे समान हैं, इसलिए त्रिभुज समरूप हैं। आप विभिन्न त्रिभुजों के लिये इसकी जाँच करेंगे।

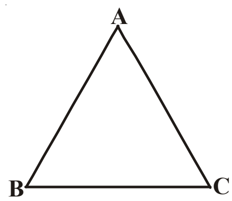
उपरोक्त कार्यविधि द्वारा, हम दो त्रिभुजों की समरूपता के लिये निम्न कसौटी दे सकते हैं।

8.4.2. त्रिभुजों की समरूपता के लिये SSS कसौटी

प्रमेय-8.4 : यदि दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज की भुजायें दूसरे त्रिभुजों की भुजाओं के साथ समानुपात में है, तो उनके संगत कोण समान होंगे और इसलिये त्रिभुज समरूप होंगे।

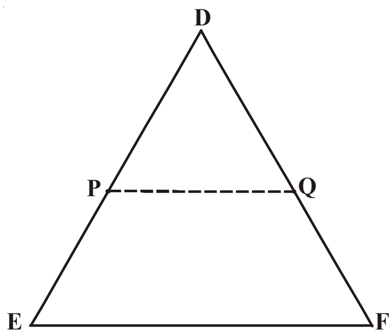
दिया गया है : ΔABC और ΔDEF इस तरह है के

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad (<1)$$



सिद्ध करना है : $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

रचना : DE और DF पर क्रमशः P और Q बिन्दु इस तरह अंकित करें कि $AB = DP$ और $AC = DQ$. PQ को मिलाइए।



उपपत्ति : $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ और $PQ \parallel EF$ (क्यों?)

अतः $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$ (क्यों?)

$$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$$

अतः $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (क्यों?)

अतः $BC = PQ$ (क्यों?)

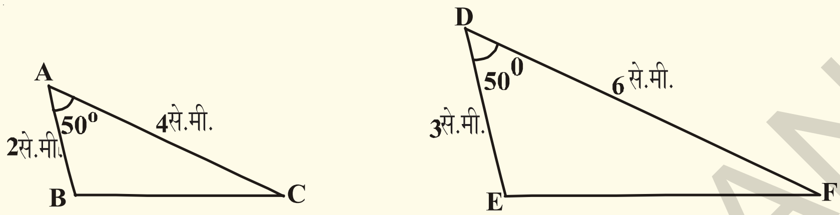
$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (क्यों?)

इसलिये $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ (कैसे?)

हम ने यह अध्ययन किया हैं कि दो बहुभुजों की समरूपता के लिये कोई एक नियम पर्याप्त नहीं है। त्रिभुजों की समरूपता के लिये दोनों नियमों को संतुष्ट करने की आवश्यकता नहीं हैं, क्योंकि एक नियम अपने-आप दूसरे पर निर्धारित है। अब हम SAS समरूपता की कसौटी देखेंगे। इसके लिये, आइये हम निम्न कार्यकलाप करें।

कार्यविधि

दो त्रिभुज ABC और DEF इस तरह खींचिये कि AB = 2 से.मी. $\angle A = 50^0$, AC = 4से.मी., DE = 3 से.मी., $\angle D = 50^0$ और DF = 6 से.मी.



निरीक्षण कीजिए कि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ और $\angle A = \angle D = 50^0$.

अब $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle F$ को मापिये और BC और EF भी मापिये और निरीक्षण कीजिए कि

$\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ यह भी के $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$.

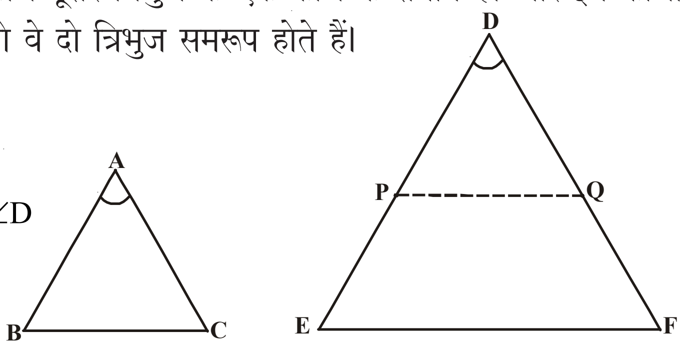
अतः वे दोनों त्रिभुज समरूप हैं। इस कार्यविधि को विभिन्न मापों के त्रिभुजों के साथ दोहराइए जो हमें त्रिभुजों की समरूपता की निम्न कसौटी प्रदान करती है।

8.4.3 त्रिभुजों की समरूपता की SAS कसौटी :

प्रमेय-8.5 : यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के समान हो और इन कोणों से जुडी हुई भुजायें समानुपात में हों, तो वे दो त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया गया है: ΔABC और ΔDEF में,

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (<1) और $\angle A = \angle D$



सिद्ध करना है: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचना : DE और DF पर क्रमशः P और Q बिन्दु इस तरह अंकित कीजिए कि AB = DP और AC = DQ. PQ को मिलाइए।

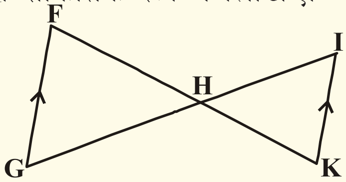
उपपत्ति: $PQ \parallel EF$ और $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (कैसे?)

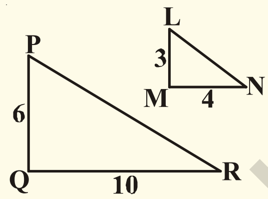
अतः $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle Q$

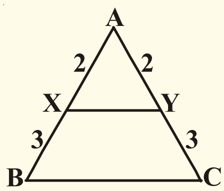
$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (क्यों?)

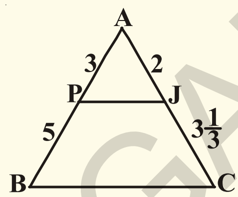
प्रयास कीजिए।

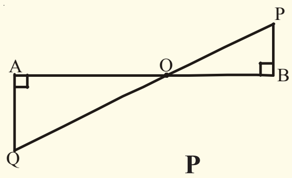
1. क्या त्रिभुज समरूप हैं? यदि हैं, तो समरूपता की कसौटी का नाम दीजिये। समरूपता के संबंध को सांकेतिक रूप में लिखिए।

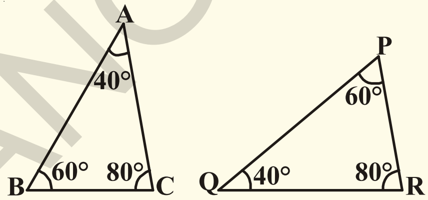
(i)


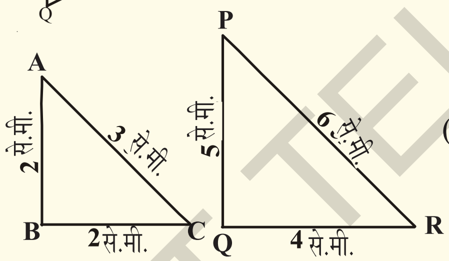
(ii)


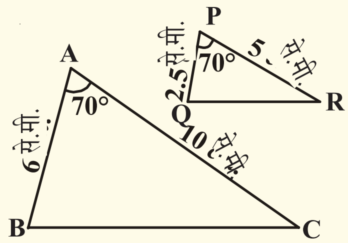
(iii)


(iv)


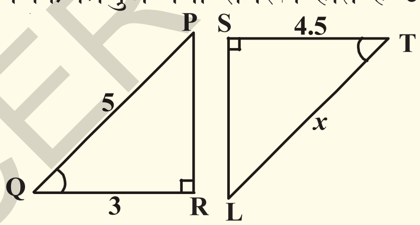
(v)


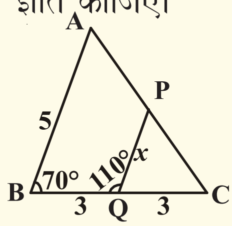
(vi)


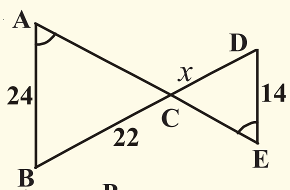
(vii)


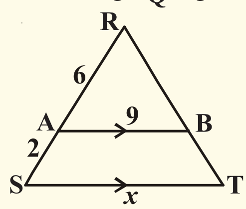
(viii)


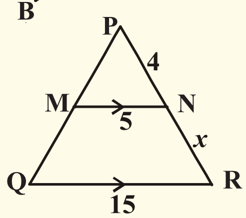
2. समझाइये कि त्रिभुज क्यों समरूप होते हैं और x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

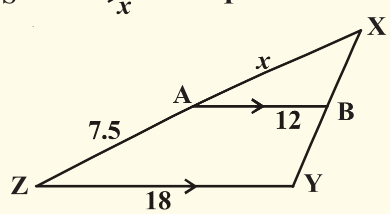
(i)


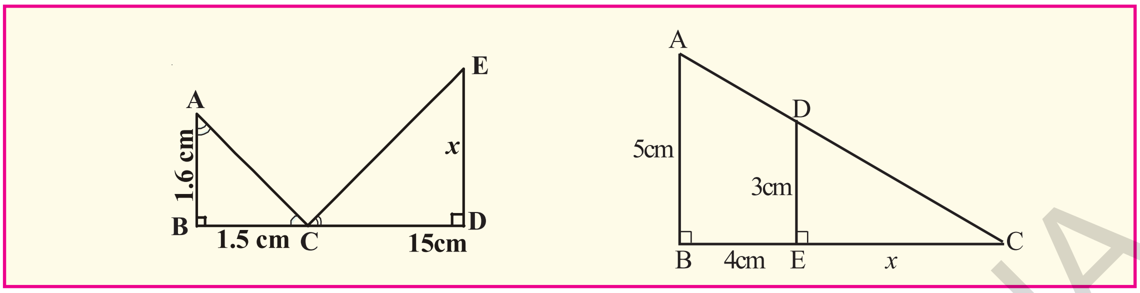
(ii)


(iii)


(iv)


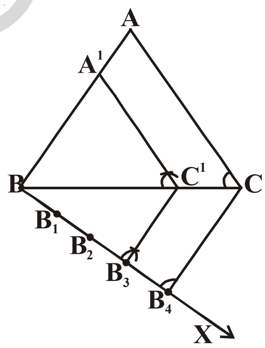
(v)


(vi)




रचना : ''मापन दलील'' (scale factor) के उपयोग से दिये गये त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए।

a) दिये गये त्रिभुज ABC के समरूप, एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजायें ΔABC की संगत भुजाओं के $\frac{3}{4}$ के समान हैं। (मापन दलील $\frac{3}{4}$ है)



सीढियाँ : 1. शीर्ष A के सम्मुख भुजा BC पर एक किरण BX खींचिये जो न्यूनकोण बनता हो।

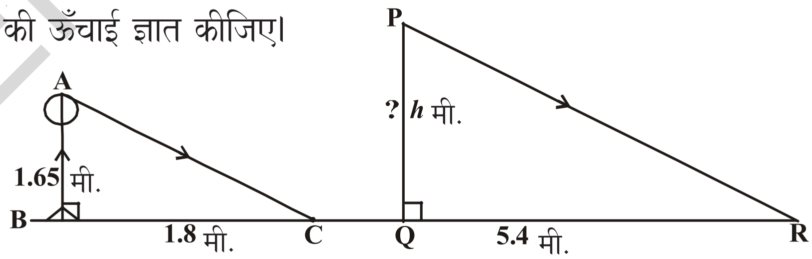
2. BX पर चार बिन्दु B_1, B_2, B_3, B_4 इस तरह अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

3. B_4C को मिलाइये और B_3 से एक रेखा खींचिये। जो B_4C के समानान्तर तथा BC को C' पर काटती है।

4. C' से एक रेखा CA के समानान्तर खींचिये जो AB को A' पर प्रतिच्छेद करेगी। अतः $\Delta A'BC'$ आवश्यक त्रिभुज है।

आइये अब हम इस कसौटी का विस्तृत उपयोग करने के लिये कुछ और उदाहरण लेंगे।

उदाहरण-5. 1.65मी लम्बे आदमी की परछाई 1.8मी है। उसी समय एक खंबे की परछाई5.4 मी. है तो उस खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल: चित्र रुप में दर्शाने के बाद ΔABC और ΔPQR में,

$\angle B = \angle Q = 90^0$.

$\angle C = \angle R$ ($AC \parallel PR$, किसी समय, सूर्य की सभी किरणें समानान्तर है।)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (AA समरूपता से)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (समरूप त्रिभुजों के संगत भाग)

$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95 \text{ मी.}$$

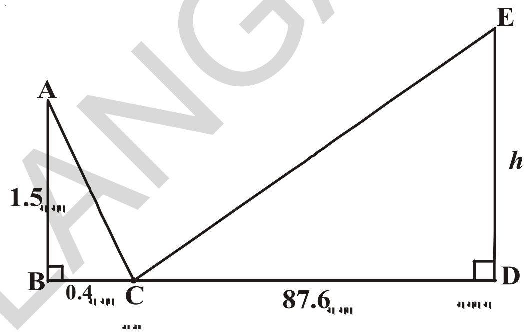
खंभे की ऊँचाई 4.95 मी.

उदाहरण-6. एक व्यक्ति एक टावर के शिखर को एक दर्पण में देखता है जो टावर से 87.6 मी. की दूरी पर है। वह दर्पण धरती पर अपना मुख ऊपर की ओर किये हुये है। वह व्यक्ति दर्पण से 0.4 मी की दूरी पर है और उसकी ऊँचाई 1.5 मी है। टावर की ऊँचाई क्या है?

हल : ΔABC और ΔEDC में,

$\angle CBA = \angle EDC = 90°$

$\angle ACB = \angle DCE$ (आपाती कोण और परावर्तित कोण समान होते हैं।)



$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA समरूपता से)

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5 \text{ मी है।}$$

अतः टावर की ऊँचाई 328.5 मी. है।

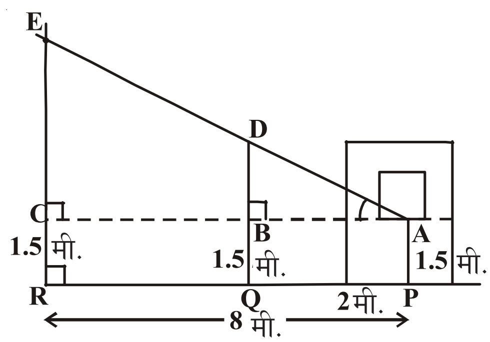
उदाहरण-7. गोपाल को इस बात की चिंता है कि उसका पडोसी अपने घर के ऊपर के माले से उसके कमरे में झांक रहा है। उसने तय किया कि वह एक दरी (fence) बनायेगा जो इतनी ऊँची हो जिससे पड़ोसी के उपर के माले की खिडकी से उसकी दृश्यता बन्द हो जाये। उस दरी की ऊँचाई कितनी होनी चाहिए? चित्र में माप दिये गये हैं।

हल: चित्र रुप में दर्शाने के बाद ΔABD & ΔACE

$\angle B = \angle C = 90°$

$\angle A = \angle A$ (सामान्य कोण)

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (AA समरूपता से)



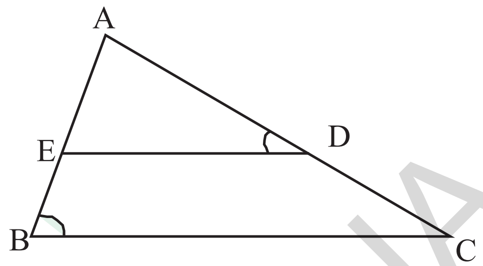
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{1.2}$$

$$BD = \frac{2 \times 1.2}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3 \text{ मी}$$

आवश्यक दरी की कुल लम्बाई 1.5 मी + 0.3 मी = 1.8 मी. है जो पडोसी की दृश्यता को बन्द करेगी।

अभ्यास - 8.2

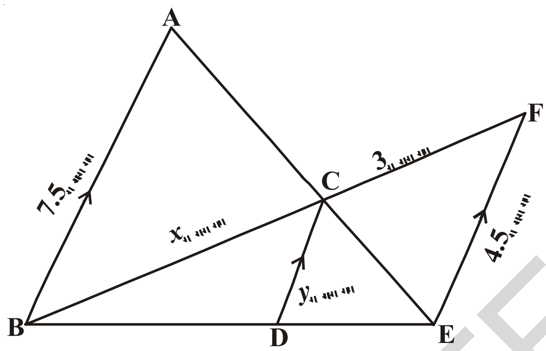
1. दिये गये चित्र में, $\angle ADE = \angle B$



   (i) बताइए कि $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

   (ii) यदि AD = 3.8 से.मी., AE = 3.6 से.मी.
   BE = 2.1 से.मी. BC = 4.2 से.मी.
   DE ज्ञात कीजिए।

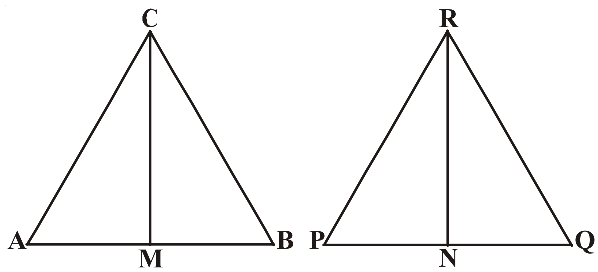
2. दो समरूप त्रिभुज की परिमितियाँ क्रमशः 30 से.मी. और 20 से.मी. है। यदि पहले त्रिभुज की एक भुजा 12 से.मी. हो, तो दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा को ज्ञात कीजिए।



3. दिये गये चित्र में AB || CD || EF
AB = 7.5 से.मी. DC = y से.मी. EF = 4.5 से.मी., BC = x से.मी., हो तो x तथा का y मूल्य ज्ञात कीजिए ।

4. 90 से.मी. ऊँचाई की एक लडकी एक खंभे से 1.2 मी./से के वेग से भाग रही है। यदि खंभा धरती से 3.6 मी ऊपर है, तो 4 सेकेण्ड के पश्चात की उस लडकी की परछाई की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. दिया गया है $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ CM और RN क्रमशः ΔABC और ΔPQR के दो मध्यिकायें हैं। सिद्ध कीजिए कि



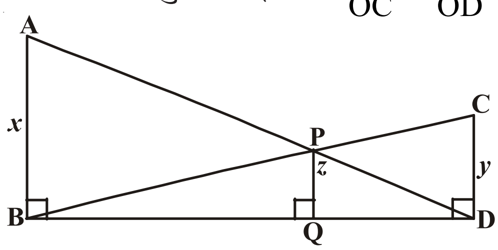
   (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

   (ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

   (iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$

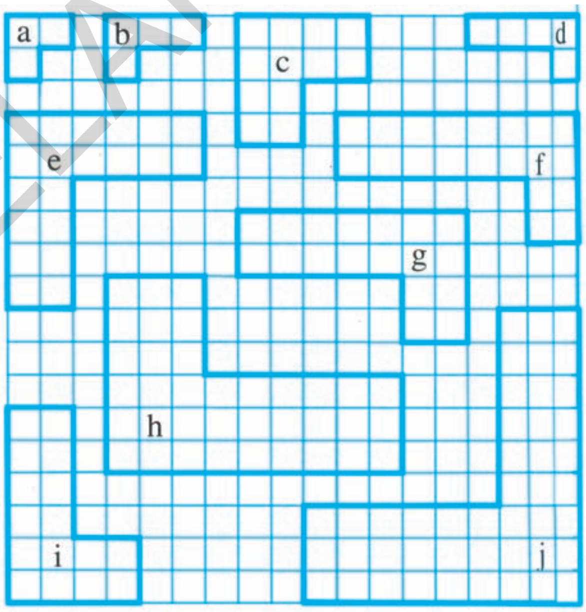
6. AB || DC के एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD के कर्ण AC और BC परस्पर 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी का उपयोग करते हुये बताइये कि $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$.

7. AB, CD और PQ, BD पर लम्ब हैं।
AB = x, CD = y और PQ = Z
सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$.



8. 4मी लम्बे ध्वज़ स्तंभ की परछाई 6 मी है। उसी समय निकटतम भवन की ऊँचाई 24 मी. है। भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के समद्विभाजक हैं जो ΔABC और ΔFEG के क्रमशः दो भुजायें AB और FE के D और H बिन्दु पर हैं। यदि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ तो बताइए कि G

   (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$
10. AX और DY दो समरूप त्रिभुज ΔABC और ΔDEF की ऊँचाइयाँ है। सिद्ध कीजिए कि $AX : DY = AB : DE$
11. ΔABC कि रचना अपने किसी मापोंकी सहायता से किजिए दुसरा त्रिभुज की रचना कीजिए जो ΔABC, के समरूप हैं और जिसकी भुजायें Δ ABC के संगत भुजाओं का $\frac{5}{3}$ भाग हो।
12. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजायें 4से.मी., 5 से.मी. और 6 से.मी. हो। इसके पश्चात एक समरूप त्रिभुज बनाइये जिसकी भुजायें पहले वाले त्रिभुज के संगत भुजाओं का $\frac{2}{3}$ भाग हो।
13. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 8 से.मी. और ऊँचाई 4 से.मी. हो। इसके पश्चात दूसरा त्रिभुज उतारिये जिसकी भुजायें समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाओं का $1\frac{1}{2}$ गुणा है।



8.5 समरूपी त्रिभुजों का क्षेत्रफल (Areas of Similar Triangles)

दो समरूपी त्रिभुजों के लिये उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान होता है। क्या आप सोचते हैं कि उनके क्षेत्रफलों के अनुपात और उनकी संगत भुजाओं के अनुपात में कोई संबंध होगा? आइए हम यह समझने के लिये निम्न कार्यकलाप करें।

कार्यविधिः

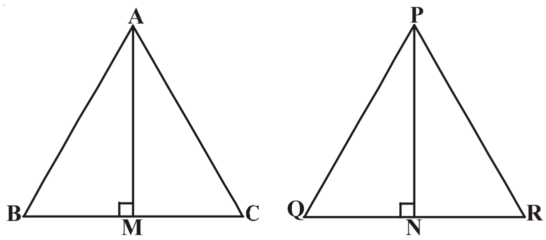
इस चित्र में समरूपी बहुभुजों की जोडियों की सूचि बनाइए।

ज्ञात कीजिए

(i) समरूपता का अनुपात

(ii) क्षेत्रफलों का अनुपात

आप निरीक्षण करेंगे कि क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत-भुजाओं के वर्गों का अनुपात है। आइए हम इसे प्रमेय की तरह सिद्ध करेंगे।



प्रमेय-8.6 : दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात, उनके संगत-भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान है।

दिया गया है : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

सिद्ध करना है : $\dfrac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$.

रचना : $AM \perp BC$ और $PN \perp QR$.

उपपत्ति : $$\frac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2}\times BC \times AM}{\frac{1}{2}\times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \qquad ...(1)$$

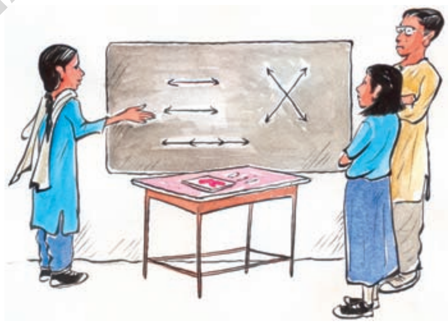
ΔABM और ΔPQN में,

$\angle B = \angle Q \; (\because \Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$\angle M = \angle N = 90^0$

$\therefore \; \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (AA समरूपता से)

$$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \qquad ...(2)$$



यह भी $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया गया है)

$$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}} = \frac{AC}{PR} \qquad ...(3)$$

$$\therefore \frac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} \qquad \text{(1), (2) और (3) से}$$

$$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2.$$

अब (3) के उपयोग से, हमें प्राप्त है

$$\frac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

अतः सिद्ध किया गया।

अब हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए कि यदि दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान हैं तो वे अनुरूप है।

हल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

इसलिये $\dfrac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

लेकिन $\dfrac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = 1$ ($\because$ क्षेत्रफल समान है)

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

So $AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

जिससे हमें प्राप्त होगा $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (SSS अनुरूपता से)

उदाहरण-9. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और उनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 से.मी.^{2} और 121 से.मी.^{2} हैं।

यदि EF = 15.4 से.मी., तो BC को ज्ञात कीजिए।.

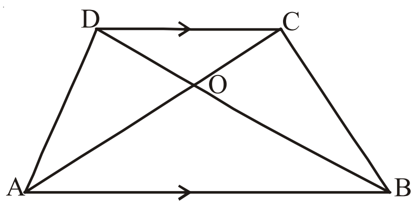
हल : $\dfrac{\text{क्षे. }(\Delta ABC)}{\text{क्षे. }(\Delta PQR)} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ से.मी.}$$

उदाहरण - 10. AB || DC वाले समलम्ब चतुर्भुज के कर्ण परस्पर 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं । यदि AB = 2CD, ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : समलंभ चतुर्भुज में ABCD, AB || DC और AB = 2CD.



ΔAOB और ΔCOD में

$\angle AOB = \angle COD$ (सम्मुख शीर्ष कोण)

$\angle OAB = \angle OCD$ (एकांतर अतः कोण)

$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (AA समरूपता से)

$$\frac{\text{क्षे. } (\Delta ABC)}{\text{क्षे. } (\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ क्षे (ΔAOB) : क्षे $(\Delta COD) = 4 : 1$.

अभ्यास - 8.3

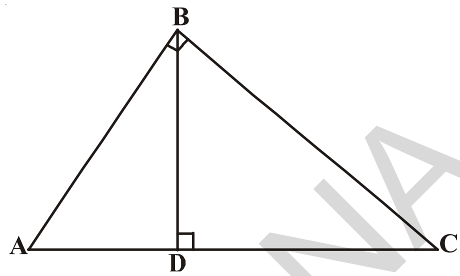
1. D, E, F, ΔABC की भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं। ΔDEF और ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. ΔABC में $XY \parallel AC$ है और XY उस त्रिभुज को समान क्षेत्रफल की दो त्रिभुजों में विभाजित करता है। $\frac{AX}{XB}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. सिद्ध कीजिए कि दो समरूपी त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके संगत मध्यिकाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
4. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. BC = 3से.मी. EF = 4से.मी. और ΔABC का क्षेत्रफल 54 से.मी.^{2} है। ΔDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. ABC एक त्रिभुज है और PQ एक सरल रेखा है जो AB को P पर और AC को Q पर मिलती है। यदि AP = 1 से.मी. और BP = 3 से.मी., AQ = 1.5 से.मी. CQ = 4.5 से.मी. सिद्ध कीजिए कि ΔAPQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{16}$(ΔABC का क्षेत्रफल).
6. दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल 81से.मी.^{2} और 49 से.मी.^{2} है। यदि बडे त्रिभुज की ऊँचाई 4.5 से.मी. है, तो छोटे त्रिभुज की संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8.6 पायथागोरस प्रमेय : (Pythagoras Theorem)

आप पैथागोरस प्रमेय से परिचित हैं। आप इस प्रमेय को कुछ कार्यकलाप द्वारा जाँच करे हैं। अब हम इस प्रमेय को समरूपी त्रिभुजों की संकल्पना के उपयोग से सिद्ध करेंगे। इसके लिये हम निम्न परिणाम का उपयोग करेंगे।

प्रमेय-8.7 : यदि एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष से कर्ण डाला जाय तो उस लम्ब के द्वारा बने दो त्रिभुज, संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होंगे, और एक-दूसरे के भी समरूप होंगे।

उपपत्ति: ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें B पर समकोण है मान लीजिए AC कर्ण पर BD एक लम्ब है।



ΔADB और ΔABC में $\angle A = \angle A$

और $\angle BDA = \angle ABC$ (क्यों?)

इसलिये $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कैसे?) ...(1)

उसी तरह, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (कैसे?) ...(2)

अतः (1) और (2) से BD लंब के दोनो ओर के त्रिभुज संपूर्ण Δ ABC के समरूप हैं।

यह भी है कि $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

इसलिए $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (सकर्मक गुणधर्म)

यह निम्न प्रमेय की ओर अग्रसर करता है।

सोचिए - विचार कीजिए

एक समकोण त्रिभुज के लिये जिसकी भुजायें पूर्णांक में हो कम से कम उसका एक माप सम संख्या होना चाहिए। क्यों? आप अपने मित्र और शिक्षक के साथ चर्चा कीजिए।

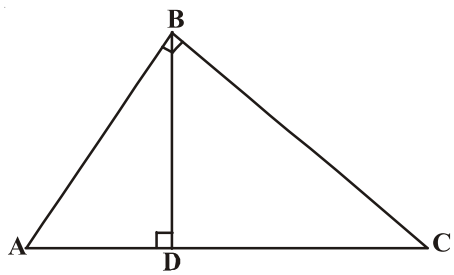
8.6.1 पायथागोरस प्रमेय (बौधायान प्रमेय)

प्रमेय-8.8 : एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग उसके लम्बवत भुजाओं के वर्गों के योग के समान होता है।

दिया गया है : ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण B पर है।

सिद्ध करना है : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : $BD \perp AC$ खींचिये।



उपपत्ति : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$AD \,.\, AC = AB^2$ ...(1)

यह भी है कि $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$CD \,.\, AC = BC^2$ ...(2)

(1) और (2) जोडने पर

$AD \,.\, AC + CD \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$

उपरोक्त प्रमेय बौधायान नामक भारतीय गणितज्ञ ने पहले (लग प्रस्तुत किया था।

''एक आयत का कर्ण स्वयं उतना ही क्षेत्रफल देता है जितनी उसकी दो भुजायें (i.e. लम्बाई और चौडाई) देती है।'' इस प्रमेय को बौधायान प्रमेय भी कहा जाता है।

उपरोक्त प्रमेय का विलोम क्या होगा?

हम उसे वैसे ही सिद्ध करेंगे जैसे पहले किये थे।

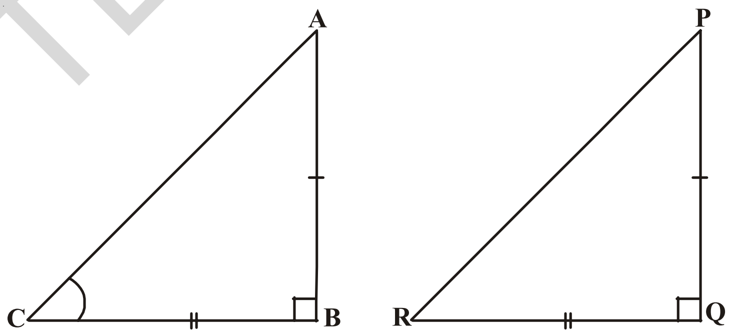
प्रमेय-8.9 : एक त्रिभुज में यदि उसकी एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के समान हो, तो उसके पहले वाली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होगा और वह त्रिभुज एक समकोण-त्रिभुज होगा।

दिया गया है : ΔABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

सिद्ध करना है : $\angle B = 90^0$.

रचना : Q पर समकोण रखते हुये एक समकोण त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए जिस से $PQ = AB$ और $QR = BC$.



उपपत्ति: ΔPQR में, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पायथागोरस प्रमेय $\angle Q = 90^0$)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (रचना से) ...(1)

लेकिन $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (दिया गया है) ...(2)

$\therefore$ $AC = PR$ (1) और (2) से

अब ΔABC और ΔPQR में

$AB = PQ$ (रचना से)

$BC = QE$ (रचना से)

$AC = PR$ (सिद्ध किया गया)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (SSS अनुरूपता से)

$\therefore \angle B = \angle Q$ (समरूप त्रिभुजों के संगत भाग) (cpst)

लेकिन $\angle Q = 90°$ (रचना से)

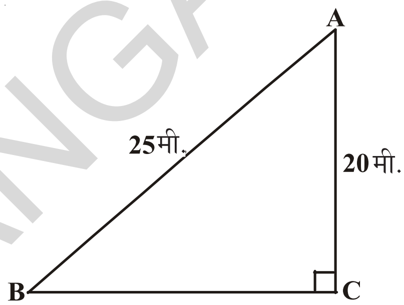
$\therefore \angle B = 90°$.

अतः सिद्ध किया गया।

अब हम कुछ उदाहरण लेंगे।

उदाहरण-11. धरती पर 20 मी ऊँची भवन की खिडकी से एक 25 मी की सीढी लगाई गई है। भवन से सीढी तक की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : In ΔABC, $\angle C = 90°$



$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (पायथागोरस प्रमेय से)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15$ मी.

इस तरह भवन से सीढी तक की दूरी 15 मी. है।

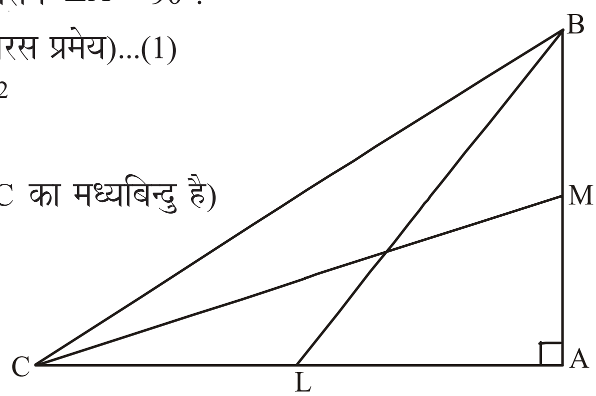
उदाहरण-12. BL और CM ΔABC की मध्यिकाएँ है जिसका समकोण A पर है।

सिद्ध कीजिए $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$.

हल : BL और CM ΔABC की माध्यिकायें हैं जिसमें $\angle A = 90°$.

ΔABC में, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (पायथागोरस प्रमेय)...(1)

उसी प्रकार ΔABL में, $BL^2 = AL^2 + AB^2$



इसलिये $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ L,AC का मध्यबिन्दु है)

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$\therefore 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

उसी प्रकार ΔCMA में,$CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$ ($\because$ M, AB का मध्य बिन्दु है।)

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \qquad ...(3)$$

(2) और (3), जोडने पर, प्राप्त है

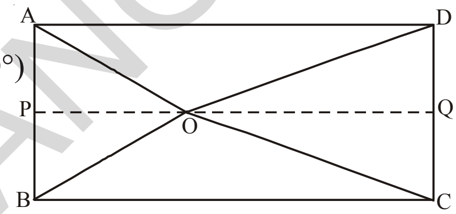
$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$\therefore\ 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \quad (1) \text{ से}$$

उदाहरण-13. आयत ABCD के अंदर एक बिन्दु 'O' है।

सिद्ध कीजिए कि $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$

हल : 'O' से PQ || BC खींचिये जिस से 'P' AB पर दो और 'Q' DC पर हो।



अब PQ || BC

$\therefore$ $PQ \perp AB$ & $PQ \perp DC$ ($\because \angle B = \angle C = 90°$)

अतः $\angle BPQ = 90°$ और $\angle CQP = 90°$

$\therefore$ BPQC और APQD दोनों आयत हैं।

अब ΔOPB से, $OB^2 = BP^2 + OP^2$ ...(1)

इसी तरह ΔOQD, हमें प्राप्त है $OD^2 = OQ^2 + DQ^2$ ...(2)

और ΔOQC, से हमें प्राप्त है, $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ ...(3)

और ΔOAP से, $OA^2 = AP^2 + OP^2$

(1) और (2) जोडने पर

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \qquad (\because BP = CQ \text{ और } DQ = AP)$$

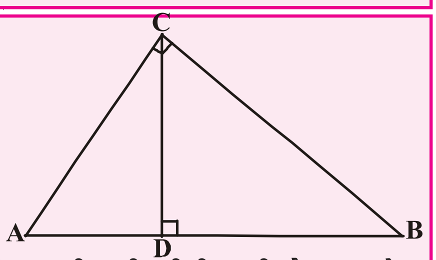
$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \ ((3) \text{ और } (4) \text{ से})$$

इसे कीजिए।

1. ΔACB में, $\angle C = 90^0$ और $CD \perp AB$

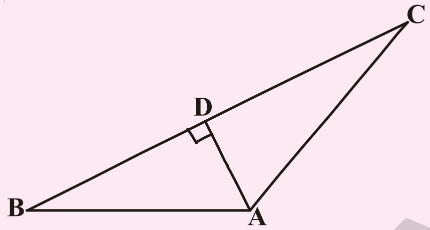
   सिद्ध कीजिए $\dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{AD}$.



2. रास्ते के एक ओर धरती से 9 मी ऊपर की खिडकी को 15 मी. की सीढ़ी लगी है। उसको उसी जगह रखते हुये सीढी को दूसरी ओर पलटा दिया गया है जिससे वह 12 मी की ऊँचाई पर की खिडकी को लगे। रास्ते की चौडाई ज्ञात कीजिए।

3. दिये गये चित्र में $AD \perp BC$

सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$.



उदाहरण-14. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण उसकी छोटी भुजा के दुगुने से 6 मी अधिक है। यदि तीसरी भुजा, कर्ण से 2 मी छोटी है तो त्रिभुज की भुजायें ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए छोटी भुजा x मी है।

तब कर्ण $= (2x + 6)$ मी और तीसरी भुजा $= (2x + 4)$मी. होगा।

पायथागोरस प्रमेय से, हमे प्राप्त है

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ or $x = -2$

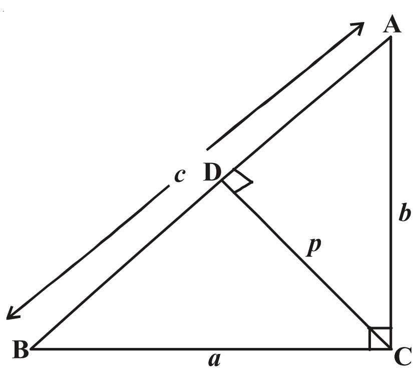
लेकिन कोई भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\therefore x = 10$ मी

अतः त्रिभुज की भुजायें 10 मी., 26 मी., और 24 मी. है।.

उदाहरण-15. C पर समकोण रहते हुये ABC एक समकोण त्रिभुज है। मान लीजिए $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ और मान लीजिए 'p' C से AB पर के लम्ब की लम्बाई है। सिद्ध कीजिए कि

(i) $pc = ab$ (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.



हल: (i) $CD \perp AB$ और $CD = p$.

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$

$= \frac{1}{2} cp$.

यह भी के, ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AC = \frac{1}{2} ab$

$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \qquad ...(1)$$

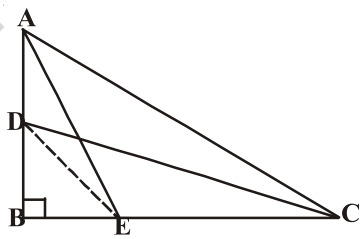
(ii) C पर समकोण रहते हुए ΔABC समकोण त्रिभुज होने के कारण, $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

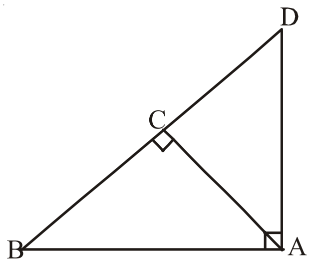
$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

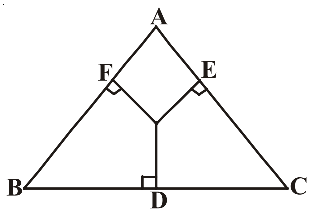
अभ्यास - 8.4



1. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग, उसके कर्णों के वर्गों के योग के समान है।
2. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण B पर है। मान लीजिए D और E क्रमशः AB और BC पर कोई दो बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$.
3. सिद्ध कीजिए कि समबाहु त्रिभुज के एक भुजा का तीन गुना, उसके ऊँचाई के चार गुना के समान है।
4. PQR एक समकोण त्रिभुज है, जिसका समकोण P पर है और M, QR का मध्यबिन्दु इस तरह है कि $PM \perp QR$. बताइए कि $PM^2 = QM \cdot MR$.
5. ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण A पर है और $AC \perp BD$ बताइये कि
   (i) $AB^2 = BC \cdot BD$.
   (ii) $AC^2 = BC \cdot DC$
   (iii) $AD^2 = BD \cdot CD$.



6. ABC एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका समकोण C पर है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$.
7. 'O' त्रिभुज ABC का अंतःबिन्दु है।
   यदि $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$, बताइये
   (i) $OA^2+OB^2+OC^2-OD^2-OE^2-OF^2 = AF^2+BD^2+CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



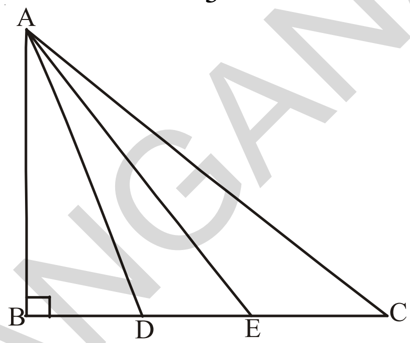
8. 18 मी लम्बे खंभे को 24 मी लम्बी तार, उसकी दूसरी ओर के एक स्टेक (stake) से जुडी है।खंभे से कितनी दूर पर वह स्टेक होनी चाहिए जिससे वह तार तना (taut) हो।

9. समतल मैदान पर 6मी और 11 मी. के दो खंबे हैं। यदि धरती पर उन खंबों के बीच की दूरी 12 मी हो तो उनके शिखर के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

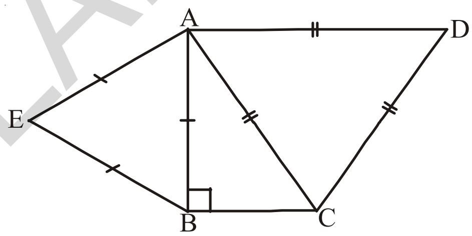
10. समबाहु त्रिभुज ABC में, BC पर D बिन्दु इस तरह है कि $BD = \frac{1}{3}BC$. सिद्ध कीजिए $9AD^2 = 7AB^2$.

11. दिये गये चित्र में ABC एक त्रिभुज है जिसका समकोण B पर है। BC पर D और E बिन्दु उसे त्रिविभाजित (trisect) करते हैं।

सिद्ध कीजिए कि $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$.



12. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका समकोण B पर है। AC और AB पर दो समरूप त्रिभुज ACD और ABE की रचना की गई है। ΔABE और ΔACD के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।



8.7 प्रमेयों के कथनों के विभिन्न रूप :

1. नकारात्मक कथन (Negation of a statement) :

अपने पास एक कथन होता है और उसमें यदि हम ''नहीं'' जोड दे तो हमें नया कथन प्राप्त होता है जो नकारात्मक कथन कहलाता है।

उदाहरणार्थ एक कथन लीजिये "ΔABC समबाहु है". यदि उसे हम "p", से सूचित करें, तो उसे हम इस तरह लिखेंगे।

p : Δ ABC समबाहु है और उसका नकारात्मक कथन "Δ ABC समबाहु नहीं'' है। एक कथन p के नकारात्मक को $\sim p$ से संबोधित करते हैं और इस तरह पढा जाता है। 'p का नकारात्मक'। $\sim p$ कथन यह दर्शाता है कि p नकारात्मक है। जब हम कथन का नकारात्मक लिखते है तो कथन को समझने में कोई दुविधा नहीं होगी।

इस उदाहरण का निरीक्षण कीजिए।

P : सभी अकरणीय संख्यायें वास्तविक संख्यायें हैं। p का नकारात्मक हम इस तरह लिखेंगे।

i) $\sim p$: सभी अकरणीय संख्यायें, वास्तविक संख्यायें नहीं है।

हम कैसे निर्णय करेंगे कि कौनसा ''नकारात्मक' सही है या गलत ? हम निम्न कसौटी का उपयोग करेंगे मान लीजिए p एक कथन है और $\sim p$ उसका नकारात्मक है। इससे $\sim p$ असत्य होता है जब भी p सत्य है और $\sim p$ सत्य होता है जब भी p असत्य होता है।

उदाहरणार्थ s : $2+2=4$ सत्य है

$\sim s$: $2+2 \neq 4$ असत्य है।

2. कथन का विलोम : (Converse of a statement) :

एक वाक्य जो सत्य या असत्य है ''साधारण कथन'' (simple statement) कहा जाता है। यदि हम दो साधारण कथनों को मिला दें तो हमें ''गुणित कथन'' (compound statement) प्राप्त होता है। दो साधारण कथनों को ''यदि और तब'' शब्दों के उपयोग से एक गुणित कथन प्राप्त होता है। जो तात्पर्य या प्रतिबन्ध (conditional) कहलाता है।

दो साधारण कथन p और q (Implies) को 'यदि' और 'पश्चात' से संबोधित किया जायगा। यहाँ पर $p \Rightarrow q$ में, यदि हम P और q को अदल-बदल करें तो हमें $p \Rightarrow q$ प्राप्त होगा। यह इसका विलोम (converse) कहलाता है।

उदाहरण : $p \Rightarrow q$: ΔABC में, यदि $AB = AC$ तब $\angle C = \angle B$

विलोम $q \Rightarrow p$: ΔABC में, यदि $\angle C = \angle B$ तब $AB = AC$

3. अन्तर्विधि से उपपत्ति : (Proof by contradiction) :

इस ''अन्तर्विधि से उपपत्ति'' में, हम मानते हैं कि नकारात्मक कथन सत्य है, जिसे हमें सिद्ध करना है। इस प्रक्रिया में हमें अन्तर्विधि कहीं और प्राप्त होती है। तब हमें संबोधन होता है कि अंतरर्विधि होती है और अपने गलत कल्पना के कारण वह कथन नकारात्मक है। इसलिये हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि मूल (original) कथन सत्य है।

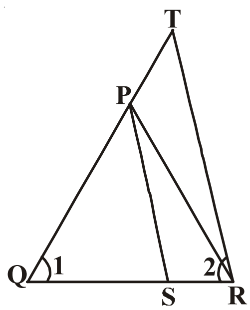
विकल्प अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।]

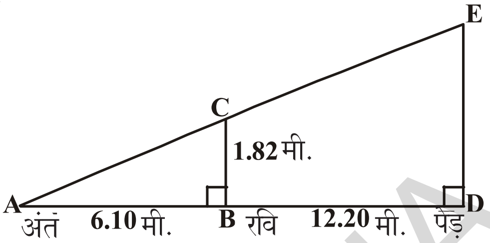
1. दिये गये चित्र में,

$$\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS} \text{ और } \angle 1 = \angle 2$$

सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.



2. रवि 1.82 मी लम्बा है। वह एक पेड की ऊँचाई ज्ञात करना चाहता है जो उसके घर के पीछे है। पेड के आधार से वह 12.20 मी दूर पेड की परछाई के साथ-साथ चला, उस स्थान तक जहाँ पर उसकी परछाई और पेड की परछाई एक दूसरे पर हों। अब वह परछाई के अंत से 6.10 मी दूर है। पेड की ऊँचाई क्या है?

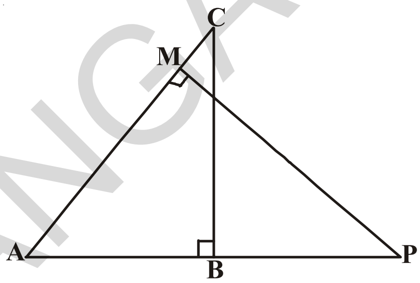


3. एक समानान्तर चतुर्भुज ABCD का कर्ण AC, DP को Q बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है जहाँ 'P' भुजा AB पर कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $CQ \times PQ = QA \times QD$.

4. ΔABC और ΔAMP दो समकोण त्रिभुज हैं जिसका समकोण क्रमशः B और M पर है। सिद्ध कीजिए कि

   (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ तथा

   (ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$.



5. एक विमान हवाई-अड्डे से 1000 कि मी/घंटे के वेग से उत्तर-दिशा की ओर उडता है। उसी समय एक दूसरा विमान उसी हवाई-अड्डे से 1200 कि मी. /घंटे के वेग से पश्चिम की ओर उडता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के पश्चात वे दोनों विमान एक दूसरे से कितनी दूर होंगे?

6. एक समकोण त्रिभुज ABC का समकोण C पर है। AC और CB पर क्रमश दो बिन्दु P और Q है जो इन भुजाओं को 2 : 1. के अनुपात में विभाजित करता है।

   सिद्ध कीजिए (i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

   (ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

   (iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$

प्रस्तावित परियोजना

कथन को सिद्ध करना

- समरूपी त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्ग के अनुपात के समान होता है इसे समबाहु तथा विषमबाहु त्रिभुजों की सहायता से सिद्ध कीजिए।

हमने क्या चर्चा की

1. दो चित्र जिसकी आकृति (shape) सभी समुपती भागों के साथ समान हैं लेकिन परिमाण (size)समान नहीं है, वे समरूप (similar) चित्र कहलाते हैं।
2. सभी अनुरूप (congruent) चित्र समरूप है, लेकिन उसका विलोम सत्य नहीं है।

3. दो बहुभुज जिसकी भुजाओं की संख्या समान है, समरूप होते हैं। यदि
   (i) उनके संगत के कोण समान हो
   (ii) उनके संगत की भुजायें समान अनुपात में हो। (समानुपात)

   बहुभुजों की समरूपता के लिये ऊपर दी गई दोनों नियम में से कोई एक पर्याप्त नहीं है।
4. यदि त्रिभुज की एक भुजा से एक रेखा खींची जाय जो उसकी अन्य दो भुजाओं को विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेत करती है, तो वह अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
5. यदि एक रेखा त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समानांतर होगी।
6. दो त्रिभुजों में यदि उनके संलग्न कोण समान हैं तो उनकी संगत भुजायें समान अनुपात में होंगी और इसलिये वे दोनों त्रिभुज समरूप हैं। (AAA समरूपता)
7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण, अन्य त्रिभुज के दो कोणों के समान हैं, तो दोनों त्रिभुज के तीसरे कोण समान होंगे ''त्रिभुज के कोणों के योग'' के नियम से।
8. दो त्रिभुजों में यदि उनकी संगत-भुजायें समान अनुपात में हैं, तो उनके संगत कोण समान हैं और इसलिये त्रिभुज समरूप हैं। (SSS समरूपता)
9. यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के समान है और इन कोणों से संबंधित भुजायें समान अनुपात में हैं तो त्रिभुज समरूप हैं। (SAS समरूपता)
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात, उनकी संगत भुजाओं के वर्ग के अनुपात के समान है।
11. यदि एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष से लम्ब खींचा जाय तो इस लम्ब के दोनों ओर बनने वाले त्रिभुज बडे त्रिभुज के समरूप होता है और परस्पर एक दूसरे के भी समरूप होते हैं।
12. एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के समान है। (पायथागोरस प्रमेय)
13. एक त्रिभुज में, एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के समान है, तब पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण है।

पहेली

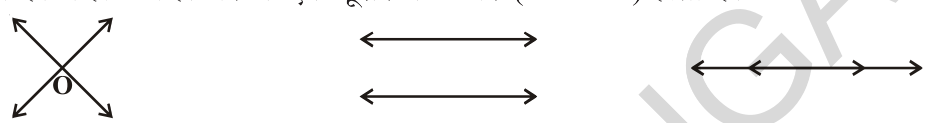
एक त्रिभुज खींचिये। उसके भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को जोडिये। आपको चार त्रिभुज प्राप्त होंगे। फिर से इन त्रिभुजों के मध्यबिन्दुओं को जोडिये। इस प्रक्रिया को दोहराइये। खींचे गये सभी त्रिभुज समरूप हैं। क्यों? सोचिये और अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।

अध्याय

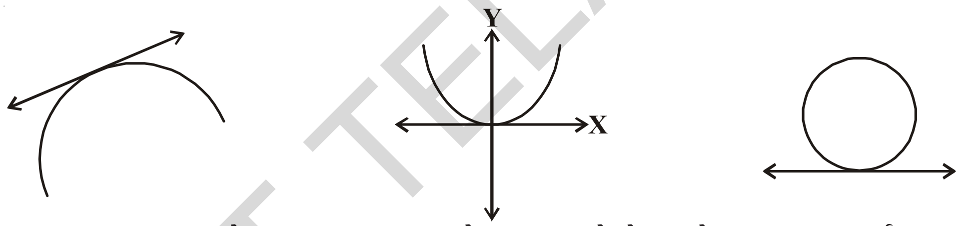
9 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ और छेदन रेखाएँ
(Tangents and Secants to a Circle)

9.1 प्रस्तावना

हमने देखा की किसी भी तल पर डाली गयी दो रेखाएँ या तो प्रतिच्छेदित होती है या प्रतिच्छेदित नहीं होती हैं। कहीं - कहीं पर वे एक दूसरे के ऊपर (coincide) होती है।



उसी प्रकार यदि किसी तल पर एक वक्र तथा एक सरल रेखा खींची जाय तो क्या होता है? इनसे किन आकारों को खींचना संभव है। जैसा कि बहुपद व्यंजक में बताया गया है एक वक्र परवलय या वृत्ताकार हो सकता है। एक स्थिर बिन्दु में समान दूरी पर डाले गये बिन्दुओं के समूह को वृत्त कहते हैं।



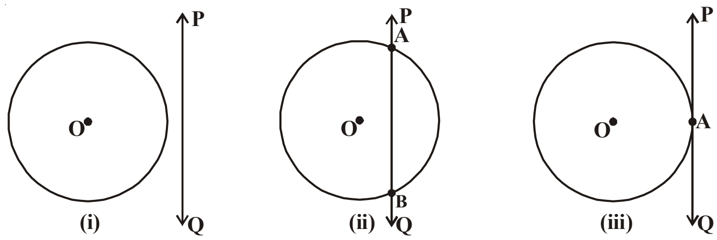
एक वृत्ताकार वस्तु को समतल पर लुढकते हुए आपने देखा होगा। उदाहरणार्थ :- सडक पर चलती हुई साइकिल के पहिए, रेल की पटरी पर चलते हुए रेल के पहिए आदि जहाँ पर एक वृत्त तथा सरल रेखा को देखते हैं।

चलिए अब हम देखेंगे कि किसी तल पर एक वृत्त तथा रेखा डालने पर क्या होता है?

9.1.1 एक रेखा तथा वृत्त (A Line and a Circle)

आपको एक कागज पर एक वृत्त तथा एक रेखा डालकर दी गई है। सलमान का तर्क है कि इसको दर्शाने की केवल तीन संभावनाएँ है।

वृत्त जिसका केन्द्र 'O' तथा रेखा PQ, को देखिए, नीचे निम्न चित्र में तीन संभाषनाएँ दर्शायी गयी है।



चित्र (i) में वृत्त तथा रेखा PQ का कोई उभयनिष्ट बिन्दु नहीं है। इसमें रेखा PQ वृत्त को प्रतीच्छेदित नहीं करती है।

चित्र (ii) में रेखा PQ वृत्त को बिन्दु A तथा B. पर प्रतिच्छेदित करती है। यह वृत्त पर ज्या (chord) AB का निर्माण करती है। इस स्थिति में रेखा PQ को वृत्त की ''छेदन रेखा'' कहते हैं।

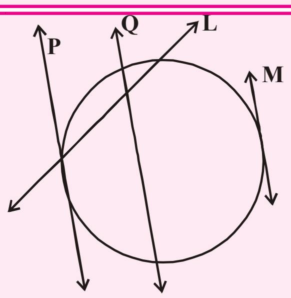
चित्र (iii) में वृत्त तथा रेखा PQ का केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है। इस रेखा को वृत्त की ''स्पर्श रेखा''(Tangent) कहते हैं।

वृत्त तथा रेखा को तल पर डालने की कोई और विधि नहीं है। अब हम वृत्त की स्पर्श रेखा के अस्तित्व, लक्षण तथा रचना के बारे में अध्ययन करेंगे।

क्या आप जानते हैं?

शब्द 'Tangent' (स्पर्शरेखा) का लाटिन शब्द 'tangere' से आया है। जिसका अर्थ होता है स्पर्श करना और जिसे सबसे पहले 'डेनमार्क' के गणितज्ञ थॉमस फिनेकी (Thomas Fineke) ने 1583 में बताया था।

यह कीजिए।



i. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। उस पर विभिन्न बिन्दुओं से चार स्पर्श रेखाएँ डालिए। इस वृत्त पर आप कितनी और स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है।

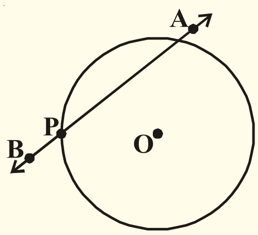
ii. वृत्त से कुछ दूरी पर स्थित बिन्दु से आप कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है।

iii. दिए गए चित्र में कौनसी स्पर्श रेखाएँ है?

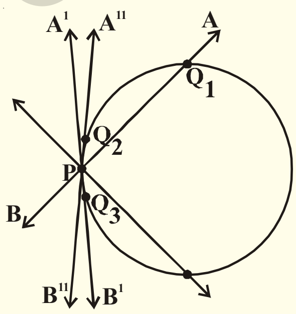
9.2 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ (Tangent)

हमने देखा कि वृत्त पर किसी भी बिन्दु से स्पर्श रेखा खींच सकते है। क्या आप बता सकते हैं कि एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है? इस क्रिया-कलाप द्वारा इस तथ्य को समझने का प्रयत्न करेंगे।

क्रिया-कलाप



एक वृत्ताकार तार के साथ एक सीधे तार AB को जोडिए जिससे यह बिन्दु P पर दोलन कर सके। वृत्ताकार तार वृत्त का तथा सीधा तार AB सरल रेखा का निरुपण करते हैं, जो बिन्दु P पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं।



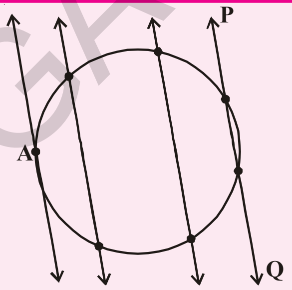
चित्र में दर्शाए अनुसार इस पूर्ण विधान को टेबल पर रखकर तार AB को बिन्दु P के चारों ओर घुमाइए जिससे तार की विभिन्न स्थितियों को प्राप्त कर सके। वृत्त सीधे तार को बिन्दु P पर तथा अन्य बिन्दु Q_1, Q_2, Q_3 पर प्रतिच्छेदित करता है। जब रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती हैं तो उनमें से एक बिन्दु P अवश्य होगा।

AB के A^1B^1 की दिशा देखिए। वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा हैं। रेखा AB की सभी स्थितियों में बिन्दु P वृत्त को अन्य बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है। बिन्दु P तथा और एक बिन्दु पर वृत्त को प्रतिच्छेदित करता है। बिन्दु P पर A^1B^1 वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

हम देख सकते हैं कि बिन्दु P पर केवल एक ही स्पर्श रेखा डाली गयी है।

तार AB को दोनों दिशाओं में घुमाने पर वह वृत्ताकार तार को दो बिन्दुओं पर काटता है। ये सभी छेदन रेखाएँ कहलाती है। स्पर्श रेखा छेदन रेखा की वह विशेष स्थिति है जहाँ उसके दोनों कटान बिन्दु एक ही स्थान पर स्थित होते हैं।

यह कीजिए।



चित्र में दर्शाए अनुसार एक कागज़ पर वृत्त डालकर उस पर PQ एक छेदन रेखा खींचिए। छेदन रेखा के दोनों ओर कुछ समानान्तर रेखाएँ खींचिए।

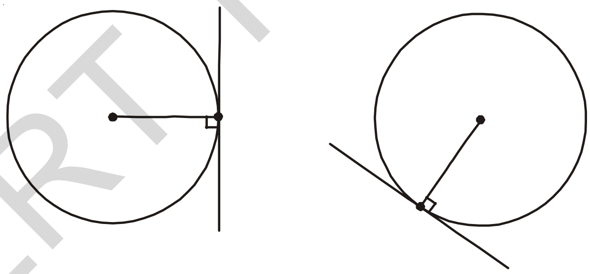
जैसे-जैसे ज्या केन्द्र बिन्दु के समीप आएगी तब उसकी लम्बाई क्या होगी?

सबसे बडी ज्या (chord) कौनसी होगी?

किसी भी वृत्त पर एक दूसरे के समानान्तर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं?

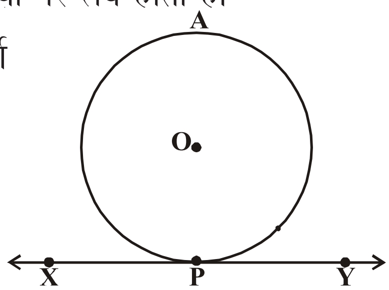
वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु तथा स्पर्श रेखा उसी बिन्दु पर वृत्त को स्पर्श करती है।

दिए गए चित्रों में वृत्त की स्पर्श रेखा का निरीक्षण कीजिए।



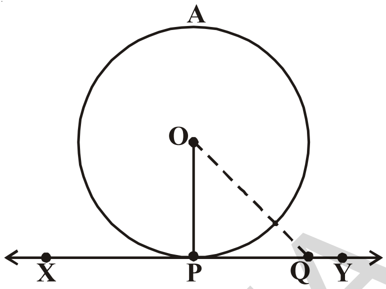
किसी भी एक बिन्दु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ डाली जा सकती है? एक वृत्त पर कुल कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं। स्पर्श बिन्दु को देखिए। उस बिन्दु से एक त्रिज्या खींचीए। आपने स्पर्श बिन्दु से खींचे गए त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा के बीच बनने वाले कोण में कोई विशेषता पाई है? ये त्रिज्यायें स्पर्श रेखा पर लंब दिखाई देती है। अब हम इसे सिद्ध करने का प्रयत्न करेंगे।

प्रमेय-9.1 : एक वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।



दिया गया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा स्पर्श रेखा XY स्पर्श बिन्दु P पर वृत्त को स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है : OP लंब है XY पर (अर्थात् $OP \perp XY$)



उपपत्ति : बिन्दु Q वृत्त के बाहर स्थित होगा (क्यों?) (नोट किजिए यदि बिन्दु Q वृत्त के अन्दर स्थित होगा तो XY एक छेदन रेखा बनेगी, स्पर्श रेखा नहीं।)

अतः OQ त्रिज्या OP से बडा होना चाहिए (क्यों?) अर्थात् $OQ > OP$.

यह XY पर स्थित सभी बिन्दुओं को लागू होगा। अतः यह सिद्ध होता है कि OP उन सभी रेखाओं से छोटी होगी जो XY पर डाले गये दूसरे बिन्दुओं से खींची जाती है। क्योंकि दिए गए बिंदु से डाली गयी रेखाओं में लंब सबसे छोटी होती है। (सातवीं कक्षा की क्रियाकलाप 5.3 के अनुसार)

अतः हमारी कल्पना OP, XY पर लंब नहीं है यह असत्य सिद्ध होती है। अर्थात् OP लंब है XY पर यह सिद्ध होता है। अर्थात् $\overline{OP} \perp \overline{XY}$

नोट : स्पर्श बिन्दु से डाली गयी त्रिज्या को हम स्पर्श रेखा का लंब कह सकते हैं।

प्रयत्न कीजिए।

ऊपरी प्रमेय का विलोम आप कैसे सिद्ध करोगे?

"एक वृत्त की त्रिज्या के अंत बिन्दु से उस पर खींची गयी लंब रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती हैं।

उपरोक्त प्रमेय से हम कुछ और निष्कर्ष प्राप्त करेंगे।

(i) क्योंकि बिन्दु P से केवल एक ही लंब OP डाला जा सकता है इससे यह पता चलता है कि वृत्त परिधि पर डाले गए बिन्दु से केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

(ii) क्योंकि बिन्दु P से XY पर एक ही लंब डाला जा सकता है इससे यह पता चलता है कि वृत्त के स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर डाला गया लंब केन्द्र से गुजरता है।

इनके बारे में विचार कीजिए और अपने मित्रों तथा अध्यापक के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

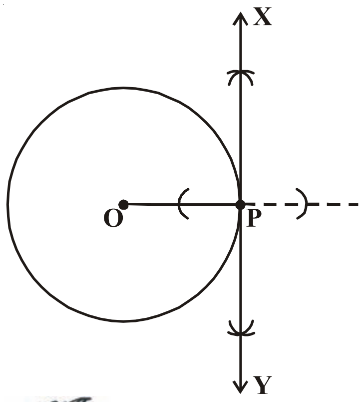
9.2.1 वृत्त के स्पर्श रेखा की रचना (Construction of Tangent to a Circle)

हम वृत्त के स्पर्श बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना कैसे करेंगे? हम इसी तथ्य को आधार मानेंगे कि स्पर्श बिन्दु पर डाली गयी स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लंब होता है। स्पर्श रेखा को खींचने के लिए त्रिज्या के अंतिम बिन्दु पर लंब डालना होगा। त्रिज्या को खींचने के लिए वृत्त के केन्द्र बिन्दु की जानकारी आवश्यक है। चलिए अब हम इसकी रचना क्रम को देखेंगे।

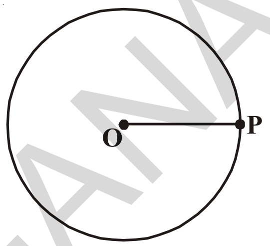
रचना : उस वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए जिसका केन्द्र बिन्दु ज्ञात है।

हमें एक वृत्त प्राप्त है जिसका केन्द्र 'O' है तथा उसकी परिधि पर बिन्दु P डाला गया है। अब हमें बिन्दु P से स्पर्श रेखा खींचनी है। अब हम स्पर्श रेखा के रचना क्रम को देखेंगे।

रचना क्रम :-



1. केन्द्र 'O' से एक वृत्त खींचिए उस पर एक बिन्दु 'P' अंकित कीजिए। OP को मिलाइए।



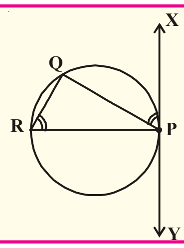
2. बिन्दु P से एक लंब खींचिए तथा उसको XY नाम दीजिए।
3. XY दिए गए वृत्त की इच्छित स्पर्श रेखा होगी जो बिन्दु P से गुजरती है।

क्या बिन्दु P से दूसरी स्पर्श रेखा खींची जा सकती है? कारण बताइए।

प्रयत्न कीजिए।

जब वृत्त का केन्द्र बिन्दु ज्ञात न हो तो आप उसकी स्पर्श रेखा कैसे खींचेंगे?

संकेत (Hint) : दो समान कोण $\angle QPX$ तथा $\angle PRQ$. खींचिए। उसकी रचना को समझाइए।



9.2.2 स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात करना (Finding Length of the Tangent)

क्या हम दिए गए बिन्दु से स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण : यदि एक वृत्त की त्रिज्या = 6 से.मी. तथा बिन्दु P से दूरी OP = 10 से.मी. है, तथा उसका केन्द्र बिन्दु O हो तो उस पर डाले गये स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

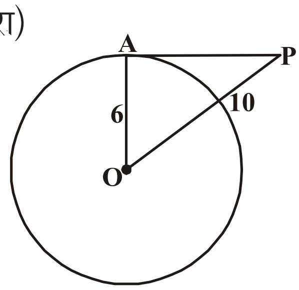
हल : स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब होती है। (प्रमेय 9.1)

यहाँ PA स्पर्श रेखाखण्ड है तथा OA वृत्त की त्रिज्या है।

$\therefore OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$

अब ΔOAP में, $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

$$10^2 = 6^2 + PA^2$$
$$100 = 36 + PA^2$$
$$PA^2 = 100 - 36$$
$$= 64$$
$$\therefore PA = \sqrt{64} = 8 \text{ से.मी.}$$



अभ्यास - 9.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) एक स्पर्श रेखा वृत्त को .... बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है।
   (ii) एक रेखा जो वृत्त को दो विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है उसे वृत्त का .... कहते हैं।
   (iii) वृत्त पर सरलता से डाले जाने वाली स्पर्श रेखाएँ .... होती है ।
   (iv) किसी भी वृत्त पर अधिक से अधिक .... समानान्तर स्पर्श रेखाएँ डाल सकते हैं।
   (v) वृत्त तथा स्पर्श रेखा का छेदन बिन्दु .... कहलाता है।
   (vi) एक वृत्त पर .... स्पर्श रेखाएँ डाल सकते हैं।
2. स्पर्श रेखा PQ , 5 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त को, बिन्दु P पर स्पर्श करती है। वह रेखा O से गुजरने वाली रेखा पर Q पर मिलती है जिससे OQ = 12 से.मी. PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
3. वृत्त पर दो समानान्तर रेखाएँ इस प्रकार डालिए जिसमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदन रेखा हो।
4. केन्द्र से 15 से.मी. दूरी पर स्थित बिन्दु पर डाली गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिस वृत्त की त्रिज्या 9 से.मी. है।
5. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के व्यास के अंतिम बिन्दुओं पर डाली गयी स्पर्श रेखायें समानान्तर होती है।

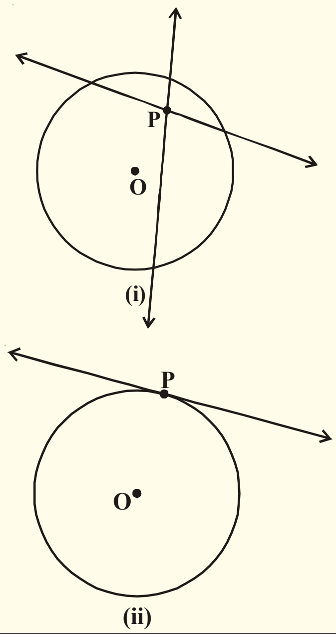
9.3 किसी बिन्दु से वृत्त पर डाली गयी स्पर्श रेखाओं की संख्या (Number of tangent to a circle from any point)

इस क्रिया कलाप द्वारा हम एक वृत्त पर डाले गये स्पर्श रेखाओं की जानकारी प्राप्त करेंगे।

क्रियाकलाप

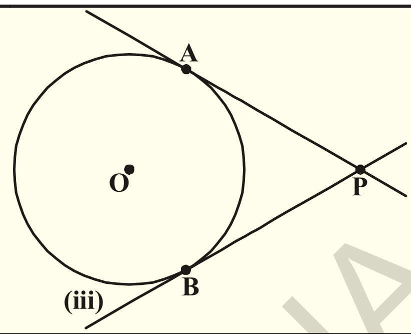
(i) एक कागज पर वृत्त डालिए। एक बिन्दु P को वृत्त के अन्दर डालिए। क्या हम इस बिन्दु से कोई स्पर्श रेखा डाल सकते है? आप देखेंगे कि इस बिन्दु से गुजरने वाली सभी रेखाएँ वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है। इन्हें क्या कहते है।

(ii) अब हम एक बिन्दु वृत्त पर डालेंगे, आपने देखा कि इस बिन्दु से केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। (साथ वाले चित्र को देखिए।)



(iii) अब हम एक बिन्दु वृत्त के बाहर डालेंगे उस बिन्दु से स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयत्न करेंगे। आपने क्या देखा? इस बिन्दु में हमें दो स्पर्श रेखाएँ प्राप्त होगी। (चित्र में देखिए)

अब हमें यह सार प्राप्त होता है।



(iii)

स्थिति (i) : वृत्त के भीतरी बिन्दु से कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।

स्थिति (ii) : वृत्त पर डाले गये बिन्दु से केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

स्थिति (iii) : वृत्त के बाहरी बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB डाली गयी है इस स्थिति में बिन्दु A तथा B पर वृत्त को स्पर्श करती है।

इस रेखाखण्ड की लम्बाई बाह्य बिन्दु P से स्पर्श बिन्दु की दूरी होगी। जिसे हम स्पर्श रेखा की लम्बाई कहेंगे।

ध्यान दीजिए ऊपर के चित्र (iii) में PA तथा PB स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बिन्दु P से वृत्त के स्पर्श बिन्दु तक की दूरी है। PA तथा PB के बीच क्या संबंध होगा?

प्रमेय-9.2 : बाह्य बिन्दु से वृत्त पर डाले गये स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।

दिया गया : केन्द्र O से एक वृत्त डाला गया है P वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु है। तथा बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींचे गये है। (चित्र में देखिए)

सिद्ध करना है : PA = PB

उपपत्ति : OA तथा OB तथा OP को मिलाइए।

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा के मध्य बनने वाला कोण प्रमेय 9.1 सिद्ध)

दो समकोण त्रिभुजों में

ΔOAP तथा ΔOBP में

OA = OB (वृत्त की त्रिज्याये)

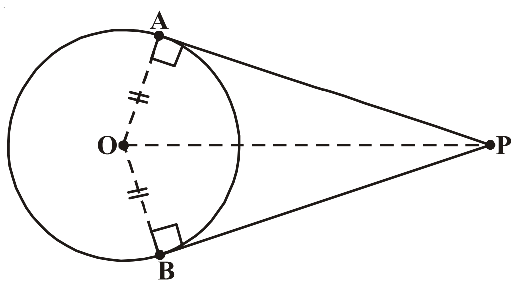
OP = OP (उभयनिष्ठ)

इसलिए R.H.S. स्वयं तथ्य द्वारा

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$

इससे PA = PB(CPCT) प्राप्त होता है।

अतः सिद्ध किया गया।



प्रयत्न कीजिए।

पायथागोरस प्रमेय द्वारा उपरोक्त प्रमेय की उपपत्ति लिखिए।

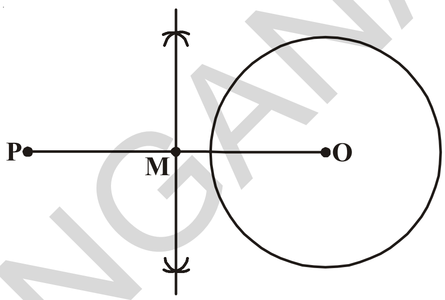
9.3.1. वृत्त के बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की रचना (Construction of Tangents to a Circle from an external Point) :-

आपने देखा कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं। अब हम इसे डालने की विधि देखेंगे।

रचना : वृत्त के बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की रचना

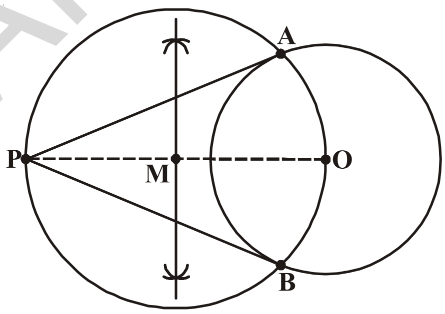
दिया गया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र 'O' है तथा बाह्य बिन्दु P है हमें बिन्दु P से दो स्पर्श रेखोएँ खींचना है।

रचना क्रम:



चरण(i) : OP को जोडकर उसका समद्विभाजक खींचिए। M को PO का मध्य बिन्दु मानिए।

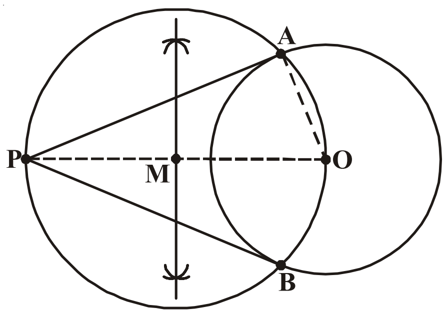
चरण(ii) : PM या OM त्रिज्या से M को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त को दो बिन्दु A तथा B पर पहले वृत्त पर प्रतिच्छेदित होने दीजिए।



चरण (iii) : PA तथा PB को मिलाइए। हमें PA तथा PB दो इच्छित स्पर्श रेखाएँ प्राप्त होंगे।

उपपत्ति: अब हम इस रचना के औचित्य (Justify) को प्राप्त करेंगे।

OA को मिलाइए। $\angle PAO$ अर्धवृत्त का कोण होगा।



$\therefore\ \angle PAO = 90°$.

क्या हम कह सकते है $PA \perp OA$?

क्योंकि, OA दिए गए वृत्त की त्रिज्या है, PA वृत्त की स्पर्श रेखा होनी चाहिए। (प्रमेय 9.1 के विलोम द्वारा)

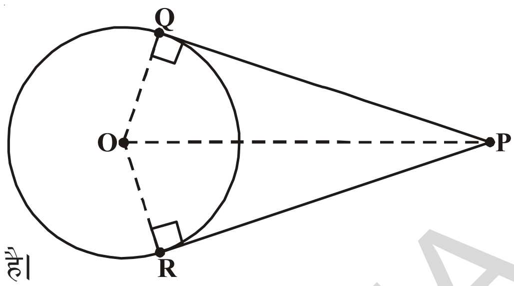
उसी प्रकार, PB भी वृत्त एक स्पर्श रेखा होगी। अतः यह सिद्ध होता है।

स्पर्श रेखा तथा चापकर्ण के बारे में कुछ और महत्वपूर्ण तथ्यों को देखेंगे।

कथन-1 : वृत्त का केन्द्र उस कोण के समद्विभाजक पर स्थित होगा जो स्पर्श रेखाओं के बीच बनता है। क्या आप बता सकते हैं कि हम इसे कैसे सिद्ध कर सकते हैं।

उपपत्ति : मान लिजिए PQ तथा PR दो स्पर्श रेखाएँ बिन्दु P से डाली गयी हैं। OQ तथा OR को मिलाइए।

ΔOQP तथा ΔORP सर्वसमान है। क्योंकि हम जानते हैं कि



$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (प्रमेय 9.1)

$OQ = OR$ (ज्यायें)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

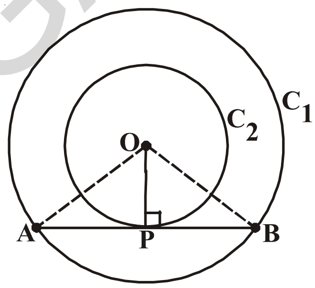
अर्थात् $\angle OPQ = \angle OPR$ (CPCT)

इसलिए OP, कोण $\angle QPR$ का समद्विभाजक है।

अतः वृत्त का केन्द्र कोण के समद्विभाजक पर स्थित होता है जो दो स्पर्श रेखाओं द्वारा बनता है।

कथन-2 : दो समकेन्द्रित वृत्तों को इस प्रकार डाला गया है जिसमें बडे वृत्त की ज्या छोटे वृत्त के स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजक होती हैं।

उपपत्ति: हमारे पास दो समकेन्द्रिक वृत्त है जिसके केन्द्र O है तथा वे C_1, C_2 दिये गये हैं। बडे वृत्त C_1 की ज्या AB छोटे वृत्त C_2 को बिन्दु P पर स्पर्श करता है। (चित्र में देखिए।) हमें AB = BP सिद्ध करना है। OP को मिलाइए। तब AB वृत्त C_2 की स्पर्श रेखा तथा OP त्रिज्या बनेगी।



अतः प्रमेय 9.1 से

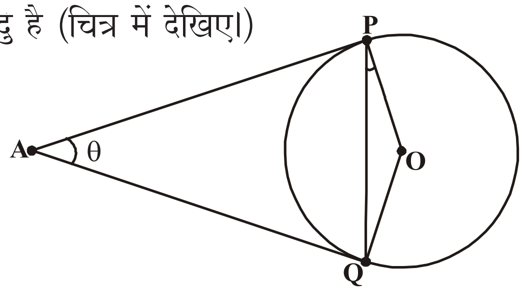
$OP \perp AB$

अब ΔOAP तथा ΔOBP सर्वसमान होंगे (क्यों?) इसका अर्थ हुआ AP = PB. अतः OP ज्या AB का समद्विभाजक होगा। क्योंकि केन्द्र से डाला गया लंब ज्या पर लंब होता है जो उसे समद्विभाजित करता है।

कथन-3 : यदि एक वृत्त जिसका केन्द्र O है उस पर बाह्य बिन्दु A से दो स्पर्श रेखायें डाली गयी हैं तब $\angle QAP = 2\angle QPO = 2\angle OQP$

क्या आप देख सकते हैं?

उपपत्ति : हमें केन्द्र O वाला वृत्त दिया गया है। उसका बाह्य बिन्दु A है जहाँ से दो स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ डाली गयी हैं जहाँ बिन्दु P तथा Q स्पर्श बिन्दु है (चित्र में देखिए।)



हमें सिद्ध करना है

$\angle PAQ = 2\angle QOP$

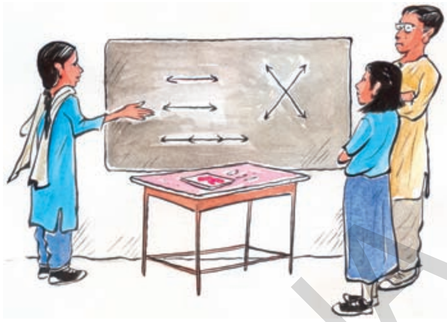
मान लीजिए $\angle QAP = \theta$

अब, प्रमेय 9.2 से

$AP = AQ$, इसलिए ΔAPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

इसलिए $\angle APQ + \angle AQP + \angle QAP = 180°$ (तीन कोणों का योग)

$$\angle APQ = \angle PQA = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$



$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

पुनः प्रमेय 9.1 से

$\angle OPA = 90°$

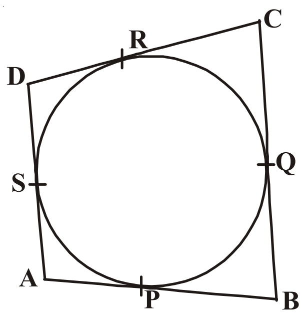
इसलिए, $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

इससे यह $\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ$.

\ ÐPAQ = 2ÐOPQ. उसी प्रकार PAQ = 2ÐOQP

कथन-4 : यदि एक वृत्त, चतुर्भुज ABCD में परिगत वृत्त डाला गया हो तो सिद्ध कीजिए कि AB+CD = AD + BC



क्या आप बता सकते हैं कि इसके आगे कैसे हल किया जा सकता है? AB, CD, BC, DA सभी वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

वृत्त को चतुर्भुज की भुजाओं को बिन्दु P, Q, R, S, स्पर्श करने के लिए वृत्त को चतुर्भुज के अन्दर स्थित होना आवश्यक है।

अब इसे आगे कैसे हल करेंगे?

उपपत्ति : एक वृत्त, चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA को क्रमशः बिन्दु P, Q, R तथा S पर स्पर्श करता है (चित्र में देखिए) अर्थात् $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ और $\overline{DA}$ स्पर्श रेखाएँ है।

प्रमेय 9.2 से बाह्य बिन्दु से वृत्त पर डाले गये दो स्पर्श रेखाएँ समान होती है।

$AP = AS$

$BP = BQ$

$DR = DS$

तथा $CR = CQ$ इनको जोडने पर

$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$

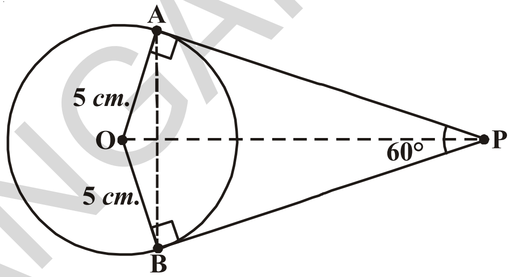
या $(AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$

या $AB + CD = BC + DA$.

उदाहरण-1. 5 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक युग्म खींचिए जो एक दूसरे के साथ 60° का कोण बनाते है।

हल : एक वृत्त तथा उस दो स्पर्श रेखाएँ खींचने के लिए हमें एक विधि का निरीक्षण करना चाहिए। यहाँ हमें केवल वृत्त की त्रिज्या तथा स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण दिया गया है। हमें स्पर्श रेखाओं की दूरी ज्ञात नहीं है। हमें स्पर्श रेखाओं की लम्बाई भी नहीं दी गयी है। हमें केवल उनके मध्य का कोण दिया गया है। इसकी सहायता से हमें वृत्त के बाह्य बिन्दु की दूरी को ज्ञात करना है। जहाँ से हमें स्पर्श रेखाओँ को खींचना है।

इसका आरम्भ हमें वृत्त के केन्द्र 'O' तथा त्रिज्या 5 से.मी. से करना है। मान लिजिए PA तथा PB, बिन्दु 'P' से दो स्पर्श रेखाएँ डाली गयी हैं। उनके बीच 60^o का कोण बनाया गया है। इसमें $\angle APB = 60^o$, OP को मिलाइए। जैसा कि हम जानते है



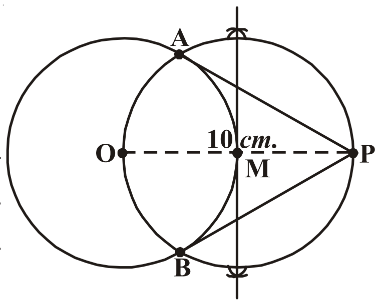
रेखा OP कोण $\angle APB$ का समद्विभाजक होता है।

$$\angle OAP = \angle OPB = \frac{60^o}{2} = 30^o \ (\because \Delta OAP \cong \Delta OBP)$$

अब ΔOAP में

$$\sin 30^o \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{OA}{OP}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{OP}$$ (त्रिकोणमीतिय अनुपातों से) OP = 10 से.मी.



अब हम 5 से.मी. त्रिज्या से केन्द्र 'O' पर एक वृत्त डालेंगे फिर 10 से.मी. दूरी पर एक बिन्दु P डालेंगे OP को मिलाकर रचना पूर्ण कीजिए जैसा 9.2. में दिया गया है। अतः PA तथा PB वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ होंगी।

आप त्रिकोणमीति के अनुपातों के बिना भी इसकी रचना की जा सकती है।

प्रयत्न कीजिए।

दो त्रिज्याओं का युग्म इस प्रकार खींचिए जिसमें OA तथा OB के मध्य कोण $\angle BOA = 120^o$, $\angle BOA$ का समद्विभाजक खींचिए। A तथा B पर OA तथा OB पर लम्ब डालिए। ये रेखाएँ $\angle BOA$ के समद्विभाजक से बाह्य बिन्दु पर स्पर्श करती हैं तथा लंब उसकी ऐच्छित स्पर्श रेखाएँ होंगी। इसकी रचना कर औचित्य प्राप्त कीजिए।

अभ्यास - 9.2

1. सही उत्तर चुनकर प्रत्येक की सत्यता बताइए।

(i) वृत्त की स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु पर डाले गये त्रिज्या के मध्य बनने वाला कोण

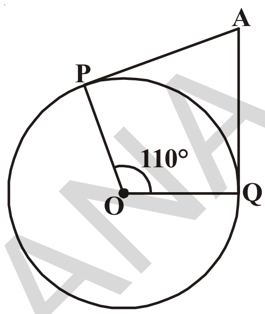
(अ) 60° (आ) 30° (इ) 45° (ई) 90°

(ii) बिन्दु Q से वृत्त के स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 से.मी. तथा केन्द्र से Q की दूरी 25 से.मी. हो तो वृत्त की त्रिज्या होगी।

(अ) 7 से.मी. (आ) 12 से.मी. (इ) 15 से.मी. (ई) 24.5 से.मी.

(iii) यदि एक वृत्त (O) पर दो स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ है तथा $\angle QOP = 110°$, हो तो $\angle QOP = $ ....

(अ) 60° (आ) 70° (इ) 80° (ई) 90°



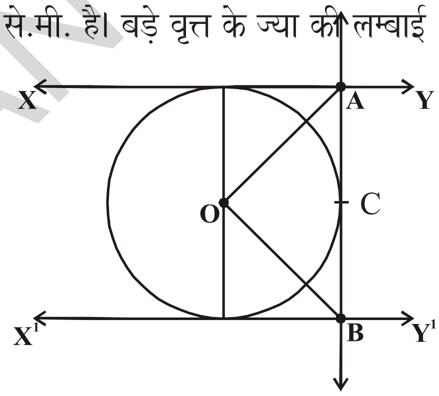
(iv) यदि बिन्दु P से वृत्त (O) पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB डाली गयी है दोनों के मध्य कोण 80° का होतो $\angle POA$ =

(अ) 50° (आ) 60° (इ) 70° (ई) 80°

(v) दिये गये चित्र में XY तथा X^1Y^1 दो समानान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं। स्पर्श बिन्दु C पर और एक स्पर्श रेखा AB डाली गयी है जो XY को A पर X^1Y^1 को B पर प्रतिच्छेदित करती है तो $\angle BOA$ =

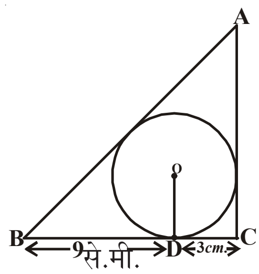
(अ) 80° (आ) 100° (इ) 90° (ई) 60°

2. दो समकेन्द्रीय वृत्त की त्रिज्यायें क्रमशः 5 से.मी. तथा 3 से.मी. है। बड़े वृत्त के ज्या की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करते हुए गुजरती है।



3. यदि वृत्त में समानान्तर चतुर्भुज बनाया जाय तो सिद्ध कीजिए कि वह सम चतुर्भुज रहता है।

4. 3 से.मी. त्रिज्या वाला एक अंतःवृत्त त्रिभुज ΔABC में इस प्रकार डाला गया है कि बिन्दु D भुजा BC को BD तथा DC में विभाजित करता है जिनकी लम्बाई क्रमशः 9 से.मी. तथा 3 से.मी. है। (संगत चित्र में देखिए।) भुजा AB तथा AC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

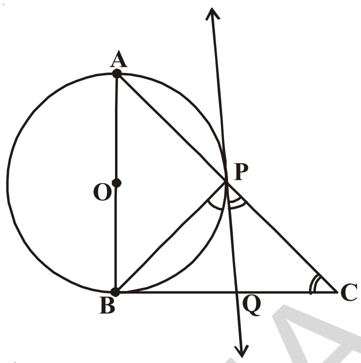


5. 6 से.मी. त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए, केन्द्र से 10 से.मी. दूरी पर डाले गये बिन्दु से उस पर दो स्पर्श रेखाएँ डालकर उनकी लम्बाई ज्ञात कर उसकी पायथागोरस प्रमेय द्वारा जाँच कीजिए।

6. 4 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींचिए जो दूसरे समकेन्द्रीय वृत्त जिसकी त्रिज्या 6 से.मी. है कि स्पर्श करती है उसकी लम्बाई ज्ञात कीजिए तथा सही मापदण्डों से उसकी जाँच कीजिए।

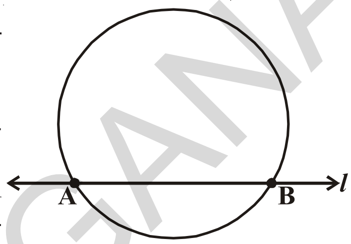
7. एक चूडी की सहायता से एक वृत्त खींचकर उसका एक बाह्य बिन्दु डालिए उस पर एक जोडी स्पर्श रेखा डालिए उनकी लम्बाई मापिए। आपका निष्कर्ष लिखिये।

8. एक समकोण त्रिभुज ABC में एक वृत्त जिसका व्यास AB खींचा गया है जो कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P बिन्दु पर वृत्त की स्पर्श रेखा भुजा BC को समद्विभाजित करती है।



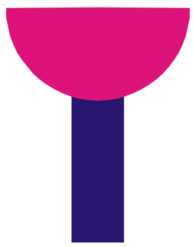
9. O केन्द्र से एक वृत्त खींचिये, बाह्य बिन्दु R से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं बताइए?
(संकेत :- वृत्त के केन्द्र से बिन्दुओं की दूरी समान है।)

9.4 छेदन रेखा द्वारा बनने वाली वृत्त की अवधाएँ



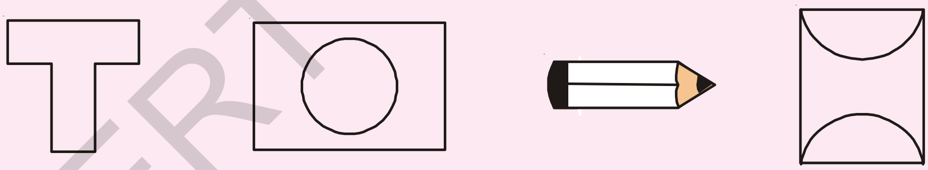
हमने एक वृत्त तथा रेखा के बारे में अध्ययन किया है। यदि एक रेखा वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है तो उसे स्पर्श रेखा कहते हैं और यदि रेखा वृत्त को दो विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है तो दो बिंदुओं के मध्य रेखा को ज्या कहते हैं।

शंकर ने गुलाबी तथा नीले कागज को चिपका कर एक आकृति का निर्माण किया। उनमें से एक है वॉशबेसीन (सैलाबची) (wash basin) इस आकृति को बनाने के लिए उसे कितने कागज की आवश्यकता होगी। हमें इस आकृति में दो भाग दिखाई देते है उनमें से एक आयताकार है दूसरा कौनसा होगा? उसे वृत्त की अवधा कहते है। आयत के क्षेत्रफल को ज्ञात करना हम जानते हैं। वृत्त की अवधा (segment) का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे? अवधा का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे? अगली चर्चा में अवधा के क्षेत्रफल को ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे-



यह कीजिए।

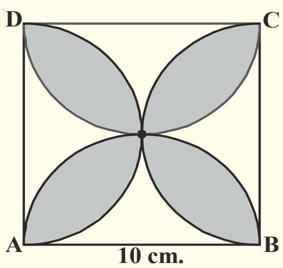
शंकर ने वॉशबेसीन के साथ इन आकृतियों को भी बनाया।



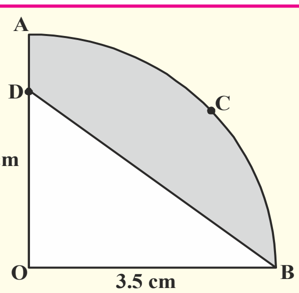
इन्हे किस प्रकार विभाजित करें जिससे उनके क्षेत्रफल सरलता से प्राप्त हो?

कुछ और आकृतियों को बनाकर उनको अलग-अलग भागों में विभाजित करने का प्रयत्न कीजिए।

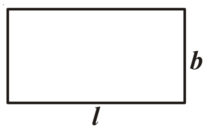
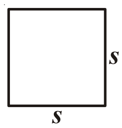
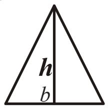
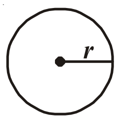
प्रयत्न कीजिए।



प्रस्तुत चित्रों में दिखने वालों सभी आकारों के नाम बताइए।

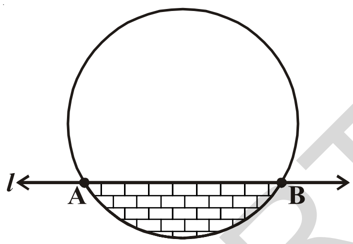


निम्न तालिका में गणितीय आकृतियों के क्षेत्रफल का स्मरण करेंगे।

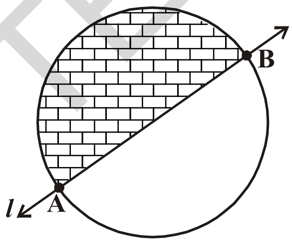
क्र.सं	आकृति	परिमाप	क्षेत्रफल
1.		लम्बाई = l चौडाई = b	$A = lb$
2.		भुजा = s	$A = s^2$
3.		ऊँचाई = h आधार = b,	$A = \frac{1}{2}bh$
4.		त्रिज्या = r	$A = \pi r^2$

9.4.1. वृत्त की अवधाओं का क्षेत्रफल ज्ञात करना (Finding the Area of Segment of a Circle) :–

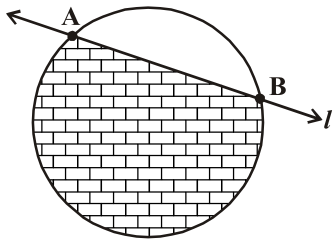
अवधाओं (segment) के क्षेत्रफल के लिए श्वेता ने छेदन रेखा (secants) द्वारा उनका निर्माण किया।



(i)



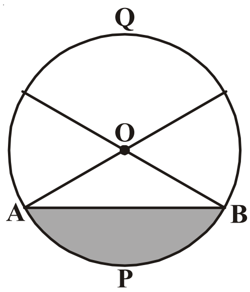
(ii)



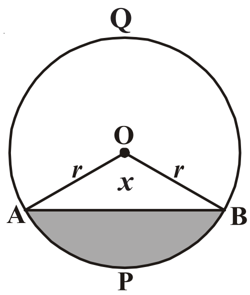
(iii)

आप जानते है **"वृत्त की ज्या तथा चाप के मध्य भाग को अवधा कहते है।"** आप चित्र (i) में ( ) अंकित भाग को देखिए वह लघु अवधा है चित्र (ii) में अर्धवृत्त तथा चित्र (iii) में गुरू अवधा को दर्शाता है।

अवधा के क्षेत्रफल को कैसे ज्ञात करोगे? निम्न क्रिया कलाप कीजिए।



एक वृत्ताकार कागज लेकर उसकी एक ज्या पर मोडिए जो अर्धवृत्त से कम हो। जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है। इस छोटे भाग को क्या कहेंगे? यह एक **"लघु अवधा"** (APB) होगा।



पिछली कक्षाओं में आपने अवधा तथा वृत्त खण्ड के बारे में अध्ययन किया था। रंगीन भाग (लघु अवधा) तथा कुछ (रंगहीन) बेरंगीन भाग को "वृत्त खण्ड" कहते है जो एक त्रिभुज और अवधा का सम्मिलन है। मान लीजिए OAPB उस वृत्त का वृत्तखण्ड है जिसका केन्द्र (O) तथा त्रिज्या r है, जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है। माल लीजिए $\angle AOB$ का माप 'x' है।

आप जानते हैं कि वृत्त के केन्द्र का कोण $360°$ हो तो उसका क्षेत्रफल πr^2 होता है।

अतः यदि केन्द्र का कोण $1°$ हो तो वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $\frac{1°}{360°} \times \pi r^2$ होगा।

इसलिए यदि केन्द्र का कोण $x°$ हो तो वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $\frac{x°}{360°} \times \pi r^2$

अब हम अवधा APB के क्षेत्रफल के बारे में देखेंगे जिसका केन्द्र 'O' और त्रिज्या 'r' हैं।

आप देखते हैं कि अवधा APB का क्षेत्रफल = वृत्तखण्ड OAPB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{x°}{360°} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल}$$

प्रयत्न कीजिए।

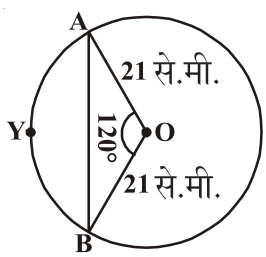
आप लघु अवधा के क्षेत्रफल के उपयोग से गुरू अवधा का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे?

यह कीजिए।

1. दिए गए कोणों से वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. है।
   i. $60°$ ii. $30°$ iii. $72°$ iv. $90°$ v. $120°$
2. एक घडी के मिनट काँटे की लम्बाई 14 से.मी. है तो 10 मिनट में उसके द्‌वारा तय किये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अब हम वृत्त की अवधा का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक उदाहरण को हल करेंगे।

उदाहरण-1. दिए गए चित्र में अवधा AYB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें वृत्त की त्रिज्या 21 से.मी. तथा $\angle AOB = 120^0$ ($\pi = \frac{22}{7}$ तथा $\sqrt{3} = 1.732$) दिया गया है।



हल : अवधा AYB का क्षेत्रफल

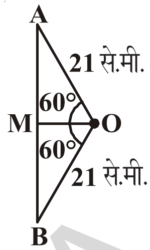
= अवधा OAYB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

अब अवधा OAYB का क्षेत्रफल $= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ से.मी.

= 462 से.मी. ...(1)

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए चित्र में दर्शाए अनुसार $OM \perp AB$ पर डालिए।

नोट OA = OB अतः R.H.S. स्वयं तथ्य द्‌वारा $\Delta AMO \cong \Delta BMO$



अतः AB का मध्य बिन्दु M है तथा $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$

मान लीजिए, OM = x से.मी.

अतः ΔOMA , $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$.

या, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

या, $x = \frac{21}{2}$

और $OM = \frac{21}{2}$ से.मी.

और $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

अतः $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ से.मी.

इसलिए $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ से.मी. $= 21\sqrt{3}$ से.मी.

अतः ΔOAB क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ वर्ग से.मी.

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ वर्ग से.मी. ...(2)

इसलिए अब अवधा AYB का क्षेत्रफल $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ वर्ग से.मी.

($\because$ (1) और (2)]

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ व.से.मी.

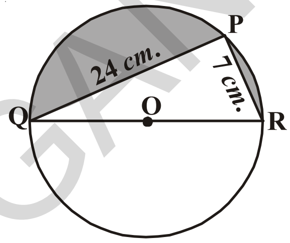
$= 271.047$ व.से.मी.

उदाहरण-2. चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि PQ = 24 से.मी., PR = 7 से.मी. तथा QR वृत्त का व्यास है $(\pi = \frac{22}{7})$

हल : रंगीन अवधा का क्षेत्रफल = OQPR अवधा का क्षेत्रफल – Δ PQR. क्षेत्रफल

क्योंकि QR वृत्त का व्यास है, $\angle QPR = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

अतः पायथागोरस प्रमेय द्वारा



ΔQPR में $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49 = 625$

QR $= \sqrt{625} = 25$ से.मी.

अब वृत्त की त्रिज्या $= \frac{1}{2}$ QR

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ से.मी.

अर्धवृत्त OQPR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

= 245.53 व.से.मी. ..... (1)

समकोण त्रिभुज Δ QPR का क्षेत्र फल $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

= 84 व.से.मी. ..... (2)

(1) और (2) से

रंगीन अवधा का क्षेत्रफल = 245.53 - 84 = 161.53 व.से.मी.

उदाहरण-3. एक वृत्तकार टेबल के उपरी तल पर चित्र में दर्शाए अनुसार छः समान आकृतियाँ बनाई गई है। यदि उसकी त्रिज्या 14 से.मी. हो तो आकृतियों को रंगने का खर्च ₹5 प्रति व.से.मी. दर से ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3}$ = 1.732 का उपयोग कीजिए।)

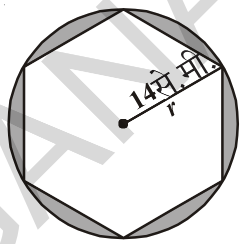
हल : हम जानते है कि एक वृत्त में डाले गये समषट्भुजाकार के भुजा की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के समान होती है।

$\therefore$ षट्भुज की भुजा = 14 से.मी.

अतः छः आकृतियों का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – षट्भुज का क्षेत्रफल

अब वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ व.से.मी. ..... (1)



षट्भुज का क्षेत्रफल $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14 = 509.2$ व.से.मी. ..... (2)

अतः छः आकृतियों का क्षेत्रफल = 616 - 509.21 ((1) और (2) से)

= 106.79 व.से.मी.

इसलिए आकृतियों को रंगने का खर्च ₹5 प्रति वर्ग से.मी. से = ₹106.79 × 5 = ₹533.95

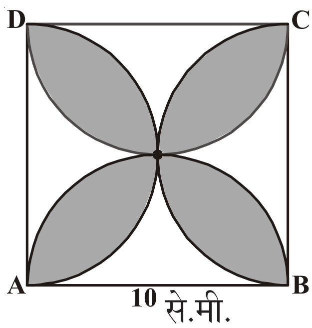
अभ्यास - 9.3

1. 10 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त में एक ज्या केन्द्र पर समकोण बनाती है तो निम्न के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का उपयोग कीजिए।)

   i. लघु अवधा ii. गुरू अवधा

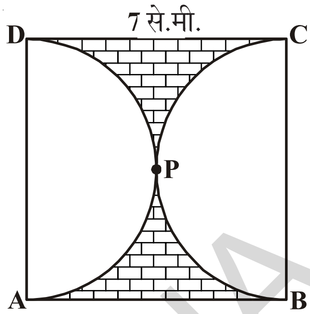
2. 12 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त में एक ज्या केन्द्र पर 120° का कोण बनाती है उससे बनने वाले लघु अवधा का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।. ($\pi = 3.14$ तथा $\sqrt{3} = 1.732$ का उपयोग कीजिए।)

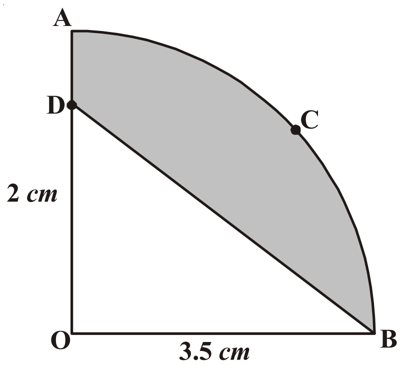
3. एक कार को दो wipers होते है जो कभी भी एक दूसरे से नहीं 'टकराते' हैं। प्रत्येक ब्लेड (blade) की लम्बाई 25 से.मी. होती है। जो 115°. के कोण पर सफाई करते हैं। प्रत्येक घुमाव में उनके द्वारा साफ किये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)



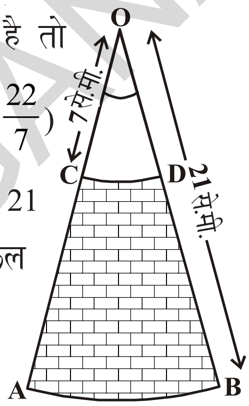
4. दिए गए चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 10 से.मी. तथा उसके प्रत्येक भुजा से एक अर्धवृत्त खींचा गया है। ($\pi = 3.14$ का उपयोग कीजिए।)

5. दिये गये चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जहाँ ABCD एक 7 से.मी. भुजा वाला वर्ग है तथा APD तथा BPC दो अर्धवृत्त डाले गये है। ($\pi = \frac{22}{7}$)

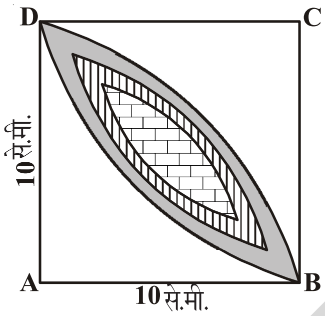




6. दिए गए चित्र में OACB वृत्त का चतुर्थांश है तथा उसकी त्रिज्या 3.5 से.मी. OD = 2 से.मी. दीया गया है तो रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)



7. AB तथा CD दो समकेन्द्रिक वृत्तों के चाप है। जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 21 से.मी. तथा 7 से.मी. है। यदि $\angle AOB = 30°$, हो तो रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

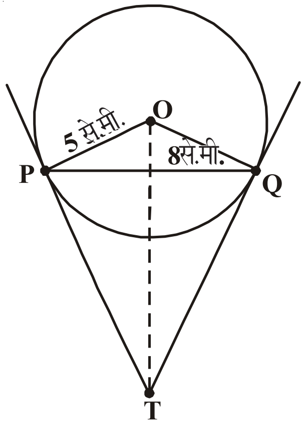


8. दिए गए चित्र में अंकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो 10 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त के दो चतुर्थांशों का उभयनिष्ठ भाग है। ($\pi = 3.14$)

अतिरिक्त अभ्यास

(यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।)

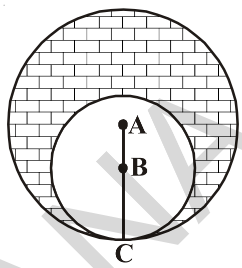
1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से डाले गये दो स्पर्श रेखाओं के मध्य बनने वाला कोण स्पर्श बिन्दु से डाली गयी रेखा द्वारा केन्द्र पर बनने वाले कोण का संपूरक होता है।
2. 5 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर PQ = 8 से.मी. की ज्या खींची गयी है। बिन्दु P तथा Q से डाली गयी स्पर्श रेखाएँ T पर प्रतिच्छेदित होती है। (चित्र में देखिए।) TP की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

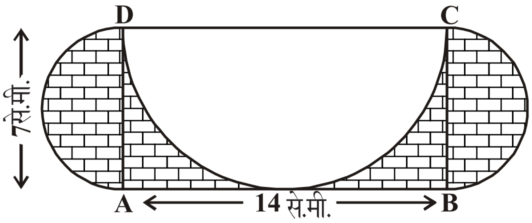


3. सिद्ध कीजिए कि वृत्त में डाले गये चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें केन्द्र पर संपूरक कोण बनाती हैं।
4. 8 से.मी. वाली रेखा AB खींचिए। A को केन्द्र मानकर 4 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त डालिए तथा B केन्द्र से 3 से.मी. त्रिज्या वाला अन्य वृत्त खींचिए। प्रत्येक केन्द्र से दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा डालिए।

5. मान लीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $AB = 6$ से.मी., $BC = 8$ से.मी. तथा $\angle B = 90^0$. BD, B से डाला गया AC पर लम्ब है B, C, D से एक वृत्त खींचा गया है। A से इस पर स्पर्श रेखा खींचिये।

6. दिए गए चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें A तथा B से खींचे गये दो वृत्त है जो बिन्दु C पर स्पर्श करते हैं यदि $AC = 8$ से.मी. तथा $AB = 3$ से.मी. दिया गया है।





7. ABCD एक आयत है जिसमें $AB = 14$ से.मी. तथा $BC = 7$ से.मी. है। DC, BC तथा AD व्यास वाले तीन अर्धवृत्त चित्र में दर्शाये अनुसार खींचिए। इसमें रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की!

इस अध्याय में हमने निम्नलिखित अंशो का अध्ययन किया है।

1. वृत्त की ''स्पर्श रेखा'' वह रेखा होती है जो वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर स्पर्श करती हैं।
2. किसी भी बिंदु से स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लंब होती है।
3. बाह्य बिन्दु से वृत्त पर डाले गये दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।
4. हमने निम्न की रचना करना सीखा है।
   a) वृत्त की स्पर्श रेखा की रचना जब उसका केन्द्र बिन्दु ज्ञात है।
   b) बाह्य बिन्दु से वृत्त पर एक जोडी स्पर्श रेखाओं की रचना।
5. वृत्त की छेदन रेखा वृत्त को दो विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिछेदित करती हैं और वह दो बिंदुओं को छुनेवाली रेखा होती है।
6. वृत्त की अवधा का क्षेत्रफल = संबंधित वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल – संबंधित त्रिभुज का क्षेत्रफल

अध्याय

10 क्षेत्रमिति
(Mensuration)

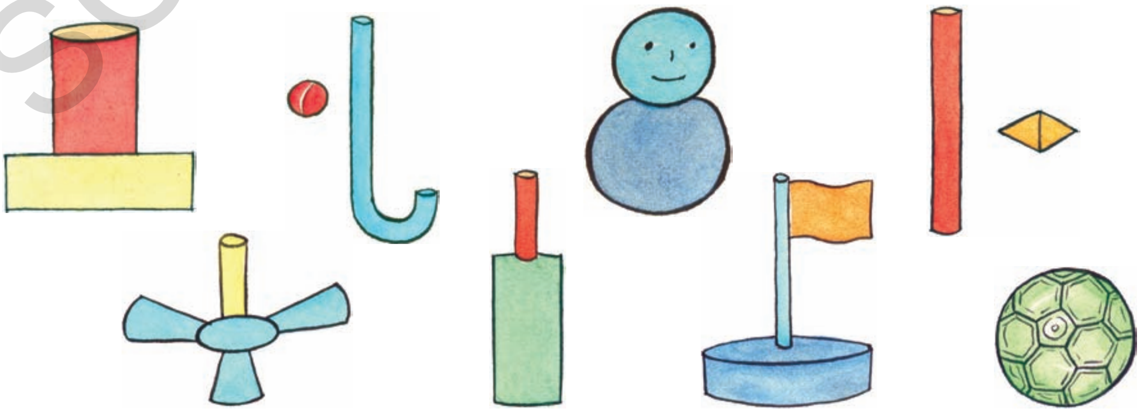
10.1 प्रस्तावना

8 वीं और 9 वीं कक्षाओं में हमने साधारण ठोस आकृतियों के क्षेत्रफल और आयतन का अध्ययन किया है। उनका अर्थ समझने के लिये हमने अनेक अध्ययन किये हैं। हमने उन्हें वास्तविक जीवन की घटनाओं में उपयोग किया है और मापन का अनुमान लगाने की आवश्यकता को पहचाना है। उदाहरण के लिये, एक कमरे को चूना लगाने के लिये आवश्यक पेंट की जानकारी के लिये हमें उसके समतल का क्षेत्रफल चाहिए और आयतन नहीं। कुछ अनाज़ की मात्रा कितने डिब्बों में भरी जायेगी, यह संख्या आयतन से ज्ञात होगी और क्षेत्रफल से नहीं।

प्रयास कीजिए।

1. निम्न परिस्थितियों पर विचार कीजिए। प्रत्येक में यह ज्ञात कीजिए कि क्षेत्रफल या आयतन आवश्यक है। क्यों?
   i. एक बोतल में पानी की मात्रा।
   ii. तम्बू बनाने के लिये आवश्यक कॉनवास
   iii. एक लॉरी में बस्तों की संख्या।
   iv. सिलंडर में भरी गई गैस
   v. माचिस के डिब्बे में तीलियों की संख्या।
   vi. गिफ्ट पैक का पेपर
2. इसी तरह 5 उदाहरण तैयार (Compute) कीजिए और अपने मित्रों से उसकी आवश्यकता पूछिये।

हम अपने आस-पास विभिन्न आकृतियों (दो या दो से अधिक) की वस्तुएँ देखते हैं। खंभो पर खडे मकान, पानी की टंकी, बेलनाकार है और वह घनाभाकार के आधार पर हैं, एक क्रिकेट का हैंडल बेलनाकार है जो एक चपटे लकडी पर है, आदि। आप अपने आस-पास के विभिन्न वस्तुओं के बारे में सोचिये। इनमें से कुछ नीचे बताये गये हैं।

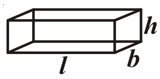
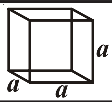
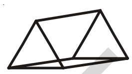
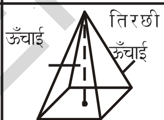
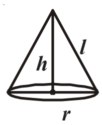
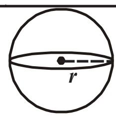
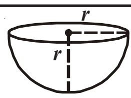


प्रयास कीजिए।

1. पिछले पृष्ट पर जो चित्र हैं उनको तोडकर ठोस आकृति में विभाजित कीजिए।
2. अन्य 5 वस्तुओं के विषय में सोचिये जो आकृतियों का संयोजन है। उन आकृतियों का नाम बताइये जिसको जोडकर वह बनाया गया है।

आइये हम ठोस आकृतियों के समतल क्षेत्रफल और आयतन का स्मरण करेंगे।

आपने पढा है कि साधारण ठोस वस्तुओं का तलीय क्षेत्रफल और आयतन कैसे ज्ञात किया जाता है। प्रायः हमने कुछ अन्य वस्तुओं को देखा है जो ठोस आकृतियों का संयोजन है। इसलिये, अब हम उनका समतल क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करेंगे।

क्र. सं.	ठोस का नाम	चित्र	पार्श्व/ वक्र क्षेत्रफल	संपूर्णतल क्षेत्रफल	आयतन	शब्दावली
1.	घनाभ		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l:लम्बाई b:चौडाई h:ऊँचाई
2.	घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a:घन की भुजा
3.	लम्ब प्रिज्म		आधार की परिमिति $\times$ ऊँचाई	पार्श्व तल का क्षेत्रफल+2(अंत समतलों का क्षेत्रफल)	आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई	-
4.	वृत्ताकार लम्ब बेलन		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h	r:आधार की त्रिज्या h:ऊँचाई
5.	लम्ब पिरामिड		$\frac{1}{2}$ (आधार की परिमिति) $\times$ तिरछी ऊँचाई	पार्श्वतल का क्षेत्रफल +आधार का क्षेत्रफल	$\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई	-
6.	वृत्तकार लम्ब शंकु		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	r:आधार की त्रिज्या h:ऊँचाई l:तिरछी ऊँचाई
7.	गोला		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r:त्रिज्या
8.	अर्ध गोला		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r:त्रिज्या

अब, हम तालिका में दिये गये आकृतियों के पार्श्व धरातल के क्षेत्रफल (CSA) तथा संपूर्ण धरातल के क्षेत्रफल (TSA) को विस्तार रूप से समझने के लिये कुछ उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-1. एक शंकु आकार के तंबू की त्रिज्या 7 मी है और उसकी ऊँचाई 10 मी. है। तंबु बनाने के लिये कैनवस (canvas) की लम्बाई ज्ञात कीजिए यदि उसकी चौडाई 2 मी हो। $\left[\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right]$

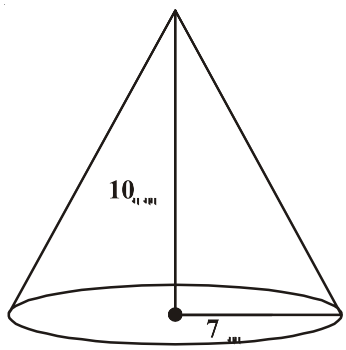
हल : शंकु आकार के तंबू की त्रिज्या $(r) = 7$ मी.

शंकु आकार के तंबू की ऊँचाई $(h) = 10$ मी.

$\therefore$ शंकु की तिरछी लम्बाई $\quad l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2+h^2}$

$= \sqrt{49+100}$

$= \sqrt{149} = 12.2$ मी



अब, तंबू का समतल क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2$ मी^{2}

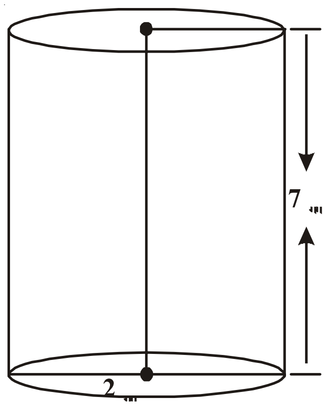
$= 268.4$ मी^{2}.

कैनवस का क्षेत्रफल $= 268.4$ मी^{2}

कैनवस की चौड़ाई दी गई है $= 2\text{m}$

कैनवस की लम्बाई $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौडाई}} = \dfrac{268.4}{2} = 134.2$ मी.

उदाहरण-2. एक तेल का ड्रम बेलनाकार का है जिसको ड्रम को पेंट करने का खर्च ₹3 प्रति मी^{2} है। पेंटर को कितनी राशी देनी होगी यदि वह 10 ड्रम पेंट करे?



हल : तेल के ड्रम (बेलन) का व्यास $= 2$ मी.

बेलन की त्रिज्या $= \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1$ मी

बेलनाकार ड्रम का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल $= 2 \times \pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1+7) = 2 \times \frac{22}{7} \times 8$

$$= \frac{352}{7} \text{ मी}^2 = 50.28 \text{ मी}^2$$

ड्रम के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल $= 50.28$ मी^{2}

पेंट करने का खर्च $=$ ₹ 3 प्रति 1 मी^{2}

10 ड्रम को पेंट करने का खर्च $= 50.28 \times 3 \times 10 =$ ₹ 1508.40

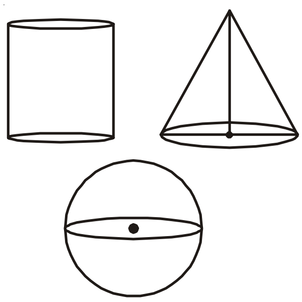
उदाहरण-3. एक गोला, एक बेलन और एक शंकु समान त्रिज्या और समान ऊँचाई के है। उनके वक्रतल के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए, गोला, बेलन और शंकु की त्रिज्या r है।

गोले की ऊँचाई $=$ उसका व्यास $= 2r$.

तब, शंकु की ऊँचाई $=$ बेलन की ऊँचाई $=$ गोले की ऊँचाई.

$= 2r$.



मान लीजिए शंकु की तिरछी ऊँचाई l है। तब $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$$

$S_1 =$ गोले के वक्रतल का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$S_2 =$ बेलन के वक्रतल का क्षेत्रफल, $2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

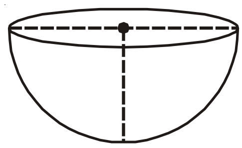
$S_3 =$ शंकु के वक्रतल का क्षेत्रफल $= \pi rl = \pi r \times \sqrt{5}\, r = \sqrt{5}\, \pi r^2$

तीनों के वक्रतल के क्षेत्रफल का अनुपात $=$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\, \pi r^2$$

$$= 4 : 4 : \sqrt{5}$$

उदाहरण-4. एक कंपनी एक पतली स्टील की चादर से 1000 अर्धगोलाकार बेसिन बनाना चाहती है। यदि प्रत्येक बेसिन की त्रिज्या 21 से.मी. है तो उपरोक्त बेसिन बनाने के लिये कुल कितने क्षेत्रफल की स्टील की चादर की आवश्यकता होगी?



हल: अर्धगोलाकार बेसिन की त्रिज्या (r) $= 21$ से.मी.

अर्धगोलाकार बेसिन का समतल क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 2772 \text{ से.मी.}^2$$

इसलिये, एक अर्धगोलाकार बेसिन के लिये आवश्यक स्टील की चादर का क्षेत्रफल $= 2772$ से.मी.^{2}

1000 बेसिन के लिये आवश्यक स्टील की चादर का क्षेत्रफल $= 2772 \times 1000$

$= 2772000$ से.मी.^{2}

$= 277.2$ मी.^{2}

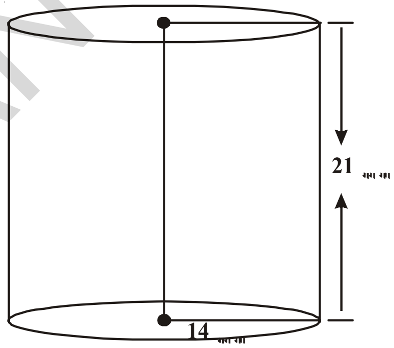
उदाहरण-5. एक वृत्ताकार लम्ब बेलन के आधार की त्रिज्या 14 से.मी. और ऊँचाई 21 से.मी. है। ज्ञात कीजिए: (i) आधार का क्षेत्रफल (ii) वक्रतल का क्षेत्रफल (iii) संपूर्ण तल का क्षेत्रफल (iv) आयतन

हल: बेलन की त्रिज्या (r) = 14 से.मी.

बेलन की ऊँचाई (h) = 21 से.मी.

अब (i) वक्रतल का क्षेत्रफल (प्रत्येक सिरे) का क्षेत्रफल

$\pi r^2 = \frac{22}{7}(14)^2 = 616$ से.मी.^{2}



(ii) वक्रतल का क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21$

$= 1848$ से.मी.^{2}

(iii) संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = $2 \times$ आधार का क्षेत्रफल + वक्रतल का क्षेत्रफल

$= 2 \times 616 + 1848 = 3080$ से.मी.^{2}

(iv) बेलन का आयतन $= \pi r^2 h =$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= 616 \times 21 = 12936$ से.मी.^{3}

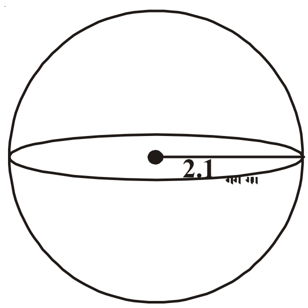
उदाहरण-6. 2.1 से.मी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल: गोले की त्रिज्या $(r) = 2.1$ से.मी.

गोले के समतल का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

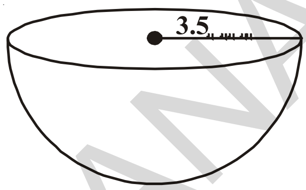
$= \frac{1386}{25} = 55.44$ से.मी.^{2}



गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ cm}^3.$$

उदाहरण-7. 3.5 से.मी. त्रिज्या वाले अर्धगोले का आयतन और संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए.



हल: अर्धगोले की त्रिज्या (r) 3.5 से.मी. $= \frac{7}{2}$ से.मी. है।

अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ से.मी.}^2$$

संपूर्ण तल का क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5 \text{ से.मी.}^2$$

अभ्यास - 10.1

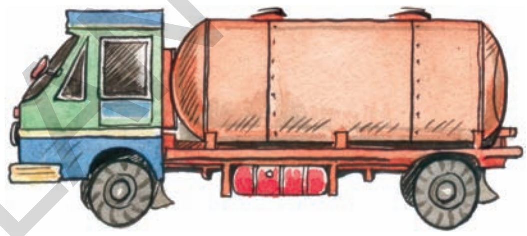
1. एक जोकर की टोपी वृत्ताकार लम्ब शंकु के आकार में है जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. है और ऊँचाई 24 से.मी. है। ऐसी 10 टोपियाँ बनाने के लिये आवश्यक शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. खेल की समाग्री बनाने वाली कंपनी को शटल कॉक के 100 कागज़ के बेलन बनाने का आदेश प्राप्त हुआ। बेलन के आवश्यक माप 35 से.मी. की ऊँचाई और 7 से.मी. की त्रिज्या है। 100 बेलन के लिये आवश्यक मोटे कागज़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. 6 से.मी. त्रिज्या और 7 से.मी. ऊँचाई के वृत्ताकार लम्ब शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।
4. एक बेलन के पार्श्वतल का क्षेत्रफल, शंकु के वक्रतल के क्षेत्रफल के समान है। आधारों को समान लेते हुए, बेलन की ऊँचाई और शंकु की तिरछी ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. एक स्वयं-सेवक-संस्था, 3 से.मी. त्रिज्या और 4 से.मी. ऊँचाई के जोकर की टोपियाँ बनाना चाहती है। यदि आवश्यक कागज़ की शीट 1000 से.मी.^{2} की है तो इस शीट से कितनी टोपियाँ बनाई जायेंगी?
6. एक बेलन और शंकु के आधार की त्रिज्यायें समान हैं और उनकी ऊँचाइयाँ भी समान हैं। बताइए कि उनके आयतन का अनुपात 3:1 है।
7. एक ठोस धातु की छड बेलनाकार की है। उसकी ऊँचाई 11 से.मी. है और उसके आधार का व्यास 7 से.मी. है। तब ऐसे 50 छडों का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।
8. चावल का ढेर शंकु के आकार का है जिसका व्यास 12 मी. और ऊँचाई 8 मी. है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेर को ढंकने के लिये कितने क्षेत्रफल कानवास-कपडे की आवश्यकता होगी? $(\pi = 3.14)$

9. शंकु के वक्रतल का क्षेत्रफल 4070 से.मी.^{2} है और उसका व्यास 70 से.मी. है। उसकी तिरछी ऊँचाई क्या है?

10.2 ठोसों के संयोजन का समतलीय क्षेत्रफल (Surface Area of the Combination of Solids)

हमने कुछ ठोस वस्तुएँ देखी हैं जो कुछ ठोस वस्तुओं के संयोजन से तैयार किये गये हैं जैसे गोला, बेलन और शंकु। वास्तविक जीवन में भी हम कुछ लकडी की वस्तुएँ, घरेलू उपकरण, दवाई के केपसूल, बोतल, तेल के टैंकर आदि देखते हैं। हम अपने दैनिक जीवन में आइस-क्रीम खाते हैं। क्या आप बतायेंगे कि उसमें कितनी ठोस आकृतियाँ हैं? यह साधारणतः एक शंकु और अर्धगोलाकार से बनी है।

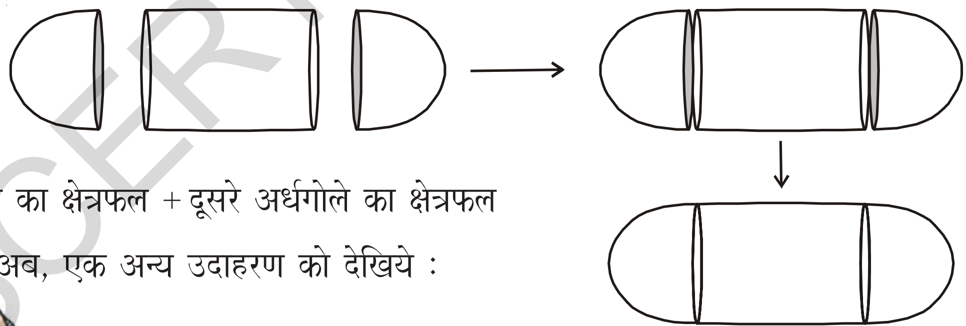
हम एक अन्य उदाहरण जैसे तेल का टेंकर/पानी के टेंकर लेंगे। यह एक ही आकृति की वस्तु है। आप अनुमान लगायेंगे कि वह एक बेलन और दो अर्धगोले से बनी है।



यदि कोई कारण से आप ऐसे वस्तुओं का समतलीय क्षेत्रफल या आयतन ज्ञात करना चाहते हैं तो आप क्या करेंगे? अब तक अध्ययन किये गये कोई भी ठोस आकृति से ये मेल नहीं रखते हैं।

जैसा कि हमने देखा है, तेल का टेंकर एक बेलन के दोनो सिरों पर अर्धगोले लगाकर बनाया गया है। वह निम्न आकृति जैसा दिखाई देगा।
:

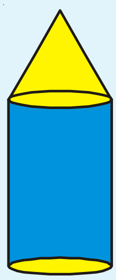
नये ठोस का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का वक्रतल का क्षेत्रफल + बेलन के वक्रतल का क्षेत्रफल + दूसरे अर्धगोले का क्षेत्रफल



अब, एक अन्य उदाहरण को देखिये :

सोचिए - चर्चा कीजिए।

सोनिया ने एक खिलोंना बनाया। उसने बेलन पर शंकु आकार का है। उसकी वृत्ताकार की ज्या समान है। उसने अर्चना से कहा खिलोने को संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफळ शंकु तथा बेलन के संपुर्ण धरातल के योग बराबर होगा क्या आप इससे सहमत है? आपके उत्तर का औचित्य बताईए।



यदि हमें एक खिलोना बनाना हो जिसमें अर्धवृत्त तथा शंकु को मिलाना है। चलिए अब उसके चरणों को देखेंगे। पहले वह शंकु और अर्धगोले के चपटे समतलों को निकट लाना होगा। यहाँ वह प्रायः उसके लिये शंकु और अर्धगोला समान त्रिज्या का लेना होगा, जिससे उस खिलौने का एक चिकना धरातल हो। अतः इसकी सीढियाँ निम्न प्रकार से होंगी।

सीढी-1

सीढी-2

सीढी-3

अंत में उसे एक गोल पेंदी वाला खिलोना प्राप्त हुआ। अब, यदि वह यह उठाना चाहता है कि उस खिलोने को पेंट करने के लिये कितने पेंट की आवश्यकता है, तो उसे इसके लिए उस खिलौने का समतलीय क्षेत्रफल ज्ञात होना चाहिये? उसे उस खिलौने का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात होना चाहिये जो अर्धगोले का संपूर्णतल का क्षेत्रफल और शंकु के संपूर्णतल का क्षेत्रफल का सम्मिश्रण है।

खिलौने का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल

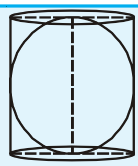
= अर्धगोले के वक्रतल का क्षेत्रफल + शंकु के वक्र तल का क्षेत्रफल

प्रयास कीजिए।

- आपको जिन आकृतियों की जानकारी है उनका उपयोग करते हुए अपने दैनिक जीवन में अत्यधिक वस्तुएँ को बनाइए। (दो से अधिक वस्तुओं के संयोजन से)
  [संकेत: चिकनी मिट्टी, गेंद, पैप, कागज़ के शंकु, घन और घनाभ के जैसे डिब्बे आदि का उपयोग करें।]

सोचिए - चर्चा कीजिए।

एक बेलन के भीतर एक गोला है। क्या गोले के धरातल का क्षेत्रफल,



* बेलन तथा गोले संपुर्ण धरातल के क्षेत्रफळ का अनुपात क्या होगा?

उदाहरण - 8. कौशिक को उसके जन्म दिवस पर एक खिलौना तोहफे में मिला, उस पर कोई रंग नहीं था। वह उसे अपने क्रेयान से रंगना चाहता है। उसका उपरी हिस्सा शंकु आकार का है, जो एक अर्धगोलाकार पर रखा गया है। उसके ऊपरी भाग की ऊँचाई 5 से.मी. है तथा उसकी त्रिज्या 3.5 से.मी. हो तो रंगने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

हल : यह खिलौना उस वस्तु की तरह है। जिसमें शंकु तथा अर्धगोलाकार का सम्मिलन किया गया है, जिनकी त्रिज्यायें वृत्ताकार आधार के समान है।

अर्थात,

संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल= अर्धगोले के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल+शंकु के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल

अब, अर्धगोले के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल=

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi r^2\right) = 2\pi r^2$$

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right) = cm^2$$

अर्थात, शंकु की ऊँचाई = खिलौने की ऊँचाई - अर्धगोले की ऊँचाई

$$= \left(5-\frac{3.5}{2}\right) = cm = 3.25cm$$

इसलिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई

$$l = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}\, cm = 3.7cm \quad \text{(लगभग)}$$

इसलिए शंकु के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल $= \pi rl = \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right) cm^2$

यह हमें खिलौने के संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफल देता है।

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)cm^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)cm^2$$

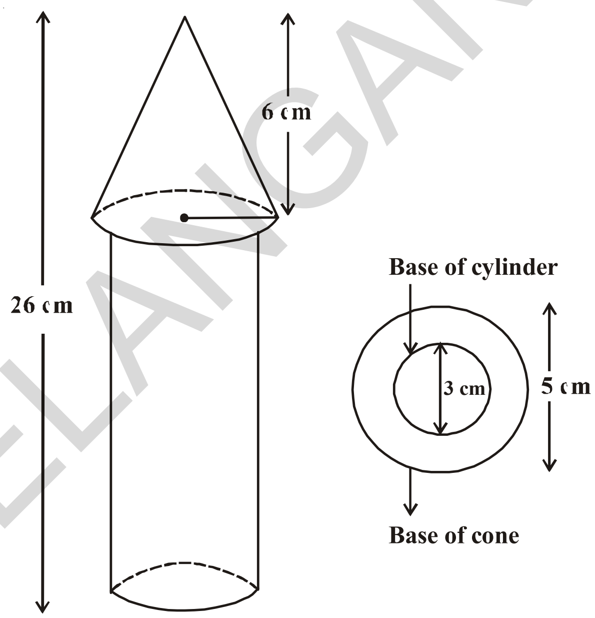
$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\left(3.5+3.7\right)cm^2 = \frac{11}{2}\times(3.5+3.7)cm^2$$

$$= 39.6\text{cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

नोट : आप यह ध्यान दिजिए की खिलौने के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल शंकु तथा अर्धगोले के संपूर्ण धरातल के क्षेत्रफलों का योग नही है।

उदाहरण-9. एक खिलोने का राकेट चित्र में दिखाये अनुसार (एक बेलन पर शंकु) जुडा हुआ है। राकेट की संपूर्ण ऊँचाई 26 से.मी. है। जब कि शंकु की ऊँचाई 6 से.मी. है। शंकु आकार का व्यास 5 से.मी. है जबकि बेलन का व्यास 3 से.मी. है। यदि राकेट का शंकु आकार का भाग आरेंज रंग के पेंट से और बेलनाकार भाग पीले रंग से पेंट करना है तो बताइए इनमें से प्रत्येक रंग से रंगे गये भाग का क्षेत्रफल क्या होगा? ($\pi = 3.14$ से.मी.)

हल: मान लीजिए 'r' शंकु के आधार की त्रिज्या है और 'l' उसकी तिरछी ऊँचाई है। आगे, मान लीजिए . r_1 बेलन की त्रिज्या है और h_1 उसकी ऊँचाई है।



हमें प्राप्त है,

$r = 2.5$ से.मी., $h = 6$ सेमी.

$r_1 = 1.5$ से.मी. $h_1 = 20$ से.मी.

अब, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow \quad l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$

$l = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$

अब, आरेंज रंग से पेंट करने का क्षेत्रफल

शंकु का वक्रतल का क्षेत्रफल + शंकु के आधार का क्षेत्रफल - बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r l + \pi r^2 - \pi r_1^2$

$= \pi\{(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2\}$ से.मी.^{2}

$= \pi(20.25)$ से.मी.$^2 = 3.14 \times 20.25$ से.मी.^{2}

$= 63.585$ से.मी.^{2}

पीले रंग से पेंट करने का क्षेत्रफल

= बेलन के वक्रतल का क्षेत्रफल + बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2 = \pi r_1 (2h_1 + r_1)$

$= 3.14 \times 1.5\ (2\times20+1.5)$ से.मी.^{2}

$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$ से.मी.^{2}

$= 4.71 \times 41.5$ से.मी.^{2}

$= 195.465$ से.मी.^{2}.

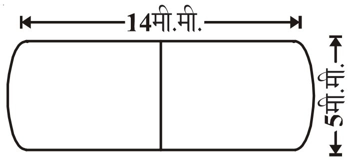
पीले रंग का क्षेत्रफल $= 195.465$ से.मी.^{2}

अभ्यास - 10.2

1. एक खिलौना ऐसा है कि अर्धगोले पर शंकु चिपका हुआ है। शंकु के आधार का व्यास और ऊँचाई क्रमशः 6 से.मी. और 4 से.मी. है। खिलोने के धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$]

2. एक ठोस वस्तु इस प्रकार है कि वृत्ताकार लम्ब बेलन के एक ओर अर्धगोला है और दूसरी ओर शंकु है। सामान्य आधार की त्रिज्या 8 से.मी. है और बेलनाकार और शंकु आकार के भाग की ऊँचाइयाँ क्रमशः 10 से.मी. और 6 से.मी. है। इस ठोस का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$]

3. एक दवाई के केपसूल का आकार ऐसा है कि बेलन के दोनों ओर अर्धगोले चिपके हुये हैं। केपसूल की लम्बाई 14 मि.मी. है और चौडाई 5 मि. मी. है। इसके धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

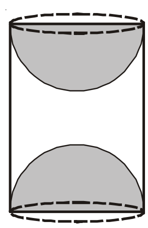


4. दो घन जिसके आयतन प्रत्येक 64 से.मी.^{3} उनके सिरे से जुडे हैं। इस तरह बनने वाले घनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक संग्रहित टंकी वृत्तकार बेलन के आकार में है जिसके दोनो ओर अर्धगोले लगे हुए हैं। यदि उसका बाहर का व्यास 1.4 मी. और लम्बाई 8 मी., तो बाहर की ओर पेंट करने का खर्च ₹20 प्रति मी^{2} की दर से ज्ञात कीजिए।

6. एक गोला, बेलन और शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई समान है। उनके आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। (सूचना : गोले की ज्या बेलन तथा शंकु की ऊँचाई के बराबर होती है।)

7. एक घनाकार लकडी के टुकडे से एक अर्धगोला काटा गया जिसका व्यास घन की लम्बाई के बराबर है। शेष लकडी के टुकडे का समतलीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

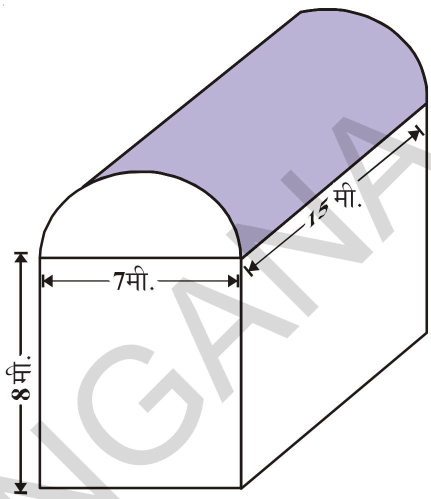


8. एक लकडी के बेलन के भीतर से दो अर्धगोले काटे गये जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 से.मी. है और उसके आधार की त्रिज्या 3.5 से.मी. है तो वस्तु का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.3 ठोस वस्तुओं के संयोजन का आयतन (Combination of Solids)

आइए हम आयतन को एक उदाहरण द्वारा समझेंगे।

सुरेश अपना कारखाना एक गोदाम में चलाता है जो घनाभ के ऊपर अर्धबेलनाकार की आकृति में है। गोदाम के आधार के माप 7 मी × 15 मी है और घनाभाकार की ऊँचाई 8 मी है। वायु का आयतन ज्ञात कीजिए जो गोदाम में है? गोदाम में मशीनरी 300 मी^{3} का स्थान घेरे हुये है और वहाँ 20 कर्मचारी हैं जो प्रत्येक औसत से 0.08 मी^{3} का स्थान घेरे हुए है। गोदाम में कितनी वायु है?



गोदाम में वायु का आयतन (जब वहाँ मशीन और कर्मचारी नहीं है।) घनाभ और अर्धबेलन के आयतन से प्राप्त होता है। घनाभ की लम्बाई, चौडाई और ऊँचाई क्रमशः 15 मी., 7 मी. और 8 मी. है। अर्धबेलन का व्यास 7मी. है और ऊँचाई 15 मी.।

आवश्यक आयतन $= $ घनाभ का आयतन $+ \frac{1}{2}$ बेलन का आयतन

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right] \text{ मी}^3$$

$$= 1128.75 \text{मी}^3$$

इसके पश्चात, मशीनों (यंत्रों) से घिरा हुआ स्थान $= 300$ मी^{3}

और कर्मचारियों द्वारा घिरा हुआ स्थान $= 20\times0.08$ मी^{3}

$= 1.6$ मी^{3}

इसलिये वायु का आयतन, जब वहाँ यंत्र और कर्मचारी हैं $= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$

$= 1128.75 - 301.60 = 827.15$ मी^{3}

नोट : ठोस वस्तुओं के संयोजन से बनी वस्तुओं के आयतन की गणना करने के लिये, हम दो ठोस वस्तुओं का समतलीय क्षेत्रफल जोड नही पायेंगे क्योंकि इस प्रक्रिया में, उनको जोडते समय कुछ भाग अदृश्य हो जाते है। लेकिन आयतन ज्ञात करते समय ऐसा नहीं होगा। मौलिक ठोस (basic solids) वस्तुओं को जोडकर बने वस्तुओं का आयतन, उपरोक्त उदाहरण में दर्शाये अनुसार उन दो वस्तुओं के आयतन के योग के समान होगा।

प्रयास कीजिए।

1. एक तार के लम्ब-काट का व्यास 5% कम किये जाने पर उसकी लम्बाई कितने प्रतिशत कम करनी चाहिए जिससे उसका आयतन समान हो?
2. गोले और घन का समतलीय क्षेत्रफल समान है। उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए?

आइए, हम कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण -10. एक ठोस खिलौना इस प्रकार है कि वह वृत्ताकार लम्ब बेलन के एक ओर अर्धगोला और दूसरी ओर शंकु है। उनका सामान्य व्यास 4.2 से.मी. और बेलनाकार और शंकु आकार के भागों की लम्बाई क्रमशः 12 से.मी. और 7 से.मी. है। उस ठोस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

हल : मान लीजिए शंकु आकार के भाग की ऊँचाई $h_1 = 7$ से.मी.

और बेलनाकार भाग की ऊँचाई $h_2 = 12$ से.मी.

त्रिज्या $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ से.मी.

ठोस खिलौने का आयतन

= शंकु का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

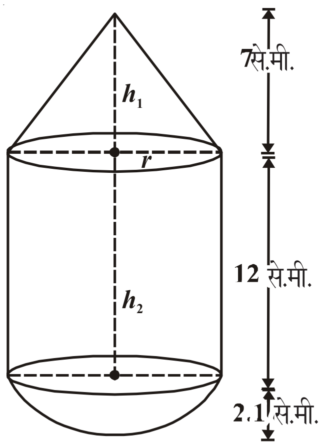
$$= \pi r^2\left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7}\times\left(\frac{21}{10}\right)^2\times\left[\frac{1}{3}\times 7 + 12 + \frac{2}{3}\times\frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{441}{100}\times\left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{441}{100}\times\left[\frac{35+180+21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{441}{100}\times\frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ से.मी.}^3$$



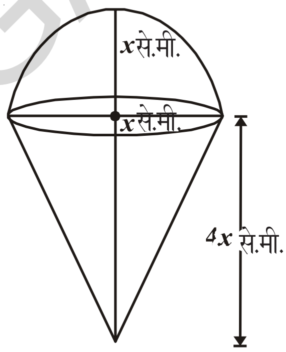
उदाहरण-11. एक बेलनाकार पात्र में आइस-क्रीम है जिसका व्यास 12 से.मी. और ऊँचाई 15 से.मी. है। वह आइस-क्रीम 10 बच्चों में इस तरह बाँटा गया कि प्रत्येक छात्र के आइस-क्रीम का आकार शंकु आकार पर अर्धगोला है जैसे चित्र में दिखाया गया है। यदि शंकु आकार के भाग की ऊँचाई उसके आधार के व्यास का दुगुना है, तो आइस-क्रीम के शंकु का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए आइसक्रीम शंकु के आधार की त्रिज्या x से.मी. है।

$\therefore$ व्यास $= 2x$ से.मी.

तब, शंकु आकार के आइस-क्रीम की ऊँचाई $= 2$ (व्यास) $= 2(2x) = 4x$ से.मी. है।

आइसक्रीम शंकु का आयतन = शंकु आकार के भाग का आयतन + अर्धगोलाकार भाग का आयतन



$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{1}{3}\pi x^2 (4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$

$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$

$= 2\pi x^3$ से.मी^{3}

बेलनाकार पात्र का व्यास $= 12$ से.मी.

उसकी ऊँचाई $(h) = 15$ से.मी.

$\therefore$ बेलनाकार पात्र का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi(6)^2\, 15$

$= 540\pi$ से.मी.^{3}

$\frac{\text{बेलनाकार पात्र का आयतन}}{\text{आइसक्रीम शंकु का आयतन}} = 10$

$\Rightarrow \quad \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$

$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$

$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{540}{2\times 10} = 27$

$\Rightarrow \quad x^3 = 27$

$\Rightarrow \quad x^3 = 3^3$

$\Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ आईसक्रीम के शंकु का व्यास $2x = 2(3) = 6$ से.मी.

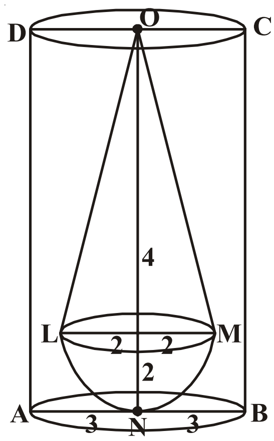
उदाहरण-12. एक ठोस ऐसा बना हुआ है कि अर्धगोले पर वृत्ताकार लम्ब शंकु चिपका हुआ है, और वह पानी से भरे हुए वृत्ताकार बेलन में उसके आधार को छूने तक डुबोया गया। बेलन में शेष पानी का आयतन ज्ञात कीजिए जब कि उस अर्धगोले की त्रिज्या 3 से.मी. और ऊँचाई 6 से.मी. है। अर्धगोले की त्रिज्या 2 से.मी. और शंकु की ऊँचाई 4 से.मी. है।

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

हल : दिये गये चित्र में,

ABCD एक बेलन है और LMN अर्धगोला है।

OLM एक शंकु है। हम जानते हैं कि एक शंकु और अर्धगोले से बना हुआ एक ठोस पिंड, जब पानी से भरे हुये बेलन में डुबोया जाता है तो, ठोस के आयतन के बराबर का पानी विस्थापित (displaced) होता है।



बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\,\pi$ से.मी.^{3}

अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\times\pi\times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$ से.मी.^{3}

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 4 = \frac{16}{3}\pi$ से.मी.^{3}

शंकु और अर्धगोले का आयतन $= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$= \frac{32}{3}\pi$

बेलन में शेष पानी का आयतन

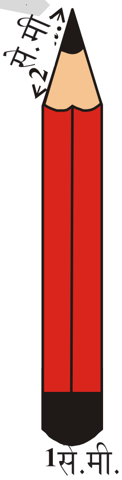
= बेलन का आयतन - अर्धगोला का आयतन

$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$

$= \frac{162\pi - 32\pi}{3} = \frac{130\pi}{3}$

$$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 \text{ से.मी.}^3$$

उदाहरण-13. एक बेलनाकार पेंसिल की लम्बाई को नहीं बदलते हुए एक सिरे पर शंकु आकार के रूप में छिली गई। पेंसिल का व्यास 1 से.मी. है और उसकी शंकु आकार की लम्बाई 2 से.मी. है। पेंसिल के छिले हुये बुरादे का आयतन ज्ञात कीजिए। आप का उत्तर, दशमलव के 2 स्थान तक दीजिए। $\left[\pi = \frac{355}{113}\right]$.



हल : पेंसिल का व्यास = 1से.मी.

अतः पेंसिल की त्रिज्या $(r) = 0.5$ से.मी.

शंकु आकार के भाग की लम्बाई $= h = 2$ से.मी.

पेंसिल के छिलके का आयतन = बेलन का आयतन – बेलन पर बने शंकु का आयतन

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ से.मी.}^3 = 1.05 \text{ से.मी.}^3$$

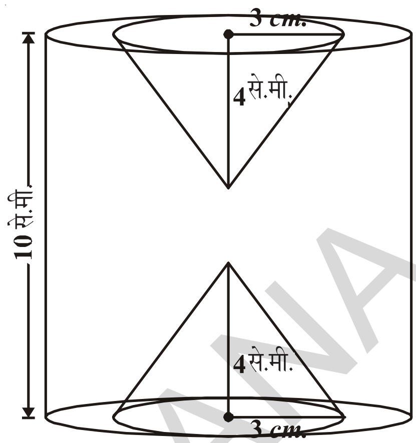
अभ्यास -10.3

1. एक लोहे का खंभा नीचे से बेलनाकार और उपरी भाग शंकु आकार है। बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमशः 2.8 मी और 20 से.मी. है और शंकु का व्यास 42 से.मी. है। खंभे का भार ज्ञात कीजिए। यदि 1 से.मी.^{3} लोहे का भार 7.5 ग्राम है।

2. एक खिलौना अर्धगोले पर शंकु के आकार का बना हुआ है जिसका वृत्ताकार समतल जुडा हुआ है। शंकु के आधार की त्रिज्या 7 से.मी. है और उसका आयतन अर्धगोले का $\frac{3}{2}$ भाग है। शंकु की ऊँचाई और खिलौने का समतलीय क्षेत्रफल दशमलव के दो स्थान तक ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

3. 7 से.मी. भुजा वाले घन से काटे गये वृत्ताकार लम्ब शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. एक टब जिसकी त्रिज्या 5 से.मी. और लम्बाई 9.8 से.मी. है, पानी से भरा हुआ है। एक अर्धगोला जिस पर लम्ब शंकु जुडा हुआ है, टब में डुबाया गया। अर्धगोले की त्रिज्या 3.5 से.मी. है और शंकु की ऊँचाई अर्धगोले के बाहर 5 से.मी. है। टब में शेष पानी का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.



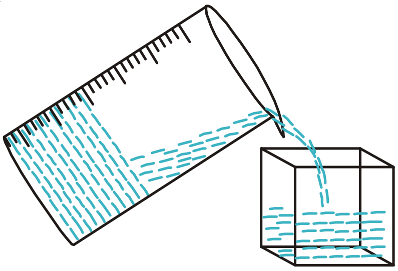
5. संलग्न चित्र में ठोस बेलन की ऊँचाई 10 से.मी. है और व्यास 7 से.मी. है। चित्र में दर्शाए अनुसार 3 से.मी. अर्धव्यास और 4 से.मी. ऊँचाई वाले दो शंकु आकार छिद्र काटे गये। शेष ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।
6. 1.4 से.मी. व्यास वाले कंचे (marbles), 7 से.मी. व्यास वाले एक बीकर में डाले गये जिसमें थोडा पानी है। बीकर में पानी का स्तर 5.6 से.मी. बढने के लिये कितने कंचे डालना चाहिये?
7. धनाभाकार के लकड़ी के पेन-स्टैण्ड में पेन रखने के लिये तीन शंकु आकार के गड्ढे हैं। घनाभ का माप 15 से.मी., 10 से.मी. और 3.5 से.मी. है। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 से.मी. है और उसकी गहराई 1.4 से.मी. है। संपूर्ण स्टैण्ड में कुल कितने आयतन लकडी है?

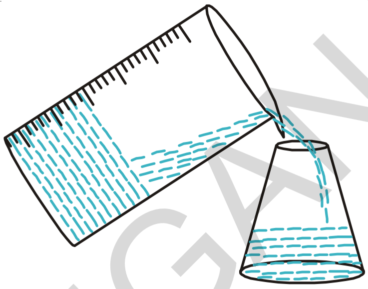
10.4 ''ठोस'' का एक आकृति से दूसरे में रूपांतरण (Conversion of Solid from One Shape to Another)

(DWACRA) नामक महिलाओं की स्वयं सेवी संस्था घनाभाकार मोम को पिघलाकार मोमबत्तियाँ बनाती है। कारखानों में घनाकार लेड को पिघलाकर बुल्लेट बनाये जाते हैं। सुनार घनाभाकार सोने के बिस्कुट को पिघलाकर विभिन्न आभूषणों को बनाता है। इन सभी स्थितियों में ठोस आकृतियों को अन्य आकृतियों में रूपांतरित किया गया है। इस प्रक्रिया में आयतन सदा समान रहता है।

उदाहरण के लिये, हम एक ठोस बेलनाकार की मोमबत्ती लेंगे और उसको पिघलाकार, संपूर्ण द्रवित मोम को गोलाकार पात्र में डालेंगे।

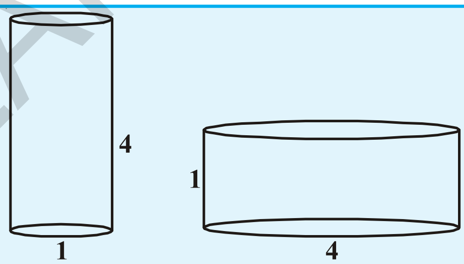
ठंडा होने पर आपको गोलाकार मोमबत्ती प्राप्त होगी। नये मोमबत्ती का आयतन, पुराने मोमबत्ती के आयतन के समान होगा। हमें यही याद रखना चाहिये कि जब भी हम इसतरह की वस्तुओं का सामना करते हैं जिसका एक आकार से दूसरे आकार में ''रूपांतरण'' हुआ है या एक द्रव जो विशिष्ट आकार के पात्र में पहले से भरा हुआ है और उसे विभिन्न आकार के अन्य पात्र में डाला जा रहा है उसका आयतन समान होगा, जैसा कि नीचे के चित्रों में बताया गया है।





सोचिए - चर्चा कीजिए।

संलग्न चित्र में बताये गये कौनसे टंकी में अधिक पानी समायेगा? अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।



जो चर्चा की गई उसको समझने के लिये, आइये हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण -14. चिकनी मिट्टी से एक शंकु बनाया गया जिसकी ऊँचाई 24 से.मी. है और त्रिज्या 6 से.मी. है। एक लडकी उसको गोले में रूपांतरण करती है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ से.मी.^{3}

यदि r गोले की त्रिज्या है, तब उसका आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ है।

शंकु और गोले के रूप में, चिकनी मिट्टी का आयतन समान होने के कारण हमें प्राप्त है,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

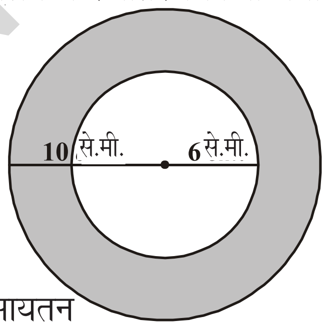
$$r = 3 \times 2 = 6$$

गोले की त्रिज्या 6 से.मी. है।

यह कीजिए।

1. एक ताँबे की छड को, जिसका व्यास 1 से.मी. और लम्बाई 8 से.मी. है, 18 मी. लम्बी समान मोटाई वाली तार में रूपांतरण किया गया है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।
2. प्रवली के घर की छत पर बेलनाकार पानी की टंकी है। इस टंकी को संप (जमीन के नीचे का टेंक) से पानी पम्प किया जाता है। संप के माप 1.57 मी. × 1.44 मी. × 9.5 से.मी. है। पानी की टंकी की त्रिज्या 60 से.मी. और ऊँचाई 95 से.मी. है। पानी की टंकी में संप से भरपूर पानी भरने के पश्चात, संप में शेष पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। टंकी और संप की क्षमता की तुलना कीजिए। ($\pi = 3.14$)

उदाहरण-15. एक अर्धगोलाकार खोखले वलय (shell) का भीतरी और बाहरी व्यास क्रमशः 6 से.मी. और 10 से.मी. है। उसको पिघलाकर 14 से.मी. व्यास वाले एक ठोस बेलन में रूपांतरण किया गया है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : खोखले अर्धगोलाकार वलय की त्रिज्या R $= \frac{10}{2} = 5$ से.मी.

खोखले अर्धगोलाकार वलय की अंदर की त्रिज्या $(r) = \frac{6}{2} = 3$ से.मी.

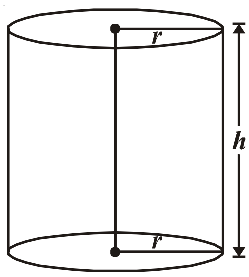
खोखले अर्धगोलाकार वलय का आयतन = बाहरी आयतन - भीतरी आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (125 - 27)$$



$$= \frac{2}{3}\pi \times 98 \text{ से.मी.}^3 \quad = \frac{196\pi}{3} \text{ से.मी.}^3 \qquad ...(1)$$

क्योंकि, यह खोखले अर्धगोलाकार वलय को पिघलाकर ठोस बेलन बनाया गया है, इसलिये उनके आयतन समान रहने चाहिए।

बेलन का व्यास = 14 से.मी. (दिया गया है।)

अतः बेलन की त्रिज्या = 7 से.मी.

मान लीजिये बेलन की ऊँचाई = h

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 7 \times 7 \times h\ cm^3 = 49\pi h$ से.मी.^{3} ...(2)

दिये गये नियम के अनुसार

खोखले अर्धगोलाकार वलय का आयतन = ठोस बेलन का आयतन

$$\frac{196}{3}\pi = 49\,\pi h$$ [समीकरण (1) और (2) से]

$$\Rightarrow \quad h = \frac{196}{3\times 49} = \frac{4}{3}\text{ से.मी.}$$

अतः बेलन की ऊँचाई = 1.33 से.मी.

उदाहरण -16. एक अर्धगोलाकार कटोरे में पानी है जिसकी त्रिज्या 15 से.मी. है। यह पानी 5 से.मी. व्यास और 6 से.मी. ऊँचाई वाले कुछ बोतलों में भरना है। कटोरे को खाली करने के लिये कितने बोतलों की आवश्यकता है?

हल: अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

अर्धगोले की भीतरी त्रिज्या $r = 15$ से.मी.

$\therefore$ अर्धगोलाकार कटोरे में, पानी का आयतन $= \frac{2}{3}\pi(15)^3$ से.मी.^{3}

$= 2250\,\pi$ से.मी.^{3}

यह द्रव बोतलों में भरना है जिसकी ऊँचाई $(h) = 6$ से.मी.

और त्रिज्या $R = \frac{5}{2}$ से.मी.

$\therefore$ 1 बेलनाकार बोतल का आयतन $= \pi R^2 h$

$$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6\text{ से.मी.}^3 = \frac{75}{2}\pi\text{ से.मी.}^3$$

आवश्यक बेलनाकार बोतलो की संख्या

$$= \frac{\text{अर्धगोलाकार कटोरे का आयतन}}{\text{1 बेलनाकार बोतल का आयतन}}$$

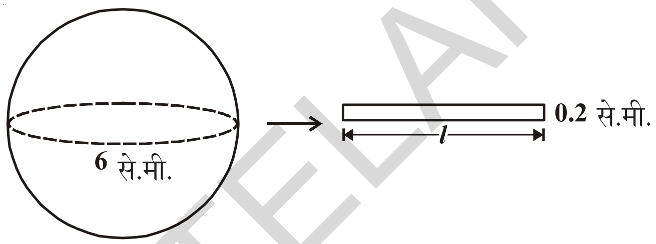
$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2\times 2250}{75} = 60.$$

उदाहरण-17. एक धातु के गोले का व्यास 6 से.मी. है। इसको पिघलाकार 0.2 से.मी. व्यास (ज्या) के तिरछे-काट (cross–section) वाली लम्बी तार बनाई गई। तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : पता है, धातुवीय गोले का व्यास = 6 से.मी.

$\therefore$ धातुवीय गोले की त्रिज्या = 3 से.मी.

और हमें यह भी पता है कि



बेलनाकार तार के तिरछे-काट का व्यास = 0.2 से.मी.

बेलनाकार तार के तिरछे - काट की त्रिज्या = 0.1 से.मी.

मान लीजिए तार की लम्बाई = l से.मी.

क्यों कि धातुवीय गोले को बेलनाकार तार में रूपांतरण हुआ है,

$\therefore$ तार में उपयोग किया गया धातु = गोले का आयतन

$$\pi\times(0.1)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3$$

$$\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 27$$

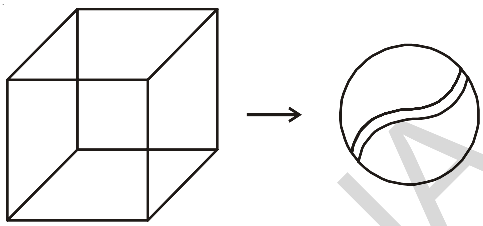
$$p \,'\, \frac{1}{100} \,'\, h = 36p$$

$$h = \frac{36\pi\times 100}{\pi} \text{ से.मी.} = 3600 \text{ से.मी.} = 36 \text{ मी.}$$

$\therefore$ तार की लम्बाई = 36 मी.

उदाहरण-18. 44 से.मी. भुजा के घनाकार ठोस लेड (शीश) से, 4 से.मी. व्यास वाले कितने गोलाकार गेंद बनाये जायेंगे?

हल : लेड (शीश) के घन की भुजा $= 44$ से.मी.



गोलाकार गेंद की त्रिज्या $= \frac{4}{2}$ से.मी. $= 2$ से.मी.

अब, गोलाकार गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2^3 \text{ से.मी.}^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8 \text{ से.मी.}^3$$

मान लीजिए गेंदों की संख्या x होगी।

x गोलाकार गेंदों का आयतन $= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x$ से.मी.^{3}

यह सत्य है कि x गोलाकार गेंदों का आयतन = लेड के घन का आयतन

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = 44\times 44\times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44\times 44\times 44\times 3\times 7}{4\times 22\times 8}$$

$$x = 2541$$

अतः गोलाकार गेंदों की संख्या $= 2541$.

उदाहरण -19. एक महिला स्वयं सेवी संस्था को 4.2 से.मी. व्यास, और 2.8 से.मी. ऊँचाई वाली मोमबत्ती बनाने के लिये 66 से.मी., 42 से.मी., 21 से.मी. माप वाला घनाभाकार ठोस मोम दिया गया। तो मोमबत्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: घनाभाकार ठोस का आयतन $= lbh$

$$= (66\times 42\times 21) \text{ से.मी.}^3$$

बेलनाकार मोमबत्ती की त्रिज्या $= \frac{4.2}{2}$ से.मी. $= 2.1$ से.मी.

बेलनाकार मोमबत्ती की ऊँचाई $= 2.8$ से.मी.

मोमबत्ती का आयतन $= \pi r^2 h \;= \dfrac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$

मान लीजिए मोमबत्तियों की संख्या x होगी।

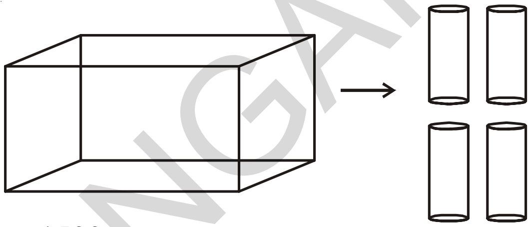
x मोमबत्ती का आयतन $= \dfrac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$

$\because$ x मोमबत्तियों का आयतन = घनाभाकर मोम का आयतन

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$

$$x = \frac{66\text{´ } 42\text{´ } 21\text{´ } 7}{22\text{´ } 2.1\text{´ } 2.1\text{´ } 2.8}$$

$$= 1500$$



अतः निर्मित बेलनाकार मोमबत्तियों की संख्या = 1500.

अभ्यास - 10.4

1. 4.2 से.मी. त्रिज्या के धातुवीय गोले को पिघलाकर 6 से.मी. त्रिज्या के बेलन में रूपांतरण किया गया है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. 6 से.मी. 8 से.मी. और 10 से.मी. के तीन धातुवीय गोलो को एक साथ पिघलाकर एक बडा ठोस गोला बनाया गया। परिणामी गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. 7 मी. व्यास और 20 मीटर गहरे कुँए (well) को खोदकर निकाली गई मिट्टी से घनाभाकर प्लाटफार्म बनाया गया जिसकी लम्बाई और चौडाई 22 मी. और 14 मी. है। प्लाटफार्म की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. 14 मी. व्यास और 15 मी. गहरा एक कुँआ खोदा गया और निकाली गई मिट्टी से वलयाकार बांध (तट) बनाया गया जिसकी चौडाई 7मी. है। बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. 12 से.मी. व्यास और 15 से.मी. ऊँचाई के वृत्ताकार लम्ब बेलन के आकार के पात्र में भरपूर आइस-क्रीम है। यह आइस-क्रीम 12से.मी. ऊँचाई और 6 से.मी. व्यास के शंकुओं में भरी गई जिसके शिखर अर्धगोलाकार हैं। ऐसे कितने शंकुओं में आइस-क्रीम भरी जाएगी?
6. 1.75 से.मी. व्यास तथा 2मि.मि. मोटाई के कितने सिक्के पिघलाने पर, 5.5 से.मी. $\times$ 10 से.मी. $\times$ 3.5 से.मी. माप का घनाभ बनेगा?
7. एक बर्तन शंकु आकार है उसकी ऊँचाई 8 से.मी. और त्रिज्या 5से.मी. है। उसमें भरपूर पानी है। 0.5से.मी. त्रिज्या के गोले जब उसमें डाले जायेंगे तो $\frac{1}{4}$ पानी बाहर छलक जायेगा। पानी में डाले गये गोलों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. 28 से.मी. व्यास के एक ठोस गोले को पिघलाकर $4\frac{2}{3}$ से.मी. और 3 से.मी. ऊँचाई के अनेक शंकु बनाये गये। शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

विकल्प अभ्यास : (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा में सम्मिलित नहीं है।]

1. एक गोल्फ का गेंद 4.1 से.मी. व्यास का है। उसके समतल पर 2 मि. मी. त्रिज्या के 150 अर्धगोलाकार डिम्पल्स (खड्डे) हैं। गेंद पर बचे हुये संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

2. 12 से.मी. त्रिज्या और 20 से.मी गहराई के बेलन में पानी है। जब एक लोहे का गोला उसमें डाला गया तो पानी का स्तर 6.75 से.मी. बढ गया। गेंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

3. एक ठोस खिलौना वृत्ताकार लम्ब बेलनाकार के रूप में है जिसके एक सिरे पर अर्धगोला है और दूसरे शीर्ष पर शंकु है। उनका सामान्य व्यास 4.2 से.मी. है, और बेलनाकार और शंकु आकार के भाग की ऊँचाई क्रमशः 12 से.मी. और 7 से.मी. है। उस ठोस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

4. तीन धातुवीय घन जिसके किनारे क्रमशः 15 से.मी., 12 से.मी. और 9 से.मी. है। पिघलाकर एक साधारण घन बनाया गया। इस घन का कर्ण ज्ञात कीजिए।

5. एक अर्धगोलाकार कटोरे के अंदर का व्यास 36 से.मी. है। उसमें द्रव है। यह द्रव 3 से.मी. त्रिज्या और 6 से.मी. ऊँचाई के बेलनाकार बोतलों में भरना है। इस कटोरे को खाली (empty) करने के लिये कितने बोतल आवश्यक हैं।

प्रस्तावित परियोजना

पार्श्व धरातल/संपूर्ण धरातल (T.S.A./L.S.A) तथा आयतन (तैयार करना)

- संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफल (TSA) पार्श्व धरातल का क्षेत्रफल (LSA) तथा आयतन
- समान आयतन तथा भिन्न संपुर्ण धरातल के क्षेत्रफल वाले घनाभ

हमने क्या चर्चा की है?

1. दो मूल ठोस वस्तुओं को जोडने पर बने परिणामी ठोस का आयतन, उन दो मौलिक (basic) ठोसों के आयतनों के योग के समान होगा।
2. ठोस वस्तुओं के संयोजन से बने नये ठोस वस्तुओं के समतलीय क्षेत्रफल की गणना करते समय हम उनके समतलीय क्षेत्रफल को नही जोडेंगे क्योंकि उनको जोडते समय उनका कुछ भाग लुप्त हो जाता है।

अध्याय

11

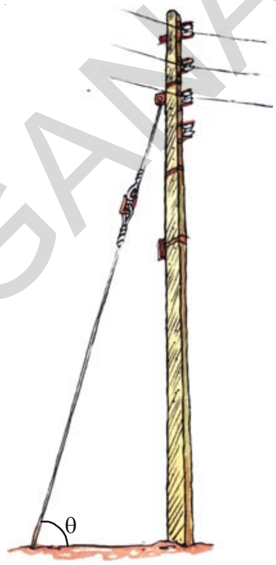
त्रिकोणमिति

(Trigonometry)

11.1 प्रस्तावना

पूर्व कक्षाओं में हमने त्रिभुज और उनके गुणधर्मों के बारे में पढा है। वहाँ हमने विभिन्न दैनिक जीवन-स्थितियों का अवलोकन किया जहाँ हम त्रिभुजों का उपयोग करते थे।

पुनः हम कुछ दैनिक जीवन के उदाहरणों को देखते हैं।



- बिजली के स्तम्भ सर्वत्र रहते है। इन्हे सामान्यतः धातु के तार का उपयोग करते हुए स्थापित किया जाता है। स्तंभ, तार और जमीन द्वारा त्रिभुज का आकार बनता है। यदि तार की लंबाई घटायी जाय तो बनने वाला त्रिभुज कौनसा होगा? और जमीन के साथ तार से बना हुआ कोण क्या होगा?

- दांयी ओर संलग्न आकृति में दिखाया गया कि रखी गई सीढ़ी की सहायता से एक व्यक्ति दीवार की पुताई कर रहा है। यदि वह और कुछ ऊँचाई पर रंग देना चाहता है, तो वह क्या करेगा? सीढ़ी द्वारा जमीन के साथ बने हुए कोण में क्या परिवर्तन होगा?

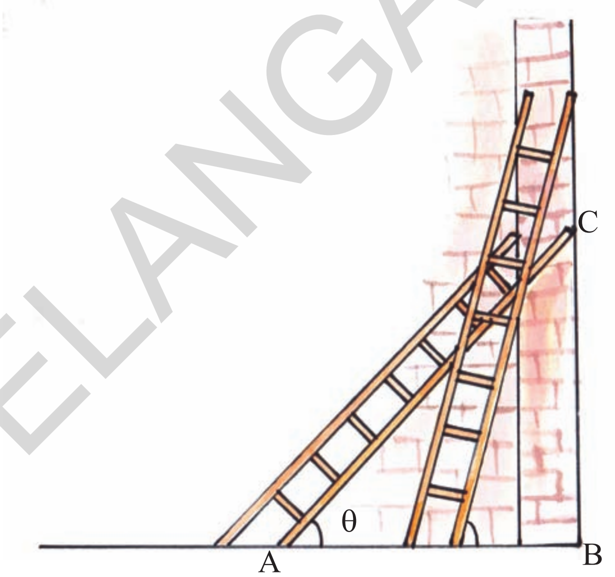
- आदिलाबाद जिले में, जयनाथ मंदिर में जो 13 वीं शताब्दी में बना है, दिसंबर माह में सूर्य नारायण स्वामी की मूर्ति के चरणों पर सूर्य की प्रथम किरणें पडती है। दरवाजे से मूर्ति की दूरी, दरवाज़े पर छिद्र की ऊँचाई जिससे सूर्य की किरणे भीतर प्रवेश करती है और उस माह में सूर्य किरणों का कोण इनमें संबंध है। क्या आप उनके बिच के संबंध के बारे में विचार कर सकते है?

- क्रीडा-स्थल में, बच्चे सरकन (slider) पर फिसलना पसंद करते है और सरकन, जमीन से परिभाष्य कोण में रहता है। यदि हमने कोण को बदला तो सरकन की स्थिति क्या होगी? क्या उस पर बच्चे अभी भी खेल सकेंगे?

ऊपर के उदाहरण, हमारे दैनंदिन व्यवहार में त्रिभुज का प्रयोग ज्यामितीय रूप में बताते है। त्रिभुज के गुणधर्मों के उपयोग द्वारा हम ऊँचाई, दूरी, झुकाव नाप सकते है। इस प्रकार की समस्याएँ 'त्रिकोणमिति' का भाग है जो गणित की शाखा है।

अब, वह उदाहरण देखिए जहाँ एक व्यक्ति सीढ़ी के सहारे पूर्व आकृति में बताए जैसे, दीवार की पुताई कर रहा है। निम्न प्रतिबंधो का अवलोकन करते है।

हम सीढ़ी के आधार को A द्वारा निर्देशित करते है। और इसके सिरे को C द्वारा तथा सीढ़ी का आधार और दीवार की ऊँचाई जोडने वाले बिन्दु को 'B' से निर्देशित करते है। इसलिए, ΔABC यह समकोण त्रिभुज है जिसमें समकोण B पर है। आधार और सीढ़ी के बीच कोण 'θ' कहलाता है।



1. यदि वह व्यक्ति दीवार स्थित ऊँचे बिन्दु पर पुताई करना चाहता है -
   - सीढ़ी द्वारा जमीन के साथ बने हुए कोण का क्या होगा?
   - दूरी AB में क्या परिवर्तन होगा?
2. यदि वह व्यक्ति दीवार पर स्थित किसी निम्न (कम ऊँचाई पर) बिंदु की पुताई करना चाहता है -
   - सीढ़ी द्वारा जमीन के साथ बने हुए कोण का क्या होगा?
   - दूरी AB में क्या परिवर्तन होगा?

हमने ऊपर के उदाहरण का अवलोकन किया है, जिसमें एक व्यक्ति पुताई करता है, जब वह ऊँचे अथवा नीचे स्थित बिन्दुओं की पुताई करना चाहता है तो, उसे सीढ़ी का स्थान बदलना चाहिए। अतः, जब 'θ' बढाया गया, ऊँचाई भी बढती है और आधार कम होता है। किन्तु जब θ कम किया जाता है, ऊँचाई भी कम होती है और आधार बढता है। क्या आप इस कथन के साथ सहमत हैं?

यहाँ हमने समकोण त्रिभुज ΔABC देखा है और सभी भुजाएँ और कोणों के सामान्य नाम दिए है। अब, भुजाओं को पुनः नाम देते है क्योंकि कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात, केवल भुजाओं पर आधारित होते है।

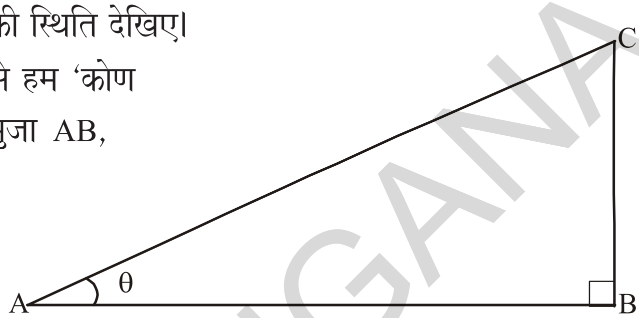
11.1.1 समकोण त्रिभुज में भुजाओं को नाम देना

आकृति में दिखाए जैसे समकोण त्रिभुज ABC लेते है।

त्रिभुज ABC में, हम $\angle BAC$ को A मानते है जहाँ कोण A, न्यूनकोण है। क्योंकि सबसे बडी भुजा AC है, यह 'कर्ण' कहलाती है।

यहाँ कोण A की सम्मुख भुजा BC की स्थिति देखिए।

यह, कोण A के विपरीत है और इसे हम 'कोण A की विपरीत भुजा' कहते है। और शेष भुजा AB, कोण A की आसन्न भुजा' कहलाती है।



AC = कर्ण

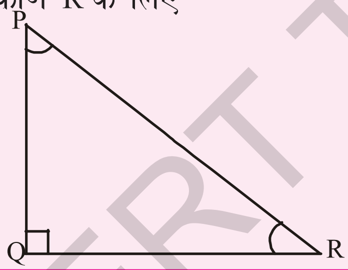
BC = कोण A की विपरीत भुजा

AB = कोण A की आसन्न भुजा

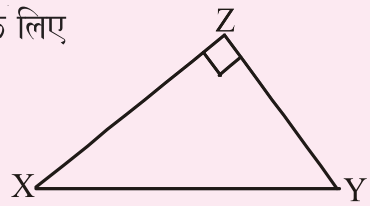
यह कीजिए

दिये हुए त्रिभुजो में दिए गये कोणों के लिए कर्ण, विपरीत भुजा और आसन्न भुजा पहचानिए।

1. कोण R के लिए



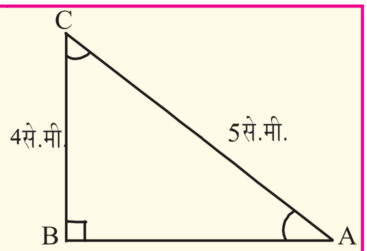
2. (i) कोण X के लिए
   (ii) कोण Y के लिए



प्रयत्न कीजिए

दिये हुए त्रिभुज में, दिये गए कोणों के लिये 'कर्ण', विपरीत भुजा' और 'आसन्न भुजा' की लंबाइयाँ लिखिए।

1. कोण C के लिए
2. कोण A के लिए



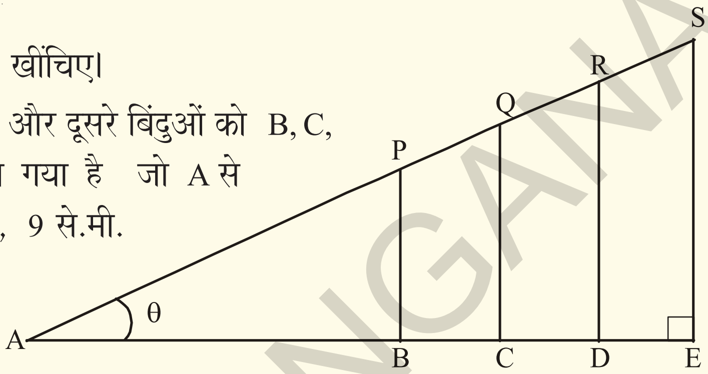
आप क्या देखते हैं? कोण A की विपरीत भुजा और कोण C की आसन्न भुजा में क्या कुछ संबंध है? इस प्रकार, मान लीजिए, मजबूत रस्सियों का आधार देते हुए एक स्तम्भ को सीधा खडा करना है। क्या रस्सी की लम्बाई और स्तंभ की ऊँचाई में कुछ संबंध है? यहाँ, कोण और भुजाओं के बीच संबंध को समझने के लिए हम त्रिकोणमितीय अनुपात' खण्ड में इसका अभ्यास करेंगे।

11.2 त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

अध्याय के प्रारंभ में हमने जो हमारे दैनिक जीवन से जुडी हुई दो समस्याओं को देखा। अब हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में जानेंगे और वे कैसे परिभाषित किये जाते है उसका अध्ययन करेंगे?

क्रियाकलाप

1. एक कागज़ पर क्षैतिज रेखा खींचिए।
2. माना कि प्रारंभिक बिन्दु A है और दूसरे बिंदुओं को B, C, D और E से चिन्हित किया गया है जो A से क्रमशः 3 से.मी., 6 से.मी., 9 से.मी. और 12 से.मी., दूरी पर है।
3. बिंदु B,C,D और E से क्रमशः 4 से.मी., 8से.मी., 12 से.मी., और 16 से.मी. लम्बाई के BP, CQ, DR और ES लम्ब खींचिए।



4. AP, PQ, QR और RS को मिलाइए।
5. AP, AQ, AR और AS की लंबाइयाँ नापिए।

त्रिभुज के नाम	कोन के नाम	कर्ण की लम्बाई	विपरीत भुजा की लम्बाई	आसन्न भुजा की लम्बाई	$\frac{\text{विपरीत भुजा}}{\text{कर्ण}}$	$\frac{\text{आसन्नभुजा}}{\text{कर्ण}}$
ΔABP	$\angle BAP = \theta$					
ΔACQ	$\angle CAQ = \theta$					
ΔADR						
ΔAES						

तदन्तर $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ और $\frac{ES}{AS}$ के अनुपातों को ज्ञात कीजिए।

क्या आपको एक समान अनुपात $\frac{4}{5}$ प्राप्त होगा?

इसी प्रकार $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ और $\frac{AE}{AS}$? अनुपातों को ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए? आपने क्या देखा?

11.2.1 त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित करना: (Defining Trigonometric ratios)

ऊपर के क्रियाकलाप में हम देखते है कि ABP, ACQ, ADR और AES समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A$ उभयनिष्ट है, $\angle B, \angle C, \angle D$ और $\angle E$ समकोण है और $\angle P, \angle Q, \angle R$ और $\angle S$ समान है। इसलिए हम कह सकते है कि $\Delta ABP, \Delta ACQ, \Delta ADR$ और ΔAES समरूप त्रिभुज है। जब हम समकोण त्रिभुज में $\angle A$ की विपरीत भुजा और कर्ण, अनुपात देखेंगे तथा दूसरे त्रिभुज में इसी प्रकार की दूसरी भुजाओं के अनुपात को ध्यान से देखेंगे। तब ऊपर के सभी समकोण त्रिभुज में अर्थात $\Delta ABP, \Delta ACQ, \Delta ADR$ और ΔAES में यह स्थिर संख्या पायी गई। $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ और $\frac{ES}{AS}$ का नामांकन **"sine A"** अथवा **"sin A"** (ज्या) कर सकते है। यदि कोण A का मान "θ" हो तो इस अनुपात को "sin θ" कहेंगे।

अत:, हम इस निर्णय पर पहुँचते है कि कोण (कोण का माप) के विपरीत भुजा और कर्ण की लम्बाई का अनुपात, सभी समरूप समकोण त्रिभुजों में स्थिरांक (constant) रहता है। यह अनुपात, उस कोण का "sine" कहलाता है।

इसी तरह जब हम $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ और $\frac{AE}{AS}$ अनुपात की ओर देखते है, ये अनुपात स्थिरांक पाया गया। समकोण त्रिभुज ABP, ACQ, ADR और AES. में ये अनुपात, कोण A की आसन्न भुजा और कर्ण का अनुपात है। इसलिए, $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ और $\frac{AE}{AS}$ अनुपात को **"cosine A"** अथवा **"cos A"** (कोटिज्या अथवा कोज्या) से नामांकन किया जायेगा। यदि कोण A का मान "x" हो तो यह अनुपात "cos θ" होगा।

अत:, हम यह भी निर्णय ले सकते है कि, सभी समरूप त्रिभुजों में, कोण (कोण का माप) की आसन्न भुजा और कर्ण की लम्बाई का अनुपात स्थिरांक रहता है। यह अनुपात, उस कोण के "cosine" से नामांकित किया जाता है।

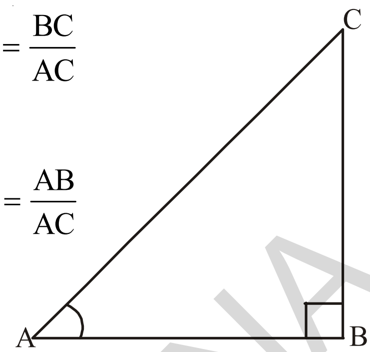
इसीतरह, कोण की विपरीत भुजा और आसन्न भुजा का अनुपात स्थिरांक रहता है और इसे उस कोण का "tangent" (स्पर्श ज्या) कहते है।

समकोण त्रिभुज में अनुपातों को परिभाषित करना: (Define ratios in a right angled triangle)

मान लीजिए, निम्न आकृति में दिखाए जैसे समकोण त्रिभुज ABC में समकोण B पर है। तब समकोण त्रिभुज ABC में कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों को, निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

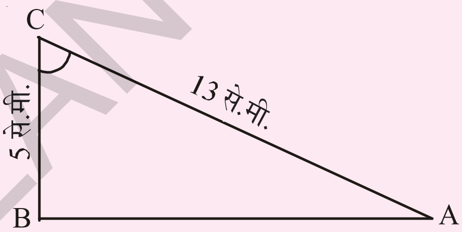
$$\angle A \text{ का साइन} = \sin A = \frac{\text{कोण } A \text{ के विपरीत भुजा की लम्बाई}}{\text{कर्ण की लम्बाई}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ का कोसाइन} = \cos A = \frac{\text{कोण } A \text{ की आसन्न भुजा की लम्बाई}}{\text{कर्ण की लम्बाई}} = \frac{AB}{AC}$$



$$\angle A \text{ का टॉजन्ट} = \tan A = \frac{\text{कोण } A \text{ के विपरीत भुजा की लम्बाई}}{\text{कोण } A \text{ की आसन्न भुजा की लंबाई}} = \frac{BC}{AB}$$

यह कीजिए।



1. संलग्न आकृति में (i) sin C (ii) cos C और (iii) tan C ज्ञात कीजिए।
2. त्रिभुज XYZ में, $\angle Y$ समकोण है। XZ = 17 मी. और YZ = 15से.मी. तब (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X ज्ञात कीजिए।
3. त्रिभुज PQR में Q पर समकोण है। $\angle P$ का मान x है, PQ = 7 से.मी., और QR = 24 से.मी., तो sin x और cos x ज्ञात कीजिए।

प्रयत्न कीजिए।

समकोण त्रिभुज ABC में, C पर समकोण है। BC + CA = 23 से.मी. और BC – CA = 7से.मी., हो तो sin A और tan B ज्ञात कीजिए।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

अपने मित्रों के बीच चर्चा कीजिए कि

(i) $\sin x = \frac{4}{3}$ मान क्या कोण x के किसी मान के लिए अस्तित्व में रहता है? आप कैसे कह सकते है?

(ii) sin A और cos A का मान हमेशा 1 से कम रहता है। क्यों?

(iii) क्या tan और A का गुणनफल tan A रहता है। आपके उत्तर का औचित्य सिध्द किजिए?

त्रिकोणमिति में और तीन अनुपात परिभाषित है जो ऊपर के तीन अनुपातों के गुणात्मक विलोम रहते है।

"साइन A" का गुणात्मक विलोम, "कोसीकेन्ट A" (व्युज्या) रहता है। साधारणतः इसे "cosec A" लिखते है।

अर्थात, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$

इसी तरह "cos A" का गुणात्मक विलोम ''सीकन्ट A" (व्युत्क्रम कोटी ज्या) रहता है। (साधारणतः इसे "sec A" लिखते है।) और "tan A" का गुणात्मक विलोम ''कोटैन्जन्ट A'' (कोटि स्पर्श ज्या) रहता है। (साधारणतः इसे 'cot A' लिखते है।)

अर्थात $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ और $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

भुजाओं के पदों में 'cosec' को कैसे परिभाषित करोगे?

यदि $\sin A = \dfrac{\text{कोण A की विपरीत भुजा}}{\text{कर्ण}}$,

तब $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की विपरीत भुजा}}$

प्रयत्न कीजिए।

sec A और cot A समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपात के रूप में दर्शाइए ।

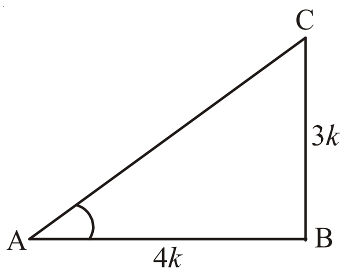
सोचिए - चर्चा कीजिए।

- क्या $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ यह tan A के बराबर है ?
- क्या $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ यह cot A के बराबर है?

हम कुछ उदाहरण देखेंगें।

उदाहरण-1. यदि $\tan A = \dfrac{3}{4}$, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।.

हल: दिया है, $\tan A = \dfrac{3}{4}$



अतः, $\tan A = \dfrac{\text{विपरीत भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \dfrac{3}{4}$

इसलिए विपरीत भुजा : आसन्न भुजा = 3:4

कोण A के लिए विपरीत भुजा = BC = $3k$,

आसन्न भुजा = AB = $4k$ (जहाँ k कोई धनात्मक संख्या है।)

अब, त्रिभुज ABC में हम जानते है (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$
$$AC = \sqrt{25k^2}$$
$$= 5k = \text{कर्ण}$$

अब, हम सरलता से अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात लिख सकते है।

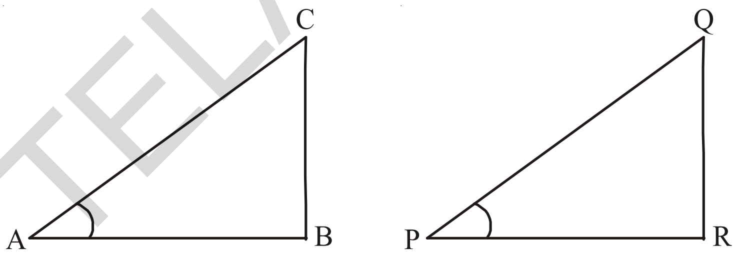
$$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} \text{ और } \cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

और $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$.

उदाहरण-2. यदि $\angle A$ और $\angle P$ इस प्रकार न्यूनकोण है कि $\sin A = \sin P$ तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle P$

हल : दिया है $\sin A = \sin P$

हमें पता है, $\sin A = \frac{BC}{AC}$



और $\sin P = \frac{QR}{PQ}$

तब $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$

इसलिए, $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k$ .....(1)

पायथागोरस प्रमेय का उपयोग करने पर

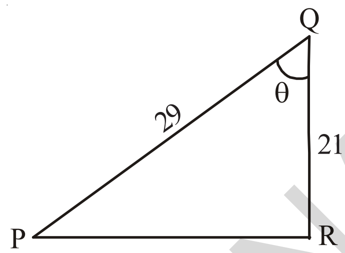
$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - k^2PQ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2\cancel{(1-k^2)}}}{\sqrt{PQ^2\cancel{(1-k^2)}}} = \frac{AC}{PQ} \quad \text{(1) से)}$$

अतः, $\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$ तब $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

इसलिए, $\angle A = \angle P$

उदाहरण-3. मान लीजिए, त्रिभुज PQR में, R पर समकोण है, $PQ = 29$ इकाइयाँ, $QR = 21$इकाइयाँ और $\angle PQR = \theta$, तो (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ और (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: Δ PQR, हमे ज्ञात है,



$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{400} = 20 \text{ इकाइयाँ}$$

$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

अब, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{-41}{841}$

अभ्यास - 11.1

1. समकोण त्रिभुज ABC में, AB, BC और CA की लम्बाइयाँ क्रमश: 8 से.मी., 15 से.मी., और 17 से.मी. है। sin A, cos A और tan A ज्ञात कीजिए।

2. समकोण त्रिभुज PQR की भुजायें क्रमश: PQ = 7 से.मी., QR = 25 से.मी., और $\angle P = 90^o$ है तो tan Q – tan R ज्ञात कीजिए।

3. समकोण त्रिभुज में, B पर समकोण है। $a = 24$ इकाइयाँ, $b = 25$ इकाइयाँ और $\angle BAC = \theta$. तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\cos A = \frac{12}{13}$ तो sin A और tan A ज्ञात कीजिए।

5. यदि 3 tan A = 4, तो sin A और cos A ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\angle A$ और $\angle X$ न्यूनकोण इस प्रकार है कि cos A = cos X तो बताइए कि $\angle A = \angle X$.

7. दिया है $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तो मूल्यांक कीजिए: (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$

8. समकोण त्रिभुज ABC में, समकोण B पर है। यदि $\tan A = \sqrt{3}$ तो

   (i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C – sin A sin C के मान ज्ञात कीजिए।

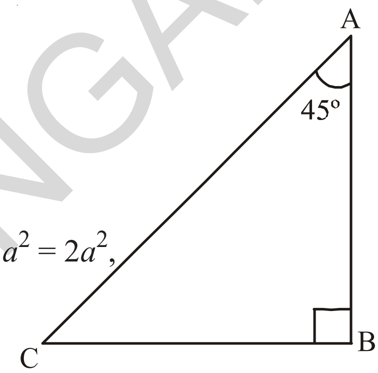
11.3 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातः

हम पहले ही समद्विबाहु समकोण त्रिभुज और समकोण त्रिभुज जिसके कोण 30^o, 60^o और 90^o है, जानते है।

इन त्रिभुजों की सहायता से क्या हम $\sin 30^o$ अथवा $\tan 60^o$ अथवा $\cos 45^o$, आदि जान सकते है?

क्या $\sin 0^o$ अथवा $\cos 0^o$ अस्तित्व में है?

11.3.1 45^o के त्रिकोणमितीय अनुपात



समद्विबाहु समकोण त्रिभुज में, B पर समकोण है।

$\angle A = \angle C = 45^o$ (क्यों?) और $BC = AB$ (क्यों?)

माना कि BC की लम्बाई $= AB = a$

तब, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पायथागोरस प्रमेय) $= a^2 + a^2 = 2a^2$,

इसलिए, $AC = a\sqrt{2}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग करते हुए,

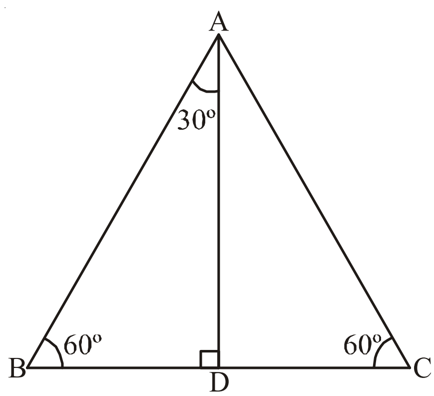
$$\sin 45^o = \frac{\text{कोण } 45^o \text{ के विपरीत भुजा की लम्बाई}}{\text{कर्ण की लंबाई}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{\text{कोण } 45^o \text{ के आसन्न भुजा की लम्बाई}}{\text{कर्ण की लंबाई}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{\text{कोण } 45^o \text{ के विपरीत भुजा की लम्बाई}}{\text{कोण } 45^o \text{ के आसन्न भुजा की लम्बाई}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

इसी तरह आप $\text{cosec } 45^o$, $\sec 45^o$ और $\cot 45^o$ के मानों का निर्धारण कर सकते है।

11.3.2 30^o और 60^o के त्रिकोणमितीय अनुपात



अब हम 30^o और 60^o के त्रिकोणमितीय अनुपातों की गणना करेंगे। इनकी गणना करने के लिए, हम समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) लेंगे। एक लंब खींचिए जो त्रिभुज को बराबर दो समकोण त्रिभुजों में विभाजित करता है जिसके कोण 30^o, 60^o और 90^o है।

समबाहु त्रिभुज ABC लीजिए। समभुज त्रिभुज के प्रत्येक कोण 60^o रहता है। अतः, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^o$ और समभुज त्रिभुज की भुजाएँ $AB = BC = CA = 2a$ इकाइयाँ लेते है।

संलग्न आकृति में, बताये जैसे शीर्ष A से BC पर लम्ब रेखा AD खींचिए। ΔABC में लम्बरेखा AD, कोण A का 'कोण समद्विभाजक' (angle bisector) और भुजा BC का 'समद्विभाजक' जैसे कार्य करती है।

इसलिए $\angle BAD = \angle DAC = 30^o$.

क्योंकि D बिंदु, रेखा BC को दो समान भागों में विभाजित करती है,

$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$ इकाइयाँ।

ऊपर की आकृति में, समकोण त्रिभुज ABD को देखिए।

हमें पता है, $AB = 2a$ और $BD = a$

तब $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$.

अतः, $AD = a\sqrt{3}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा के अनुसार,

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

इसलिए, $\tan 60^o = \sqrt{3}$ (कैसे?)

वैसे ही जैसे, आप इसके व्युत्क्रम, $\operatorname{cosec} 60^o$, $\sec 60^o$ और $\cot 60^o$ का निर्धारण, अनुपात की संकल्पना के उपयोग द्वारा कर सकते है।

यह कीजिए।

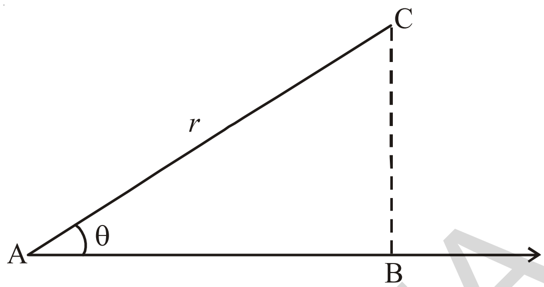
$\operatorname{cosec} 60^o$, $\sec 60^o$ और $\cot 60^o$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रयत्न कीजिए।

अनुपात की संकल्पना का उपयोग करते हुए $\sin 30^o$, $\cos 30^o$, $\tan 30^o$, $\operatorname{cosec} 30^o$, $\sec 30^o$ और $\cot 30^o$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

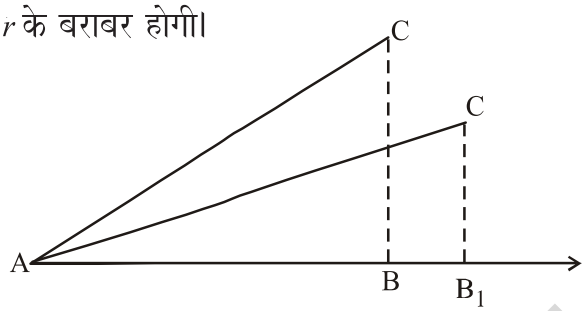
11.3.3 0^o और 90^o के त्रिकोणमितीय अनुपात

अब तक, हमने 30^o, 45^o और 60^o के त्रिकोणमितीय अनुपातों की चर्चा की। अब हम 0^o और 90^o कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों का निर्धारण करेंगे।

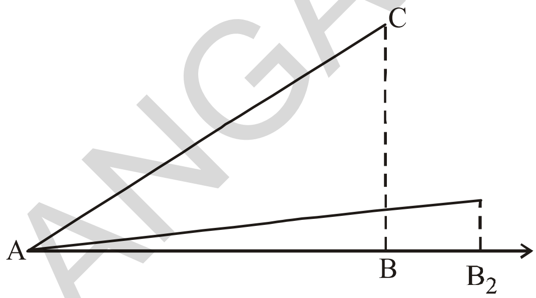


मान लीजिए, r लम्बाई का खण्ड AC किरण AB के साथ न्यूनकोण बनाता है। B से C की ऊँचाई BC है। जब AC किरण AB पर अधिक झुकता है तब इससे बने हुए कोण में कमी आती है। इस समय BC और AB की लंबाइयाँ क्या होगी?

जैसे कोण A कम होता है, किरण AB से C की दूरी कम होती है और आधार B का स्थान B_1 और B_2 होता है। और क्रम से जब कोण शून्य होता है, ऊँचाई (कोण की विपरीत भुजा) भी शून्य होगी और आसन्न भुजा AC के बराबर अर्थात लम्बाई r के बराबर होगी।



Step (i)



Step (ii)

अब त्रिकोणमितीय अनुपातों की ओर देखते हैं:

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ और } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

यदि $A = 0^o$ तब $BC = 0$ और $AC = AB = r$

$$\text{तब } \sin 0^o = \frac{0}{r} = 0 \text{ और } \cos 0^o = \frac{r}{r} = 1$$

$$\text{हम जानते है कि } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\text{So, } \tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0$$

सोचिए - चर्चा कीजिए।

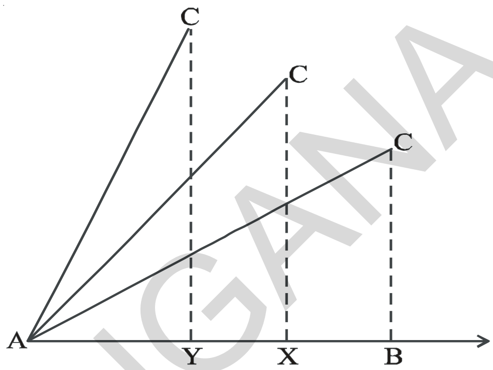
निम्न प्रतिबंधों के बारे में अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए:

1. $\operatorname{cosec} 0^o$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? $\operatorname{cosec} 0^0 = \dfrac{1}{\sin 0^o}$,क्या यह परिभाषित है? क्यों?

2. $\cot 0^o = \dfrac{1}{\tan 0^o}$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या यह परिभाषित है? क्यों?

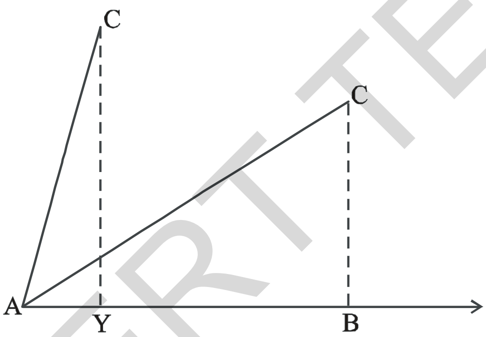
3. $\sec 0^o = 1$. क्यों?

अब हम देखते है, किरण AB के साथ AC द्वारा बना हुआ कोण बढता है तब क्या होता है? जब कोण A में वृद्धि की जाती है, बिंदु C की ऊँचाई बढती है और लम्ब का आधार B से प्रथम X और तदन्तर Y और ... आदि, बिंदुओं पर बदलता है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते है कि ऊँचाई BC क्रम से बढती है, कोण C में सतत वृद्धि होती है और एक पडाव पर कोण 90° होता है। इस समय, बिंदु B, A पर पहुँचता है और AC रेखा BC के बराबर होती है।

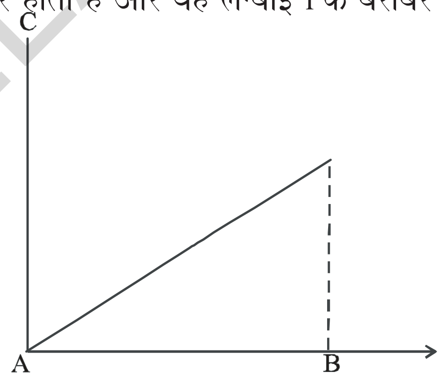


चरण (i)

अतः, जब कोण 90° होता है, आधार (अर्थात कोण की आसन्न भुजा) शून्य (0) होता है, किरण AB से C की ऊँचाई बढती है और वह AC के बराबर होती है और यह लम्बाई r के बराबर होती है।



चरण (ii)



चरण (iii)

अब, हम त्रिकोणमितीय अनुपात देखते हैं।

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \quad \text{और} \quad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

यदि $A = 90^o$ तब $AB = 0$ और $AC = BC = r$

तब $\sin 90^o = \dfrac{r}{r} = 1$ और $\cos 90^o = \dfrac{0}{r} = 0$

प्रयत्न कीजिए।

$\tan 90^o$, $\text{cosec } 90^o$, $\sec 90^o$ और $\cot 90^o$ के मूल्य ज्ञात कीजिए।

अब, ऊपर चर्चित सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को, सारणी के रूप में देखते हैं।

सारणी 11.1

$\angle A$	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नही है
$\cot A$	परिभाषित नही है	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नही है
$\operatorname{cosec} A$	परिभाषित नही है	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

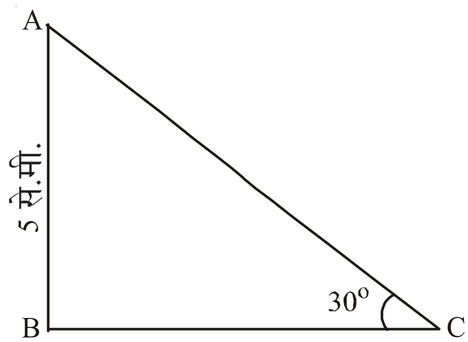
सोचिए - चर्चा कीजिए।

$\sin A$ और $\cos A$ के मानों के बारे में आप क्या कह सकते हैं, जब कोण A, 0^o से 90^o? तक बढता है? (ऊपर दी गई सारणी का अवलोकन कीजिए।)

यदि $A \geq B$, तब $\sin A \geq \sin B$. क्या यह सही है ?

यदि $A \geq B$, तब $\cos A \geq \cos B$. क्या यह सही है? चर्चा कीजिए।

उदाहरण-4. त्रिभुज ABC में, समकोण B पर है, AB = 5 से.मी. और $\angle ACB = 30^o$, भुजायें BC और AC की लंबाइयों का निर्धारण कीजिए।



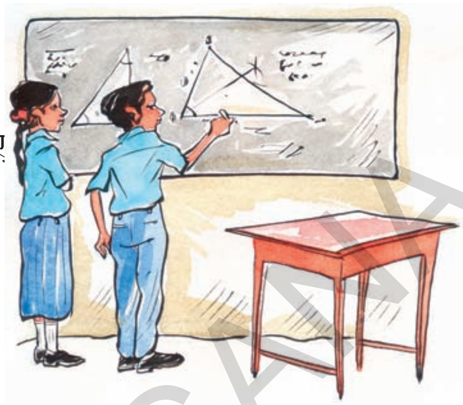
हल : दिया है, AB=5 से.मी. और $\angle ACB=30^o$.

भुजा BC का निर्धारण करने के लिए, हम त्रिकोणमितीय अनुपात का चयन करते है जो BC और दी गई भुजा AB को सम्मिलित करती है। क्योंकि कोण C की आसन्न भुजा BC है और विपरीत भुजा AB है, इसलिए $\frac{AB}{BC} = \tan C$

अर्थात $\dfrac{5}{BC} = \tan 30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ जो

$BC = 5\sqrt{3}$ से.मी देती है।

अब, त्रिकोनमितीय अनुपात का उपयोग करते हुए



$$\sin 30^\circ = \frac{5}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 10 \text{ cm}$$

उदाहरण-5. 6 से.मी. अर्धव्यास के वृत्त की जीवा (chord), केन्द्र पर 60^o कोण बनाती है। जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

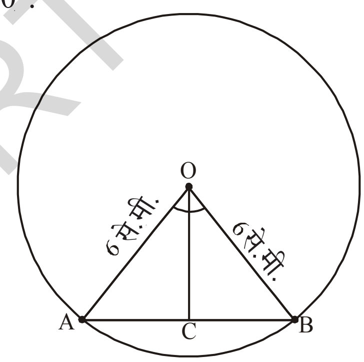
हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या OA = OB = 6 से.मी.

$\angle AOB = 60^o$

AB पर 'O' से ऊँचाई OC है और यह कोण समद्विभाजक है।

तब, $\angle COB = 30^o$.

ΔCOB देखिए,



$$\sin 30^o = \frac{BC}{OB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = \frac{6}{2} = 3.$$

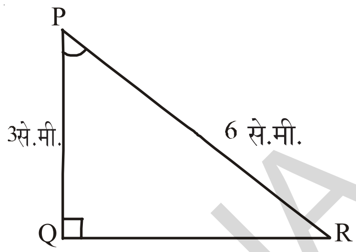
किन्तु, जीवा AB की लम्बाई = 2BC

$= 2 \times 3 = 6$ से.मी.

$\therefore$ इसलिए, जीवा की लम्बाई = 6 से.मी.

जैसे आज हम उपयोग में लाते है ऐसी 'साइन' की धारणा का उपयोग सर्वप्रथम A.D. 500. (इसवी सन) में 'आर्यभटियम' पुस्तक में किया है। 'आर्यभट्ट' ने अर्धजीवा के लिए 'अर्धज्या' शब्द का उपयोग किया है जो शीघ्र ही 'ज्या' या 'जीवा' में लघुकृत हुआ। जब 'आर्यभटियम' का 'अरेबिक' में अनुवाद हुआ, शब्द 'जीवा' ऐसे ही रखा गया। जब अरेबिक संस्करण का अनुवाद लैटीन में किया गया, जीवा का भाषान्तर 'साइनस' ***(sinus)*** में किया गया जिसका अर्थ है वक्र। निकट भविष्य में 'साइनस' शब्द 'साइन' के जैसा उपयोग युरोप में गणितीय पाठ्य-पुस्तक में सामान्य हुआ। सर्वप्रथम इसका संक्षिप्त संकेतन **'*sin*'**, खगोलशास्त्र के अंग्रेज प्राध्यापक एडमॉण्ड गुण्टर' (1581–1626) के द्वारा किया गया।

उदाहरण -6. ΔPQR में, Q पर समकोण है, $PQ = 3$ से.मी. और $PR = 6$ से.मी. $\angle QPR$ और $\angle PRQ$ का निर्धारण कीजिए।



हल : दिया है, $PQ = 3$ से.मी. और $PR = 6$ से.मी.

इसलिए, $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

अथवा $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अतः $\angle PRQ = 30^o$

और इसलिए, $\angle QPR = 60^o$ (क्यों?)

विचार - विमर्श कीजिए

यदि समकोण त्रिभुज की भुजाओं में से एक भुजा और कोई दूसरा भाग (या तो न्यूनकोण या कोई भी भुजा) ज्ञात हो तो त्रिभुज की शेष भुजायें और कोणों को निर्धारित कर सकते है। क्या आप इससे सहमत है? उदाहरण द्वारा समझाइए।

उदाहरण-7. यदि $\sin (A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A+B) = \frac{1}{2}$, $0^o < A+B \leq 90^o, A > B$, A और B ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $\sin (A-B) = \frac{1}{2}$, इसलिए, $A - B = 30^o$ (क्यों?)

क्योंकि $\cos (A+B) = \frac{1}{2}$, इसलिए, $A + B = 60^o$ (क्यों?)

ऊपर के समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है:: $A = 45^o$ and $B = 15^o$. (कैसे?)

अभ्यास - 11.2

1. निम्न का मूल्यांकन कीजिए।

(i) $\sin 45^o + \cos 45^o$ (ii) $\frac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \operatorname{cosec} 60^o}$

(iii) $\frac{\sin 30^o + \tan 45^o - \operatorname{cosec} 60^o}{\cot 45^o + \cos 60^o - \sec 30^o}$ (iv) $2\tan^2 45^o + \cos^2 30^o - \sin^2 60^o$

(v) $\frac{\sec^2 60^o - \tan^2 60^o}{\sin^2 30^o + \cos^2 30^o}$

2. सही विकल्प का चयन कीजिए और आपके चयन का औचित्य बताइए।

(i) $\frac{2\tan 30^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\sin 60^o$ (b) $\cos 60^o$ (c) $\tan 30^o$ (d) $\sin 30^o$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\tan 90^o$ (b) 1 (c) $\sin 45^o$ (d) 0

(iii) $\dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$

(a) $\cos 60^o$ (b) $\sin 60^o$ (c) $\tan 60^o$ (d) $\sin 30^o$

3. मूल्यांकन कीजिए : $\sin 60^o \cos 30^o + \sin 30^o \cos 60^o$; $\sin(60^o + 30^o)$. का मान क्या है? इससे क्या निष्कर्ष निकलता है?

4. क्या यह सही है : $\cos(60^o + 30^o) = \cos 60^o \cos 30^o - \sin 60^o \sin 30^o$.

5. समकोण त्रिभुज ΔPQR में, Q पर समकोण है और PQ = 6से.मी. $\angle RPQ = 60^o$. QR और PR के लंबाइयों का निर्धारण कीजिए।

6. ΔXYZ में, Y पर समकोण है, $YZ = x$, और $XZ = 2x$ तो $\angle YXZ$ और $\angle YZX$ का निर्धारण कीजिए।

7. क्या यह सही है : $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$? आपके उत्तर का औचित्य बताइए।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

न्यूनकोण के किस मान के लिये (i) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ सही है?

$0^o \leq \theta \leq 90^o$, के किस मान के लिये ऊपर का समीकरण परिभाषित नही है?

11.4 पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

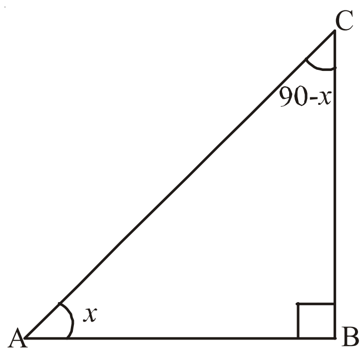
पहले ही हम जानते है कि दो कोण पूरक कोण कहलाते है यदि उनका योग 90^o के बराबर होता है। मान लीजिए, समकोण त्रिभुज ABC में B पर समकोण है। इस त्रिभुज में क्या कोई पूरक कोण है?

क्योंकि कोण B, 90^o का है। शेष दो कोणों का योग 90^o होगा।

($\because$ त्रिभुज के कोणों का योग 180^o रहता है।)

इसलिए, $\angle A + \angle C = 90^o$. अतः कोण $\angle A$ और $\angle C$ पूरक कोण कहलाते है।

मान लिजिए, $\angle A = x$, तब कोण x के लिए, BC विपरीत भुजा है और AB आसन्न भुजा है।



$\sin x = \dfrac{BC}{AC}$ $\qquad$ $\cos x = \dfrac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\tan x = \dfrac{BC}{AB}$

$\text{cosec}\, x = \dfrac{AC}{BC}$ $\qquad$ $\sec x = \dfrac{AC}{AB}$ $\qquad$ $\cot x = \dfrac{AB}{BC}$

यदि $\angle A + \angle C = 90^o$, तब $\angle C = 90^o - \angle A$

और यदि $\angle A = x$, तब $\angle C = 90^o - x$

अब हम Δ ABC में $(90^o - x)$ कोण की 'विपरीत भुजा' और आसन्न भुजा की ओर देखते है।

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC}$ $\qquad$ $\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC}$

$\text{Cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB}$ $\qquad$ $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC}$ $\qquad$ $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB}$

अब, यदि हम विभिन्न त्रिकोणमितीय पदों के ऊपर के मानों से कोण x और $(90^o - x)$ की तुलना करते हैं, तो

ऊपर की आकृति में तीन संभावनाएँ है।

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC} = \cos x$ $\quad$ और $\quad$ $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC} = \cot x$ $\quad$ और $\quad$ $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB} = \tan x$

$\text{cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB} = \sec x$ $\quad$ और $\quad$ $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC} = \text{cosec}\, x$

सोचिए - चर्चा कीजिए।

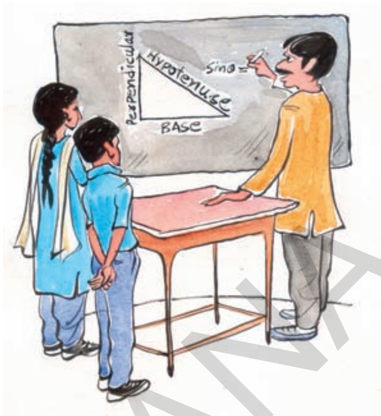
0^o और 90^o के बीच के कोणों के लिए ऊपर के संबंधों की जाँच कीजिए और चर्चा कीजिए, इन कोणों के लिए क्या ये सही है, या नहीं?

अतः, $\sin(90^o - A) = \cos A$ $\qquad$ $\cos(90^o - A) = \sin A$

$\tan(90^o - A) = \cot A$ $\quad$ और $\quad$ $\cot(90^o - A) = \tan A$

$\sec(90^o - A) = \text{cosec}\, A$ $\qquad$ $\text{cosec}(90^o - A) = \sec A$

अब, कुछ उदाहरण समझिए।



उदाहरण-8. मूल्यांकन कीजिए : $\dfrac{\sec 35^o}{\operatorname{cosec} 55^o}$

हल : $\operatorname{cosec} A = \sec (90^o - A)$

$\operatorname{cosec} 55^o = \sec (90^o - 35^o)$

$\operatorname{cosec} 55^o = \sec 35^o$

अब $\dfrac{\sec 35^o}{\operatorname{cosec} 55^o} = \dfrac{\sec 35^o}{\sec 35^o} = 1$

उदाहरण -9. यदि $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$, जहाँ $7A$ न्यूनकोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ ...(1)

$\sin (90 - 7A) = \sin (A - 6^o)$

क्योंकि $(90 - 7A)$ & $(A - 6^o)$ दोनो न्यूनकोण है,

इसलिए,

$90^o - 7A = A - 6^o$

$8A = 96^o$

जिससे $A = 12^o$.

उदाहरण-10. यदि $\sin A = \cos B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^o$.

हल : दिया है, $\sin A = \cos B$ ...(1)

हम जानते है, $\cos B = \sin (90^o - B)$, हम (1) को लिख सकते है

$\sin A = \sin (90^o - B)$

यदि A, B न्यून कोण हैं, तब $A = 90^o - B$

$\Rightarrow A + B = 90^o$.

उदाहरण-11. $\sin 81^o + \tan 81^o$ को 0^o और 45^o के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : हम लिख सकते है, $\sin 81^o = \cos(90^o - 81^o) = \cos 9^o$

$\tan 81^o = \tan(90^o - 81^o) = \cot 9^o$

$\sin 81^o + \tan 81^o = \cos 9^o + \cot 9^o$

उदाहरण-12. यदि ΔABC के A, B और C अंतः कोण (interior angle) है, तब बताइए कि $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$

हल : दिया है, ΔABC के अंतःकोण A, B और C है तब

$$A + B + C = 180^o.$$

समीकरण के दोनो ओर 2 से भाग देने पर

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^o$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$$

दोनो ओर ज्या (sine) अनुपात लेने पर

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^o - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$; इस प्रकार सिद्ध हुआ।

अभ्यास 11.3

1. मूल्यांकन कीजिए:

   (i) $\frac{\tan 36^o}{\cot 54^o}$ (ii) $\cos 12^o - \sin 78^o$ (iii) $\text{cosec } 31^o - \sec 59^o$

   (iv) $\sin 15^o \sec 75^o$ (vi) $\tan 26^o \tan 64^o$

2. बताइए कि

   (i) $\tan 48^o \tan 16^o \tan 42^o \tan 74^o = 1$

   (ii) $\cos 36^o \cos 54^o - \sin 36^0 \sin 54^o = 0.$

3. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^o)$, जहाँ 2A न्यूनकोण है। A का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\tan A = \cot B$ जहाँ A और B न्यूनकोण है। सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^o$

5. यदि A, B और C, त्रिभुज ABC के अंतः कोण है तो बताइए कि $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$

6. 0^0 और 45^o के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदो में $\sin 75^0 + \cos 65^o$ को व्यक्त कीजिए।

11.5 त्रिकोणमितीय सर्वसमिका (Trigonometric Identities)

हम जानते है कि सर्वसमिका एक गणितीय समीकरण है जो समीकरण में चरों के सभी मानों के लिए सही रहता है।

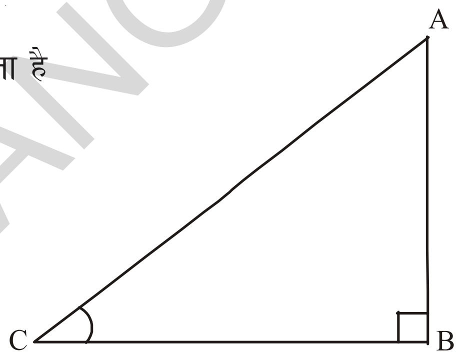
जैसे, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ यह सर्वसमीका है।

इसी प्रकार, एक सर्वसमिका जिसमें कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात है, त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहलाती है। और यह इसमें सम्मिलित सभी कोणों के मानों के लिए सही है।

यहाँ, हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिका व्युत्पन्न करेंगे और शेष सभी इस पर आधारित होगी।

मान लीजिए, समकोण त्रिभुज ABC में समकोण B पर है। अतः पायथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad ....(1)$$



प्रत्येक पद को AC^2 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

अर्थात, $\left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$

i.e., $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

यहाँ, हम $(\cos^2 A)$ के स्थान पर सामान्यतः $(\cos A)^2$ लिखते है।

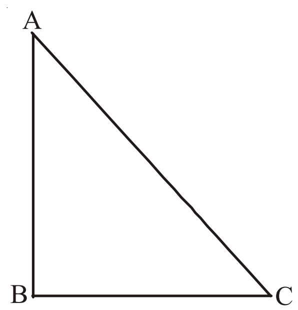
i.e., $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ मत लिखिए।)

$\therefore$ ऊपर का समीकरण $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ है।

हमने एक समीकरण दिया है जिसमें चर A(कोण) है और यह समीकरण A के सभी मानों के लिए सही है। इस प्रकार ऊपर का समीकरण एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका है।

इसलिए, हमें एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका ज्ञात हुई है।

$$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$



अब हम दूसरी त्रिकोणमितीय सर्वसमिका को देखेंगे।

समीकरण (1) से, हमे ज्ञात है

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$ (प्रत्येक पद को AB^2 से भाग देने पर)

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

i.e., $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

इसी प्रकार, (1) को BC^2, से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है, $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$.

ऊपर की सर्वसमिकाओं के उपयोग द्वारा, हम प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को दूसरे अनुपात के पदों में व्यक्त कर सकते है। यदि हम किसी एक अनुपात का मान जानते है, इन सर्वसमिकाओं के उपयोग द्वारा अन्य सभी अनुपात ज्ञात कर सकते है।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

क्या ये सर्वसमिकायें $0^0 \le A \le 90^0$ के लिए सही है? यदि नही, तो A के किस मान के लिए ये सही है?

- $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
- $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

यह कीजिए।

(i) यदि $\sin C = \frac{15}{17}$, तो cos C ज्ञात कीजिए। (ii) यदि $\tan x = \frac{5}{12}$, तो sec x ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि $\operatorname{cosec} \theta = \frac{25}{7}$, तो $\cot \theta$ ज्ञात कीजिए।

इसे प्रयत्न कीजिए।

निम्न का मूल्यांकन कीजिए और आपके उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $\dfrac{\sin^2 15^o + \sin^2 75^o}{\cos^2 36^o + \cos^2 54^o}$ (ii) $\sin 5^o \cos 85^o + \cos 5^o \sin 85^o$

(iii) $\sec 16^o \operatorname{cosec} 74^o - \cot 74^o \tan 16^o$.

उदाहरण-13. बताइए कि $\cot \theta + \tan \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$.

हल : LHS $= \cot \theta + \tan \theta$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \;\; \cos\theta} \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \;\; \frac{1}{\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta \;\; \sec\theta$$

उदाहरण-14. बताइए कि $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ $(\theta \neq 90°)$

हल: L.H.S. $= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (क्यों?)

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ (क्यों?)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta$ = R.H.S

उदाहरण-15. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ $(0° < \theta < 90°)$

हल: LHS $= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ ($\sqrt{(1+\cos\theta)}$ से गुणा और भाग करने पर)

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

अभ्यास 11.4

1. निम्न का मूल्यांकन कीजिए।

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)\,(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

(ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(iii) $(\sec^2\theta - 1)\,(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$

2. बताइए कि $(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

3. बताइए कि $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A\ \ (0° < \theta < 90°)$

4. बताइए कि $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A\ \ (0° < \theta < 90°)$

5. बताइए कि $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta.\sin\theta\ \ (0° < \theta < 90°)$

6. सरल कीजिए : $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A)$

7. सिद्ध कीजिए : $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

8. सरल कीजिए : $(1 - \cos\theta)\,(1 + \cos\theta)\,(1 + \cot^2\theta)$

9. यदि $\sec\theta + \tan\theta = p$, तब $\sec\theta - \tan\theta$ का मान क्या होगा ?

10. यदि $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = k$ तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$

वैकल्पिक अभ्यास

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नही है।]

1. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\text{cosec}\,\theta - 1}{\text{cosec}\,\theta + 1}$

2. सर्वसमिका $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि
$\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

3. सिद्ध कीजिए कि $(\text{cosec}\,A - \sin A)\,(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

4. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$.

5. बताइए कि $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1+\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

6. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)} = \dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}$

प्रस्तावित परियोजना

- त्रिकोणमितीय अनुपात - मापन की तालिका में विभिन्न कोणों के मूल्यों को दर्शाइए ।

हमने क्या चर्चा की।

1. समकोण त्रिभुज ABC में, समकोण B पर है,

$$\sin A = \frac{\text{कोण } A \text{ की विपरीत भुजा}}{\text{कर्ण}} \quad , \quad \cos A = \frac{\text{कोण } A \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$

3. यदि किसी एक न्यूनकोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो तो दूसरे अनुपातों का निर्धारण कर सकते है।

4. $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ और 90^o कोण के लिए त्रिकोणमितीय मूल्यों का अनुपात

5. $\sin A$ और $\cos A$ का मान कदापि 1 से अधिक नही होता, जबकि $\sec A$ या $\operatorname{cosec} A$ का मान हमेशा 1 से अधिक या 1 के बराबर रहता है। $(A \neq 90°)$

6. $\sin(90^o - A) = \cos A$, $\cos(90^o - A) = \sin A$

   $\tan(90^o - A) = \cot A$, $\cot(90^o - A) = \tan A$

   $\sec A\,(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ लिए $0^o < A < 90^o$

   $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ लिए $(0^o < A < 90^o)$

अध्याय

12 त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग
(Applications of Trigonometry)

12.1 प्रस्तावना

सामाजिक शास्त्र में आपने पढा है कि विश्व में सबसे ऊँचे पहाड की चोटी माऊण्ट एवरेस्ट है और इसकी ऊँचाई 8848 मी. है।

आदिलाबाद जिले में 'कुण्टाला जलप्रपात' यह आंध्रप्रदेश में सबसे ऊँचा जल प्रपात है। इसकी ऊँचाई 147 फीट है।

क्या इन ऊँचाइयों को मापन टेप द्वारा मापा जा सकता है? ये ऊँचाइयाँ कैसी नापी जाती है? क्या आप आपकी पाठशाला भवन अथवा सबसे ऊँचे पेड़ जो आपकी पाठशाला में अथवा इसके पास है, उनकी ऊँचाई नाप सकते है?

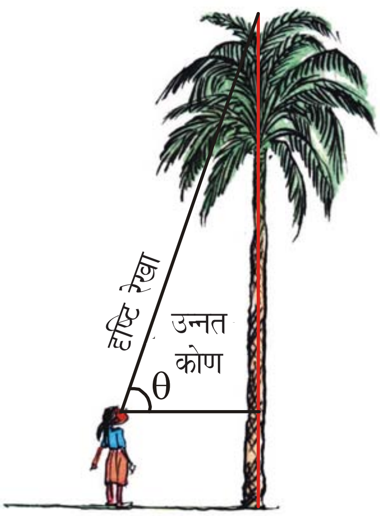
कुछ उदाहरणों द्वारा हम ये समझेंगे। विजया एक खजूर के पेड की ऊँचाई जानना चाहती है। वह पेड के सबसे ऊपर के बिंदु का स्थान निर्धारित करने का प्रयत्न करती है। वह उसकी आँख और वह बिंदु को मिलाने वाली रेखा की कल्पना भी करती है।

यह रेखा 'दृष्टि रेखा' कहलाती है। वह अपने आँख से पेड तक, जमीन को समानान्तर, क्षेत्रिय रेखा की भी कल्पना करती है।

यहाँ, 'दृष्टिरेखा', 'क्षैतिज रेखा' और 'पेड' द्वारा समकोण त्रिभुज बनता है।

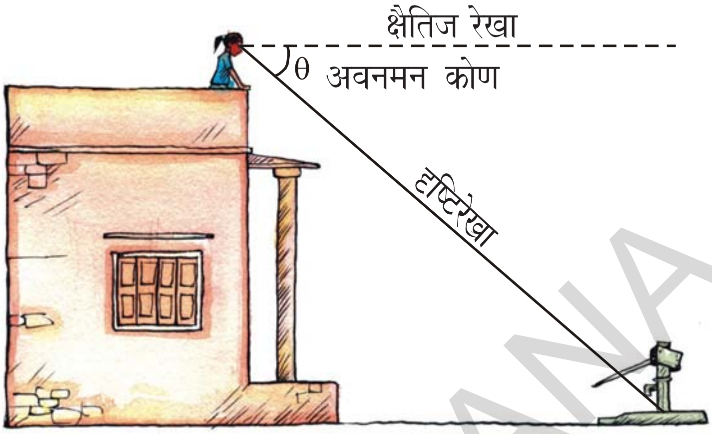
पेड की ऊँचाई जानने के लिए उसे इस त्रिभुज में कोण और भुजा जानने की आवश्यकता है।

दृष्टिरेखा, क्षैतिज रेखा के ऊपर रहती है और दृष्टिरेखा (line of sight) और क्षैतिज रेखा (horizontal line) के बीच का कोण उन्नत कोण (angle of elevation) कहलाता है।



मान लीजिए, आप अपने पाठशाला भवन के शीर्ष स्थान पर खडे है। आप बोरवेल (bore well) से भवन जिस पर आप खडे हो, तक दूरी ज्ञात करना चाहते है।

आपकी आँख से, बोरवेल के आधार की दृष्टिरेखा, आपकी आँख से क्षैतिज रेखा के नीचे रहती है।



यहाँ, दृष्टिरेखा और क्षैतिज रेखा के बीच का कोण 'अवनमन कोण' (angle of depression) कहलाता है।

> सैकडों वर्षों से, भूमापन करने वाले सर्वेक्षक (surveyors) द्वारा त्रिकोणमिती का उपयोग किया जा रहा है। सर्वेक्षण की प्रक्रिया में उन्नयन कोण अथवा अवनमन कोण नापने के लिए 'थिऑडलाइट' (Theodolite) उपकरण का उपयोग करते है। 19 वीं शताब्दी में, ब्रिटीश इंडिया द्वारा "great trigonometric survey" परियोजना के सर्वेक्षण के समय में, विश्व में सबसे ऊँची पहाड की चोटी, हिमालय पर्वत पर पायी गई है। 160 कि.मी. दूरी से, 6 अलग-अलग स्टेशन से पर्वत की चोटी देखी गई और इसके ऊँचाई की गणना की गई। 1856 में इस चोटी का नाम 'सर जार्ज एवरेस्ट' के नाम पर रखा गया है जो इस योजना के अधिकारी थे और सर्वप्रथम इन्होंने विशाल थिऑडलाइट का उपयोग किया। ये थिऑडलाइट, देहरादून में सर्वे ऑफ इंडिया के संग्रहालय में देखने के लिए रखे है।

12.2 समस्याएँ हल करने के लिये आकृति बनाना

जब हम ऊँचाई और दूरी के प्रश्न हल करना चाहते है तो हम निम्नलिखित सूचियों को ध्यान में रखना चाहिए।

(i) सभी वस्तुएँ जैसे मीनार, पेड, भवन, जहाज, पर्वत, आदि को गणितीय उपयुक्त ता के लिए 'रेखा' के रूप में लेना चाहिए।

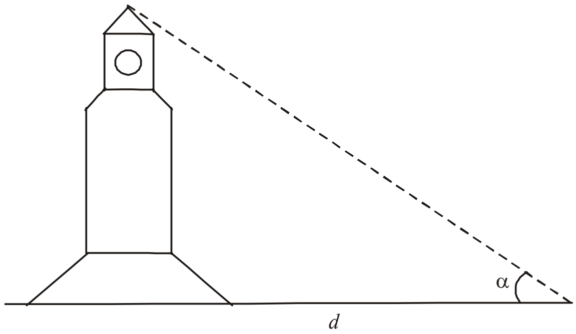
(ii) उन्नयन कोण अथवा अवनमन कोण, क्षैतिज रेखा के संदर्भ के साथ लेना चाहिए।

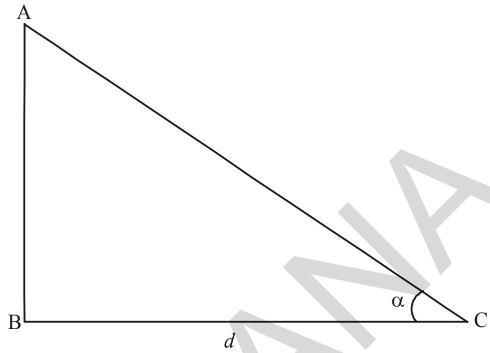
(iii) निरीक्षक की ऊँचाई नगण्य (neglected) मानी जाती है, यदि वह प्रश्न में न दी गयी हो।

जब हम उन्नयन कोण अथवा अवनमन कोण पर ऊँचाई और दूरी ज्ञात करने का प्रयत्न करते है तो, हमें इसकी ज्यामितीय आकृति मन मे स्पष्ट रूप से देखना चाहिए। हमे इसकी आकृति खींचना आवश्यक है और इन आकृतियों की सहायता से, हम समस्याओं को हल कर सकते है।

उदाहरण-1. निरीक्षक से d मी दूरी पर एक घंटाघर का आधार है और घंटाघर के सिरे का उन्नयन कोण α^o पाया गया। इस डाटा (आंकडो) के लिए आकृति बनाइए।

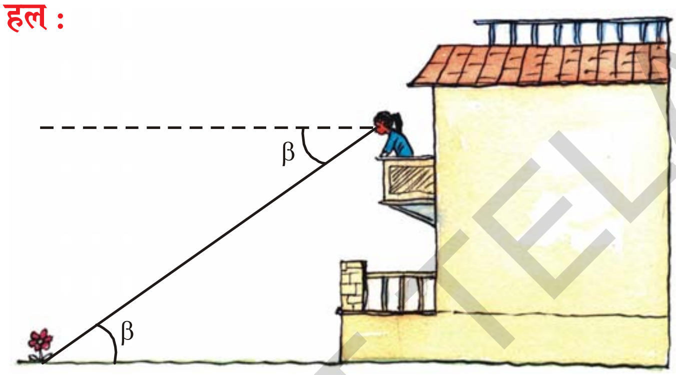
हल: आकृतियाँ नीचे दिखाए अनुसार रहती है।

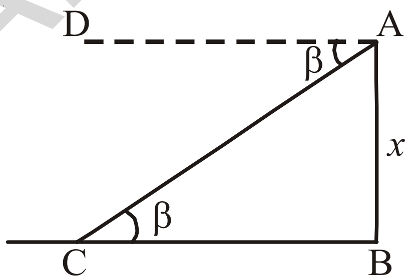




उदाहरण-2. रिन्की एक भवन के प्रथम मंजिल के बालकनी से, जमीन पर स्थित फूल को अवनमन कोण β^o पर देखती है। भवन के प्रथम मंजिल की ऊँचाई x मी. है। इस डाटा के लिए आकृति बनाइए।

हल :



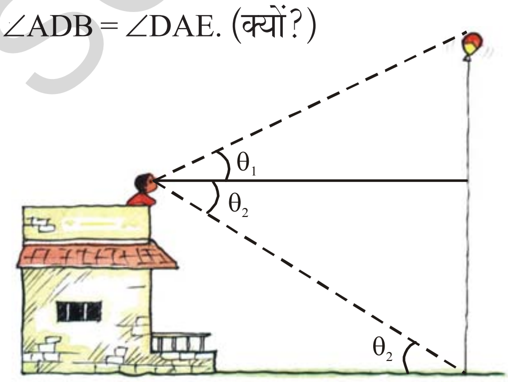


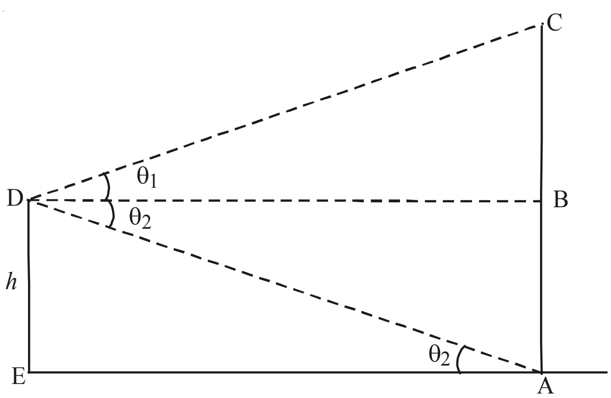
यहाँ $\angle DAC = \angle BCA = \beta$ (क्यों?)

उदाहरण-3. एक बडा गुब्बारा, रस्सी से बंधा हुआ है और वह हवा में उड रहा है। एक मनुष्य जो भवन के शीर्षस्थान पर है, इसे उन्नयन कोण θ_1 पर रस्सी का आधार अवनमन कोण θ_2 पर देखता है। भवन की ऊँचाई h फीट है। इस डाटा के लिए आकृति बनाइए।

हल : हम देख सकते है कि

$\angle ADB = \angle DAE$. (क्यों?)





यह कीजिए।

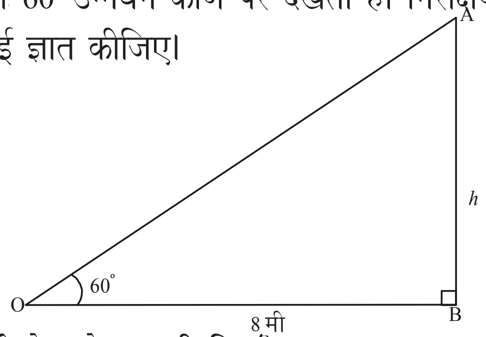
1. निम्न स्थितियों के लिये आकृति बनाइए।
   (i) एक व्यक्ति, उन्नयन कोण α पर पतंग उडा रहा है। उसके हाथ से पतंग तक धागे की लंबाई 'ℓ' है।
   (ii) नदी के एक किनारे पर h ऊँचाई का पेड है। इसके शीर्ष से एक व्यक्ति नदी के दोनो किनारों को अवनमन कोण θ_1 और θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$ पर देखता है। नदी की चौडाई 'd' है।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

1. आप एक भवन के आधार से, आपकी पाठशाला भवन जो d मीटर दूरी पर स्थित है, उसके सिरे को उन्नयन कोण α पर देख रहे हो।
   भवन की ऊँचाई ज्ञात करने के लिए आप कौन सा त्रिकोणमितीय अनुपात उपयोग में लाना, चाहते हैं?
2. एक सीढ़ी जो x मी. लम्बी है, जमीन से θ कोण बनाती हुई, दीवार के सहारे टिकी हुई है। दीवार पर कौनसे बिन्दु पर सीढ़ी स्पर्श कर रही है, उस बिन्दु की ऊँचाई ज्ञात करने के लिए आप कौन से त्रिकोणमितीय अनुपात का उपयोग करोंगे?

अब तक, दी गई स्थितियों के अनुसार आकृति कैसे बनाते है, इसकी चर्चा हमने की। अब, हम ऊँचाई और दूरी कैसे ज्ञात करते है इसकी चर्चा करेंगे।

उदाहरण-4. एक बालक बिजली के स्तम्भ के शीर्ष को 60° उन्नयन कोण पर देखता है। निरीक्षण बिंदु, स्तम्भ के आधार से 8 मी. दूर है। स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : आकृति से, त्रिभुज OAB में

OB = 8 मी.

$\angle AOB = 60^\circ$

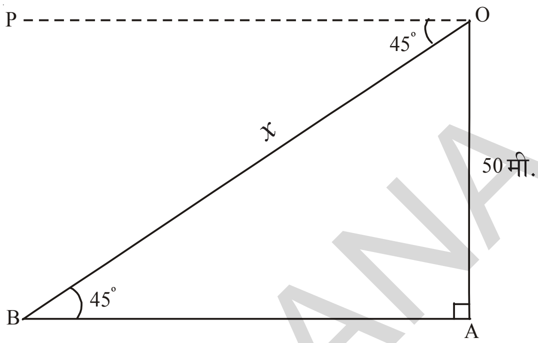
माना कि स्तंभ की ऊँचाई = AB = h मी.

(Δ OAB में, कोण $\angle AOB$ की आसन्न भुजा हम जानते है। और इसकी विपरीत भुजा ज्ञात करना हमें आवश्यक है। इसलिए हमें प्रश्न को हल करने के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात "tan" का उपयोग अवश्य करना होगा।)

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \qquad h = 8\sqrt{3} \text{ मी.}$$

उदाहरण -5. राजेन्द्र हेलीकाप्टर से जमीन पर खडे एक व्यक्ति को 45° अवनमन कोण से देखता है। यदि हेलीकाप्टर जमीन से 50 मी. ऊँचाई पर उडता है तो, राजेन्द्र से उस व्यक्ति की दूरी क्या होगी?



हल: आकृति से, त्रिभुज OAB में,

OA = 50 मी.

$\angle POB = \angle ABO = 45^{\circ}$ (क्यों?)

OB = राजेन्द्र से व्यक्ति की दूरी = x.

(हम जानते है कि त्रिभुज OAB में, कर्ण OB ज्ञात करना आवश्यक है और $\angle OBA$ की विपरीत भुजा हमें ज्ञात है।)

$$\sin 45^{\circ} = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{50}{x}$$

$x = 50\sqrt{2}$ मी.

(व्यक्ति से राजेन्द्र की दूरी $50\sqrt{2}$ मी. है।)

अभ्यास - 12.1

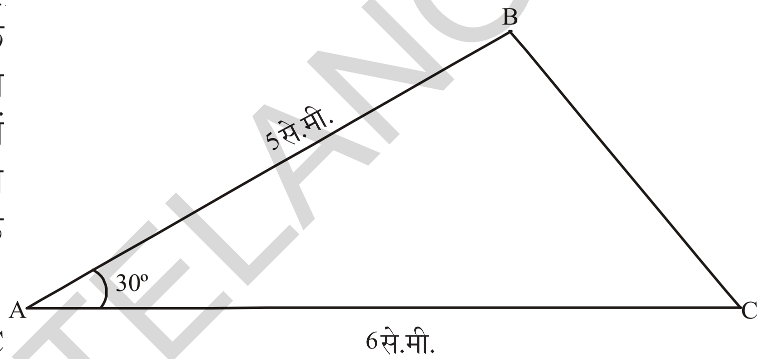
1. एक मीनार जमीन पर उर्ध्वाधर है। मीनार के आधार से 15 मी दूरी पर स्थित बिंदु से, मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई क्या होगी?
2. एक पेड आँधी के कारण टूटता है और टूटे हुए पेड का शीर्ष जमीन पर 30° का कोण बनाते हुए स्पर्श करता है। जमीन पर पेड का आधार और इसके शीर्ष के बीच की दूरी 6 मी. है। नीचे गिरने से पहले पेड की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक ठेकेदार बगीचे में बच्चों को खेलने के लिए एक सरकन (slider) स्थिर करना चाहता है। वह इसे 2 मी ऊँचाई पर और जमीन से 30° का कोण बनाते हुए स्थिर करना चाहता है। सरकन की लम्बाई कितनी होगी?
4. सुबह 7 बजे 15 मी. ऊँचे स्तम्भ की छाया की लम्बाई $15\sqrt{3}$ मी. रहती है। तो इस समय सूर्य-किरणों का जमीन के साथ उन्नयन कोण कितना होगा?
5. आप तीन रस्सियों के सहारे एक 10 मी. ऊँचे स्तम्भ की स्थापना करना चाहते हो। प्रत्येक रस्सी द्वारा स्तम्भ के साथ 30° का कोण बनना चाहिए तो रस्सी की लम्बाई क्या होगी?

6. मान लीजिए कि एक 6 मी ऊंची इमारत के शीर्ष स्थान से जमीन पर 60º का अवनमन कोण बनाते हुए एक निशाने पर तीर छोड रहे है। आपसे निशाने (target) की दूरी क्या होगी?

7. एक बिजली मिस्त्री (इलेक्ट्रीशियन) एक 9 मी. ऊँचे स्तम्भ पर बिजली आपूर्ति के लिए, मरम्मत करना चाहता है। मरम्मत करने के लिए उसे स्तम्भ के सिरे से 1.8 मी. नीचे तक पहुँचना आवश्यक है। इसके लिए उपयोग में आने वाली सीढ़ी की लम्बाई कितनी होनी चाहिए, यदि वह जमीन के साथ 60^0 का कोण बनाते हुए सीढ़ी पर चढता है तो स्तंभ के आधार और सीढ़ी के आधार के बीच दूरी क्या होगी?

8. एक नाव को नदी पार करना है। वह नदी के प्रवाह के कारण किनारे के साथ 60^0 कोण बनाते हुए, नदी के किनारे पर पहुँचने के लिए 600 मी. की दूरी तय करता है तो नदी की चौडाई क्या होगी?

9. एक निरीक्षक की ऊँचाई 1.8 मी. है, वह खजूर के पेड से 13.2 मी. की दूरी पर खडा है। उसकी आँखों से पेड़ की ऊँचाई का उन्नयन कोण 45º है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



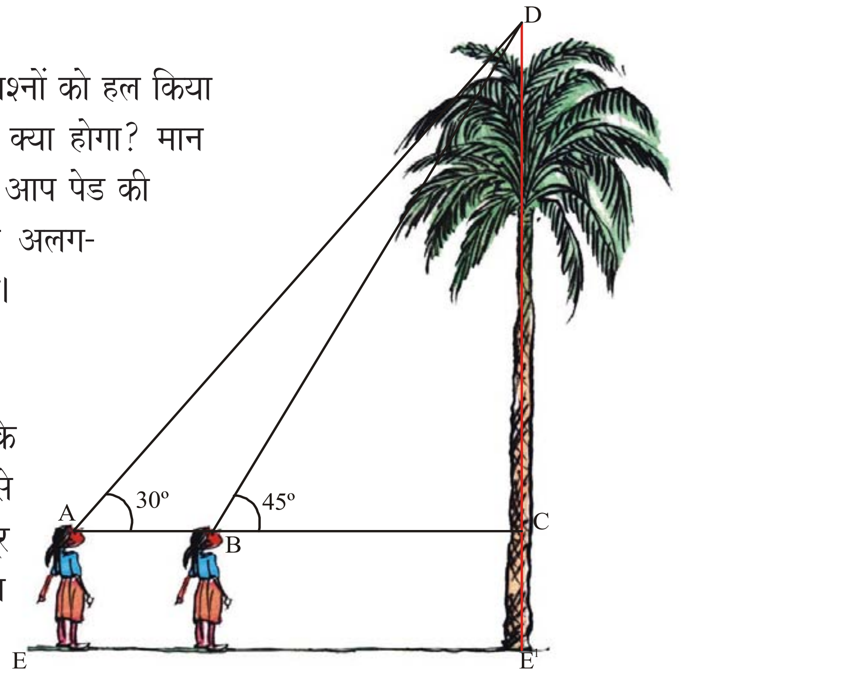
10. दी गयी आकृति में, AC = 6 से.मी., AB = 5 से.मी. और ∠BAC = 30º. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12.3 दो त्रिभुजों के लिए हल

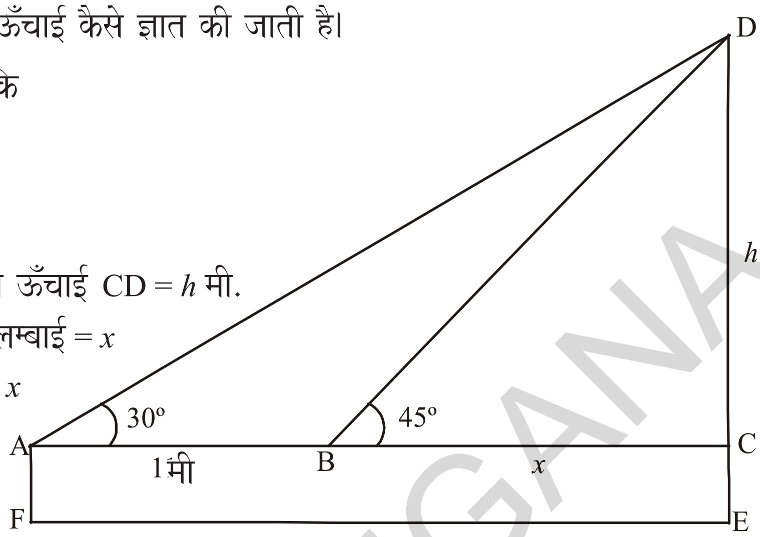
हमने एक त्रिभुज पर आधारित प्रश्नों को हल किया है? यदि दो त्रिभुज हो तो उसका हल क्या होगा? मान लीजिए, पेड के एक ओर खडे हो और आप पेड की ऊँचाई जानना चाहते हैं तथा पेड़ को अलग-अलग निरीक्षण-बिंदु से देखना चाहते हैं।

ऐसा आप कैसे कर सकते हैं?

मान लीजिए, आप एक खजूर के वृक्ष के सिरे को 45^0 उन्नयन कोण से देख रहे हैं। जब आप वृक्ष से 11 मी. दूर जाकर, वृक्ष के सिरे को देखेंगे तो उन्नयन कोण 30^0 बनता है।



अब हम यह देखेंगे कि पेड़ की ऊँचाई कैसे ज्ञात की जाती है।



आकृति से, हमें पता चलता है कि

AB = 11 मी.

$\angle CAD = 30^\circ$

$\angle CBD = 45^\circ$

माना कि खजूर के पेड की ऊँचाई CD = h मी.

और BC की लम्बाई = x

AC = 11 + x

त्रिभुज BDC से

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h \qquad ...(1)$$

त्रिभुज ADC से, $\tan 30^\circ = \dfrac{DC}{AC}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\left(\sqrt{3}-1\right)} \text{ मीटर}$$

टिप्पणी: खजूर के पेड की कुल ऊँचाई CD + CE है जहाँ CE = AF, जो इस लडकी की ऊँचाई है।

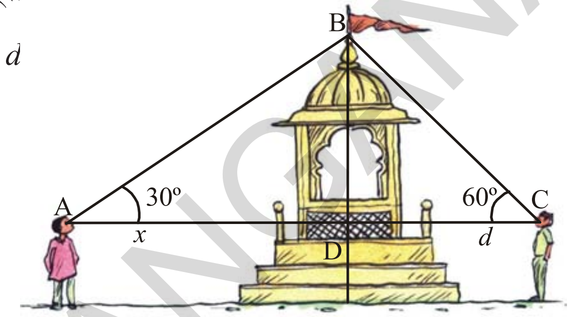
उदाहरण-6. एक 30 मीटर ऊँचे मंदिर के दोनों ओर दो व्यक्ति खडे है और देखते है कि मंदिर के सिरे का उन्नयन कोण (angle of elevation) क्रमशः 30^o और 60^o है। तो उन दो व्यक्तियों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मंदिर की ऊँचाई BD = 30 मी.

पहले व्यक्ति का उन्नयन कोण $\angle BAD = 60^o$

माना कि प्रथम व्यक्ति और मंदिर के बीच की दूरी. $AD = x$ और

दूसरे व्यक्ति और मंदिर के बीच की दूरी, $CD = d$



ΔBAD से

$$\tan 30^o = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \text{ .... } (1)$$

ΔBCD से

$$\tan 60^o = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ .... } (2)$$

(1) और (2) से दो व्यक्तियों के बीच की दूरी $= BC + BA = x + d$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

उदाहरण-7. एक राजमार्ग सड़क (high way), एक मीनार के आधार की ओर जाती है। मीनार के सिरे पर खडा रामय्या एक कार को अवनमन कोण (angle of depression) से देखता है। कार एक समान वेग से मीनार के आधार की ओर आ रही है। 6 सेकेण्ड पश्चात कार का अवनमन कोण 60^o पाया गया। इस बिंदु से कार द्वारा मीनार के आधार तक पहुँचने के लिए लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि 6 सेकेंड में कार द्वारा तय की गई दूरी $= AB = x$ मी.

मीनार की ऊँचाई $CD = h$ मी.

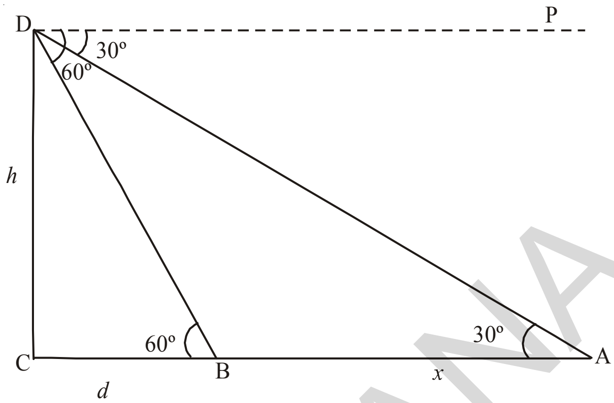
कार द्वारा तय की गई शेष दूरी $BC = d$ मी.

और $AC = AB + BC = (x + d)$ मी.

$\angle ADP = \angle DAP = 30^o$ (क्यों?)

$\angle BDP = \angle DBP = 60^o$ (क्यों?)

ΔBCD से



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \qquad ...(1)$$

ΔACD से

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$$

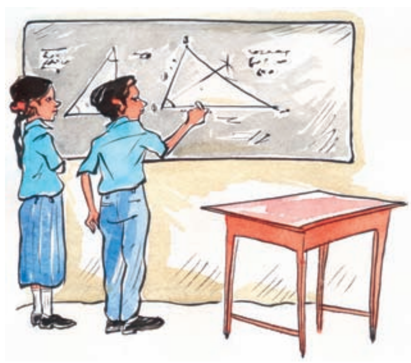
(1) और (2) से

$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$



'x' मी. दूरी तय करने के लिये लगा समय = 6 सेकण्ड

'd' मी. दूरी तय करने के लिये लगा समय,

i.e., $\frac{x}{2}$ मी. = 3 सेकण्ड

अभ्यास - 12.2

1. एक TV टावर, रास्ते के एक ओर उर्ध्वाधर दिशा में स्थित है। टावर के विपरीत दिशा में, रास्ते के दूसरी ओर स्थित किसी बिंदु से, मीनार के सिरे का उन्नयन कोण 60^0 है। इन बिंदुओं से 10 मी. दूरी पर स्थित किसी दूसरे बिंदु से, जो टावर का आधार और प्रथम बिंदु को मिलाने वाली रेखा पर है, टावर के सिरे का उन्नयन कोण 30° है। टावर की ऊँचाई और रास्ते की चौडाई ज्ञात कीजिए।

2. एक 30 मी. ऊँचे मंदिर के शिखर को, एक 1.5 मी. ऊँचाई का लड़का कुछ दूरी पर स्थित बिंदु से देख रहा है। उसकी आँख से मंदिर के शिखर का उन्नयन कोण 30^0 से 60^0 तक बढता है। जैसे वह मंदिर की ओर चलता है। उसने मंदिर की ओर कितनी दूरी तय ज्ञात कीजिए।
3. 2 मी. ऊँचे चबूतरे पर एक पुतला (statue) रखा है। जमीन पर स्थित किसी चबुतरे के सिरे का उन्नयन कोण 60^o है और इसी बिंदु से, चबुतरे के सिरे का उन्नयन कोण 45^o है। पुतले की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. किसी भवन के सिरे से, सेल टावर के सिरे का उन्नयन कोण 60^o है और इसके आधार से अवनमन कोण 45^o है। यदि टावर से भवन की दूरी 7 मी. हो तो टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक 18 मी.लम्बी तार, बिजली के स्तंभ के साथ जमीन से उन्नयन कोण 30^o बनाती हुई, बांधी गई थी। तार की लम्बाई की अधिकता के कारण, वह काटी गई और जमीन से 60^o उन्नयन कोण बनाती हुई बांधी गई। तार कितनी लम्बाई से काटी गयी?
6. एक मीनार के आधार से, किसी भवन के सिरे का उन्नयन कोण 30^o है और भवन के आधार से मीनार के सिरे का उन्नयन कोण 60^o है। यदि मीनार की ऊँचाई 30 मी. हो तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
7. समान ऊँचाई के दो स्तंभ, मार्ग के दोनो ओर एक दूसरे के विपरीत दिशा में है। मार्ग 120 फीट चौडा है। मार्ग पर इनके बीच स्थित किसी बिन्दु से स्तंभों के सिरे के उन्नयन कोण क्रमशः 60^o और 30^o है। स्तंभ की ऊँचाई और बिन्दु से स्तंभो की दूरियाँ ज्ञात कीजिए।
8. दो बिंदु जो 4 मी. और 9 मी. की दूरी पर जहाँ से टावर के शिखर का उन्नत कोण एक दूसरे के पूरक हो तो टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. जमीन पर स्थित बिंदु A से जेट हवाई जहाज का उन्नयन कोण 60^o है। 15 सेकण्ड उडान के पश्चात, उन्नयन कोण 30^o में बदलता है। यदि हवाई जहाज $1500\sqrt{3}$ मीटर ऊँचाई से उडान भरता है तो हवाई जहाज का वेग ज्ञात कीजिए। $\left(\sqrt{3} = 1.732\right)$
10. एक भवन के आधार से एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30^o है। और मीनार के आधार से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 60^o बनता है। मीनार और भवन की ऊँचाइयों का अनुपात क्या होगा?

वैकल्पिक अभ्यास

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नही है]

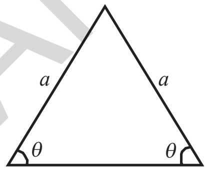
1. एक 1.2 मी. लम्बी लडकी जमीन से 88.2 मी ऊँचाई पर हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। तो लडकी के आँखो के साथ गुब्बारे का उन्नयन कोण 60^o रहता है। कुछ समय पश्चात उन्नयन कोण 30^o होता है। उस अंतराल में गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

2. तीन नाव A, B, C से लाइट हाऊस के शिखर का उन्नयन कोण क्रमशः $a, 2a, 3a$ है। यदि A तथा B के बीच की दूरी x मी. हो तो लाइट हाऊस की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3. एक अलमारी का अंतःभाग घनाभ (cuboidical) के आकार में है जिसकी लम्बाई, चौडाई और ऊँचाई $1 : \sqrt{2} : 1$ अनुपात में है। अधिकतम लम्बाई की छडी अलमारी के भीतर रखी गयी है तो इस छडी द्वारा बनने वाला कोण कितना होगा?

4. लोहे के गोले जिनका आयतन २३२८४२ से.मी.^{3} है। उन्हें पिघलाकर शंकु आकार में बदला गया जिसका शिर्ष कोण १२०^0 हो तो उसकी ऊँचाई तथा आधार ज्ञात किजिए?

5. सिध्द किजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = a^2 \text{ Sin } \theta \text{ Cos } \theta$ जहाँ a समान भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई है और θ समान कोणों मे से एक कोण का माप है।



6. समकोणीय वृत्ताकार बेलनकार ऊँचाई 'h' त्रिज्या 'r', वाला टावर जमीन पर खडा है। मानलो बिन्दु 'p' जमीन पर क्षैतिज रेखा में है। तथा ABC शिखर का अर्धवृत्तीय कोना है। उस पर p का निकटतम बिन्दु B हे बिन्दु A तथा B पर कोण क्रम 45^o और 60^o हो तो सिध्द किजिए $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$.

हमने क्या चर्चा की :

इस अध्याय में, हमने निम्न बातों को पढा।

1. (i) दृष्टि रेखा (line of sight) यह निरीक्षक के आँख से, उससे देखी जाने वाली वस्तु पर स्थित बिंदु तक खींची गई रेखा होती है।

   (ii) अवलोकन की गई वस्तु का उन्नयन कोण, यह दृष्टिरेखा द्वारा क्षैतिज के साथ बना हुआ कोण है जब वस्तु क्षैतिज सतह से ऊपर रहती है, अर्थात वह स्थिति जब हम वस्तु देखने के लिए अपना सिर ऊँचा करते है।

   (iii) अवलोकन की गई वस्तु का अवनमन कोण, यह दृष्टिरेखा द्वारा क्षैतिज के साथ बना हुआ कोण है जब वस्तु क्षैतिज सतह से नीचे रहती है, अर्थात वह स्थिति जब हम वस्तु देखने के लिए अपना सिर नीचे झुकाते है।

2. किसी वस्तु की ऊँचाई अथवा लंबाई एवं दो वस्तुओं के बीच की दूरी का निर्धारण त्रिकोणमितीय अनुपातों द्वारा कर सकते है।

अध्याय

13

प्रायिकता

(Probability)

13.1 प्रस्तावना

कुमार और सुधा एक साथ कैरम खेलने के लिए टहल रहे थे।

कुमार : क्या आप सोचते हैं कि हम जीतेंगे?

सुधा : हमारे जीतने के 50% अवसर है। हम जीत सकते हैं।

कुमार : आप 50 प्रतिशत कैसे कह सकती हैं?

क्या आप सोचते हैं, सुधा का कथन सही है?

क्या उसके जीतने के अवसर 50% है?

इस अध्याय में, हम ऐसे प्रश्नों के बारे में पढेंगे। हम संभावना, संभवतः, संभाषित आदि शब्दों के बारे में भी चर्चा करेंगे और इन्हे कैसे परिमाणित करते हैं इसका अध्ययन करेंगे? कक्षा 9 में हम घटनाओं के बारे में पढ चुके है जो अत्यधिक असंभवनीय, अतः असम्भव है? हमने अक्सर, भाग्य के बारे मे भी पढा है। सच्चाई यह है कि कोई घटना किसी विशेष समय पर घटित होती है इसका अर्थ यह नहीं है कि प्रत्येक समय घटित होगी। इस अभ्यास में, हम सीखने का प्रयत्न करेंगे कि कैसे घटना की संभावना को परिमाणित कर सकते है।

यह संख्यात्मक रूप से परिमाणिकरण को ही 'प्रायिकता ज्ञात करना' कहते है।

13.1.1 प्रायिकता क्या है? (What is Probability?)

एक प्रयोग देखिए : एक सामान्य सिक्का 1000 बार उछाला गया / 455 बार चित (head) आया और 545 बार पट (tail) आया। यदि हम चित आने की संभावना को ज्ञात करने का प्रयत्न करते है तो हम कह सकते है कि यह 1000 में 455 है अथवा $\frac{455}{1000} = 0.455$ है।

यह प्रायिकता का आकलन, 1000 बार सिक्का उछालने के वास्तविक प्रयोग के परिणामों पर आधारित है। यह आंकडे, प्रायोगिक अथवा आनुभविक (experimental or empirical) प्रायोगिक प्रयिकताएँ, वास्तविक प्रयोग के परिणामों पर और प्रत्येक घटना में क्या घटित होता है इसके पर्याप्त अभिलेखन पर आधारित रहती है। यह प्रायिकताएँ केवल आँकडे है। यदि इसी प्रयोग को हम पुनः 1000 बार पूर्ण करेंगे तो, हमें किंचित भिन्न न्यांस (data) मिल सकता है, जो भिन्न प्रायिकता अनुमानित देता है।

विश्व के विभिन्न भागों से बहुत से व्यक्तियों ने इस प्रकार के प्रयोग किए और चित आने की संख्या का अभिलेखन किया।

उदाहरण के लिए, अठारहवीं शताब्दी में फ्रेंच प्रकृति - वैज्ञानिक (naturalist) 'काम्टे डा बुफॉन' ने एक सिक्का 4040 बार उछाला और 2048 बार चित आया। इस स्थिति में, चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{2048}{4040} = 0.507$ थी।

ब्रिटेन से J.E. केरीचने सिक्के के 10,000 उछालने से 5067 चित आने का अभिलेखन किया था। इस स्थिति में, चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ थी।

सांख्यिकी विद् 'कार्ल पिअर्सन' और अधिक समय बिताकर एक सिक्के को 24000 बार उछाला। उसे 12012 बार चित प्राप्त हुए। इस तरह उसके द्वारा प्राप्त हुई चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता 0.5005 थी।

अब, मान लीजिए, हम प्रश्न करते है, 'यदि प्रयोग आगे बढाया गया' कहिए, एक मिलीयन बार तक, अथवा दस मिलीयन बार? तुम्हे अन्तर्बोध से लगेगा कि जैसे उछालने की संख्या बढती है, चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता संख्या $0.5 = \frac{1}{2}$ के करीब होती है। यह संख्या चित आने (या पट आना) की सैद्धान्तिक प्रायिकता ज्ञात करेंगे।

यह अध्याय, किसी घटना का सैद्धान्तिक (चिरसम्मत भी कहलाती है।) (theoretical, also called classical) प्रायिकता के लिए प्रस्तावना है। अब, हम इस संकल्पना पर आधारित सरल समस्याओं पर चर्चा करेंगे।

13.2 प्रायिकता - एक सिद्धान्त का अभिगम (Probability – A Theoretical Approach)

हम निम्न स्थिति के बारे में सोचेंगे। मान लीजिए, एक 'स्वच्छ और स्पष्ट' (fair) सिक्का अर्थात् यह सममित है ताकि यहाँ कोई कारण नही बनता है वह उछालने के पश्चात किसी एक ओर पर दूसरी ओर से अधिक बार गिरता है।

सिक्के के इस गुणधर्म को हम 'अनभिमत' (unbiased) कहते है। शब्दावली 'याद्दच्छिक रूप' का अर्थ है, सिक्के का किसी हस्तक्षेप या त्रुटि के बिना, नीचे गिरना। इस प्रकार के प्रयोग यादृच्छिक प्रयोग होती है।(यहाँ हम सिक्के का एक कोर (edge) पर ठहरने की संभाविता को रद्द करते है जो संभव है, जैसे प्रति सिक्का रेत पर गिरता है।) हम यह मानते है कि परिणाम, चित या पट, समप्रायिक है।

इस अध्याय में, प्रायिकता का मूल तत्व जानने के लिए, हम मानते है कि सभी प्रयोग के समप्रायिक परिणाम रहते हैं। अब, हम जानते है कि घटना E की प्रायोगिक अथवा आनुभविक प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{\text{परीक्षणों की संख्या जिसमे घटना विद्यमान है}}{\text{कुल परीक्षणों की संख्या}}$$

यह कीजिए।

a. निम्न में से कौन से प्रयोग के परिणाम समप्रायिक है?

1. एक पांसे को फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 अंक आना।
2. एक थैली में 5 लाल गेंद, 4 नीले गेंद और 1 काला गेंद है। इसमें से भिन्न रंग का गेंद चुनना।
3. कैरम के खेल मे जीतना
4. दो अंको की संख्या में, इकाई के स्थान पर चयन किया हुआ अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 अथवा 9 हो सकता है।
5. एक थैली में 10 लाल गेंद, 10 नीले गेंद और 10 काले गेंद है। इसमे से भिन्न रंग के गेंद चुन लेना।
6. जुलाई के एक विशेष दिन में बरसात होना?

b. क्या प्रत्येक प्रयोग के परिणाम समप्रायिक है?

c. 5 उदाहरण ऐसे दीजिए जिसके समप्रायिक परिणाम हो और 5 उदाहरण ऐसे दीजिए जिनके सम प्रायिक परिणाम न हो।

क्रियाकलाप

(i) कोई एक सिक्का लीजिए। उसे उछालिए। 50 बार, 100 बार, 150 बार और चित आने की तथा पट आने की संख्या की गिनती कीजिए। आपके निरीक्षणों की संख्या को निम्न सारणी मे लिखिए :-

क्र. संख्या	प्रयोग की संख्या	चित आने की संख्या	चित आने की प्रायिकता	पट आने की संख्या	पट आने की प्रायिकता
1.	50				
2.	100				
3.	150				

आप क्या देखते है? स्पष्टतः प्रयोग की संख्या बढती है, चित आने की अथवा पट आने की प्रायिकता 50% अथवा $\frac{1}{2}$ तक पहुँचती है। यह प्रायिकता का आनुभविक विश्लेषण, प्रत्येक घटना को लागू कर सकते है जिसमें प्रयोग अधिक बार दोहराया जा सकता है।

प्रायिकता और प्रतिरूपण (Modelling)

प्रयोग बार-बार दोहराने के लिए जो आवश्यकताएँ होती है, उसके भी कुछ प्रतिबंध रहते है। जैसे वह बहुत खर्चीला अथवा बहुत सी स्थितियों में असाध्य भी हो सकता है। यद्यपि, सिक्के को उछालना अथवा पांसे को फेंकने के प्रयोग में, यह कार्यान्वित अच्छी तरह से हुआ किन्तु कृत्रिम उपग्रह प्रक्षेपित करने के प्रयोग को क्या हम दोहरा सकते है?

प्रक्षेपित करते समय इसके असफलता की हम आनुभविक प्रायिकता की गणना करने के लिए प्रयोग दोहरा सकते है? अथवा भूकंप में बहुमंजिली इमारत ध्वंस होने की आनुभाविक प्रायिकता की गणना के लिए क्या हम भूकंप की घटना को दोहरा सकते है? इन प्रायिकताओं को ज्ञात करने के लिए हम ऐसी गतिविधि की प्रतिकृति बनाते है और समप्रायिक परिणामों की ओर गतिविधियों का आंकलन करने के लिए उपयोग में लाते है। ऐसी प्रतिकृतियाँ जटिल रहती है और भविष्यवाणी तथा परिणामों द्वारा प्रमाणित होती है। मौसम का अनुमान, चुनाव के परिणाम, जनसंख्या की डेमाग्राफी (जनसांख्यिकी) भूकंप, फलस का उत्पादन, आदि सभी ऐसी प्रतिकृतियों और उनकी पूर्व सूचनाओं पर आधारित होते हैं।

'समप्रायिक परिणामों की अभिकल्पना' (जो ऊपर देखे गये दो उदाहरणों में सिक्का और पांसा) ऐसी बहुत से उदाहरणों में वैध है) अभिधारणााओं में से एक है जो हमें किसी घटना की प्रायिकता की निम्न परिभाषा के लिए प्रेरित करती है। घटना की सैद्धांतिक प्रायिकता का प्रायिकता (चिरसम्मत प्रयिकता भी कहलाती है), P(T) जैसे लिखते है, को परिभाषित किया जाता है,

$$P(T) = \frac{\text{T के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

जहाँ हम मानते है कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक हैं। सामान्यतः, 'सैद्धांतिक प्रायिकता' को हम 'प्रायिकता' के जैसे उल्लेख करते है।

प्रायिकता की परिभाषा, 1795 में पियरी सीमन लाल्पास' द्वारा दी गयी।.

प्रायिकता की परिकल्पना का प्रारंभ 16 वी शताब्दी में हुआ जब एक इटालियन भौतिक वैज्ञानिक और गणितज्ञ J. कार्डनेन इस विषय पर, 'The Book on Games of Chance' सर्वप्रथम पुस्तक लिखा। जेम्स बर्नाली (1654 -1705), ए. द-मॉयवर(1667-1754), और पियरी सीमन लाप्लास द्वारा इस क्षेत्र में महत्वपूर्ण योगदान रहा।

Pierre Simon Laplace
(1749 – 1827)

वर्तमान काल में (हाल ही मे) प्रायिकता का उपयोग व्यापक रूप से बहुत से क्षेत्रों में कर रहे है जैसे जीवविज्ञान, अर्थशास्त्र, आनुवंशिकी शास्त्र, भौतिकी, समाज विज्ञान, आदि।

13.3 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events)

यदि एक सिक्का उछाला गया, हम चित या पट प्राप्त करते है किन्तु दोनो नही। इसीतरह, यदि उच्च विद्यालय के किसी एक विद्यार्थी का चयन किया गया तो वह 6, 7, 8, 9 और 10 वी कक्षाओं मे से किसी एक कक्षा का होगा, किन्तु दो या अधिक कक्षाओं का नही हो सकता। इन दोनो उदाहरणों में, एक घटना का घटित होना, अन्य घटनाओं को घटित होने से रोकता है। ऐसी घटनाएँ, परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती है।

किसी प्रयोग के दो या अधिक घटनाएँ, जहाँ एक घटना का घटित होना, शेष सभी घटनाओं को घटित होने से रोकता है, परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती है। इस अध्याय में तदन्तर विस्तृत रुप में इसकी चर्चा करेंगे।

13.4.1 प्रायिकता ज्ञात करनाः

घटनाओं की प्रायिकता हम कैसे ज्ञात करते है जो समप्रायिक है? हम मान लेते है कि सिक्के को उछालना' यह घटना उस प्रयोग के साथ जुडी है जहाँ समप्रायिक की अवधारणा सही है। आगे बढने के लिए, हमे पता है कि, प्रत्येक घटना में दो परिणाम संभव है। यह परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि (sample space) कहलाती है। हम कह सकते है कि एक बार सिक्का उछालने की घटना में, प्रतिदर्श समष्टि $\{H, T\}$ रहती है। थैली में से एक गेंद निकालने की घटना में प्रतिदर्श समष्टि $\{R, B, Y, W\}$ है यदि थैली में लाल, नीले, पीले और सफेद गेंद रखे है। पांसे को फेंकने की घटना के लिए प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

यह कीजिए।

5 स्थितियों को याद कीजिए जिसमें समप्रायिक घटनाएँ है और प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

अब हम, समप्रायिक घटनाओं की प्राथिकता ज्ञात करने का प्रयत्न करते है। घटनाएँ परस्पर अपवजी है।

उदाहरण-1. यदि सिक्का 1 बार उछाला गया तो चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। पट आने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए।

हलः एक बार सिक्का उछालने के प्रयोग में, संभाव्य परिणामों की संख्या दो - चित (H) और पट (T) है। माना कि, 'चित आना' घटना E है। E (अर्थात चित आना) को अनुकूल परिणामों की संख्या है।

इसलिए, $P(E) = P\text{ (चित)} = \dfrac{\text{E के अनुकुल परिणामों की संख्या}}{\text{संभाव्य परिणामों की संख्या}} = \dfrac{1}{2}$

इसीतरह, यदि F = 'पट आने' की घटना है, तब

$P(F) = P\text{(पट)} = \dfrac{1}{2}$ (क्यों? अनुमान लगाइए।)

उदाहरण-2. एक थैली में लाल, नीले और पीले गेंद रखे है, सभी गेंद समान आकार के है। थैली में न देखते हुए इसमें से एक गेंद मानसा ने उठा लिया। उसके द्वारा निकाला गया गेंद (i) पीला (ii) लाल (iii) नीला रहने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः मानसा थैली में न देखते हुए गेंद बाहर निकालती है। इसलिए उसके द्वारा इसमे से कोई भी एक गेंद निकालना समप्रायिक है।

माना कि, घटना Y यह निकाला गया गेंद पीला है,

घटना B यह 'निकाला गया गेंद नीला रहना' है। और घटना R यह 'निकाला गया गेंद लाल रहना' है। अब, सभी संभाव्य परिणामों की संख्या = 3.

(i) घटना Y की अनुकूल घटनाओं की संख्या = 1 इसलिए, $P(Y) = \dfrac{1}{3}$, इसी तरह, $P(R) = \dfrac{1}{3}$ और

$P(B) = \dfrac{1}{3}$

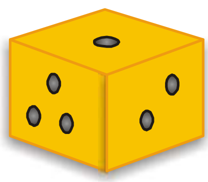
टिप्पणी :

1. किसी प्रयोग में घटना जिसका केवल एक परिणाम हो, साधारण घटना कहलाती है। उदाहरण 1 मे, E और F दोनो घटनाएँ, साधारण घटनाएँ हैं। इसी प्रकार उदाहरण- 2 में तीनो घटनाएँ Y, B और R साधारण घटनाएँ है।
2. उदाहरण 1 में, हम देखते है कि : $P(E) + P(F) = 1$
   उदाहरण 2, में, हम देखते है कि : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1.$

   यदि हम सभी साधारण घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करते है और उनका योग करते है, हमे योग 1 प्राप्त होगा।
3. पांसो को फेंकने जैसी घटनाओं मे, 3 से कम अंक आने की और 3 आने की तथा उससे अधिक अंक आने की घटनाएँ, सभी सम्भव परिणामों की साधारण घटनाएँ नही है। दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर {HH}, {HT}, {TH} और {TT} घटनाएँ साधारण है।

उदाहरण-3. मान लीजिए हम पांसे को एक बार फेंकते है। (i) 4 से अधिक संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी? (ii) 4 के बराबर अथवा 4 से कम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

हल: (i) एक अवभिनत (unbaised) पांसो को लुढ़काने पर,



प्रतिदर्श समष्टि (sample space) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

परिणामों की संख्या $n(S) = 6$

4 से अधिक संख्या के लिए इच्छित

परिमाण (out come) $E = \{5, 6\}$

इच्छित परिणामों की संख्या $n(E) = 2$

प्रायिकता $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) माना कि 4 के बराबर अथवा 4 से कम संख्या आने की घटना F है।

प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

परिणामों की संख्या $n(S) = 6$

4 से कम या 4 के बराबर संख्या के लिए इच्छित परिणाम $F = \{1, 2, 3, 4\}$

इच्छित परिणामों की संख्या $n(F) = 4$

प्रायिकता $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

टिप्पणी : क्या ऊपर के उदाहरण में घटनाएँ E और F, साधारण घटनाएँ है?

नही, ये साधारण घटनाएँ नही है। घटना E के 2 परिणाम है और घटना F के 4 परिणाम है।

13.4.2 पूरक (complementary) घटनाएँ और प्रायिकता

इसके पूर्व खण्ड में हमने साधारण घटनाओं के बारे में पढा। तत्पश्चात उदाहरण-3 में, हमने घटनाओं की प्रायिकता की गणना की जो साधारण घटना नही है। हमने देखा,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

यहाँ 'F' 'E नही' के समान है क्योंकि यहाँ केवल दो घटनाएँ है।

घटना 'E नही' को हम $\overline{E}$ द्वारा सूचित करते है। यह घटना E की पूरक घटना कहलाती है।

इसलिए, P(E) + P(E नही) = 1

i.e., $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, जो हमें देता है, $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

सामान्यत:, यह सही है कि घटना **E** के लिए, $\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$

यह कीजिए।

(i) क्या चित्त (head) आने का पूरक पट (tail) आना है? कारण दीजिए।

(ii) पांसे के उदाहरण में क्या 1 आने का पूरक 2, 3, 4, 5, 6? आने की घटनाओं का पूरक है? आपके उत्तर के लिए कारण दीजिए।

(iii) घटनाओं के 5 नये युग्मों को लिखिए जो पूरक है।

13.4.3 असम्भव (impossible) और निश्चित (certain) घटनाएँ

पांसे, जिसके पृष्टों पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 इस प्रकार अंकित किया है, को फेंकने के बारे में निम्न लिखित अंशो को अंशो को समझिए।

(i) पांसे को एक बार फेंकने पर 7 संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

हम जानते है कि इस पांसे को एक बार फेंकने पर केवल 6 परिणाम रहते है। ये परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 है। क्योंकि पांसे पर 7 से अंकित कोई भी पृष्ट नही है, 7 के अनुकूल कोई परिणाम नही है। अर्थात इस तरह के परिणामों की संख्या शून्य है। अन्य शब्दों में, पांसे को एक बार फेंकने पर, 7 के अनुकूल कोई परिणाम नही है। अर्थात इस तरह के परिणामों की संख्या शून्य है। अन्य शब्दों में, पांसे को एक बार फेंकने पर 7 आना असम्भव है। इसलिए $P(E) = \frac{0}{6} = 0$

अर्थात, घटना जो घटने में अशक्य है, की प्रायिकता शून्य रहती है। ऐसी घटना, 'असंभव घटना' कहलाती है।

(ii) पांसे को एक बार फेंकने पर 6 अथवा 6 से कम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

क्योंकि पांसे के प्रत्येक पृष्ट पर 6 या 6 से कम संख्या अंकित है, इसलिए पांसे को एक बार फेंकने पर हमेशा हमे इसमे से एक संख्या प्राप्त होगी, यह निश्चित है। अतः, अनुकूल परिणामों की संख्या, सभी संभव परिणामों की संख्या के समान होगी, जो 6 है।

इसलिए, घटना जो निश्चित है, कि प्रायिकता 1 होगी। ऐसी घटना, 'निश्चित घटना' (certain event or sure event) कहलाती है।

टिप्पणी : प्रायिकता P(E) के परिभाषा के अनुसार, हम देखते है कि अंश (घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या) हमेशा हर (सभी संभव परिणामों की संख्या) से कम रहती है।

इसलिए $0 \leq P(E) \leq 1$

प्रयत्न कीजिए।

1. बालक के पास एक पांसा है जिसके 6 पृष्टों पर अक्षर A, B, C, D, E और F अंकित है। पांसे को एक बार फेंका गया। (i) A (ii) D आने की प्रायिकता क्या होगी?
2. निम्न में से कौनसी, किसी घटना की प्रायिकता नही हो सकती है?

   (a) 2.3 (b) -1.5 (c) 15% (D) 0.7

सोचिए - चर्चा कीजिए।

1. काई भी खेल के आरंभ होने से पहले सिक्के को उछालकर एक टीम पहले खेलना आरम्भ करती है क्यों?
2. क्या किसी घटना की प्रायिकता $\frac{7}{2}$ हो सकती है? स्पष्ट कीजिए।
3. निम्न में से कौनसे तर्क सही है ओर कौन से तर्क सही नही है? कारण दीजिए।

   i) यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला गया, तो संभव परिणाम 3 रहते हैं - दो चित, दो पट अथवा प्रत्येक का एक। इसलिए, इनमें से प्रत्येक परिणाम के लिए प्रायिकता $\frac{1}{3}$ रहती है।

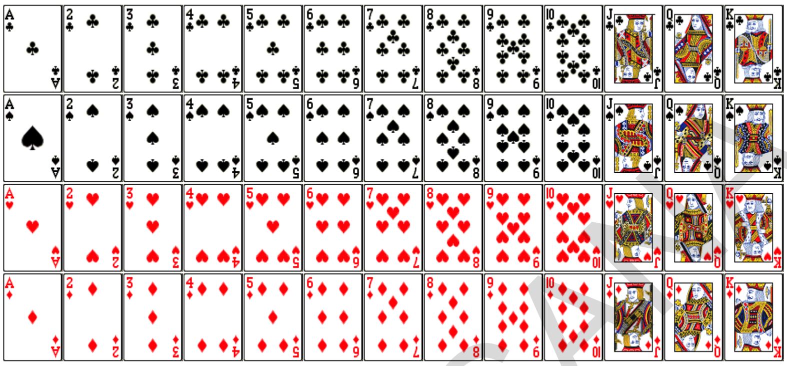
   ii) यदि एक पांसे को फेंका गया, तो संभव परिणाम दो रहते है – विषम संख्या अथवा सम संख्या। इसलिए, विषम संख्या आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ रहती है।

13.5 पत्तों की गड्डी और प्रायिकता (Deck of Cards and Probability)

क्या आपने ताश के पत्तों की गड्डी देखी है?

ताश के पत्तों की गड्डी (deck) में 52 पत्ते रहते है जो 4 सेट में (suits) प्रत्येक के 13 पत्ते, विभाजित रहते है। वह काले रंग का अर्थात हुकुम के पत्ते (spades) (♠), लाल पान के पत्ते (red hearts) (♥), लाल ईट के पत्ते (red diamonds) (♦) और काले चिडी के पत्ते (block clubs) (♣) रहते है।

प्रत्येक सेट में इक्का (A) राजा (K) राणी (Q) गुलाम (J) 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 और 2 इस तरह 13 पत्ते रहते है। राजा, राणी, और गुलाम चित्र के पत्ते (face cards) कहलाते है। इन पत्तों की गड्डी से बहुत से खेल खेले जाते है, कुछ खेल इनमे से कुछ पत्तों से तथा कुछ खेल दो गड्डियों से भी खेले जाते है। पत्तों के और पांसो के खेल में प्रायिकता बहुत महत्व है क्यों कि यह, संभाव्य स्थितियों का आकलन करने मे खिलाडी को मदद करता है और खिलाडियों मे पत्तों का बँटवारा कैसे किया जा सकता है इसका भी अनुमान लगा सकते है।



उदाहरण-4. एक अच्छी फेंटी गयी 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया तो वह पत्ता (i) इक्का होने तथा (ii) इक्का न होने की प्रायिकता की गणना कीजिए।

हल : अच्छी तरह फेंटने से सम प्रायिक परिणाम मिलते है।

(i) एक गड्डी में 4 इक्के रहते है।

मान लीजिए घटना E = निकाला गया पत्ता इक्का रहना'' E को अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52 (क्यों?) इसलिए, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) मान लीजिए F = 'निकाला गया पत्ता इक्का नही रहना'

F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 52 - 4 = 48 (क्यों?)

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

इसलिए, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

विकल्पी विधि : ध्यान दीजिए कि F और कोई घटना नही है

किन्तु $\overline{E}$ है। इसलिए हम P(F) निम्न प्रकार से भी गणना कर सकते है।

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

प्रयत्न कीजिए।

आपके पास अच्छे फेटे गए पत्तों की एक गड्डी है। तब

1. निकाला गया पत्ता 'राणी' रहने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. निकाला गया पत्ता, चित्र का पत्ता (face card) रहने की प्रायिकता क्या होगी?
3. वह हुकुम का पत्ता (spade) रहने की प्रायिकता क्या होगी?
4. वह हुकुम के चित्र का पत्ता रहने की प्रायिकता क्या होगी?
5. वह चित्र का पत्ता न रहने की प्रायिकता क्या होगी?

13.6 प्रायिकता के उपयोग

हम कुछ और प्रसंग देखते है जहाँ प्रायिकता उपयुक्त हो सकती है। हम जानते है कि खेलों में कुछ देश बलशाली है और अन्य नही है। हम यह भी जानते है कि जब दो खिलाडी खेल रहे है तब दोनों के जीतने की समान संभावना नहीं हो सकती है। खिलाडी या टीम की सफलता पाने की प्रायिकता, अन्य खिलाडी अथवा टीम की प्रायिकता से अधिक रहती है। कभी कभी ऐसा होता है कि व्यक्ति जिन्हे हम जानते है, की जन्मतिथी समान रहती है। क्या हम ज्ञात कर सकते है कि यह सामान्य घटना है या विरल घटना है? यह करने के लिए शास्त्रीय प्रायिकता (classical probability) उपयुक्त है।

उदाहरण-5. संगीता और रेशमा एक टेनिस प्रतियोगिता खेलते है। यह ज्ञात है कि संगीता की प्रतियोगिता जीतने की प्रयिकता 0.62 है। रेशमा द्वारा प्रतियोगिता जीतने की प्रायिकता क्या होगी?

हल: मान लीजिए, संगीता और रेशमा द्वारा प्रतियोगिता जीतने की घटनाएँ क्रमशः S और R है।

संगीता द्वारा प्रतियोगिता जीतने की प्रायिकता $= P(S) = 0.62$ (दिया है)

रेशमा द्वारा प्रतियोगिता जीतने की प्रायिकता $= P(R) = 1 - P(S)$

$= 1 - 0.62 = 0.38$ [R और S पूरक घटनाएँ है]

उदाहरण-6. शारदा और हमीदा दोनो सहेलियाँ है। तो प्रायिकता क्या होगी (i) दोनों का जन्मदिन एक न हो (ii) दोनों के जन्मदिन एक हो। (लीप वर्ष की अवगणना की है।)

हल : दो मित्रों मे से एक लडकी मान लीजिए, शारदा का जन्मदिन वर्ष के किसी भी दिन हो सकता है। अब, उसका जन्म दिन भी वर्ष के 365 दिनों में किसी भी दिन हो सकता है। हम मानते है कि 365 परिणाम समप्रायिक है।

(i) यदि हमीदा का जन्मदिन, शारदा के जन्मदिन से भिन्न है, तब उसके जन्मदिन के अनुकूल परिणामों की संख्या $365 - 1 = 364$

इसलिए, P (दोनों के जन्मदिन भिन्न है) $= \dfrac{364}{365}$

(ii) P (शारदा और हमीदा दोनों का जन्मदिन एक ही है) = 1 - P (दोनों के भिन्न जन्मदिन है)

$= 1 - \dfrac{364}{365}$ [$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$] का उपयोग करते हुए) $= \dfrac{1}{365}$

उदाहरण-7. एक पाठशाला के दसवीं कक्षा में 40 छात्र है जिनमे 25 छात्राएँ और 15 छात्र है। वर्ग शिक्षिका को एक विद्यार्थी का चयन वर्ग-प्रतिनिधि के लिए करना है। विभिन्न कार्डों पर वह प्रत्येक विद्यार्थी का नाम लिखती है। सभी कार्ड समरूप (Identical) है। तदन्तर वह, सभी कार्ड एक बक्से में रखती है और उसे अच्छी तरह से हिलाती है। तत्पश्चात वह बक्से में से एक कार्ड निकालती है। उस कार्ड पर लिखा गया नाम (i) छात्रा (ii) छात्र की रहने की प्रायिकता क्या होगी?

हल: कुल छात्र 40 है और केवल एक कार्ड का चयन करना है। सभी संभव परिणामों की संख्या = 40

(i) छात्रा के नाम के कार्ड के लिए अनुकूल परिणामों की संख्या = 25 (क्यों?)

$\therefore$ P (छात्रा के नाम का कार्ड) = P(छात्रा) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) छात्र के नाम के कार्ड के लिए अनुकूल परिणामों की संख्या = 15 (क्यों?)

इसलिए P (छात्र के नाम का कार्ड) = P(छात्र) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

अथवा P(छात्र) = 1 - P(छात्र नही) = 1 - P(छात्रा) = $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

अभ्यास - 13.1

1. निम्न कथनों को पूर्ण कीजिए:

   (i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नही' की प्रायिकता = ______________

   (ii) घटना जो घट नही सकती, की प्रायिकता __________ रहती है।
   ऐसी घटना __________ कहलाती है।

   (iii) निश्चित रूप से घटने वाली घटना की प्रायिकता __________ रहती है।
   ऐसी घटना ______ कहलाती है।

   (iv) किसी प्रयोग के सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग _________ होगा।

   (v) घटना की प्रायिकता 'से अधिक' अथवा 'के समान' __________ और 'से कम' अथवा 'के बराबर' _______ है।

2. निम्न में से कौनसे प्रयोग के समप्रायिक परिणाम रहते है? स्पष्ट कीजिए।

   (i) एक चालक मोटरगाडी शुरू करने का प्रयत्न करता है। कार शुरू होगी अथवा नही होगी।

   (ii) एक खिलाडी बास्केट-बॉल मारने का प्रयत्न करता है। वह निशाना लगा सकता है या नही।

   (iii) एक सत्य-असत्य प्रश्न का उत्तर देने के लिए परीक्षा ली गई। उत्तर सही या गलत होगा।

   (iv) एक शिशु ने जन्म लिया है वह लडका अथवा लडकी होगी।

3. यदि $P(E) = 0.05$, तो 'E नही' की प्रायिकता क्या होगी?

4. एक थैली में केवल नींबू की महक की कैन्डी है। थैली में न देखते हुए मालिनी उस मे से एक कैन्डी निकालती है। उसके द्‌वारा निकाली गई

   (i) संतरे की महक की कैंडी (ii) नींबू के महक की कैण्डी की प्रायिकता क्या होगी?

5. रहीम ताश के पत्तों में से सभी लाल पान के पत्ते निकाल लेता है। तो

   i. शेष गड्डी में से इक्का प्राप्त करना।

   ii. ईंट का पत्ता प्राप्त करना।

   iii. एक पत्ता प्राप्त करना जो लाल पान नही है।

   iv. लालपान का इक्का प्राप्त करने के प्रायिकता क्या होगी?

6. एक समूह में 3 विद्‌यार्थी है। उनमें से 2 विद्‌यार्थियों का जन्मदिवस भिन्न रहने की प्रायिकता 0.992 है। तो 2 विद्‌यार्थियों का जन्मदिवस एक रहने की प्रायिकता क्या होगी?

7. एक पांसे को एक बार फेंका गया। तो (i) अभाज्य संख्या, (ii) 2 और 6 के बीच की संख्या; (iii) विषम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

8. ताश की गड्डी में से एक लाल रंग का राजा चुनने की प्रायिकता क्या होगी?

9. पांसे, पत्ते अथवा जन्मदिवस का उपयोग करते हुए और 5 प्रश्न तैयार कीजिए और उनके हल के बारे मे शिक्षक और मित्रों के साथ चर्चा कीजिए।

13.7 प्रायिकता के और अधिक उपयोग (More Applications of Probability)

हमने प्रायिकता के उपयोग के कुछ उदाहरण देखे है। उनकी विषय-वस्तु और प्रायिकता का उपयोग किस तरह किया गया है, इसके बारे में जाना है। हमने पुनः पूरक घटनाओं की प्रायिकता भी देखी। ऊपर दिये गये अभ्यास और उदाहरणों में पूरक घटनाओं को और प्रारंभिक घटनाओं को क्या आप पहचान सकेंगे? शिक्षक और मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। अब हम प्रायिकता के और अधिक उपयोग देखेंगे?

उदाहरण-8. एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल रंग की गोलियाँ है। यदि बक्से से मुक्त रूप में (at random) एक गोली चुनी गई तो वह (i) सफेद (ii) नीली (iii) लाल की प्रायिकता क्या होगी?

हल: गोली मुक्त रूप से निकाली गई इसका अर्थ है निकालने के लिए सभी गोलियाँ समप्रायिक है।

$\therefore$ सभी संभव परिणामों की संख्या $= 3 + 2 + 4 = 9$ (क्यों?)

माना कि सफेद गोली निकालने की घटना W से, नीली गोली निकालने की घटना B से और लाल रंग की गोली निकालने की घटना R से निर्देशित होती है।

(i) घटना W के अनुकूल परिणामों की संख्या $= 2$

इसलिए, $P(W) = \frac{2}{9}$

इसी तरह, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ और (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

ध्यान मे रखिए कि $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

उदाहरण-9. हरप्रीत एक साथ दो भिन्न सिक्कों को (एक रूपये का एक सिक्का और दूसरा 2 रूपये का) उछालती है। उसे कम से कम एक चित (head) आने की प्रायिकता क्या होगी?

हल : हम चित के लिए 'H' और पट (tail) के लिए 'T' लिखते है। जब दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, सभी संभव परिणाम (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) रहते है जो सम प्रायिक है। यहाँ (H, H) का अर्थ है प्रथम सिक्के (मान लीजिए ₹1 पर) पर चित और दूसरा सिक्का (₹2 पर) भी चित रहता है। इसी तरह (H, T) का अर्थ है प्रथम सिक्के पर चित और द्वितीय सिक्के पर पट और इत्यादि।

घटना E, कम से कम एक चित रहना' के अनुकूल परिणाम (H, H), (H, T) और (T, H).है। इसलिए E के अनुकूल परिणामों की संख्या 3 है।

$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$ [क्योंकि सभी संभव परिणाम $= 4$]

i.e., अर्थात हरप्रीत को कम से कम एक चित आने की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$

इसकी जाँच कीजिए।

क्या आपने अवलोकन किया है कि अब तक चर्चित सभी उदाहरणों में, प्रत्येक प्रयोग में, संभव परिणामों की संख्या सीमित (finite) है यदि नही, तो अब जाँच कीजिए।

ऐसे बहुत से प्रयोग है जिसमे दो दिये हुए संख्याओं के बीच परिणामो की संख्या रहती है अथवा जिसमें वृत्त या आयत, आदि में प्रत्येक बिंदु परिणाम रहता है। ऐसी स्थिति में क्या आप सभी संभव परिणामों की संख्या की गिनती कर सकते हैं? जैसे कि आप जानते हैं यह असंभव है क्योंकि दी गई दो संख्याओं के बीच अनंत संख्याएँ है अथवा वृत्त के अन्तर्गत अनन्त बिन्दु है। इसलिए, आपने जो सैद्धान्तिक प्रायिकता की परिभाषा अब तक पढी है उसे, वर्तमान रूप में प्रयुक्त नही कर सकते है।

इसका क्या हल है? इसका उत्तर देने के लिए, निम्न उदाहरण देखिए:

उदाहरण-10. (परीक्षा के लिए नही है।) एक संगीत-कुर्सी-खेल (Musical-Chair-Game) में, एक संगीत बजानेवाले व्यक्ति को कहा गया कि खेल प्रारंभ होने के 2 मिनट के भीतर किसी भी समय संगीत बजाना बंद करना है। तो प्रारंभ के बाद प्रथम आधे मिनट के भीतर संगीत बंद करने की प्रायिकता क्या होगी?

हल : यहाँ, संभव परिणाम, 0 से 2 के बीच की सभी संख्याएँ है। संख्या रेखा पर 0 से 2 के बीच का भाग दर्शाया गया है।

0 $\frac{1}{2}$ 1 2

माना कि, E वह घटना है कि 'प्रथम $\frac{1}{2}$ मिनट के भीतर संगीत बंद किया गया।

E के अनुकूल परिणाम, संख्या-रेखा पर 0 से $\frac{1}{2}$ तक सभी बिंदु है।

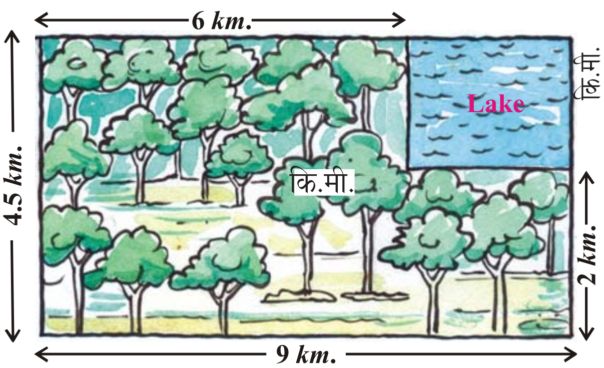
0 और 2 के बीच दूरी 2 है, जबकि 0 और $\frac{1}{2}$ के बीच दूरी $\frac{1}{2}$ है।

क्योंकि सभी परिणाम समप्रायिक है, हम तर्क कर सकते कि कुल दूरी 2 है और घटना E के अनुकूल परिणामों की दूरी $\frac{1}{2}$ है।

$$\text{अतः, } P(E) = \frac{\text{घटना E के अनुकूल दूरी}}{\text{कुल दूरी जिसमे सभी परिणाम विद्यामान है}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

अब हम इसी धारणा को प्रायिकता ज्ञात करने के लिए आगे बढाने का प्रयत्न करते है, जिससे अनुकूल क्षेत्रफल और कुल क्षेत्रफल का अनुपात ही प्रायिकता कहलाती है।

उदाहरण-11. एक लापता हेलीकॉप्टर, चित्र में दिखाये जैसे आयताकार क्षेत्र में कहीं दुर्घटनाग्रस्त हुआ ऐसी सूचना मिली। आकृति में दिखाए अनुसार इस तालाब में हेलीकॉप्टर के दुर्घटनाग्रस्त होने की प्रायिकता क्या होगी?



हल : हेलीकॉप्टर, क्षेत्र में कहीं भी दुर्घटनाग्रस्त होने के लिए समप्रायिक है। संपूर्ण क्षेत्र का क्षेत्रफल जहाँ हेलीकॉप्टर दुर्घटनाग्रस्त हो सकता है $= (4.5 \times 9)$ कि.मी.$^2 = 40.5$ कि.मी.^{2}

तालाब का क्षेत्रफल $= (2.5 \times 3)$ कि.मी.$^2 = 7.5$ कि.मी.^{2}

इसलिए, P (तालाब में हेलीकॉप्टर दुर्घटनाग्रस्त होना) $= \frac{7.5}{40.5} = \frac{5}{27} = 0.185$

उदाहरण-12. एक गत्ते के डिब्बे में 100 कुर्ते रखे हुए है जिसमे से 88 अच्छे है, 8 मे कम त्रुटियाँ है और 4 में बडी त्रुटियाँ है। जॉनी एक व्यापारी केवल अच्छे कुर्तों को स्वीकार करता है, किन्तु सुजाता, दूसरी व्यापारी केवल बडे त्रुटियों के कुर्तो को अस्वीकार करती है। गत्ते के डिब्बे से अपनी इच्छानुसार एक कुर्ता निकाला गया तो वह (i) जॉनी के लिए स्वीकार योग्य (ii) सुजाता द्वारा स्वीकार योग्य की प्रायिकता क्या होगी?

हल : 100 कुर्तों के डिब्बे में से इच्छानुसार 1 कुर्ता चुना गया। इसलिए,यहाँ 100 समप्रायिक परिणाम है।

(i) जॉनी के लिए अनुकूल (स्वीकार ने योग्य) परिणामों की संख्या = 88 (क्यों?)

इसलिए, P (जॉनी के द्वारा स्वीकार ने योग्य कुर्ता) $= \frac{88}{100} = 0.88$

(ii) सुजाता के लिए अनुकूल परिणामों की संख्या $= 88 + 8 = 96$ (क्यों?)

इसलिए, P (सुजाता द्वारा स्वीकारने योग्य कुर्ता) $= \frac{96}{100} = 0.96$

उदाहरण-13. दो पांसे, एक लाल और एस पीला,एक ही समय पर फेंके गये। सभी संभव परिणामों को लिखिए। पांसो के शीर्ष पृष्ठ पर आने वाले दो संख्याओ का योग (i) 8 (ii) 13 (iii) 12 से कम अथवा बराबर रहने की प्रायिकता क्या होगी?

हल : जो लाल रंग का पांसा '1' दिखायेगा, तब पीला पांसा 1, 2, 3, 4, 5, 6. में से कोई भी संख्या दिखाई देगी। यही सत्य होगा जब लाल पांसा '2', '3', '4', '5' अथवा '6'. दिखायेगा। प्रयोग के सभी संभव परिणाम आकृति में दिखाये गये है। प्रत्येक क्रमित युग्म में प्रथम संख्या यह लाल पांसे पर दिखाई देने वाली संख्या है और द्वितीय संख्या यह सफेद पांसे पर होगी। ध्यान मे रखिए कि युग्म (1, 4) यह (4, 1). (क्यों?)

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

अतः, संभव परिणामों की संख्या $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

(i) घटना 'दो संख्याओं का योग 8 को E द्वारा निर्देशित करेंगे और इसके अनुकूल परिणाम = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (आकृति देखिए)

अर्थात, E के अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 5$.

अतः, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

(ii) घटना, F 'दो अंको का योग 13 के अनुकूल परिणाम नही है। इसलिए, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) घटना G, 'दो संख्याओं का योग 12 या 12 से कम के लिए सभी परिणाम अनुकूल है।

इसलिए, $P(G) = \frac{12}{12} = 1$

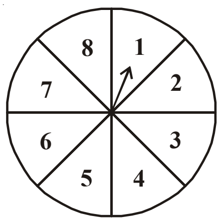
अभ्यास - 13.2

1. एक थैली में 3 लाल गेंद और 4 काले गेंद है। थैली मे से एक गेंद इच्छानुसार चुनी गयी। वह चुनी गयी गेंद (i) लाल (ii) लाल न होने की प्रायिकता क्या होगी?
2. एक बक्से में 5 लाल, 8 सफेद और 4 हरी गोलियाँ रखी है। बक्से में से इच्छानुसार एक गोली निकाली गई। निकाली हुई गोली (i) लाल (ii) सफेद (iii) हरी न होने की प्रायिकता क्या होगी?
3. एक किडी बैंक में 50 पैसे के 100 सिक्के, ₹1 के 50 सिक्के, ₹2 के 20 सिक्के और ₹5 के सिक्के 10 है। यदि यह समप्रायिक है कि जब किडी बैंक का ऊपरी भाग नीचे की ओर हो जाए तब इसमे से एक सिक्का नीचे गिरता है। यह सिक्का (i) 50 पैसे का (ii) ₹5 का न होने की प्रायिकता क्या होगी?
4. गोपी, उसके अक्केरियम के लिए एक मछली खरीदता है। दुकानदार टंकी में से, जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली है, (आकृति देखिए।) 1 मछली ऐच्छिक रूप से निकालता है। निकाली गई मछली, नर मछली रहने की प्रायिकता क्या होगी?

5. एक जुए के खेल में (game of chance) घूमता हुआ तीर है जो 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(आकृति देखिए।) संख्याओं में से एक की ओर दिशानिर्दिष्ट करते हुए विरामावस्था मे आता है। इसके परिणाम समप्रायिक है तो वह तीर

   (i) 8 पर आने की ? (ii) विषम संख्या

   (iii) 2 से बडी संख्या (iv) 9 से कम संख्या की ओर अभिमुख होने की प्रायिकता क्या होगी?



6. एक अच्छे फेंटे हुए ताश की गड्डी में से एक पत्ता चुना गया। तो वह

   (i) लाल रंग का राजा (ii) चित्र का पत्ता (iii) लाल चित्र का पत्ता

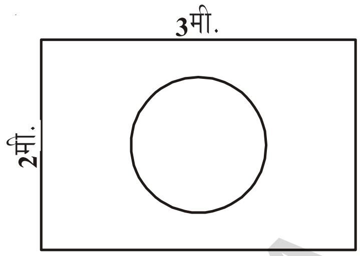
   (iv) लाल पान का गुलाम (v) हुकुम का पत्ता

   (vi) ईंट की राणी आने की प्रायिकता क्या होगी?
7. 5 ईंट के पत्ते-दस, गुलाम, राणी, राजा और इक्का, लेकर उनके पृष्टों को नीचे की ओर करते हुए, अच्छी तरह से फेंटा गया। तदन्तर एक पत्ता इनमे से चुना गया। तो वह

   (i) वह पत्ता, राणी रहने की प्रायिकता क्या होगी?

   (ii) यदि राणी निकाली गई और वह एक ओर अलग रखी गई। शेष में से और एक पत्ता (second card) चुना गया तो वह (a) इक्का (b) राणी रहने की प्रायिकता क्या होगी?
8. 12 त्रुटियुक्त पेन, संयोगवश 132 अच्छे पेन के साथ रख दिए। केवल देखने से कौनसा पेन अच्छा या त्रुटियुक्त है, यह बताना असंभव है। इस पेन के समूह से मुक्त रूप से एक पेन निकाला गया। निकाला गया पेन अच्छा रहने की प्रायिकता का निर्धारण कीजिए।
9. 20 बल्ब के समूह मे 4 त्रुटियुक्त है। इस समूह से ऐच्छिक रूप से एक बल्ब चुना गया। यह बल्ब त्रुटियुक्त होने की प्रायिकता क्या होगी? मान लीजिए, इसके पूर्व चुने गये बल्ब त्रुटिपूर्ण न हो और वह वापस नही रखा गया। पुनः शेष समूह से एक बल्ब ऐच्छिक रूप से चुना गया तो वह बब्ल त्रुटियुक्त न रहने की प्रायिकता क्या होगी?
10. एक बक्से में 1 से 90 तक अंकित 90 (डिस्क वृत्ताकार प्लेट) रखी है। इसमे से ऐच्छिक रूप से एक डिस्क चुनी गयी तो उस पर अंकित संख्या (i) दो अंकों की संख्या (ii) पूर्ण वर्ग संख्या (iii) 5 से नि:शेष भाग जाने वाली संख्या रहने की प्रायिकता क्या होगी?

11. मान लीजिए, आप, आकृति में दिखाये जैसे, एक आयताकार क्षेत्र पर एक डाई (die) गिराये। तो वह 1 मी. व्यास के वृत्त के भीतर गिरने की प्रायिकता क्या होगी?



12. एक समूह में 144 बॉल पेन रखे है जिसमे 20 त्रुटियुक्त है और शेष अच्छे है। एक दुकानदार इसमें से ऐच्छिक रूप से एक पेन निकालकर सुधा को देता है। तो वह पेन (i) सुधा खरीदेगी? (ii) वह नही खरीदेगी? इसकी प्रायिकता क्या होगी?
13. दो पांसों को एक साथ लुढ़काया गया और आये हुए अंको को जोडा गया। (i) नीचे पूर्ण सारणी दी हुई है।

घटना : 'दो पांसो पर के अंको का योग'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{12}{36}$

(ii) एक विद्यार्थी द्वारा तर्क किया गया कि ' यहाँ संभव परिणामों की संख्या 11 है जो 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 है। इसलिए, प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{11}$. रहती है। इस तर्क के साथ क्या आप सहमत हैं? आपके उत्तर की जाँच कीजिए।
14. एक खेल में, 'एक ₹. के सिक्के को 3 बार उछालना है और प्रत्येक बार इसका परिणाम लिख लेना है।' हनीफ जीतेगा यदि तीनो बार समान परिणाम प्राप्त हो, अर्थात तीन चित या तीन पट और अन्य स्थिति में वह हारेगा। हनीफ द्वारा खेल हारने की प्रायिकता की गणना कीजिए।
15. एक पांसा दो बार फेंका गया। (i) प्रत्येक बार 5 नही आना (ii) कम से कम एक बार 5 आने की प्रायिकता क्या होगी? (संकेत : एक पांसा दो बार फेंकना अथवा दो पांसे एक साथ फेंकना, दोनो प्रयोग एक ही (समान) प्रयोग समझा जाता है।)

वैकल्पिक अभ्यास (Optional Exercises)

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नही है]

1. दो ग्राहक श्याम और एकता एक विशेष दुकान में एक ही सप्ताह में (मंगलवार से शनिवार तक) जाते है। प्रत्येक के द्वारा दुकान में किसी भी दिन जाना, समप्रायिक है। तो दोनों द्वारा दुकान को (i) एक ही दिन (ii) क्रमागत दिन (iii) भिन्न दिन जाने की प्रायिकता क्या होगी?
2. एक थैली में 5 लाल गेंद और कुछ नीले गेंद है। यदि नीला गेंद निकालने की प्रायिकता, लाल गेंद निकालने की प्रायिकता से दुगुनी है, तो थैली में नीले गेंदों की संख्या का निर्धारण कीजिए।
3. एक बक्से में रखे गये 12 गेंदो में से x काले है। यदि बक्से में से एक गेंद ऐच्छिक रूप से निकाला गया तो वह काला गेंद रहने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। यदि बक्से में और 6 काले गेंद रखे गए तो अब काला गेंद निकालने की प्रायिकता, पहले की प्रायिकता से दुगुनी होगी तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. एक मर्तबान (jar) में 24 गोलियाँ है जिसमें कुछ हरी और अन्य नीली है। यदि इसमें से ऐच्छिक रूप से एक गोली निकाली गई, वह हरे रंग की रहने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ है। मर्तबान में, नीली गोलियों की संख्या बताइए।

प्रस्तावित परियोजना

शास्त्रीय प्रायिकता से प्रायोगिक प्रायिकता की तुलना करना

- विभिन्न स्थितियों में प्रायिकता ज्ञात करना जैसे एक पासे को 100 बार उछालना और (i) सम (ii) विषम (iii) रूढी संख्या प्राप्त करना ।

हमने क्या चर्चा की

इस अध्याय में, हमने निम्न बातों को सीखाः

1. हमने प्रायोगिक प्रायिकता और सैद्धान्तिक की प्रायिकता के बारे में देखा।
2. किसी घटना E के सिद्धान्त की (Theoretical or classical) प्रायिकता, जो P(E), के रूप में लिखते है, तथा उसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$P(E) = \frac{\text{परीक्षणों (trial) की संख्या जिसमे घटना घटती है।}}{\text{कुल परीक्षणों की संख्या}}$$

   जहाँ हम मानते है कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक होते है।
3. निश्चित घटना की प्रायिकता 1 रहती है।
4. असम्भव घटना की प्रायिकता शून्य (0) रहती है।
5. घटना E की प्रायिकता, संख्या P(E) रहती है जो $0 \le P(E) \le 1$
6. घटना जिसका केवल एक परिणाम रहता है, प्रारंभिक घटना कहलाती है। किसी प्रयोग के सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग 1 रहता है।.
7. किसी भी घटना के लिए, E, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, जहाँ $\overline{E}$ का अर्थ है 'E नही'। E और $\overline{E}$ पूरक घटनाएँ (complementary events) कहलाते है।
8. इस अध्याय में उपयोग मे लाये गए कुछ अधिक पदों को नीचे दिया गया है।

यादृच्छिक प्रयोग (random experiments) : यादृच्छिक प्रयोगों का परिणाम पूर्व ज्ञात होता है लेकिन किसी विशेष प्रदर्शन के परिणाम का पूर्वानुमान नहीं लगा सकते है।

समप्रायिक घटनाएँ (equally likely events): दो या अधिक घटनाएँ समप्रायिक कहलाती है यदि इनमे से प्रत्येक घटना घटने की संभावना समान रहती है।

परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (**Mutually Exclusive events**): दो या अधिक घटनाएँ एक दूसरे के प्रत्येक अपवर्जी कहलाती हैं प्रत्येक घटना का घटित होना, अन्य घटना के घटित होने को रोकता है।

पूरक घटनाएँ (**Complementary events**): माना कि किसी प्रयोग के कुछ परिणाम है। सैंपल सर्वे में अन्य सभी परिणामों की घटना जो अनुकूल घटना नही है, पूरक घटना कहलातीहै।

निरशेष घटनाएँ (**Exhaustive events**): सभी घटनाएँ, निरशेष घटनाएँ कहलाती है। यदि इनका संयोग सैंपल समष्टि (sample space)रहता है।

निश्चित घटनाएँ (**Sure Events**) : किसी ऐच्छिक प्रयोग की सैंपल समष्टि, निश्चित घटना कहलाती है क्योंकि प्रयोग के किसी भी परीक्षण में, इसकी कोई घटना घाटीत होती है।

असंभव घटना (**Impossible Events**) : एक घटना जो किसी भी तरह घटित नही होती है, असंभव घटना कहलाती है।

अध्याय

14

सांख्यिकी

(Statistics)

14.1 प्रस्तावना

गणेश ने अपनी कक्षा के 26 छात्रों के गणित के संग्रहणात्मक इकाई - I के अंक, इस प्रकार पंजीकृत किये।

अर्जुन	76	नारायण	12
कामीनि	82	सुरेश	24
शफ़िक	64	दुर्गा	39
केशव	53	शिवा	41
लता	90	रहीम	69
राजेन्द्र	27	राधा	73
रामू	34	कार्तिक	94
सुधा	74	जोसफ	89
क्रिष्णा	76	इकरम	64
सोमु	65	लक्ष्मी	46
गौरी	47	सीता	19
उपेन्द्र	54	रेहाना	53
रामय्या	36	अनिता	69

(ऊपर दिए गए दत्त ठीक ढंग से संगठित है या नहीं?)

अध्यापिका ने कक्षा के गणित के अंकों के संग्रहणात्मक इकाई का विवरण देने के लिए कहा।

गणेश ने अपनी कक्षा के प्रदर्शन को समझने के लिए इस तालिका को बनाया।

अंक	छात्रों की संख्या
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

ऊपर की तालिका में दिए गए दत्त समूहबद्ध है या असमूहबद्ध है।

उसने अपनी अध्यापिका को वह तालिका बताई, अध्यापिका ने दत्तों के संगठन को समझने के लिए उसकी सराहना की। हम यह देखते हैं कि बहुत सारे विद्यार्थियों के अंक 51-75 के बीच है। क्या आप विचार करते है कि गणेश ने छोटी श्रेणी का उपयोग किया है?

पिछली कक्षा में आपने समूहबद्ध और असमूहबद्ध दत्तों में अंतर के बारे में सीखा। असमूहबद्ध दत्तों के मध्यमान को ज्ञात करना इसके बारे में भी आपने पढा। इसका स्मरण करते हुए अब मध्यमान, मध्यिका और बहुलक ज्ञात करना सीखेंगे।

14.2 असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान (Mean of ungrouped data) :-

हमें ज्ञात है कि निरीक्षणों का मध्यमान (औसत) सभी मूल्यों के योग को कुल निरीक्षणों के संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। मान लीजिए $x_1, x_2, \ldots, x_n$ निरीक्षण है $f_1, f_2, \ldots, f_n$. बारंबारिता है। इसका अर्थ है कि निरीक्षण x_1 आता है f_1 बार, x_2 आता है f_2 बार, और इसी प्रकार....

अब, निरीक्षणों के मूल्यों का योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$, और निरीक्षणों की संख्या $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

अतः, मध्यमान $\bar{x}$ दिए गए दत्तों की इस प्रकार दिया गया है।

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

स्मरण कीजिए कि संक्षिप्त में इसे ग्रीक अक्षर $\sum$ (इसे सिग्मा पढते हैं) के उपयोग से लिख सकते हैं जिसका अर्थ है योग, अर्थात $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

उदाहरण-1. किसी विद्यालय के दसवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्तांकों की बारंबारिता तालिका नीचे दी गई है तो विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
विद्यार्थियों की संख्या(f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

हल : दत्तों को दुबारा - लिखकर निरीक्षणों का योग ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (fi)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
कुल	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

अतः $\quad \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

अर्थात्, मध्यमान अंक = 59.3.

हमारे वास्तविक जीवन में, दत्त इतने बडे हैं कि उनका अर्थपूर्ण अभ्यास करना होगा।

अतः हमें असमूहबद्ध दत्तों को समूहबद्ध दत्तों में बदलने की आवश्यकता है और मध्यमान ज्ञात करने की विधि को ढूँढ निकालना है।

मान लीजिए उदाहरण 1 असमूहबद्ध दत्तों के समूहबद्ध दत्तों में 15 का वर्गांतर लेते हुए बाँटेंगे या यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि यदि कोई बारंबारिता वर्गांतर के उच्च श्रेणी से मेल खाती हो तो उसे उसके अगले वर्गांतर की निम्न श्रेणी में रखना चाहिए। उदाः 4 चार विद्यार्थी जिन्होंने 40 अंक प्राप्त किए उन्हें 40-55 के श्रेणी में रखेंगे, लेकिन 25-40 में नहीं, इस बात को ध्यान में रखते हुए समूहबद्ध बारंबारिता तालिका बनाएँगे :-

वर्गांतर	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
छात्रों की संख्या	2	3	7	6	6	6

अब, प्रत्येक वर्गांतर के लिए हमें एक बिंदु की आवश्यकता होती है जो पूर्ण श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। यह मान लेते है कि प्रत्येक वर्गांतार की बारंबारिता मध्य बिंदु के आसपास रहती है। अतः प्रत्येक श्रेणी का मध्यबिंदु उस श्रेणी में आने वाली संख्या होती है जिसे class mark या श्रेणी अंक कहते हैं। स्मरण कीजिए कि हम श्रेणी अंक के लिए उच्च सीमा और निम्न सीमा की औसत लिखते हैं।

10-25 श्रेणी में, श्रेणी अंक $\frac{10+25}{2}$ =17.5. उसी प्रकार, शेष वर्गांतर का श्रेणी अंक ज्ञात करेंगे। उन्हें हम तालिका में लिखेंगे। इसे हम x_i लिखते हैं। अब हम पिछले उदाहरण की तरह मध्यमान की गणना करेंगे।

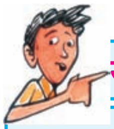
वर्गांतर	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	श्रेणी अंक मध्यमान (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
कुल	$\sum f_i$=30		$\sum f_ix_i$=1860.0

अंतिम स्तंभ में, मूल्यों के योग में $\sum f_ix_i$ देते है। अतः मध्यामान $\bar{x}$ दिए गए दत्तों का

$$\bar{x}=\frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}=\frac{1860}{30}=62$$

इस मध्यमान को ज्ञात करने की नई पद्धति को प्रत्यक्ष विधि (direct method) कहते हैं।

हम ऊपर दर्शाए अनुसार, उन्हीं दत्तों का उपयोग कर रहे हैं और उसी सूत्र को नियुक्त कर रहे हैं, मध्यमान की गणना या हल करने के लिए लेकिन जो (result) उत्तर प्राप्त हो रहा है वह अलग है और 62 मध्यमान है। क्या आप सोच सकते कि ऐसा क्यों होता है?



सोचिए और चर्चा कीजिए।

1. समूहबद्ध और असमूहबद्ध दत्तों से मध्यमान की गणना कर सकते हैं। इनमें कौनसी विधि उपयुक्त होगी? और क्यों?
2. समूहबद्ध दत्तों को हल करने के लिए कौनसी विधि उपयुक्त होगी?

समूहबद्ध दत्तों की गणना करने के लिए सबसे उपयुक्त विधि कौनसी होगी।

जब संख्याएँ या अंकिय मूल्य x_1 और f_1 बड़े रहते है तो x_1 और f_1 के गुणनफल में समय की खपत ज्यादा होती है। अतः इस स्थिति में एक और विधि के बारे में विचार करेंगे जिसमें कम गुणनफल आसानी से ज्ञात किया जा सके।

हम f_i को कुछ भी नही कर सकते लेकिन हम प्रत्येक x_i को छोटी संख्या में बदल सकते हैं जिससे गुणनफल सरल हो। इसे हम किस प्रकार कर सकते हैं? एक निश्चित संख्या में से प्रत्येक मूल्य को घटाने पर छोटी संख्या प्राप्त होती है। अब इस विधि से उदाहरण 1 को हल करेंगे।

(पहले चरण में) हमें x_i' में से किसी एक मूल्य को कल्पित मध्यमान के रूप में चुनकर उसे a से सूचित करेंगे। गणना की सरलता के लिए 'a' का मूल्य $x_1, x_2, ..., x_n$. के मध्य होना चाहिए। अतः $a = 47.5$ या $a = 62.5$. मान लीजिए $a = 47.5$.

दूसरे चरण में (x_i के प्रत्येक मूल्य के साथ 'a' का अन्तर ज्ञात करेंगे। जिसे हम d_i से सूचित करेंगे।

अतः $\quad d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

तीसरे चरण में d_i का गुणनफल संलग्न f_i से करेंगे और $f_i d_i$ के सभी मूल्यों का योग ज्ञात करेंगे। इसकी गणना नीचे तालिका में दी गई है।

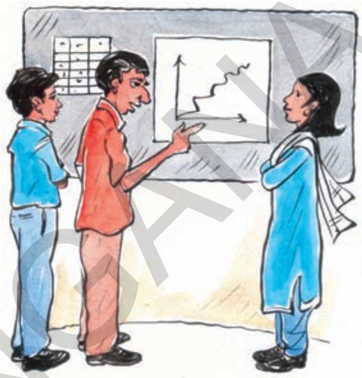
वर्गांतर	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	कक्षा अंक (मध्य मूल्य)(x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
कुल	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

अतः ऊपर की तालिका से विचलन का मध्यमान, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

अब, $\bar{d}$ और $\bar{x}$. के बीच संबंध ज्ञात करेंगे।

जैसे हम d_i को प्राप्त करने के लिए x_i के प्रत्येक मूल्य में से 'a' को घटाते है, उसी प्रकार मध्यमान $\bar{x}$ को प्राप्त करने के लिए 'a' को $\bar{d}$ में जोडेंगे। इसे गणितीय पद्धति द्वारा इस प्रकार ज्ञात किया जाता है,

विचलन का मध्यमान, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$



अतः, $$\bar{d} = \frac{\sum f_i(x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a$$

इसलिए $$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

तालिका से a, $\sum f_i d_i$ और $\sum f_i$ के मूल्यों को उपरोक्त में स्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

अर्थात, छात्रों द्वारा प्राप्तांक का मध्यमान $= 62$.

ऊपर दी गई विधि को 'कल्पित मध्यमान विधि'' कहते हैं।

क्रियाकलाप

उदाहरण 1 में दिये गये दत्तों के मध्यमान को विचलन पद्धति से x_i के क्रमागत मूल्यों अर्थात् 17.5, 32.5, ... आदि को कल्पित मध्यमान लेकर ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। आगे हम नीचे दिये गये अंशों पर चर्चा करेंगे।

1. क्या समानान्तर माध्य के मूल्य उपरोक्त सभी स्थितियों में समान होंगे?
2. यदि प्रत्यक्ष मध्यमान को कल्पित मध्य के रूप में लेने पर $\sum f_i d_i$ का मूल्य क्या होगा?
3. किसी भी मध्य-मूल्य (कक्षा अंक) को कल्पित मध्यमान लेने का कारण क्या हो सकता हैं?

नीचे दी गई तालिका में ध्यान पूर्वक चौथे स्तंभ को देखिए। सभी मूल्य 15 के गुणक है अतः यदि हम चौथे स्तंभ के सभी मूल्यों को 15 से विभाजित करेंगे। तो हमें छोटी संख्या प्राप्त होती है जिसे हम f_i से गुणा करते हैं। (यहाँ प्रत्येक कक्ष का वर्गांतर 15 है।)

अतः, मान लीजिए $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ जहाँ a कल्पित मध्यमान है और h कक्षा की लम्बाई है।

अब, u_i की गणना इस विधि द्वारा की जा सकती है। (अर्थात $f_i u_i$ ज्ञात कर $\sum f_i u_i$ का मूल्य ज्ञात करेंगे।) $h = 15$, [प्रायः कक्षा की लम्बाई को h लेते हैं लेकिन यह अंतराल कक्षा का अंतराल होना आवश्यक नहीं है।]

मान लीजिए $\quad \bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

वर्गांतर	छात्रों की संख्या (f_i)	कक्षा अंक (x_i) (मध्य मूल्य)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
कुल	$\sum f_i$=30				$\sum f_i u_i$=29

यहाँ, फिर से, $\bar{u}$ और $\bar{x}$ के बीच के संबंध को ज्ञात करेंगे।

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

अतः $$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

अतः $$\bar{u} = \frac{\sum f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

या $$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

इसलिए $$\bar{x} = a + h\left[\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right]$$

या $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

दिए गए तालिका से $a, \sum f_i u_i\, h$ और $\sum f_i$ के मूल्यों को सूत्र में स्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

अतः विद्यार्थी द्वारा प्राप्त मध्यमान = 62.

ऊपर दी गई विधि को Step-deviation या क्रम विचलन विधि कहते हैं।

- यदि सभी d_i में समान गुणनखण्ड हो तो क्रम-विचलन पद्धति सुविधाजनक होती है।
- तीनो विधियों द्वारा प्राप्त मध्यमान समान होते हैं।
- कल्पित - मध्यमान विधि और क्रम विचलन विधि यह प्रत्यक्ष विधि का सरलीकृत नमूना है।
- सूत्र $\bar{x} = a + h\bar{u}$ में a और h ऊपर दिए गए अनुसार न हो तो भी इसका अस्तित्व रहता है।

  यदि वे कोई अशून्य संख्याएँ हो $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

  इस विधि से दूसरे उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-2. नीचे दी गई तालिका में भारत के विभिन्न प्रदेशों के ग्रामीण क्षेत्र के प्राथमिक विद्यालयों में महिला अध्यापिकाओं का प्रतिशत वितरण दिया गया है। तो महिला अध्यापिका के मध्यमान प्रतिशत को तीनों विधियों में ज्ञात कीजिए।

महिला अध्यापिका प्रतिशत	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
प्रदेशों की संख्या/U.T.	6	11	7	4	4	2	1

(Source : *Seventh All India School Education Survey conducted by NCERT)*

हल: सभी वर्गांतरों के कक्षा अंको (मध्य-मूल्यों) को ज्ञात कर तालिका में लिखिए।

यहाँ हम $a = 50, h = 10,$

तो $d_i = x_i - 50$ और $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

अब d_i और u_i ज्ञात कर तालिका में लिखने पर,

महिला अध्यापिकाओं का प्रतिशत C.I	राज्यों/के.शा. प्रदेशों की संख्या f_i	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
कुल	35				1390	-360	-36

ऊपर की तालिका से हमें $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$ प्राप्त होता है

प्रत्यक्ष विधि के उपयोग से, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

कल्पित मध्यमान विधि के उपयोग से, $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

क्रम विचलन विधि के उपयोग से $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

अर्थात प्राथमिक विद्‌यालय के ग्रामीण क्षेत्र की महिला अध्यापिकाओं का औसत मध्यमान 39.71 है।

सोचिए और चर्चा कीजिए :-

1. तीनों विधियों द्‌वारा प्राप्त परिणाम समान है।
2. यदि x_i और f_i पर्याप्त छोटी संख्याएँ हो, तो कौनसी विधि उचित होगी?
3. यदि x_i और f_i बडी संख्या हो, तो कौनसी विधि का उपयोग उचित होगा?

यदि वर्गांतर असमान हो तथा x_i का मूल्य बडा हो तब भी हम विचलन पद्‌धति का उपयोग d_i के किसी उचित भाजक के साथ कर सकते हैं।

उदाहरण -3. नीचे दिए बारंबारिता से गेंदबाज़ों द्‌वारा लिए गए विकेटों की संख्या दी गयी है। तो उचित विधि द्‌वारा विकेटों का मध्यमान ज्ञात कीजिए मध्यमान का अर्थ क्या है?

विकेटों की संख्या	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
गेंदबाज़ों की संख्या	7	5	16	12	2	3

हल : यहाँ कक्षा का वर्गांतर बढते जा रहा, और x_i का मूल्य बहुत बडा है, तो विचलन विधि को लागू करने पर, $a = 200$, $h = 20$, से हमें निम्न मूल्य प्राप्त होते हैं।

विकेट की संख्या	बल्लेबाज की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ($h = 20$)	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
कुल	45				-106

$$\text{अतः } \bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

अतः 45 बल्लेबाज़ों द्वारा लिये गये औसत विकेटों की संख्या 152.89 है।

कक्षा के लिए प्रयोगात्मक कार्य (Classroom Project)

1. आपके विद्यालय में हाल ही में लिये गये परीक्षा में आपकी कक्षा द्वारा प्राप्त किये गये अंको को समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में लिखिए। दूसरे विषयों के अंको को भी लिखकर तुलना कीजिए। प्रत्येक का उचित विधि द्वारा मध्यमान ज्ञात कीजिए।
2. आपके शहर के 30 दिन का अत्यधिक तापमान के विवरण को पंजीकृत कर उसे समूहबद्ध तालिका में दर्शाइए। दिए गए दत्तों का मध्यमान उचित विधि से ज्ञात कीजिए।
3. अपनी कक्षा के सभी छात्राओं की ऊँचाई को माप कर दत्तों को इस संचित बारंबारिता समूह की तालिका में लिखिए। उचित पद्धति द्वारा दत्तों का मध्यमान ज्ञात कीजिये।

अभ्यास - 14.1

1. एक सर्वेक्षण के अनुसार, कुछ विद्यार्थियों के समूह द्वारा जिसमें उन्होंने निम्न जानकारी प्राप्त की जिसमें वृक्षों की संख्या जो 20 घरों में है तो प्रत्येक घर के वृक्षों का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

वृक्षों की संख्या	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

2. एक फैक्टरी में 50 मज़दूरों की दैनिक मज़दूरी की बारम्बारिता तालिका नीचे दी गई है मध्यमान ज्ञात कीजिए। आपकी सुविधा के अनुसार कोई भी विधि का उपयोग कीजिए।

दैनिक मज़दूरी रूपयों में	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
मज़दूरों की संख्या	12	14	8	6	10

3. किसी परिसर के कुछ बच्चों का जेब खर्च निम्न बारंबारिता तालिका में दिया गया है यदि मध्यमान ₹18 है तो f का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रतिदिन जेब खर्च (₹ में)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

4. किसी अस्पताल की तीस महिलाओं का परीक्षण किया गया और उनके हृदय की धडकन प्रति मिनट पंजीकृत की गयी हो, तो हृदय की धडकन का औसत (मध्यमान) ज्ञात कीजिए। उपयुक्त विधि का चयन कीजिए।

हृदय स्पंदन की संख्या/मिनट	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

5. एक खुदरे बाजार में, एक फल का विक्रेता, संतरों को बेचता है जो टोकरियों में रखे गए है। उन टोकरियों में संतरों की संख्या भिन्न-भिन्न है। दी गई तालिका में संतरों का वितरण इस प्रकार है।

संतरों की संख्या	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
टोकरियों की संख्या	15	110	135	115	25

तो प्रत्येक टोकरी में के संतरों का मध्यमान ज्ञात कीजिए। आप कौनसी विधि का चयन करेंगे?

6. किसी मुहल्ले के 25 घरों का दैनिक भोजन खर्च इस तालिका में दिया गया है।

दैनिक खर्चा रूपयों में	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
घरों की संख्या	4	5	12	2	2

तो उचित विधि द्वारा मध्यमान ज्ञात कीजिए।

7. किसी शहर के 30 मोहल्लों की वायु में SO_2 की मात्रा (ppm) का विवरण इस प्रकार है।

SO_2 ppm में	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
बारंबारिता	4	9	9	2	4	2

तो वायु में SO_2 की मात्रा का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

8. किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों के पूर्ण कार्य काल के उपस्थिति विवरण कक्षा अध्यापिका ने निम्न रूप से दिया। 56 दिनों के कार्यकाल में विद्यार्थियों का मध्यमान क्या होगा?

दिनों की संख्या	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
विद्यार्थियों की संख्या	1	3	4	4	7	10	11

9. निम्न तालिका में 35 शहरों का साक्षरता दर (प्रतिशत में) दिया गया है तो साक्षरता दर का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

साक्षरता % में	45–55	55-65	65-75	75-85	85-95
शहरों की संख्या	3	10	11	8	3

14.3 बहुलक (Mode) :

एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारंबारिता सबसे अधिक है उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहते है।

समूहबद्ध दत्तों के बहुलक की गणना से पहले हम असमूहबद्ध दत्तों के बहुलक ज्ञात करने की विधि का स्मरण करेंगे।

उदाहरण -4. 10 क्रिकेट मैचों में गेंदबाज़ के द्वारा विकेटों की ली गई संख्या 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3. है तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले निरीक्षणों को क्रम में व्यवस्थित कीजिए अर्थात: 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6 ज्यादा से ज्यादा मैचों में अर्थात (3बार) अतः दिये गये दत्तों का बहुलक लिये गये विकेटों की संख्या 2 है।

यह कीजिए।

1. निम्नलिखित दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. क्या बहुलक दत्तों के मध्य स्थित रहता है?
3. क्या उदाहरण के निरीक्षण में एक और दत्त को जोड़ने पर बहुलक बदलता है? इसका विचार कीजिए।
4. यदि उदाहरण 4 के अधिकतम मूल्य को 8 में परिवर्तित करेंगे तो क्या वह बहुलक को प्रभावित करते हैं? विचार कीजिए।

बारंबारिता को देखते हुए समूहबद्ध बंटन तालिका में के बहुलक को निर्धारित करना संभव नहीं है यहाँ हम केवल और उच्चतम बारंबारिता के कक्ष का पता लगा सकते है इसे (Modal Class) बहुलक वर्गांतर कहते हैं।

बहुलक वर्गांतर में ही बहुलक का मूल्य रहता है, और उसे सूत्र द्वारा बताया जा सकता है।

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ, l = बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा

h = बहुलक श्रेणी की लंबाई

f_1 = बहुलक श्रेणी की बारंबारिता

f_0 = बहुलक श्रेणी के तुरंत ऊपर वाली बारंबारिता

f_2 = बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता है।

उदाहरण-5. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा एक मोहल्ले के 20 परिवारों का सर्वेक्षण किया गया तथा इस तालिका में परिवार के सदस्यों की संख्या दी गयी है।

परिवार का वर्गीकरण	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवार की संख्या	7	8	2	2	1

दिए गए दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ अधिकतम बारंबारिता 8 है, जिसकी वर्ग श्रेणी 3-5 है इसलिए बहुलक श्रेणी 3-5 होगी।

बहुलक श्रेणी = 3-5, बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा = 3, वर्गांतर $(h) = 2$

श्रेणी की बारंबारिता $(f_1) = 8$,

बहुलक श्रेणी के तुरन्त ऊपर वाली बारंबारिता $(f_0) = 7$,

बहुलक श्रेणी के तुरन्त नीचे वाली बारंबारिता $(f_2) = 2$.

अब, इन मूल्यों को सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

इसलिए दिए गए दत्तों का बहुलक $= 3.286$.

उदाहरण-6. गणित की परीक्षा में 30 छात्रों के अंक नीचे की तालिका में दिये गये है। दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए और बहुलक और मध्यमान की तुलना कीजिए तथा उनकी व्याख्या कीजिए।

वर्गांतर	छात्रों की संख्या (f_i)	श्रेणी अंक (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
कुल	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

हल: विद्यार्थियों की अधिकतम संख्या (अर्थात 7) जिन्हें सबसे अधिक अंक मिले उनका वर्गांतर 40-65 है अर्थात् बहुलक श्रेणी 40 - 55 होगी।

बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा $l = 40$,

वर्गांतर $(h) = 15$,

बहुलक श्रेणी की बारंबारिता Modal Class की $(f_1) = 7$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत ऊपर वाली बारंबारिता $(f_0) = 3$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता $(f_2) = 6$.

अब, सूत्र के उपयोग से

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times7-6-3}\right)\times 15 = 40 + 12 = 52$$

टिप्पणी : बहुलक अंक 52 है, अब उदाहरण 1 से, हमें ज्ञात है कि, मध्यमान अंक 62 है। अत्यधिक विदयार्थियों ने 52 अंक प्राप्त किए जब कि औसत विद्यार्थियों ने 62 अंक प्राप्त किये हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए।

1. परिस्थिति की मांग के अनुसार हम औसत अंक ज्ञात करने में रूचि रखते हैं या अधिक से अधिक विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों में रूचि रखते हैं।
   a. पहली स्थिति में हमें क्या ज्ञात हुआ।
   b. दूसरी स्थिति में हमें क्या ज्ञात हुआ।
2. क्या असमान श्रेणी के समूहबद्ध दत्तों का बहुलक ज्ञात किया जा सकता?

अभ्यास - 14.2

1. एक वर्ष में अस्पताल में भर्ती किए गए रोगियों की संख्या इस तालिका में दी गयी है।

आयु (वर्ष में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
मरिजो की संख्या	6	11	21	23	14	5

ऊपर दिए गए दत्तों से बहुलक एवं मध्यमान ज्ञात कीजिए। दो केन्द्रिय प्रवृति के मापों की तुलना एवं व्याख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित तालिका से 225 बिजली के यंत्र के भागों के जीवन काल (घंटों में) की सूचना इस प्रकार दी गयी है।

जीवन काल (घंटों में)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
बारंबारिता	10	35	52	61	38	29

बिजली के भागों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित बारंबारिता बंटन तालिका में किसी गाँव के 200 परिवार का मासिक खर्च का विवरण दिया गया। मासिक खर्च का मध्यमान तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

खर्च (रूपयों में)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
परिवार की संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

4. भारत के राज्य स्तर पर उच्च माध्यमिक पाठशालाओं में शिक्षक एवं विद्यार्थी अनुपात इस बारंबारिता तालिका में दिया गया है।

विद्यार्थियों की संख्या	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
प्रांतो की संख्या	3	8	9	10	3	0	0	2

5. एक दिवसीय अंतराष्ट्रीय क्रिकेट मैच में संसार के कुछ प्रसिद्ध बल्लेबाज़ के रनों की संख्या का विवरण इस तालिका में दिया गया। दिये गये दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

रन	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
बल्लेबाज़	4	18	9	7	6	3	1	1

6. किसी एक निश्चित स्थान पर हर 3 मिनट में गुजरने वाली 100 कारों का विवरण इस तालिका में दिया गया है।

कारों की संख्या	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
बारंबारिता	7	14	13	12	20	11	15	8

तो दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

14.4 समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका (Median of grouped data)

मध्यिका केन्द्रिय प्रवृत्ति का वह माप है जो हमें निरीक्षणों का मध्यत्तम मूल्य देता है। असमूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने की विधि का स्मरण कीजिए, सबसे पहले हम निरीक्षणों को आरोही क्रम में लिखते हैं।

फिर यदि n विषम हो तो मध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ निरीक्षण और

यदि n सम हो तो, मध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ निरीक्षणों का औसत रहता है।

यदि हमें किसी कक्षा के 100 छात्रों की एक परीक्षा में 50 में से प्राप्तांक क्रमशः निम्नलिखित हो तो मध्यिका ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	20	29	28	33	42	38	43	25
छात्रों की संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

सबसे पहले अंकों को आरोही क्रम में लिखकर, बारंबारिता की तालिका को 14.9 के अनुसार बनाइए।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या (बारंबारिता)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
कुल	100

यहाँ $n = 100$, जो सम है, $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ निरीक्षणों का औसत मध्यिका होगा। अर्थात् 50 वाँ और 51वाँ निरीक्षण होंगे। हमें मध्य मूल्य को ज्ञात करने के लिए हमें संचित बारंबारिता तालिका की रचना करनी होगी।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	संचित बारंबारिता
20	6	6
25 तक	6 + 20 = 26	26
28 तक	26 + 24 = 50	50
29 तक	50 + 28 = 78	78
33 तक	78 + 15 = 93	93
38 तक	93 + 4 = 97	97
42 तक	97 + 2 = 99	99
43 तक	99 + 1 = 100	100

ऊपर की तालिका के अनुसार, हम यह देखते हैं कि

50 वाँ निरीक्षण 28 है, (क्यों?)

51 वाँ निरीक्षण 29

$$\text{मध्यिका} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

टिप्पणी : ऊपर दिए गए तालिका में, (1) पहला स्तंभ और (3) तीसरे स्तंभ को संचित बारंबारिता तालिका कहते हैं। मध्यिका अंक 28.5 यह सूचना देता है कि 50% विद्यार्थियों ने 28.5 से कम अंक प्राप्त किए और 50% विद्यार्थियों ने 28.5 से अधिक अंक प्राप्त किए। 53 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त अंको की समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में देखिए।

अंक	छात्रों की संख्या
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

इस तालिका से निम्नलिखित प्रश्नों कें उत्तर दीजिए। कितने विद्यार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किए? उत्तर स्पष्ट है 5

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5
20 से कम	5 + 3 = 8
30 से कम	8 + 4 = 12
40 से कम	12 + 3 = 15
50 से कम	15 + 3 = 18
60 से कम	18 + 4 = 22
70 से कम	22 + 7 = 29
80 से कम	29 + 9 = 38
90 से कम	38 + 7 = 45
100 से कम	45 + 8 = 53

कितने विद्यार्थियों ने 20 से कम अंक प्राप्त किए है? 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी 0-10 तथा 10-20 की श्रेणी में आते है छात्र अंक लिए इसका अर्थात कुल विद्यार्थियों की संख्या जिन्होंने 20 से कम अंक प्राप्त किया है 5 + 3, अर्थात 8 है हम कह सकते कि 10-20 श्रेणी की संचित बारंबारिता 8 है (जैसा कि तालिका में 14.11 में बताए अनुसार)

उसी प्रकार हम, दूसरी श्रेणियों की भी संचित बारंबारिता की गणना कर सकते, है अर्थात 30 से कम, 40 से कम .... 100 से कम विद्यार्थियों की संख्या इस प्रकार की बारंबारिता को आरोही संचित बारंबारिता बंटन कहते हैयहाँ 10, 20, 30, ... 100 यह क्रमशः उस बारंबारिता की उच्च सीमा होती है।

हम उसी प्रकार 0 से अधिक या 0 के समान की तालिका भी बना सकते हैं। ऊपर की तालिका से अधिक का अर्थ है कि पहली श्रेणी की बारंबारिता, 20 से अधिक या कम (यह संख्या समान है, सभी बारंबारिता का योग, पहले और दूसरे वर्गांतर के) और उसी प्रकार, हम यह देखते हैं कि 53 विद्यार्थी जिन्होंने, 0 से ज्यादा या कम अंक प्राप्त किए। 5 विद्यार्थियों ने 0-10 वर्गांतर में अंक प्राप्त किए।

प्राप्त अंक या प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या संचित बारंबारिता
0 से अधिक या समान है	53
10 " " "	53 - 5 = 48
20 " " "	48 - 3 = 45
30 " " "	45 - 4 = 41
40 " " "	41 - 3 = 38
50 " " "	38 - 3 = 35
60 " " "	35 - 4 = 31
70 " " "	31 - 7 = 24
80 " " "	24 - 9 = 15
90 " " "	15 - 7 = 8

इसका अर्थ है कि 53-5 = 48 विद्यार्थियों को 10 से अधिक या समान अंक प्राप्त हुए है। इसी प्रकार हमें उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात होगी, जिन्होंने 20 अंक प्राप्त किए हैं। 48-3 = 45, 30 से अधिक 45-4 = 41, और उसी प्रकार तालिका में दर्शाए अनुसार, ऊपर दी गई तालिका संचित बारंबारिता तालिका यहाँ 0, 10, 20, ..., 90 यह वर्गांतर की निम्न सीमा दर्शाई जाती है।

अब, समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने के लिए, हम इन में से कोई भी संचित बारंबारिता तालिका का उपयोग कर सकते है। अब समूह बद्ध दत्तों में, हम मध्य के निरीक्षण को नहीं ज्ञात कर सकते। संचित बारंबारिता तालिका में, मध्य का निरीक्षण, वर्गांतर में ही इसका मूल्य रहता है, श्रेणी के भीतर जो पूरे वर्गांतर को विभाजित करता है, दो भागों में विभाजित किया जाता है, तो यह कौन सी श्रेणी होगी?

इस श्रेणी को ज्ञात करने के लिए, हमें सभी श्रेणियों के और $\frac{n}{2}$ की संचित बारंबारिता को ज्ञात करना होगा। हमें यह ज्ञात होता है कि उस श्रेणी की संचित बारंबारिता जो $\frac{n}{2}$ से ज्यादा है वह मध्यिका की श्रेणी होगी।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)	संचित बारंबारिता (*cf*)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

इस बंटन में, $n = 53$ अतः $\frac{n}{2} = 26.5$ अब 60-70 यह श्रेणी है जिसकी संचित बारंबारिता 29 है जो $\frac{n}{2}$ से अधिक है (और लगभग) अर्थात 26.5.

इसलिए, 60-70 यह मध्यिका श्रेणी है।

मध्यिका की श्रेणी ज्ञात करने के बाद, हम निम्न सूत्र का उपयोग कर मध्यिका ज्ञात करेंगे।

$$\text{मध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

जहाँ $l =$ मध्यिका श्रेणी की निम्न सीमा

$n =$ निरीक्षणों की संख्या

$cf =$ मध्यिका कक्ष से ऊपर वाली संचित बारंबारिता

$f =$ मध्यिका कक्ष की बारंबारिता

$h =$ वर्गांतर (मध्यिका कक्ष)

$\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60,\ cf = 22, f = 7, h = 10$ मूल्य सूत्र में स्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\text{मध्यिका} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

अतः आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से कम अंक प्राप्त किए और शेष आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से अधिक अंक प्राप्त किए।

उदाहरण-7. एक सर्वेक्षण के अनुसार दसवीं कक्षा के 51 लडकियों की ऊँचाई (से.मी. में) ज्ञात की गई (conducted) और प्राप्त दत्तों को तालिका में दर्शाया गया तो मध्यिका ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (से.मी. में)	(छात्रों की संख्या)
140 से कम	4
145 से कम	11
150 से कम	29
155 से कम	40
160 से कम	46
165 से कम	51

हल: मध्यिका की ऊँचाई को (हल) ज्ञात करने के लिए, हमें वर्गांतर ज्ञात करना होगा और उनकी संलग्न बारंबारिता यह बंटन 140, 145, 150, . . ., 165 यह संलग्न श्रेणी की उच्च सीमा होगी अतः श्रेणी 140, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165 से कम होगी।

वर्गांतर	बारंबारिता	संचित बारंबरिता
140 से कम	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

दिए गए बंटन से, हम यह ज्ञात कर सकते है कि 4 लडकियों की ऊँचाई 140 से कम है अर्थात् वर्गांतर 140 से कम की बारंबारिता अब 11 लड़कियों की ऊँचाई 145 से कम है और 4 लड़कियों की ऊँचाई 145 से कम है अर्थात् लडकियों की ऊँचाई 140-145 श्रेणी में $11 - 4 = 7$ है, उसी प्रकार इस तालिका की बारंबारिता ज्ञात कर सकते।

निरीक्षणों की संख्या, $n = 51$

$\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ वाँ निरीक्षण, जो 145 - 150 की श्रेणी में होगा।

$\therefore$ 145 - 150 यह मध्यिका की श्रेणी है।

तो, l (निम्न सीमा) $= 145$,

cf (संचित बारंबारिता की पहली श्रेणी 145 - 150) से ऊपर वाली संचित बारंबारिता $= 11$,

f (मध्यिका कक्ष की बारंबारिता 145 - 150) $= 18$,

h (वर्गांतर) $= 5$.

सूत्र का उपयोग करते हुए मध्यिका $= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5 \qquad = 145 + \frac{72.5}{18} \quad = 149.03$$

अतः लडकियों की मध्यिका ऊँचाई 149.03 से.मी. है इसका अर्थ है कि 50% से ऊपर लडकियों की ऊँचाई उससे कम है और शेष 50% की ऊँचाई उससे अधिक है।

उदाहरण-8. दिए गए दत्तों की मध्यिका 525 है तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिए जिसमें कुल बारंबारिता 100 है, CI का अर्थ है वर्गांतर और Fr का अर्थ है बारंबारिता।

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

हल :

वर्गांतर	बारंबारिता	संचित बारंबारिता
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y$

दिया गया है कि $n = 100$

अतः, $76 + x + y = 100$, अर्थात $x + y = 24$ .... (1)

मध्यिका 525 है, जो $500 - 600$ श्रेणी में है,

अतः, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

सूत्र उपयोग से,

$$\text{मध्यिका } = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

अर्थात $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

अर्थात $25 = 70 - 5x$

अर्थात $5x = 70 - 25 = 45$

अतः $x = 9$

इसलिए समीकरण (1) से, हमें $9 + y = 24$ प्राप्त होता है

अर्थात् $y = 15$

सूचनाः

समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका जिनके वार्गांतर असमान है उनकी भी मध्यिका ज्ञात की जा सकती है।

14.5 केन्द्रिय प्रवृत्ति का कौनसा मूल्य (Which Value of Central Tendency)

दिये गये विवरण के अनुसार कौनसी विधि उपयुक्त होगी

केन्द्रिय प्रवृत्ति के माप में मध्यमान का उपयोग ज्यादा होता है। क्योंकि सभी निरीक्षणों की गणना इसमें रहती है। अर्थात सभी दत्तों में सबसे अधिक और सबसे कम निरीक्षण और दो या दो से अधिक वर्गांतर की तुलना करने में, उदाहरण के लिए औसत (मध्यमान) के परिणामों की तुलना करना विभिन्न विद्यालय के किसी परीक्षा के परिणामों से हम यह ज्ञात कर सकते है कि कौनसे विद्यालय का प्रदर्शन अच्छा रहा है।

दत्तों के अंतिम सिरें के (extreme) मूल्य मध्यमान पर प्रभाव डालते हैं। श्रेणियों का मध्यमान जिनकी बारंबारिता अधिकतर समान होती है वे दत्तों का प्रतिनिधित्व करता है। मान लीजिए यदि एक श्रेणी में बारंबारिता 2 है तथा अन्य पाँच श्रेणियों की बारंबारिता 20, 25, 20, 21, 18 है तो इस स्थिति में मध्यमान दत्तों का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।

प्रश्नों में व्यक्तिगत निरीक्षणों का महत्व नहीं रहता। विशेषकर अंतिम सिरे के मूल्यों से यदि हम चाहते कि (typical) विचित्र निरीक्षण (ज्ञात करना चाहते है तो मध्यिका अधिक उचित होगी। उदाहरण के लिए यदि हम मज़दूरों के औसत उत्पादन दर ज्ञात करना चाहते है तो) इन स्थितियों में मूल्य मध्यमान से, मध्यिका का उपयोग अधिक उपयुक्त होता है।

ऐसी स्थितियाँ जहाँ हमें अधिक प्रायिक या अधिक प्रसिद्ध वस्तु को स्थापित करना हो तो बहुलक का चयन अधिक उचित होगा। उदाहरणार्थः T.V. के सबसे प्रसिद्ध प्रोग्राम को जानने के लिए, अत्यधिक मांग वाली उपभोक्ता वस्तु को जानने के लिए, अत्यधिक लोगों द्वारा वाहन के रंग का उपयोग आदि।

अभ्यास - 14.3

1. निम्नलिखित बारंबारिता बंटन में एक क्षेत्र के मासिक 68 उपभोक्ताओं द्वारा उपयोग में लाई गई विद्युत युनिट दी गई है। तो दत्तों की मध्यिका, मध्यामान और बहुलक ज्ञात कर उनकी तुलना कीजिए।

मासिक विद्युत उपयोग	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
ग्राहकों की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

2. यदि नीचे दिए गए 60 निरीक्षणों की मध्यिका, 28.5, हो तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारिता	5	x	20	15	y	5

3. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के वितरण के बारे में निम्न जानकारी प्राप्त करता है उनकी आयु की मध्यिका ज्ञात कीजिए। (जिसकी आयु 18 वर्ष से अधिक है लेकिन 60 वर्ष से कम है। उन्ही को पॉलसी दी जायेगी।)

आयु (वर्ष में) कम	20 से कम	25 से कम	30 से कम	35 से कम	40 से कम	45 से कम	50 से कम	55 से कम	60 से कम
पॉलसी धारकों की संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4. 40 पत्तों की लम्बाई निकटतम मिली मीटर में नापकर निम्न तालिका में दत्त दिए गए है।

लम्बाई (मि.मि. मे)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
पत्तों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

तो पत्तों के लंबाई की मध्यिका ज्ञात कीजिए। (सूचना : निरंतर (लगातार) श्रेणियों में दत्तों को बदलना चाहिए। मध्यिका ज्ञात करने के लिए लगातार श्रेणी वाला सूत्र लगाना चाहिए। 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5.)

5. निम्नलिखित बंटन तालिका में 400 नियान गोले (neon lamps) का जीवन काल दिया गया है।

जीवन काल	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
गोलों की संख्या	14	56	60	86	74	62	48

गोलों के जीवन काल की मध्यिका को ज्ञात कीजिए।

6. एक टेलिफोन डायरी से 100 नामों को बीच-बीच में से चुना गया है और इस बारंबारिता तालिका में दिया गया है।

अक्षरों की संख्या	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
नामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

नामों के अक्षरों की मध्यिका ज्ञात कीजिए। अक्षरों का मध्यमान क्या होगा? एवं बहुलक भी ज्ञात कीजिए।

7. किसी कक्षा के 30 छात्रों के भार की बारंबारिता तालिका नीचे दी गयी है, तो छात्रों की मध्यिका भार को ज्ञात कीजिए।

भार (किलो में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

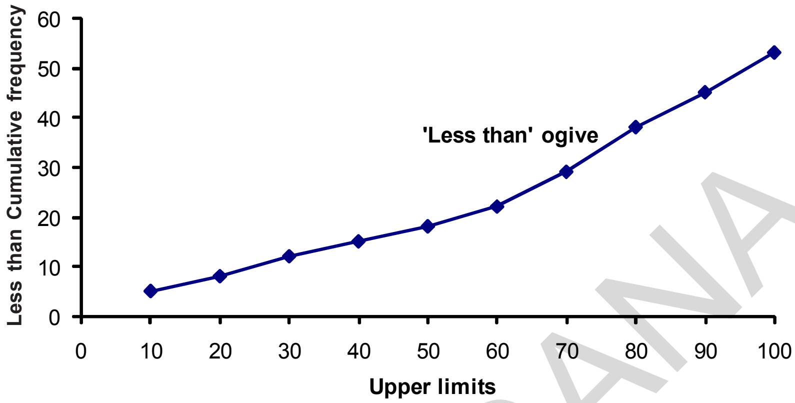
14.6 संचित बारंबारिता बंटन का आलेख द्वारा प्रदर्शनः (Graphical representation of Cumulative Frequency Distribution)

हमें ज्ञात है कि आलेखीय प्रदर्शन से दत्तों को आसानी से समझा जा सकता है। नवीं कक्षा में, दत्तों का बार ग्राफ, सोपान आलेख, और बारंबारिता बहुभुज के बारे में पढा था। अब संचित बारंबारिता का आलेख द्वारा निरूपण देखेंगे।

उदाहरण के लिए, दिए गए उदाहरण में संचित बारंबारिता बंटन तालिका को देखेंगे।

आलेख चित्रित करते समय यह ध्यान देना आवश्यक है कि, वर्गांतर लगातार हों, क्योंकि संचित बारंबारिता का संबंध सीमाओं के साथ रहता है। जब कि सीमाओं से नहीं।

स्मरण कीजिए कि मूल्य 10, 20, 30, ..., 100 यह श्रेणी की उच्च सीमाएँ है आलेख में दत्तों को प्रस्तुत करने के लिए वर्गांतर के उच्च सीमाओं को क्षैतिज X - अक्ष पर दर्शाते हैं और संलग्न संचित बारंबारिता को ऊर्ध्वाधर Y-अक्ष पर सूचित करते हैं,

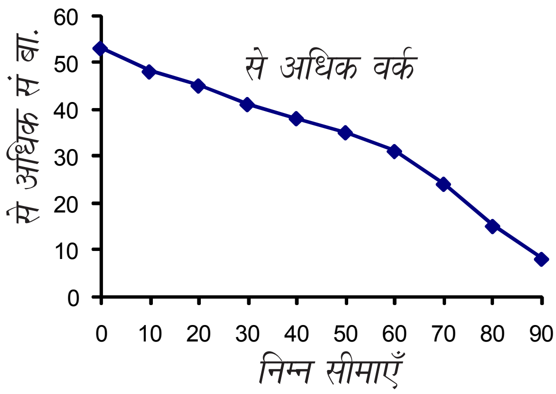


सुविधा अनुसार इकाई को चुन कर। अब संबंधित क्रमित युग्मों की जोडियों को (उच्च सीमाएँ, संलग्न संचित बारंबारिताओं को) अर्थात् (10, 5), (20, 8), (30,, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) आलेख में चित्रित कर उन्हे मिलाया गया है वक्र रेखा को संचित बारंबारिता वक्र या ओजीव वक्र(से कम विधि) कहते हैं।

यह पद **'ogive'** को **'ojeev'** द्वारा पढते हैं। और यह शब्द **ogee** से प्राप्त हुआ है जिसमें अवतल वक्र **(concave)** का प्रवाह उत्तल वक्र **(convex)** में होता है जिससे **S** आकार का वक्र प्राप्त होता है। आर्किटेक्चर में **ogee** आकार **14** वीं, **15** वीं, शताब्दी में गोथिक प्रकार का था।

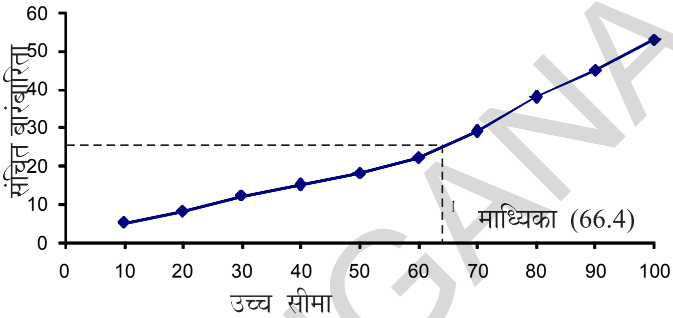
अब दोबारा, संचित बारंबारिता वर्गांतर को, ogive आलेख खींचेंगे (अवरोही संचित बारंबारिता से)

अब, 0, 10, 20, ..., 90 यह निम्न सीमाएँ है दिए गए 0-10, 10-20, ..., 90-100. आलेख में X- अक्ष पर निम्न सीमाओं को और Y-अक्ष पर संलग्न संचित बारंबारिता डालते हैं, अब बिंदुओं को (निम्न सीमाओं को, संलग्न संचित' बारंबारिताओं को) अर्थात (0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8), को आलेख में निरूपित कर उन्हें मिलाइए, हमें संचित बारंबारिता वक्र प्राप्त होगा।



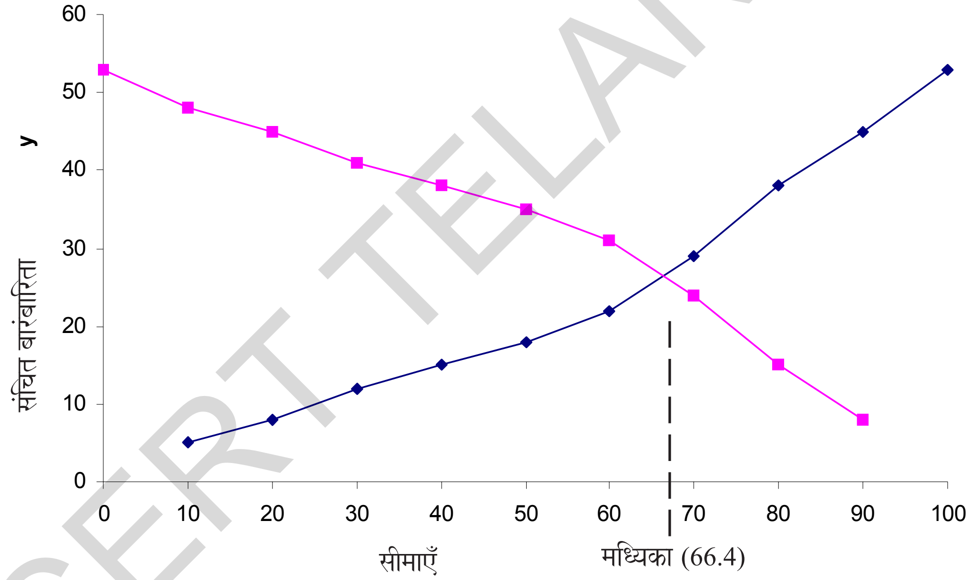
14.6.1 दिए गए वक्र से मध्यिका प्राप्त करना (Obtaining Median From give Curve):-

दो दिए गए संचित बारंबारिता वक्र से मध्यिका प्राप्त करना, संभव है। अब देखेंगे, $\frac{n}{2}=\frac{53}{2}=26.5$ सूचित करने की y- अक्ष पर, इस बिंदु से एक रेखा x- अक्ष के समानान्तर खींचिए जो वक्र को एक बिंदु पर काटता है, इस बिंदु से, एक लंबा x- अक्ष पर एक लंब खींचिए। यह लंब x- अक्ष को जिस बिंदु पर काटता है वही मध्यिका होगी।



दूसरी विधि से मध्यका की प्राप्ति :

(Draw both ogives) दो वक्र रेखाएँ खींचिए (निम्न से उच्च) दो वक्र एक दूसरे को एक बिंदु पर काटते हैं। इस बिंदु से x- अक्ष पर एक लम्ब खींचने पर, वह जिस बिंदु पर काटता है वही मध्यिका होगी।

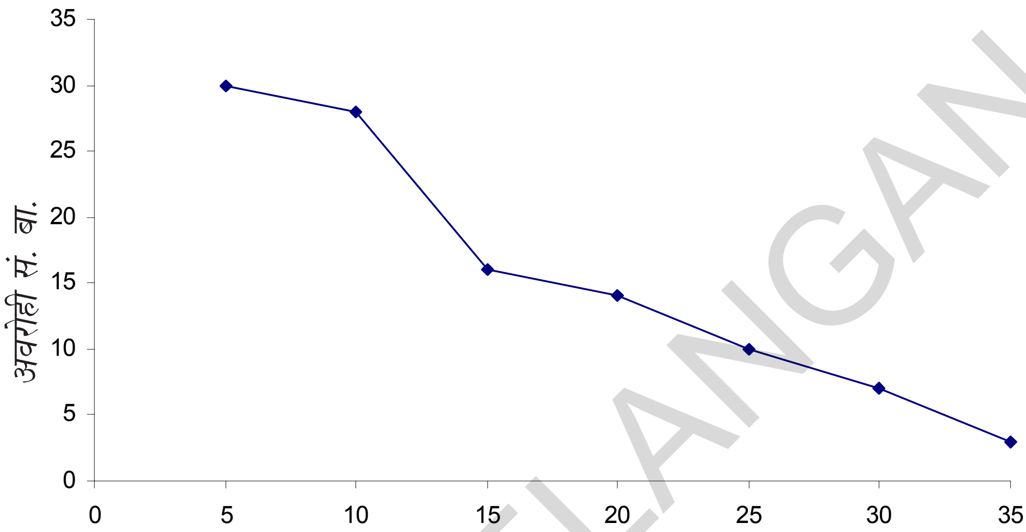


उदाहरण-9. निम्न बंटन में आपके परिसर के 30 दुकानों का वार्षिक लाभ इस प्रकार है।

लाभ (लाखों में)	दुकानों की संख्या (बारंबारिता)
5 के समान या उससे अधिक	30
10 के समान या उससे अधिक	28
15 के समान या उससे अधिक	16
20 के समान या उससे अधिक	14
25 के समान या उससे अधिक	10
30 के समान या उससे अधिक	7
35 के समान या उससे अधिक	3

ऊपर दिए गए दत्तों से दोनों प्रकार के वक्र खींचिए और मध्यिका लाभ प्राप्त कीजिए।

हल: सबसे पहले निर्देशांक अक्ष खींचेगे, लाभ की निम्न सीमाओं को क्षैतिज अक्ष और संचित बारंबारिता को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर डालकर बिंदुओं को आलेख पर निरूपित कीजिए। (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) और (35, 3). इन बिन्दुओं को मिलाएंगे, जिससे चित्र में दर्शाए अनुसार वक्र प्राप्त होगा।

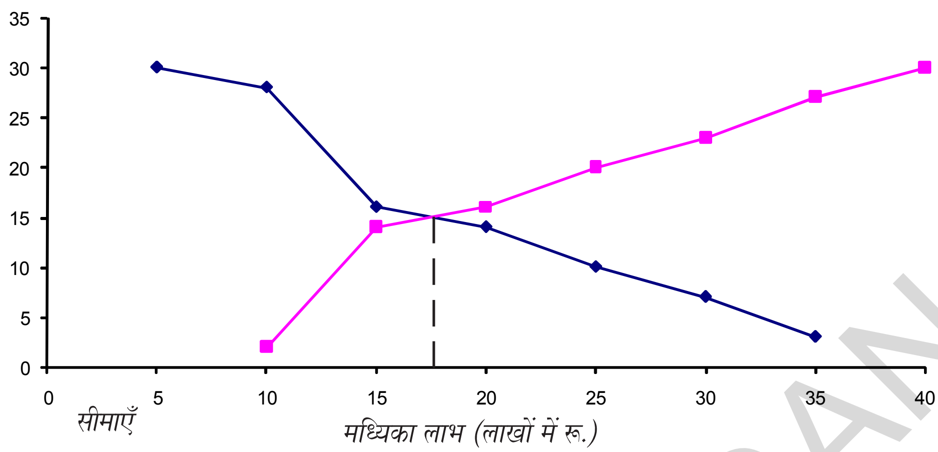


अब, ऊपर की तालिका से वर्गांतर, उनकी बारंबारिता और संचित बारंबारिता प्राप्त करेंगे।

वर्गांतर	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
दुकानो की संख्या	2	12	2	4	3	4	3
संचित बारंबारिता	2	14	16	20	23	27	30

इन मूल्यों के उपयोग से इन बिंदुओं को (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) पिछले अक्षों पर निरूपित कर आरोही ओजीव चित्र में दर्शाए अनुसार प्राप्त करेंगे। कटान बिंदु x - निर्देशांक लगभग 17.5 है, जो मध्यिका है। इसे हम सूत्र से भी हल कर जाँच कर सकते हैं। अत: लाभ मध्यिका (₹ लाखों में.) ₹ 17.5 है।

((abcissa) को नौवीं कक्षा में भुज लिया गया)



अभ्यास - 14.4

1. निम्नलिखित तालिका में 50 मज़दूरों की दैनिक मज़दूरी (रूपयों में) दी गई है।

दैनिक मज़दूरी (रु.में)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
मज़दूरों की संख्या	12	14	8	6	10

ऊपर दी गई तालिका को संचित बारंबारिता तालिका में रूप को बदलकर (Convert) ओजीव (ogive) खींचिए।

2. किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों के स्वास्थ्य परीक्षण में, उनका भार इस प्रकार पंजीकृत किया गया।

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
38 से कम	0
40 से कम	3
42 से कम	5
44 से कम	9
46 से कम	14
48 से कम	28
50 से कम	32
52 से कम	35

दिए गए दत्तों का आरोही (Less than ogive) आलेख खींचिए। तथा आलेख द्वारा भार की मध्यिका ज्ञात कीजिए और सूत्र द्वारा जाँच कीजिए।

3. निम्न तालिका में किसी गाँव के 100 किसानों की गेहूँ की पैदावर प्रति हेक्टर में इस प्रकार है।

पैदावर (Qui/Hec) (क्विंटल/हंक्टर)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
किसानों की संख्या	2	8	12	24	38	16

दी गई तालिका को आरोही बारंबारिता तालिका में बदल कर आलेख खींचिए।

प्रस्तावित परियोजना

मध्यमान, मध्यिका, बहुलक ज्ञात करना

- दैनिक जीवन की घटनाओं में उपयोग ।
- प्राप्त स्रोतों से जानकारी एकत्रित करना । एकत्रित जानकारी के आधार पर मध्यमान, मध्यिका, बहुलक के आरेख तैयार करना ।

हमने क्या चर्चा की :

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित अंशो के बारे में पढा।

1. समूहबद्ध बारंबारिता बंटन ज्ञात करने की विधि :

   (i) प्रत्यक्ष विधि : $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) कल्पित मध्यमान विधि : $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) क्रम विचलन पद्धति (विधि) : $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2. समूहबद्ध दत्तों का बहुलक ज्ञात करने की विधि का सूत्र:

   बहुलक $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

   जहाँ पर चिन्हों का अपना अर्थ होता है।

3. समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने का सूत्र

   माध्यिका $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$ जहाँ पर चिन्हों का अपना अर्थ है।

4. मध्यिका (ज्ञात) करने के लिए वर्गांतर लगातार (continious) रहना चाहिए।
5. संचित बारंबारिता बंटन को आरोही एवं अवरोही संचित बारंबारिता वक्र के रूप में दर्शाना।
6. जब ओजीव (Ogive) वक्र को आलेख पर डालते हैं तब सीमाओं को x - अक्ष पर तथा संचित बारंबारिता को y-अक्ष पर लिया जाता है।।
7. दोनों अक्षों पर इकाई समान नहीं रहती है।
8. समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका आलेख द्वारा प्राप्त होती है, जो दो ओजीव (Ogive) वक्रों के कटान बिंदु का x- निर्देशांक होता है।

अध्याय

15 गणितीय नमूने बनाना (Mathematical Modelling)

परिशिष्ट (APPENDIX)

A.I.1

25 फरवरी 2013 को इसरो (ISRO) लांचर ने पी.एस.एल.वी C20 के कक्ष में (SARAL) उपग्रह डाला। उपग्रह का भार 407 कि.ग्राम है। यह 781 किलो मीटर की ऊँचाई पर है और इसका कक्ष 98.5^o डिग्री के कोण पर झुका हुआ है।

उपरोक्त जानकारी पढते समय हम यह सोच रहे होंगे कि :

(i) वैज्ञानिक ने 781 मी. की ऊँचाई कैसे ज्ञात की? वे अंतरिक्ष में जाने का उपाय कैसे किये?

(ii) कैसे वे कक्ष के कोण को मापे बिना 98.5^o का निष्कर्ष निकाला?

(iii) हमें आश्चर्य होगा कि कैसे गणितज्ञ और वैज्ञानिक इन परिणामों का अनुमान लगाते है।

नीचे कुछ उदाहरण दिये गये है जो हमारे दैनिक जीवन से संबंधित हैं। आइये हम इन उदाहणों पर ध्यान दें।

(i) सूर्य की सतह पर तापमान $6{,}000^oC$ है।

(ii) मानव हृदय शरीर में 5 से 6 लीटर रक्त प्रति मिनट पंप करता है।

(iii) हमें ज्ञात है कि सूर्य और पृथ्वी के मध्य दूरी 149000 कि. मी. है।

उपरोक्त उदाहरण से हम जानते हैं कि हममें से न कोई सूर्य के पास गया है और न ही किसी ने हृदय को बाहर निकाल कर उस का कार्य देखा है। ये सभी गणनाएँ गणितीय मॉडलिंग के माध्यम से किये गये हैं।

गणितीय मॉडलिंग सिर्फ वैज्ञानिक ही नहीं, हम भी इसका प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिये हम यह जानना चाहते हैं कि (i) हम 10% साधारण ब्याज पर ₹100 की राशी उधार लेने पर एक वर्ष के पश्चात कितना मिश्र धन देना होगा? या फिर (ii) हम यदि एक कमरे को रँगवाना चाहते हैं तो कितना रंग लगेगा? इन सभी समस्याओं को गणितीय मॉडलिंग द्वारा हल किया जाता है।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

अपने मित्रों से वास्तविक जीवन के कुछ उदाहरण के विषय में चर्चा कीजिये जहाँ हम सीधा मापन न कर गणितीय मॉडलिंग का उपयोग करते हैं।

A.I.2 गणितीय नमूने :

क्या आपको त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र पता है?

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

इसी तरह साधारण ब्याज की गणना में $I = \frac{PTR}{100}$ सूत्र का उपयोग किया जाता है। यह सूत्र ब्याज (I); मूलधन (P); समय (T); और दर (R). के बीच समीकरणीय संबंध है। ये सूत्र गणितीय मॉडलिंग के उदाहरण हैं।

गणितीय मॉडलिंग के कुछ और उदाहरण निम्न हैं।

(i) वेग (S) $=$ $\frac{\text{दूरी (d)}}{\text{समय (T)}}$

(ii) चक्रवृद्धि ब्याज (A) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

जहाँ P = मूलधन

r = ब्याज की दर

n = गणना की संख्या

अतः गणितीय मॉडल कुछ भी नहीं, लेकिन वह कुछ वास्तविक जीवन की परिस्थितियों का गणितीय वर्णन है।

यह कीजिए।

पिछली कक्षाओं में सीखे हुये कुछ गणितीय मॉडल लिखिए।

A.I.3 गणितीय नमूने बनाना (Mathematical Modelling)

हम अपने दैनिक जीवन में अनेक समस्याओं का सामना करते है। हम उन्हें गणितीय समस्या के रूप में लिखकर उसके हल की खोज करने का प्रयास करते हैं। इसके पश्चात हम समाधान की व्याख्या और समाधान की मान्यता कहाँ तक सत्य है इसकी जाँच करते हैं।

गणितीय नमूने के निर्माण से समस्या के समाधान को खोजने की इस प्रक्रिया को गणितीय मॉडलिंग कहते हैं।

अब हम कुछ और गणितीय मॉडलिंग से संबंधित उदाहरणों का निरीक्षण करेंगे।

उदाहरण 1 : वाणी ₹19,000 की टी.वी. खरीदना चाहती है। लेकिन उसके पास केवल ₹15,000. है। इसलिए वह प्रति वर्ष 8% साधारण ब्याज की दर से पूँजी जमा करना चाहती है। तो कितने वर्षों के बाद वह, टी.वी. खरीदेगी?

चरण **1 :** (समस्या को समझना) : इस स्थिति में, हम असली समस्या को परिभाषित करेंगे। यदि हमें मूलधन, ब्याज की दर दी गई है और वर्ष ज्ञात करना है कि कब वह रकम ₹19,000 हो जायेगी।

चरण **2 :** (गणितीय वर्णन और निर्माण) हम गणितीय संदर्भ में इस समस्या के विभिन्न पहलूओं का वर्णन करेंगे। हम पहले चर राशी को परिभाषित करेंगे और फिर असमानताएँ लिख कर गणितीय संदर्भ में इस समस्या को हल करने के लिये आवश्यक डाटा इकट्ठा करेंगे।

यहाँ हम साधारण ब्याज के लिये सूत्र का उपयोग करेंगे जो है :

$$I = \frac{PTR}{100} \quad \text{(नमूना)}$$

जहाँ P = मूलधन, T = वर्षों की संख्या, R = ब्याज की दर, I = ब्याज

हमे समय (T) ज्ञात करना है $T = \frac{100I}{RP}$

चरण **3:** (गणितीय समस्या को सुलझाना) इस चरण में, हम चरण 2 में विकसित किये गये सूत्र के उपयोग से समस्या का समाधान निकालेंगे।

हम जानते हैं कि वाणी के पास पहले से ही ₹15,000 है, (P) ।

उसे (19000-15000 = ₹4000) की अतिरिक्त आवश्यकता है। जो वह ब्याज (I) की रकम से जमा करना चाहती है।

$$\text{P} = ₹15,000, \text{ दर} = 8\%, \text{ तब } \text{I} = 4000;\ \text{T} = \frac{100 \times 4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{150\cancel{0}\cancel{0} \times 8} = \frac{40\cancel{0}}{12\cancel{0}}$$

$$\text{T} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ वर्ष}$$

या चरण : 4 (समाधान की व्याख्या) : पिछले चरण में प्राप्त समाधान की यहाँ पर व्याख्या की गई है।

यहाँ $\text{T} = 3\frac{1}{3}$ वर्ष, का अर्थ है 3 वर्ष और 4 महीने। अतः वाणी 3 वर्ष और 4 महीने के पश्चात टी.वी. खरीद पायेगी।

चरण 5 : मॉडल की मान्यता : हम हमेशा एक मॉडल को स्वीकार नहीं कर सकते हैं क्यों कि वह वास्तविकता से मेल नहीं रखता है। यदि आवश्यक हो तो हम गणितीय मॉडल की जाँच और संशोधित कार्य को मान्यता देंगे।

दिये गये उदाहरण में हम मानते हैं के ब्याज का दर नहीं बदलेगा। यदि ऐसा होगा तो हमारा मॉडल $\frac{PTR}{100}$ काम नहीं करेगा। हम मानते है कि टी.वी. का दाम ₹19,000. है।

अब हम दूसरा उदाहरण लेंगे।

उदाहरण-2. लोकेश्वरम उच्च विद्यालय में 10 वीं कक्षा के 50 छात्र और उनके गणित के शिक्षक के साथ लोकेश्वरम से हैद्राबाद के दौरे पर जाना चाहते हैं। प्रत्येक वाहन में चालक (driver) के अतिरिक्त छ व्यक्ति बैठ सकते है। बताइए उनको कितने वाहनों की आवश्यकता होगी?

चरण **1 :** 51 व्यक्तियों को ले जाने के लिये आवश्यक वाहनों की संख्या का पता लगाना चाहते हैं। हमें पता है कि प्रत्येक वाहन में ड्राइवर के अतिरिक्त 6 व्यक्ति बैठ सकते हैं।

चरण **2 :** वाहनों की संख्या = व्यक्तियों की संख्या / एक वाहन की क्षमता

चरण **3 :** वाहनों की संख्या = 51/6 = 8.5

चरण **4 :** व्याख्या

हमें पता है कि 8.5 वाहन नहीं हो सकते हैं। इसलिये हमें 9 वाहन की आवश्यकता है।

इसलिये आवश्यक वाहनों की संख्या = 9.

चरण **5 :** मॉडलिंग करते समय हमने दुबले और मोटे छात्र को समान स्थान दिया है।

यह कीजिए।

1. अपने पाठ्य पुस्तक से कोई एक व्यावहारिक समस्या लेकर एक गणितीय मॉडल बनाकर हल कीजिए।
2. नीचे दिये गये समस्या के लिये एक गणितीय मॉडल बनाकर हल कीजिए।

एक कार एक स्थान A से 30 कि.मी. / प्र. घंटे के वेग से B स्थान की ओर जाती है। उसी समय एक दूसरी कार B स्थान से A की ओर 40 कि.मी./ प्र. घंटे के वेग से आती है। यदि A और B के बीच की दूरी 100 कि.मी. है तो कितने समय में वे दोनों कार एक दूसरे से मिलेंगे।

अब तक हम सरल शब्दों की समस्याओं के लिये गणितीय मॉडल बनाये है। आइये अब हम वास्तविक जीवन का एक उदाहरण लेकर उसका गणितीय मॉडल बनायेंगे।

उदाहरण-3. वर्ष 2000 में संयुक्त राष्ट्र के 191 सदस्य देशों ने लिंग समानता को बढ़ाने के लिये एक घोषणा पत्र पर हस्ताक्षर किए। इस लक्ष्य को प्राप्त करने के लिये यह निर्णय लिया गया कि एक सूचक चाहिए जो प्राथमिक, माध्यमिक शिक्षा में छात्र और छात्राओं का अनुपात है। भारत ने भी घोषणा पत्र पर हस्ताक्षर किए। भारत में प्राथमिक विद्यालयों में पढ़ने वाली छात्राओं की संख्या (डाटा) तालिका A.I.1. में नीचे दी गई है।

तालिका **A.I.1**

वर्ष	नामांकन (Enrolment) (% में)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

इस दत्त का उपयोग करते हुए, गणितीय मॉडलिंग की सहायता से लडकियों के प्रवेश में हुई वृद्धि के प्रतिशत का वर्णन कीजिए। इसके अतिरिक्त यह भी अनुमान लगाइए कि कितने वर्षों में लड़कियों का नामांकन 50% होगा।

हल:

चरण 1 : निरूपण (Formation) सूत्र बद्ध करना : पहले हम दी गयी समस्या को गणितीय समस्या में बदलेंगे।

तालिका A.I.1 में वर्ष 1991 – 92, 1992- 93, आदि के नामांकन दिये गये है। एक शैक्षणिक (academic) वर्ष के आरंभ में प्रवेश पाने के पश्चात हम 1991, 1992 के रूप में वर्षों को ले सकते है। हम यह कल्पना करेंगे कि प्राथमिक विद्यालयों में प्रवेश लेने वाली लडकियों का प्रतिशत तालिका A.I.1. में दर के रूप में एक ही दर से बढते हुये लिखेंगे। यहाँ पर वर्षों की संख्या महत्वपूर्ण नहीं। ऐसी ही और एक स्थिति में तीन वर्ष के लिए ₹ 15000 पर 8% दर का साधारण ब्याज लगाते समय 1999 – 2002 या 2001 – 2004 कहना आवश्यक नहीं है। केवल यह मानना है कि ब्याज का दर कितने वर्ष का है।

यहाँ भी हम देखेंगे कि नामांकन 1991 के बाद पारित कर दिया है कि वर्ष की संख्या और नामांकन की तुलना द्वारा 1991 के बाद बढता है। हम 1991 को शून्य वर्ष लेंगे। और वर्ष 1991 को 1, 1992 को 2 लेंगे और लिखेंगे। अतः तालिका A.I.1 अब तालिका A.I.2 के रूप में दिखेगी।

तालिका **A.I.2**

वर्ष	नामांकन **(% में)**
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

तालिका A.I.3. में नामांकन का बढता % दिया गया है।

तालिका **A.I.3**

वर्ष	नामांकन % में	बढत (वृद्धि) **(Increase)**
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 – 1992 प्रथम वर्ष की अवधि के अंत में नामांकन 41.9% से 42.6% करने के लिये 0.7% की वृद्धि हुई है। दूसरे वर्ष के अंत में, यह 42.6% से 42.7% करने के लिये 0.1% की वृद्धि हुई है। उपरोक्त तालिका से, हम वर्ष और प्रतिशत की संख्या के बीच एक निश्चित संबंध नहीं देखते हैं। लेकिन वृद्धि स्थिर है। प्रथम वर्ष में और 10 वें वर्ष में एक बहुत बडा अन्तराल है। इन मूल्यों का अर्थ है : -

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22 \quad .... (1)$$

हम मानते हैं कि नामांकन में 0.22 % की वृद्धि है।

चरण **2 :** गणितीय वर्णन

हमने माना है कि नामांकन प्रति वर्ष 0.22% की दर से बढता है।

तो पहले वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22$

दूसरे वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तीसरे वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

अतः 'n' वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22n$, for $n \geq 1$. .... (2)

अब हम नामांकन 50% तक पहुँचने के लिए वर्षों की संख्या को ज्ञात करना है। तो इस समीकरण से हम 'n' का मूल्य प्राप्त करेंगे।

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

चरण **3 :** हल **:** 'n' के लिए (2) को हल करने पर, प्राप्त है,

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

चरण **4 :** व्याख्या (Interpretation) वर्ष की संख्या एक अभिन्न मूल्य (Integral value) है। हम अगला उच्च पूर्णांक 37 लेंगे। तब नामांकन प्रतिशत 50 होने के लिये

$$1991 + 37 = 2028.$$

चरण **5 :** विधि मान्यकरण **(Validation) :** हमें एक वास्तविक जीवन की स्थिति के साथ काम करते समय यह मानना चाहिए कि वह वास्तविक स्थिति से मेल खाता है या नहीं।

हम यह जाँच करेंगे कि सूत्र (2) वास्तविकता के साथ समझौता करता है या नहीं। सूत्र (2) का उपयोग करते हुए हम पहले से ही जानते हैं कि वर्ष के लिए ''मान'' पता है और अंतर खोजने के द्वारा यह जानते हैं कि तालिका A.I.4 में दिये गये तालिका के मूल्यों के साथ तुलना करेंगे।

तालिका **A.I.4**

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) में दिये गये मूल्य (% में)	अंतर (% में)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

आप देखेंगे कि सूत्र (2) द्वारा दिये गये कुछ मूल्य वास्तविक मूल्य से 0.3% या 0.5% कम है। प्रतिवर्ष वृद्धि 1% से 2% है। इस तरह 3 से 5 वर्ष के लिए एक अंतर उत्पन्न होता है। यदि हम समझते हैं कि यह अंतर पर्याप्त है तो सूत्र (2) हमारा गणितीय मॉडल होगा।

यदि हम मानते हैं कि इसमें बहुत बडी त्रुटि है तो हम इस मॉडल को सुधार करने के लिये चरण (2) के पास वापस जायेंगे और समीकरण बदलेंगे। आइये, हम अब ऐसा करें।

चरण **1 :** सूत्र को दोहराना (Reformulation) हमने माना है कि 0.22% से वृद्धि हुई है। लेकिन हम अब त्रुटि को कम करने के लिए एक सुधार कारक (correction factor) लागू करेंगे। इसके लिये हम सभी त्रुटियों का मध्यमान (mean) लेंगे। जो इस प्रकार होगा।

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

हम त्रुटियों के मध्यमान से इस मूल्य की त्रुटियों को ठीक करेंगे। संशोधित गणितीय विवरण (Revised Mathematical Description) : (2) में दी गई नामांकन प्रतिशत के लिये हमारे सूत्र में त्रुटियों का मध्यमान जोड दें तो सुधारा गया सूत्र होगा।

n वर्ष में नामांकन प्रतिशत $= 41.9 + 0.22n + 0.18$

$= 42.08 + 0.22n$, ($n \geq 1$ के लिये ... (3)

समीकरण (2) को सुधारेंगे, और n का नया समीकरण होगा :

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad \text{... (4)}$$

परिवर्तित हल : **(Altered Solution) :** समीकरण (4) हल करने पर, प्राप्त है,

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

व्याख्या (**Interpretation**) **:** क्योंकि $n = 36$, है, प्राथमिक विद्यालयों में लडकियों का नामांकन, वर्ष $1991 + 36 = 2027$ में 50% तक पहुँच जायेगा।

मान्यता : (Validation) : एक बार फिर हम वास्तविक मूल्यों के साथ प्राप्त मूल्यों की तुलना करेंगे। तालिका A.I.5 तुलना दर्शाता है।

तालिका **A.I.5**

वर्ष	नामांकन (% में)	**(2)** से दिये गये मूल्य	मूल्यों में अंतर	**(4)** में दिये गये मूल्य	मूल्यों का अंतर
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

आप देखते है कि (4) के मूल्य (2) के मूल्य से अधिक निकट है। त्रुटियों का मध्यमान यहाँ पर शून्य है।

A.I.4 गणितीय मॉडलिंग के लाभ :-

1. गणितीय मॉडलिंग के उद्देश्य गणितीय समस्या में परिवर्तित करके विश्व को एक वास्तविक समस्या के बारे में कुछ उपयोगी जानकारी मिल रही है। यह इस तरह के प्रत्यक्ष अवलोकन के रूप में अन्य पद्धतियों से या प्रयोगों के आयोजन से जानकारी प्राप्त करने के लिये संभव है। जब यह विशेष रूप से उपयोग किया जाता है तो अधिक मूल्यवान नहीं है।

   उदाहरण के लिये हम ताजमहल पर मथुरा रिफाइनरी के निर्वहन के संक्षारक प्रभाव का अध्ययन करना चाहते हैं। हम सीधा ताजमहल पर प्रयोग नहीं करना चाहते हैं क्योंकि ऐसा करने से मूल्यवान स्मारक को हानि पहुँचेगी। यहाँ पर गणितीय मॉडलिंग बहुत काम आयेगा।

2. भविष्य की घटनाओं की भविष्यवाणी निर्णय लेने की प्रक्रिया में प्रवेश किये जाने के पश्चात, पूर्वानुमान, संगठनों को कई प्रकार से अधिक महत्वपूर्ण बना दिया है।

उदाहरण के लिए

(i) विपणन (Marketing) विभाग में बिक्री रणनीतियों की योजना बनाने में, आवश्यकता का अनुमान लगाने में विश्वसनीय सहायता प्राप्त होती है।

(ii) एक स्कूल बोर्ड जब नये स्कूल आरंभ करने का फैसला करती है तो विभिन्न ज़िलों में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या में वृद्धि को ध्यान रखते हुये, भविष्यवाणी करने में सक्षमता की आवश्यकता को देखती है।

3. अकसर हमें अनुमान लगाने की आवश्यकता होती है, जैसे जंगल में पेड़, झील में मछलियाँ, मतदाताओं की संख्या आदि। कुछ और उदाहरण है जहाँ गणितीय मॉडलिंग का उपयोग होता है।

   (i) कुछ वर्षों के लिये भविष्य में जनसंख्या का आकलन (Estimation)

   (ii) मानसून के आने की भविष्यवाणी

   (iii) आने वाले वर्षों में साक्षरता दर का आकलन

   (iv) एक पेड़ में पत्तों की संख्या का आकलन

   (v) महासागरों की गहराई ज्ञात करना।

A.I.5 गणितीय मॉडलिंग की सीमाएँ :

क्या गणितीय मॉडलिंग हमारी सभी समस्याओं का समाधान है?

निश्चित रूप से नहीं है। यहाँ अपनी सीमाएँ है। इस प्रकार यह एक मॉडल से एक वास्तविक-विश्व की समस्या का एक सरलीकरण है जो मस्तिष्क में याद रखना चाहिए। ये दोनों समान नहीं है। एक मानचित्र देश की भौतिक सुविधाएँ देता है और देश के विभिन्न स्थानों का अंतर बताता है। हम इससे समुद्र स्तर से ऊपर एक जगह की ऊँचाई प्राप्त कर सकते हैं, लेकिन इससे हम लोगों की विशेषताएँ ज्ञात नहीं कर सकते हैं। इसका अर्थ यह है कि हम केवल अपेक्षा करते समय सभी कारकों को मान्यता देते हैं। इस उद्देश्य के लिए एक मॉडल का उपयोग करना चाहिए। हम इसे केवल वहाँ उपयोग में लाना चाहिए जहाँ इसकी उपयोगिता होती हैं।

A.I.6 किस हद तक हमें हमारे मॉडल में सुधार का प्रयत्न करना चाहिए?

एक मॉडल में सुधार करने के लिये अतिरिक्त कारकों की आवश्यकता होती है। हम अपने गणितीय समीकरणों में अधिक चर जोडने पर समीकरण जटिल बन जाता है और मॉडल का उपयोग करना कठिन हो जाता है। एक मॉडल वह है जो उपयोग करने के लिये सरल हो। बेहतर मॉडल वह है जो वास्तविकता के निकट हो।

प्रसाय कीजिए।

एक समस्या जो पीछे 13 वीं सदी में लियोनाडो कीबोनिका ने खडी की यदि सिर्फ दो खरगोश से आरंभ करें और पूरा वर्ष उन्हें प्रजनन के लिये छोड दें तो वर्ष के अंत में कितने होंगे? खरगोश की एक जोडी प्रत्येक महीने वंश की एक जोडी को जन्म देती है प्रत्येक जोडी 2 महीने की उम्र में खरगोश के जोडे की संख्या शून्य और 1 महिने के लिये छोड़कर, दो पूर्ववर्ती महीनों में खरगोश के योग द्वारा दिया जाता है। नीचे दिये गये तालिका में खरगोश की आबादी की बढत का पता चलता है।

माह	खरगोश की जोड़ियाँ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

एक साल के पश्चात हमें 233 खरगोश प्राप्त होते हैं। सिर्फ 16 महीने के बाद लगभग 1600 जोडे होंगे। इस स्थिति में समस्या और गणितीय मॉडलिंग के विभिन्न चरणों को विश्लेषित करना पड़ता है।

हम इस अध्याय के अंत में कुछ रोचक उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-4. (पासे की एक जोडी को घुमाना) **(Rolling of a pair of dice) :** दीक्षिता और आशीष पासे के साथ खेल रहे हैं। अशीश ने कहा कि यदि वह पासे पर दिखे संख्याओं का योग सही बताएगी तो उसे एक पुरस्कार दिया जायेगा। यह दीक्षित को बहुत अच्छा लगा और वह उस योग के बारे में सोचने लगी जिससे सबसे अधिक योग प्राप्त हो।

हल :

चरण 1 (समस्या को समझना) **(Understanding the problem) :** आप को कुछ संख्याओं का पता लगाना है जिसकी अधिक संभावना हो।

चरण 2 (गणितीय वर्णन) **(Mathematical description) :** गणितीय संदर्भ में, समस्या को ऐसा देख सकते हैं कि संख्या के विभिन्न संभव रकम की संभावनाओं को खोजने के लिये प्रायिकता ज्ञात कीजिये। हम बहुत ही सरलता से संख्या के निम्न 36 जोडियों में से एक का यादृच्छिक विकल्प के रूप में पासों का एक रोल का प्रतिनिधित्व करने से मॉडल की स्थिति बना सकते हैं।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

प्रत्येक जोडी में पहली संख्या देखी गई संख्या का प्रतिनिधित्व करता है। और दूसरी संख्या दूसरी बार डालने पर दिखाई देने वाली संख्या होगी।

चरण 3 (गणितीय समस्या को सुलझाने) **(Solving the mathematical problem) :** ऊपर प्रत्येक जोडी में संख्या संक्षेप में है। संभव रकम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 है लगता है कि सभी 36 जोडे समान रूप में होने की संभावना है। ऐसी संभावना को खोजना है।

यह हम निम्न तालिका में करेंगे :

योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता (Probability)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

सात की राशी होने का मौका रकम के रूप में दूसरे नंबर मिलने की संभावना से भी बडी है, जो $\frac{1}{6}$ भाग है।

चरण **4** (समाधान की व्याख्या) **:** सबसे अधिक संभावना 7 के योग होने का है। इसलिये आपको बार-बार संख्या 7 लगाना होता है।

चरण **5** (मॉडल मान्यकरण) **:** एक पासे को अत्यधिक बार उछालिए और एक संबंधित बारंबारिता तालिका बनाइए। इस संबंधित बांरबारिता को प्रायिकता (Probability) की अवृत्तियों के साथ तुलना कीजिए। यदि यह निकट नहीं है तो पासे की प्रायिकता दुविधा में हैं। (biased) हमें पूर्व ज्ञान है कि दिशा में संख्या का मूल्यांकन करने के लिये दत्त प्राप्त कर सकते है।

अगली बार प्रयत्न करने के लिये इस अभ्यास को जानने से पहले, हमें कुछ पृष्ठभूमि की जानकारी की आवश्यकता है।

आवश्यकता होने पर अपने पास रकम नहीं होना यह सामान्य स्थिति है। यह दैनिक जीवन में अनिवार्य है कि आराम की वस्तुएँ खरीदने के लिये पर्याप्त पैसे नहीं है। स्कूटर, फ्रिज, टीवी, कार जैसे वस्तुओं को सक्षम करने के लिये एक किस्त योजना के रूप में जाना जाता है और यह योजना व्यापारियों के द्वारा आरम्भ की गयी है।

कभी-कभी एक व्यापारी ग्राहकों को इन वस्तुओं को खरीदने के लिये विपणन रणनीति के रूप में एक किस्त योजना का परिचय देता है। किस्त की योजना के तहत ग्राहक इसे खरीदते समय पूरी राशी का भुगतान करने की आवश्यकता नहीं है। वह, मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक या वार्षिक हो सकती है। वस्तु खरीदने के बाद उसकी भुगतान किस्तों में करने की अनुमति दी जाती है। किस्त खरीददार विक्रेता को ''डिफर्ड भुगतान'' की एक तारीख देता है जिसके लिये कुछ ब्याज लगाया जाता है क्योंकि किस्तों में अधिक रक़म का भुगतान करना होता है।

इस अवधारणा से संबंधित कुछ शब्द अकसर उपयोग किये जाते हैं। आप उन्हें जानते होंगे। उदाहरण के लिये एक वस्तु की कुछ कीमत ग्राहक खरीदते समय उसकी राशी का भुगतान करना पड़ता है।

अब, गणितीय मॉडलिंग का उपयोग करके नीचे दी गई समस्या को हल करने का प्रयास करेंगे।

प्रयास कीजिए।

रवि एक साइकल खरीदना चाहता है। वह बाज़ार जाकर पता लगाता है कि उसके पसंद की साइकल ₹2,400 में है। दुकानदार उसकी मदद करता है। वह रवि से कहता है कि वह ₹1400 (डौन पेमेंट) अग्रिम भुगतान करें और शेष राशी हर महीना ₹550 की किस्तों में अदा करें। रवि या तो दुकानदार की बात मान सकता है या कोई बैंक से 12% प्रति वर्ष साधारण ब्याज से ऋण ले सकता है। इन दो अवसरों में से रवि के लिये कौनसा सबसे अच्छा है? रवि की सहायता कीजिए।

उत्तरमाला
(ANSWERS)

अभ्यास - 1.1

1. (i) अनावर्ती (ii) आवर्ती (iii) अनावर्ती
   (iv) अनावर्ती (v) आवर्ती

2. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $3\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{31}{25}$

3. (i) परिमेय (ii) अपरिमेय (iii) परिमेय (iv) परिमेय
   (v) परिमेय (vi) अपरिमेय (vii) परिमेय

अभ्यास - 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) ल.स.अ = 420, म.सं.भा = 3 (ii) ल.स.अ = 11339, म.सं.भा. = 1
   (iii) ल.स.अ = 1800, म.सं.भा = 1 (iv) ल.स.अ = 216, म.सं.भा. = 36
   (v) ल.स.अ = 22338, म.सं.भा = 9

अभ्यास - 1.3

1. (i) 0.375 (अनावर्ती) (ii) 0.5725 (अनावर्ती) (iii) 4.2 (अनावर्ती)
   (iv) $0.\overline{18}$ (आवर्ती) (v) 0.064 (अनावर्ती)

2. (i) अनावर्ती (ii) आवर्ती
   (iii) आवर्ती (iv) अनावर्ती
   (v) आवर्ती (vi) अनावर्ती
   (vii) आवर्ती (viii) अनावर्ती
   (ix) अनावर्ती (x) अनावर्ती

3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3

4. (i) परिमेय (ii) अपरिमेय (iii) परिमेय

5. m = 5, n = 3

6. m = 4, n = 2

अभ्यास- 1.5

1. (i) $\log_3 243 = 5$ (ii) $\log_2 1024 = 10$ (iii) $\log_{10} 1000000 = 6$

(iv) $\log_{10} 0.001 = -3$ (v) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (vi) $\log_6 1 = 0$

(vii) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ (viii) $\log_{\sqrt{49}} 7 = 1$ (ix) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

(x) $\log_{32} \frac{1}{4} = -\frac{2}{5}$

2. (i) $18^2 = 324$ (ii) $10^4 = 10000$ (iii) $a^b = \sqrt{x}$

iv) $4x = 8$ (v) $3y = \frac{1}{27}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) -4 (iv) 0

(v) $\frac{1}{2}$ (vi) 9 (vii) -2 (viii) 3

4. (i) log 10 (ii) log 8 (iii) log 64

(iv) $\log \frac{9}{8}$ (v) log 243 (vi) log 45

5. (i) $3(\log 2 + \log 5)$ (ii) $7\log 2 - 4\log 5$ (iii) $2\log x + 3\log y + 4\log z$

(iv) $2\log p + 3\log q - \log r$ (v) $\frac{1}{2}(3\log x - 2\log y)$

अभ्यास - 2.1

1. (i) समुच्चय है (ii) समुच्चय नहीं है (iii) समुच्चय नहीं है

(iv) समुच्चय है (v) समुच्चय है

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$

(v) $\in$ (vi) $\in$

3. (i) $x \notin A$ (ii) $B = \{d\}$ (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$

4. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

5. (i) B = {1, 2, 3, 4, 5}
   (ii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71}
   (iii) D = {5, 3}
   (iv) E = {B, E, T, R}

6. (i) A = {x : x 3 का गुणांक है और 13 से कम है}
   (ii) B = {x : x 2 का घातांक है और x,6 से कम है}
   (iii) C = {x : x 5 का घातांक है और x,5 से कम है)
   (iv) D = {x : x, प्राकृतिक संख्या का वर्ग है और 10 से अधिक है}

7. (i) A = {51, 52, 53, ..., 98, 99}
   (ii) B = {+2, – 2}
   (iii) D = {2, 0, 4, A, 2}

8. (i) – (c)
   (ii) – (a)
   (iii) (d)
   (iv) (b)

अभ्यास - 2.2

1. (i) रिक्त नहीं (ii) रिक्त (iii) रिक्त
   (iv) रिक्त (v) रिक्त नहीं

2. (i) परिमित (ii) परिमित (iii) परिमित

3. (i) परिमित (ii) अपरिमित (iii) अपरिमित (iv) अपरिमित

अभ्यास - 2.3

1. हाँ, समान समुच्चय

2. (i) समान (ii) असमान (iii) समान (iv) असमान
   (v) असमान (vi) असमान (vii) असमान

3. (i) A = B (ii) A ≠ B (iii) A = B (iv) A ≠ B

अभ्यास - 2.4

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

2. (i) x, 30 से अधिक है।

   (ii) $x = 2x + 1$ का अर्थ है, x विषम है।

   (iii) x, 15 का गुणांक है। इसलिये 5 का अस्तित्व नहीं है।

   (iv) x रूढ़ संख्या है लेकिन 9 रूढ संख्या नहीं है।

3. (i) $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \{\phi\}$

   (ii) $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$

   (iii) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d)$

   (iv) $\phi, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{1, 16\}, \{4, 9\}, \{4, 16\}, \{9, 16\}$, $\{1, 4, 9\}, \{1, 9, 16\}, \{4, 9, 16\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 4, 9, 14)$

   (v) $\phi, \{10\}, \{100\}, \{1000\}, \{10, 100\}, \{100, 1000\}, \{10, 1000\}$, $\{10, 100, 1000\}$

अभ्यास - 2.5

1. हाँ, $A \cap B$ & $B \cap A$ समान है

2. $A \cap \phi = \{0, 2, 4\}$

   $A \cap A = \{\phi\}$

3. $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$

   $B - A = \{3, 9, 12, 15\}$

4. $A \cup B = B$

5. $A \cap B$ = {विषम प्राकृतिक संख्या} = $\{1, 3, 5, ...,$

   $A \cap C = \{\phi\}$

   $A \cap D = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, ... 100\}$

   $B \cap C$ = {विषम प्राकृतिक संख्या}

   $B \cap D = \{9, 15, 21, 25, 27, 33, ... 99\}$

   $C \cap D = \{4, 6, 8, 9, ... 99\}$

6. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $A - C = \{3, 9, 15, 18, 21\}$

   (iii) $A - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$ (iv) $B - A = \{4, 8, 16, 20\}$

   (v) $C - A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $D - A = \{5, 10, 20\}$

(vii) B – C = {20}

(viii) B – D = {4, 8, 12, 16}

(ix) C – B = {2, 6, 10, 14)

(x) D – B = {5, 10, 15}

7. (i) असत्य

(ii) सत्य

(iii) सत्य

(iv) सत्य

अभ्यास - 3.1

1. (a) (i) – 6 (ii) 7 (iii) – 6

(b) बच्चों के लिये छोडा गया

2. (i) असत्य ($\sqrt{2}\ x^2$ का गुणांक है घातांक नहीं)

(ii) असत्य (x^2 का गुणांक – 4 है)

(iii) सत्य (कोई स्थिर पद नहीं, घातांक शून्य है)

(iv) असत्य (यह बहुपदीय व्यंजक नहीं है)

(v) असत्य (बहु पदीय व्यंजक का घातांक पदों की संख्या से संबंधित नहीं)

3. p(1) = 0, p (– 1) = – 2, p(0) = – 1, p(2) = 7, p(– 2) = – 9

4. हाँ, +2 और – 2, x^4-16 बहुपद व्यंजक के शून्य हैं।

5. हाँ, 3 और – 2, $x^2 - x - 6$ बहुपद व्यंजक के शून्य हैं।

अभ्यास - 3.2

1. (i) शून्य नहीं (ii) 1 (iii) 3

(iv) 2 (v) 4 (vi) 3

2. (i) 0 (ii) – 2, – 3 (iii) – 2, – 3 (iv) – 2, 2, $\pm\sqrt{-4}$

3. (i) 4, – 3 (ii) 3, 3 (iii) शून्य नहीं हैं (iv) – 4, 1 (v) – 1, 1

4. $p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ और $p(-1) = 0$

अभ्यास - 3.3

1. (i) 4, -2 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

   (iv) 0, -2 (v) $\sqrt{15}\ -\sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $x^2 - x - 2$ (ii) $x^2 - 3$ (iii) $4x^2 + 3x - 1$

   (iv) $4x^2 - 8x + 3$

4. हाँ, सभी शून्य हैं।

अभ्यास - 3.4

1. (i) भागफल $= x - 3$ और शेष $= 7x - 9$

   (ii) भागफल $= x^2 + x - 3$ और शेष $= 8$

   (iii) भागफल $= -x^2 - 2$ और शेष $= -5x + 10$

2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं

3. $-1, -1$

4. $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

   (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

अभ्यास - 4.1

1. (a) एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं।

   (b) संयोग

   (c) समांतर

2. (a) समान (b) असमान (c) समान

   (d) समान (e) समान (f) समान

   (g) असमान (h) समान (i) असमान

3. पैंट की संख्या = 1; शर्ट की संख्या = 0

4. लडकियों की संख्या = 7; लडकों की संख्या = 4

5. पेंसिल का मूल्य = ₹ 3; पेन का मूल्य = ₹ 5

6. लम्बाई = 20 मी चौडाई = 16 मी

7. (i) $3x + 2y - 7 = 0$
(ii) $3x + 3y - 12 = 0$
(iii) $4x + 6y - 16 = 0$

8. लम्बाई = 40 इकाइयाँ; चौडाई = 30 इकाइयाँ

9. छात्रों की संख्या = 16; बेंचों की संख्या = 5

अभ्यास - 4.2

1. पहले व्यक्ति की कमाई = ₹ 18000; दूसरे व्यक्ति की कमाई = ₹ 14000

2. 42 और 24

3. कोण हैं 81^o और 99^o

4. स्थिर मूल्य = ₹ 40; प्रति कि.मी. का मूल्य = ₹ 18

5. $\frac{7}{9}$

6. 60 कि.मी./घंटा; 40 कि.मी./घंटा

7. 31^o और 59^o

8. 659 और 723

9. 40 मिली और 60 मि.ली.

10. ₹ 7200 और ₹ 4800

अभ्यास - 4.3

1. (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)
(iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
(vii) (3, 2) (viii) (1, 1)

2. (i) नाव का वेग = 8 किमी/घंटा; नदी का वेग = 3 किमी/घंटा
(ii) रेल का वेग = 60 किमी/घंटा कार का वेग = 80 किमी/घंटा
(iii) आदमी से दिनों की संख्या = 18; औरत से दिनों की संख्या = 36

अभ्यास - 5.1

1. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ (v) हाँ
   (vi) नहीं (vii) नहीं (viii) हाँ

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$ (x = चौडाई)
   (ii) $x^2 + x - 306 = 0$ (x = छोटा पूर्णांक)
   (iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ (x = रोहन की उम्र)
   (iv) $x^2 - 8x - 1280 = 0$ (x = ट्रेन का वेग)

अभ्यास - 5.2

1. (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$
   (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$ (vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$
2. 13, 14
3. 17, 18; -17, -18
4. 5 से.मी., 12 से.मी.
5. वस्तुओं की संख्या = 6; प्रत्येक वस्तु का मूल्य = 15
6. 4 मी; 10 मी
7. आधार = 12 से.मी.; ऊँचाई = 8 सेमी
8. 15 कि.मी., 20 कि.मी.
9. 20 या 40
10. 9 कि.मी./घंटा

अभ्यास - 5.3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$
   (iii) $\frac{7+\sqrt{-71}}{10}, \frac{7-\sqrt{71}}{10}$ (iv) $-1, -5$
2. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$
   (iii) $2, \frac{-3}{5}$ (iv) $-1, -5$
3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 वर्ष
5. गणित = 12, अंग्रेजी = 18 या गणित = 13, अंग्रेजी = 17
6. 120 मी; 90 मी
7. 18, 12; – 18, – 12
8. 40 कि.मी./घंटा
9. 15 घंटे, 25 घंटे
10. सार्वजनिक रेल का वेग = 33 कि.मी./घंटा
    एक्सप्रेस रेल का वेग = 44 कि.मी./घंटा
11. 18 मी; 12 मी
12. 6 सेकेण्ड
13. 13 भुजायें; नहीं

अभ्यास - 5.4

1. (i) मूल वास्तविक नहीं हो सकते
   (ii) समान मूल; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
   (iii) काल्पनिक मूल $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$
3. हाँ, 40 मी; 20 मी
4. नहीं
5. हाँ, 20 मी; 20 मी

अभ्यास - 6.1

1. (i) AP (ii) AP नहीं (iii) AP (iv) AP नहीं
2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5
   (iv) – 1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1.5, – 1.75, – 2

3. (i) $a_1 = 3; \quad d = -2$ (ii) $a_1 = -5; \quad d = 4$

(iii) $a_1 = \frac{1}{3}; \quad d = \frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6; \quad d = 1.1$

4. (i) AP नहीं

(ii) AP, अगले 3 पद $= 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) AP, अगले तीन पद $= -9.2, -11.2, -13.2$

(iv) AP, अगले तीन पद $= 6, 10, 14$

(v) AP, अगले तीन पद $= 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$

(vi) AP नहीं

(vii) AP, अगले तीन पद $= -16, -20, -24$

(viii) AP, अगले तीन पद $= \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$

(ix) AP नहीं

(x) AP, अगले तीन पद $= 5a, 6a, 7a$

(xi) AP नहीं

(xii) AP, अगले तीन पद $= \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) AP नहीं

अभ्यास - 6.2

1. (i) $a_8 = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) -84 (ii) 22
3. (i) $a_2 = 14$ (ii) $a_1 = 18; a_3 = 8$ (iii) $a_2 = \frac{13}{2}; \quad a_3 = 8$

(iv) $a_2 = -2; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = 2; \quad a_5 = 4$

(v) $a_1 = 53; \quad a_3 = 23; \quad a_4 = 8; \quad a_5 = -7$

4. 16 वाँ पद
5. (i) 34 (ii) 27
6. नहीं 7. 178 8. 5 9. 1

10. 100 11. 128 12. 60 13. 13

14. AP = 4, 10, 16, ... 15. 158

16. $-13, -8, -3$ 17. 11 18. 13

अभ्यास - 6.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

2. (i) $\frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930

3. (i) 440 (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$

   (iii) $a = 4, S_{12} = 246$ (iv) $d = 1,\ a_{10} = 22$

   (v) $n = 5;\ a_5 = 34$ (vi) $n = 7;\ a = -8$

   (vii) $a = 4$

4. $n = 38;$ $S_{38} = 6973$

5. 5610

6. x^2

7. (i) 525 (ii) -465

8. $S_1 = 3;$ $S_2 = 4;$ $a_2 = 1;$ $a_3 = -1;$ $a_{10} = -15$

   $a_n = 5 - 2x$

9. 4920 10. 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

11. 234 12. 143 13. 16 14. 370

अभ्यास - 6.4

1. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ

2. (i) 4, 12, 36, ... (ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, ...$

   (iii) $81, -27, 9, ...$ (iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, ...$

3. (i) हाँ; 32, 64, 128 (ii) हाँ, $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

(iii) नहीं (iv) नहीं (v) नहीं

(vi) हाँ; $-81, 243, -729$ (vii) हाँ; $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, ...$

(viii) हाँ; $-16,\ 32\sqrt{2},\ -128$ (ix) हाँ; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4. -4

अभ्यास- 6.5

1. (i) $r_a = \frac{1}{2}$; $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $r = -3$; $a_n = 2(-3)^{n-1}$

(iii) r = 3; $a_n = 3(3)^{n-1}$

(iv) $r = \frac{2}{5}$; $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2. $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$

3. (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4. (i) 5 (ii) 12 (iii) 7

5. 2^{12} 6. $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, ...$ 7. 5

अभ्यास - 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39

3. संरेखीय बिन्दु नहीं हैं

9. (i) वर्ग (ii) समलम्ब चतुर्भुज (iii) समांतर चतुर्भुज

10. (–7, 0) 11. 7 or -5

12. 3 or -9 13. $4\sqrt{5}$ इकाइयाँ

अभ्यास - 7.2

1. (1, 3)
2. $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ और $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$
3. 2 : 7
4. $x = 6$; $y = 3$

5. (3, – 10)
6. $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$
7. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$
8. $\left(1, \frac{13}{2}\right)$
9. 24 वर्ग इकाई
10. $\left(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5}\right)$
11. (i) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ (ii) $\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

अभ्यास - 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ वर्ग इकाई (ii) 32 वर्ग इकाई (iii) 3 वर्ग इकाई
2. (i) K = 4 (ii) K = 3 (iii) $K = \frac{7}{3}$
3. 1 वर्ग इकाई ; 1 : 4
4. $\frac{19}{2}$ वर्ग इकाई
5. ज्ञात नहीं हो सकता है।

अभ्यास - 7.4

1. (i) 6 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{4b}{a}$ (iv) $\frac{-b}{a}$
   (v) – 5 (vi) 0 (vii) $\frac{1}{7}$ (viii) – 1

अभ्यास - 8.1

4. $x = 5$ से.मी. और $y = 2\frac{13}{16}$ से.मी. या 2.8125 से.मी.

अभ्यास- 8.2

1. (ii) DE = 2.8 से.मी.
2. 8 से.मी. 3. 1.6 मी 7. 16 मी

अभ्यास - 8.3

3. 1: 4 4. $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$ 6. 96 से.मी² 8. 3.5 से.मी

अभ्यास - 8.4

8. $6\sqrt{7}$ मी 9. 13 मी 12. 1: 2

अभ्यास - 9.1

1. (i) एक (ii) वृत्त की छेदन रेखा (iii) दो
   (iv) स्पर्श बिन्दु (v) अनंत
2. PQ = 13 से.मी. 4. $\sqrt{306}$ से.मी.

अभ्यास - 9.2

1. (i) d (ii) a (iii) b (iv) a (v) c
2. 8 से.मी. 4. AB = 15 से.मी., AC = 9 से.मी.
5. प्रत्येक 8 से.मी. 6. $2\sqrt{5}$ से.मी. 9. दो

अभ्यास - 9.3

1. (i) 28.5 से.मी.² (ii) 285.5 से.मी.²
2. 88.368 से.मी.² 3. 1254.96 से.मी.² 4. 57 से.मी.²
5. 10.5 से.मी.² 6. 9.625 से.मी.² 7. 102.67 से.मी.²
8. 57 से.मी.²

अभ्यास - 10.1

1. 5500 से.मी.² 2. 154000 से.मी.² (12.48 मी²) 3. 264 c.c.
4. 1 : 2 5. 4772 7. 21175 से.मी.³
8. 188.57 मी² 9. 37 से.मी.

अभ्यास - 10.2

1.	103.71 से.मी.^{2}	2.	1156.57 से.मी.^{2}	3.	220 मिमि^{2}
4.	160 सेमी^{2}	5.	₹ 827.20	6.	$4:4:\sqrt{5}$

7. $x^2\left(\frac{\pi}{4}+6\right)$ वर्ग इकाई 8. 374 से.मी.^{2}

अभ्यास - 10.3

1. 693 कि.ग्राम
2. शंकु की ऊँचाई = 22.05 से.मी.; खिलौने का क्षे. = 793 से.मी.^{2}
3. 89.83 से.मी.^{3}
4. 616 से.मी.^{3}
5. 309.57 से.मी.^{3}
6. 150
7. 523.9 से.मी.^{3}

अभ्यास - 10.4

1.	2.74 से.मी.	2.	12 से.मी.	3.	2.5 मी
4.	5 मी	5.	10	6.	400
7.	100	8.	672		

अभ्यास - 11.1

1. $\sin A=\frac{15}{17}$; $\cos A=\frac{18}{17}$; $\tan A=\frac{15}{8}$
2. $\frac{527}{168}$
3. $\cos\theta=\frac{7}{25}$; $\tan\theta=\frac{24}{7}$
4. $\sin A=\frac{5}{13}$; $\tan A=\frac{5}{12}$
5. $\sin A=\frac{4}{5}$; $\cos A=\frac{3}{5}$
7. (i) $\frac{48}{64}$ (ii) $\frac{8+\sqrt{113}}{7}$
8. (i) 1 (ii) 0

अभ्यास - 11.2

1. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (iii) 1

(iv) 2 (v) 1

2. (i) a (ii) d (iii) c

3. 1 4. हाँ

5. QR = $6\sqrt{3}$ से.मी.; PR = 12 से.मी.

6. $\angle YXZ = 60^\circ$; $\angle YXZ = 30^\circ$ 7. यह सत्य है

अभ्यास - 11.3

1. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0
   (iv) 1 (v) 1

3. $A = 36^\circ$ 6. $\cos 15^\circ + \sin 25^\circ$

अभ्यास - 11.4

1. (i) 2 (ii) 2 (iii) 1

6. 1 8. 1 9. $\frac{1}{p}$

अभ्यास - 12.1

1. 15 मी 2. $6\sqrt{3}$ मी 3. 4 मी

4. 60° 5. 34.64 मी 6. $4\sqrt{3}$ मी

7. 4.1568 मी 8. 300 मी 9. 15 मी 10. 7.5 से.मी.^{2}

अभ्यास - 12.2

1. टावर की ऊँचाई = $5\sqrt{3}$ मी; सड़क की चौडाई = 5 मी

2. 32.908 मी 3. 1.464 मी 4. 19.124 मी

5. 7.608 मी 6. 10 मी 7. 51.96 फीट; 30 फीट 8. 6 से.मी.

9. 200 मी/से. 10. 1 : 3

अभ्यास - 13.1

1. (i) 1 (ii) 0, असंभव कार्य (iii) 1, संभव कार्य (iv) 1 (v) 0, 1

2. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) हाँ

3. 0.95 4. (i) 0 (ii) 1

5. $\frac{1}{13}, \frac{1}{3}, 1, 0$

6. 0.008 7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{26}$

अभ्यास - 13.2

1. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

2. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$

3. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{17}{18}$

4. $\frac{5}{13}$ 5. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

6. (i) $\frac{3}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{1}{26}$
   (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

7. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0

8. $\frac{11}{12}$ 9. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$

10. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{4}$

11. $\frac{11}{84}$ 12. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

13. (i) $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$ (ii) हां

14. $\frac{3}{4}$ 15. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

14. $\frac{11}{21}$ 15. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

16.

दो पासों का योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

17. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$

अभ्यास - 14.1

1. 8.1 पौधे x_i और f_i के मूल्य कम होने के कारण हमने प्रत्यक्ष विधि का उपयोग किया है।

2. ₹ 145.20 3. $f = 20$ 4. 75.9

5. 22.31 6. ₹ 211 7. 0.099 ppm

8. 49 दिन 9. 69.43%

अभ्यास - 14.2

1. बहुलक = 36.8 वर्ष, मध्यमान = 35.37 वर्ष, अस्पताल में भर्ती हुये अधिक मरीजों की उम्र 36.8 वर्ष (लग-भग) है, जब कि प्रत्येक मरीज़ की औसत आयु 35.37 वर्ष है।

2. 65.625 घंटे

3. मासिक खर्च का बहुलक = ₹ 1847.83, मासिक खर्च का मध्यमान = ₹ 2662.5.

4. बहुलक: 30.6, मध्यमान = 29.2. अधिकतर राज्य/U.T. में विद्यार्थी और अध्यापक का अनुपात 30:6 और औसत पर उसका अनुपात 29:2.

5. बहुलक = 4608.7 रन.

6. बहुलक = 44.7 कार

अभ्यास - 14.3

1. माध्यिका = 137 इकाई, मध्यमान = 137.05 इकाई, बहुलक = 135.76 इकाई

इस परिस्थिति में तीनों मापन लग-भग समान है।

2. $x = 8, y = 7$

3. माध्यिका - आयु की = 35.76 वर्ष

4. माध्यिका - लम्बाई की = 146.75 मि.मि.

5. माध्यिका - जीवन काल की = 3406.98 घंटे

6. माध्यिका = 8.05, माध्यमान = 8.32, बहुलक = 7.88

7. भार की माध्यिका भार = 56.67 kg

अभ्यास - 14.4

1.

दैनिक वेतन (₹ में)	संयई बारंबाहिता
120 से कम	12
140 से कम	26
160 से कम	34
180 से कम	40
200 से कम	50

बिन्दु अंकित करते हुये ग्राफ खींचिये: (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) और (200, 50)

2. बिन्दु अंकित करते हुये ग्राफ खींचिये : (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) और (52, 35). यहाँ पर $\frac{n}{2}$=17.5. ग्राफ पर 17.5. निर्देशांक को वक्र पर बिन्दु अंकित कीजिये। इसका x-निर्देशांक माध्यिका होगी।

3.

उत्पादन (कि.ग्रा/हे)	संचई बारंबारिता
50 से अधिक या समान	100
55 से अधिक या समान	98
60 से अधिक या समान	90
65 से अधिक या समान	78
70 से अधिक या समान	54
75 से अधिक या समान	16

निम्न बिन्दु से ग्राफ उतारिये : (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) और (75, 16).

शिक्षकों के लिए सूचना

प्रिय शिक्षको

तेलंगाना सरकार ने तेलंगाना राज्य पाठ्यचर्या की रूपरेखा (SCF-2011) के आधार पर तेलंगाना के पाठ्यक्रम में संशोधन का निर्णय लिया है जो बच्चों की पाठशाला और बाहरी जीवन को जोडने पर बल देती है। शिक्षा का अधिकार अधिनियम (RTE-2009) यह कहता है कि प्रत्येक बच्चा जो पाठशाला में प्रवेश करता है, 14 वर्ष की आयु तक प्रत्येक स्तर के लिए निर्धारित अपेक्षित दक्षताओं की प्राप्ति करें। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (NCF-2005) द्वारा प्रस्तावित सुझावों को विशेष कर हमने माध्यमिक स्तर पर गणित और विज्ञान में प्रमुखता दी है जिससे हमारे विद्यार्थियों में इन विषयों से संबंधित मजबूत आधारशिला रखी जा सकें। पिछली कक्षाओं में हमने गणित का विशाल पृथक्करण एवं औपचारिक गणितीय रचना की गयी है। हमने उन्हें गणितीय भाषा से अवगत कराया है। कक्षा-10 वीं में हम उन्हें गणित का पूर्ण-सार प्रदान करेंगे।

दसवीं कक्षा के अध्यापन में कक्षा 7 से 10 तक के पाठ्यक्रम पर विचार करना आवश्यक है। गणितीय भाषा का उपयोग एवं प्रविधि का विस्तार किया गया है। गणित के अध्ययन में विद्यार्थियों को आने वाली मुख्य कठिनाइयाँ, गणितीय भाषा की सूत्रबद्धता एवं संश्लेषणात्मकता है। इसे दूर करने के लिए उन्हें एक समूह में एक बद्ध होकर भाषा का ज्ञान प्राप्त करने का प्रयत्न करना चाहिए। सह वर्गीय सहयोग से इन कठिनाइयों को दूर किया जा सकता है। कक्षा दसवीं का गणितीय ज्ञान उन्हें भविष्य में गणित के अध्ययन में उपयोगी होगा।

यह पाठ्यक्रम संरचनात्मक दृष्टिकोण, अन्वेषणात्मक प्रविधि और गणितीय मूल संकल्पनाओं व उनके सामान्यीकरण पर आधारित है। यह प्रविधि बच्चों को कक्षाकक्ष प्रक्रिया में उत्साह के साथ भाग लेने और चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित करती है।

कक्षा - दसवीं के पाठ्क्रम को मुख्य रूप से छः भागों में विभाजित किया है - अंक व्यवस्था, बीजगणित, अंक गणित, ज्यामिति, त्रिकोणमिति, सांख्यिकी एवं निर्देशांक ज्यामिति, आदि इनसे संबंधित बिंदुओं के शिक्षण द्वारा हम अपेक्षित दक्षताओं में निहित कौशलों जैसे समस्या समाधान, तार्किक चिंतन, गणितीय संचार, प्रदत्तों का विविध रूपों में प्रस्तुतीकरण, अध्ययन में गणितीय सिद्धांतो को अपनाना और इनका दैनिक जीवन में उपयोग करना आदि का विकास किया जा सकता है।

पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों को मनन करने के अवसर प्रदान करने पर बल दिया गया है। इसमें छोटे समूहों में चर्चा करने संबंधी क्रियाकलाप दिये गये हैं। साथ ही 'इसे कीजिए' और 'प्रयत्न कीजिए' जैसे क्रियाकलाप, उनके अनुभव का गणित में उपयोग करने पर बल देते हैं। नयी पुस्तक में रूची को बढाने के लिए अध्यापक को कक्षाकक्ष में इन क्रियाकलापों का आयोजन करना चाहिए।

प्रत्येक संकल्पना के अंत में 'इसे कीजिए' एवं 'प्रयत्न कीजिए' नाम से कुछ अभ्यास दिए गये है। 'इसे कीजिए' में दिए गए प्रश्न सीखी गई संकल्पना पर आधारित होंगे एवं 'प्रयत्न कीजिए में दिए गए प्रश्न'.

तथ्य ज्ञान के परिक्षण के लिए दिये गये है। 'विचार विमर्श एवं लिखो' नये तथ्य को विद्यार्थी अपने शब्दों में समझने के लिए दिये गये है।

10 वी के गणित के पाठ्यक्रम को 14 अध्यायों में विभाजित किया गया है। जिससे बच्चे प्रत्येक संकल्पना से संबंधित अंशो की वस्तुनिष्ठता से परिचित हो सकें और गणित सीखने की प्रक्रिया में आनंद का अनुभव करें। रंगीन चित्र, आकृतियाँ, पढ़ने लायक मुद्रित अक्षरों के आकार निश्चित रूप से बच्चों को अपनी ओर आकर्षित करेंगे।

अध्याय - 1 : वास्तविक संख्याएँ, इस अध्याय में परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ गणितीय-कथन के मूलभूत प्रमेय एवं परिमेय संख्याओं का आवर्ति अनावर्ति एवं पुनरावर्ती दशमलव में विस्तार आदि की चर्चा की गयी है जिसमें लघुगणक के मूलभूत-सिद्धांतो एवं उनके उपयोग की चर्चा की गयी है।

अध्याय - 2 : यह पूर्णतः एक नया अध्याय है जो माध्यमिक स्तर पर परिचित कराया जा रहा है। पुराने पाठ्यक्रम में इसे रखा गया था लेकिन हमने इसे 10 वी कक्षा के पाठ्यक्रम में प्रस्तावित किया है। इस अध्याय में विविध उदाहरणों के साथ समुच्चय की अनेक परिभाषाओं को समझाया गया है। इसमें समुच्चय के प्रकार, वेनचित्र, समुच्चय की संक्रियायें एवं उनके अन्तर को समझाया गया है।

अध्याय - 3 : बहुपदी : इसमें हमने 'बहुपदी क्या है''? इस तथ्य एवं बहुपदी के घात तथा बहुपदों के मूल्यों की चर्चा की है। यहाँ पर रैखिक समीकरण एवं द्विघातिय समीकरणों का आलेखीय प्रदर्शन दिखाया गया है। इस अध्याय में बहुपदी के शून्य एवं गुणकों के संबंध पर ध्यान दिया गया है। हमने बहुपदीय घनों एवं बहुपदीय विभाजन को आरंभ किया है।

अध्याय - 4 : दो चर राशि वाले रैखिक समीकरणों के युग्म : यहाँ पर दो समीकरणों की सहायता से अज्ञात मूल्यों को ज्ञात करना सीखते हैं। रैखिक समीकरण के साधन समुच्चय को आलेख तथा बीजगणितीय हल द्वारा जाँच की गयी है। समीकरण के मूलों के लक्षणों, एवं उनके गुणकों के बीच संबंध को समझने के लिए अनेक घनीय उदाहरण हल किये गये है।

इसमें लिये गये प्रश्न इस प्रकार है जिससे विभिन्न अध्यायों का सहसंबंध हो सकें एवं गणित को दूसरे विषयों तथा दैनिक जीवन से जोडती है। यह अध्याय दैनिक जीवन के अज्ञात तथ्यों को जानने की क्षमता को बढाता है।

10 वीं कक्षा के गणित पुस्तक में तीन अध्याय (8,9,10) इस प्रकार है जो व्यक्तिगत अनुभवों द्वारा, तार्किक क्षमता द्वारा ज्यामितिय तथ्यों को समझने में सहायक होते है। इनसे संचार एवं समस्या समाधान में सहायता मिलेगी और वे अनेक समतल आकारों से इन संकल्पनाओं का संबंध जोड सकेंगे। अध्याय 9 वृत्त की स्पर्श एवं छेदन रेखाओं में कुछ नये पदों को उनके लक्षणों द्वारा समझाया गया है। हमने वृत्त की अवधा एवं चापकर्ण द्वारा बनने वाले क्षेत्रफल का सम्मिलित प्रदर्शन किया गया है।

अध्याय - 5 : द्विघातीय समीकरण, इसमें द्विघातीय समीकरण का अर्थ, उसका हल एवं वर्गों के गुणनखंडों को दर्शाया गया है। परवलय की सहायता से मूलों के लक्षणों को परिभाषित किया गया है।

अध्याय - 6 : श्रेणियाँ, माध्यमिक स्तर पर इस अध्याय को पहली बार परिचित कराया गया है। इसमें समांतर श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणियों का उपयोग किया गया है। श्रेणियों में पद किस प्रकार पद समान्तर एवं गुणोत्तर रूप से आगे बढते हैं इसकी चर्चा की गयी है। इस अध्याय में पदों की संख्या, n वाँ पद एवं पदों के योगफल का इस अध्याय में चर्चा की गयी है।

अध्याय - 7 : निर्देशांक ज्यामिति : कार्तीय तल पर दो बिंदुओं के बीच की दूरी, वर्गीकरण सूत्र, त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र एवं रेखा का त्रिभाजक बिंदु आदि की चर्चा इस अध्याय में की गयी है। इसमें हेरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना बताया गया है। यहाँ रेखा की प्रवणता का भी परिचय कराया गया है।

यहाँ हमने दो नये अध्याय (11 एवं 12) माध्यमिक स्तर पर पहली बार दिये हैं। त्रिभुजों की अवधारणा उसके आधार, लम्ब एवं कर्ण की सहायता से दिया गया है। यह अध्याय त्रिकोणमिति का परियाचक है जिसका उच्च शिक्षा में अत्याधिक महत्व है। त्रिकोणमिति की अवधारणा को त्रिभुज के आधार पर दिया गया है।

अध्याय - 13 : प्रायिकता का स्तर कुछ ऊँचा कर दिया गया है जो 9 वीं कक्षा में दिया गया है। इसमें कुछ पदों को दैनिक जीवन के संदर्भों से लिया गया है।

अध्याय - 14 : सांख्यिकी में उसके महत्व, दत्तों का एकत्रिकरण एवं समूह बद्ध दत्तों के मध्यमान, मध्यिका एवं बहुलक के हल किये गये उदाहरण दिये गये हैं। ओजीव को यहाँ फिर से समझाया गया है वरिशिष्ट में भिन्न-भिन्न नमूने से मॉडलींग विधियाँ दी गयी है।

किसी भी अध्याय की सफलता मात्र पाठ्यक्रम पर आधारित नहीं होती है। उसके शिक्षक एवं शिक्षण विधियों पर भी निर्भर करती है। आशा करते हैं कि गणित के अध्यापक इस कार्य में पूर्ण सहयोग करेंगे।

मात्र अच्छी पाठ्यपुस्तक के निर्माण से गुणवत्ता पूर्ण शिक्षा की गारंटी नही दी जा सकती, इसके लिए अध्यापकों द्वारा इसे पाठ्यपुस्तक में दिये निर्देशों के अनुसार पढाया जाना भी जरूरी है क्रियाकलापों को कराते समय शिक्षार्थियों की सहभागिता एवं प्रतिभागिता के माध्यम से उनकी समझ के प्रति आश्वस्त हुआ जा सकता है।

इस प्रकार अध्यापकों से यह आशा की जाती हैं कि वे कक्षा में समस्या समाधानों एवं अभ्यास की प्रक्रिया को एक प्रतिमान के रूप में प्रस्तुत करेंगे जिससे छात्र गणितीय संकल्पनाओं को भली भाँती समझ सकें तथा भावी परिस्थितियों में उनका प्रयोग कर सकें।

''संतोषजनक अध्यापन के लिए शुभकामनाएँ''

पाठ्यक्रम (Syllabus)

I. संख्याओं की पद्धति (Number System)

(i) **वास्तविक संख्याएँ (15 अवधियाँ)**

- परिमेय और अपरिमेय संख्याओं की अधिक जानकारी
- गणितीय-कथन का मूलभूत प्रमेय
- परिणाम का प्रमाण - $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ आदि की अपरिमेयता और परिमेय संख्याओं का, आवर्ती, अनावर्ती और पुनरावृत्ति दशमलव में विस्तार और इसका विलोम।
- वास्तविक संख्याओं के गुण (उदाहरणों के उपयोग से विश्लेषण और प्रस्तावना करने के पश्चात)
- लघुगुणक का परिचय
- घातीय रूप से लघुगणक में परिवर्तन
- लघुगणक के गुण $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$
- लघुगणक के नियम $\log xy = \log x + \log y$; $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$; $\log x^n = n \log x$
- लघुगणक का मानक आधार रूप,लघुगणक का दैनिक जीवन में उपयोग (परीक्षार्थी नहीं)

(ii) **समुच्चय (8 अवधियाँ)**

- समुच्चय और उनके प्रस्तुतीकरण
- रिक्त समुच्चय, परिमिति और अनन्त समुच्चय, सार्वभौमिक समुच्चय
- समान समुच्चय, उपसमुच्चय, वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय (मुख्यतः अंतराल और सूचनायें)
- वेन चित्र और समुच्चय की कार्डिनल संख्या
- समुच्चय की आधारभूत संक्रियायें - (समुच्चय का सम्मिलन और उभयनिष्ट)
- असंयुक्त समुच्चय, समुच्चयों का अंतर

II. बीजगणित (46 अवधियाँ)

(i) **बहुपदी (8 अवधियाँ)**

- बहुपदी का शून्य
- रैखिक, द्विघातीय और घनीय बहुपद के आलेख द्वारा ज्यामितीय अर्थ।
- बहुपद के शून्य और घातांक में संबंध।
- बहुपदी के लिये भाग कलन विधि पर सरल समस्यायें:-

(ii) **दो चर राशी के रैखिक समीकरणों का युग्म (15 अवधियाँ)**

- विस्तृत उदाहरणों के द्वारा दो चर राशी के रैखिक समीकरणों को बनाना।
- दो चर राशी के रैखिक समीकरणों का आलेखी प्रस्तुतीकरण
- समाधानों की संख्या के लिये बीजीय नियम
- दो चर राशी के रैखिक समीकरणों का समाधान प्रस्थापन और विलोपन से करना।
- समीकरणों के आधार पर दैनिक जीवन के सरल समस्याओं को रैखिक समीकरण का रूप देना।

(iii) **द्विघातीय समीकरण (12 अवधियाँ)**

- द्विघातीय समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$
- गुणनखण्ड द्वारा और वर्ग को पूर्ण करने के द्वारा द्विघातीय समीकरण को हल करना।
- द्विघातीय समीकरण के मूलों की वास्तविकता और विविथता में संबंध।
- दैनिक जीवन से संबंधित क्रिया कलाप।

(iv) **श्रेणियाँ (11 अवधियाँ)**

- समान्तर श्रेणी (A.P) की परिभाषा
- समानांतर श्रेणी के n वाँ पद और योग को ज्ञात करना।
- गुणोत्तर श्रेणियाँ(G.P.)
- गुणोत्तर श्रेणियाँ का n वाँ पद ज्ञात करना।

III. ज्यामिती (33 अवधियाँ)

(i) **समरूप त्रिभुज (18 अवधियाँ)**

- समान आकृतियों की अनुरूपता और समरूपता में अंतर
- समरूप त्रिभुज के गुण
- (प्रमाण) यदि त्रिभुज की एक भुजा के समांतर इस तरह है कि वह अन्य दो भुजाओं को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं तो वे दो भुजायें समान अनुपात में विभाजित होंगे।
- (प्रेरणा) यदि एक रेखा त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।
- (प्रेरणा) यदि दो त्रिभुज के संगत कोण समान हो तो उनके संगत भुजायें भी समान होंगी और त्रिभुज समरूप होंगे (AAA)
- (प्रेरणा) यदी दो त्रिभुज के संगत भुजा समान हों तो उनके (SSS) संगत कोण भी समान होंगे और वे दोनो त्रिभुज समरूप होंगे।
- (प्रेरणा) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के समान हो और इन कोणों से जुडी हुई भुजायें समानुपात में हो, तो वे दो त्रिभुज समरूप हैं। (SAS).
- (प्रेरणा) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात उनके संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होगा,
- (प्रेरणा) यदि एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष से लम्ब डाला जाय तो उस लम्ब के द्वारा बने दो त्रिभुज, संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होंगे, और एक-दूसरे के भी समरूप होंगे।
- (प्रेरणा) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के समान होता है।
- एक त्रिभुज में यदि उसकी एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के समान हो, तो उसके पहले वाली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होगा।
- (रचना) मौलिक समानुपात प्रमेय के उपयोग से एक रेखा खण्ड को विभाजित करना।
- (रचना) मापन के दलील (scalar factor) के अनुसार एक त्रिभुज दिये गये त्रिभुज के समरूप होता है।

(ii) **वृत्त की स्पर्श तथा छेदन रेखाएँ (15 अवधियाँ)**

- एक वृत्त की स्पर्श रेखा और छेदन रेखा में अंतर।
- वृत्त पर किसी एक बिंदु को स्पर्श करने वाली रेखा ''स्पर्श रेखा'' है।
- (प्रमाण) एक वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से गुजरने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।
- (प्रमाण) बाह्य बिंदु से वृत्त पर डाले गये स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।
- (रचना) दिये बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना।
- (रचना) बाह्य बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखायें।
- छेदन रेखा द्वारा वृत्त की चापकर्ण, अवधा।
- वृत्त की लघु अवधा और गुरू अवधा का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

IV. निर्देशांक ज्यामिति

- निर्देशांक ज्यामिति की संकल्पनाओं को रैखिक समीकरण और आलेख द्वारा पुनरावृत्ति।
- दो बिंदुओं के बीच की दूरी $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ = $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$
- विभाजन का सूत्र (एक रेखा खण्ड को m:n में विभाजन करना)
- निर्देशांक समतल पर त्रिभुज का क्षेत्रफल
- दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता।

V. त्रिकोणमिति (23 अवधियाँ)

(i) त्रिकोणमिति (15 अवधियाँ)

- एक समकोण त्रिभुज के न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात जैसे sine, cosine, tangent, cosecant, secant और cotangent.
- 30^o, 45^o और 60^o (प्रमाण के साथ) के त्रिकोणमितीय अनुपात के मूल्य।
- पूरक कोणों के अनुपात और त्रिकोणमितीय अनुपात का संबंध।
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिका

  (i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, (ii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, (iii) $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$

(ii) त्रिकोणमितीय के अनुप्रयोग (8 अवधियाँ)

- उन्नयन कोण और अवनमन कोण
- ''ऊँचाइयाँ और दूरियाँ'' पर सरल दैनिक जीवन की समस्यायें।
- उन्नयन और अवनमन, 30^o, 45^o और 60^o तक सीमित रखकर समस्यओं का समाधान।

VI. क्षेत्रमिति (10 अवधियाँ)

(i) समतलीय क्षेत्रफल और आयतन

- निम्न में से कोई दो वस्तुओं के समतलीय क्षेत्रफल, और आयतन या दोनों ज्ञात करने की समस्यायें i.e., घन, घनाभ, लम्ब वृत्तकार बेलन, शंकु, गोला और अर्धगोला।
- एक धातुवीय ठोस को दूसरे में रूपांतरण करने की समस्यायें और इसी प्रकार मिश्रित ठोस पर प्रश्न।

VII. दत्तों का संचालन (25 अवधियाँ)

(i) सांख्यिकी

- मध्यमान, माध्यिका और बहुलक की पुनरावृत्ति।
- मध्यमान, माध्यिकी और बहुलक (समूहबद्ध और असमूहबद्ध दत्तों का)
- विभिन्न पद्धतियों द्वारा मध्यमान, माध्यिका और बहुलक पर सरल समस्यायें जो समूहबद्ध और असमूहबद्ध के हैं।
- विभिन्न मूल्यों के लिये केन्द्रीय प्रवृत्ति।

(ii) प्रायिकता (10 अवधियाँ)

- प्रायिकता की परिभाषा और संकल्पनायें।
- सरल समस्याएँ (दैनिक जीवन की समस्यायें) जिसमें एक अवसर है और उसमें समुच्चय का संकेत हो।
- पूरक अवसरों की संकल्पनाएँ

परिशिष्ट

गणितीय मॉडलिंग (8 अवधियाँ)

- गणितीय मॉडलिंग की संकल्पना
- वास्तविक जीवन की परिस्थितियाँ जैसे साधारण ब्याज, खर्च की किश्ते और भुगतान आदि ... पर चर्चा।

शैक्षणिक मापदण्ड – उन्नत पाठशाला

शैक्षणिक मापदण्ड : अपेक्षित दक्षतायें, वे कथन हैं जो छात्रो को स्पष्ट करते हैं कि उन्हें क्या जानना चाहिये और उन्हें क्या करने में सक्षम होना चाहिये।

गणित का परिसर	विचारणीय विषय
1. **समस्या समाधान**	गणितीय समस्याओं को हल करने के लिये निम्न प्रकार से अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को उपयोग करना। a. **समस्याओं के प्रकार :** अनेक प्रकार की समस्यायें हो सकती हैं, जैसे :- पहेलियाँ, शब्दों की समस्यायें, चित्रात्मक समस्यायें, प्रक्रिया की समस्यायें, प्रदत्तों को पढना, तालिकाओं को और आलेखों को पढना, आदि। • समस्या को पढना। • सूचनाओं और प्रदत्तों के सभी भागों को पहचानना। • संबंधित सूचनाओं को पृथक करना। • उसमें गणितीय अवधारणा को समझाना। • प्रक्रियाओं और सूत्रों को पुनःस्मरण करना। • प्रक्रिया का चयन करना। • समस्या को हल करना। • समस्या संबंधी प्रमेयों और उनके उत्तरों की जाँच करना। b. **जटिलता :** एक समस्या की जटिलता निम्न पर आधारित होती है। • संबंध बनाना (जैसे कि संबंधित विभाग में दिया गया है।) • सोपानों की संख्या • संक्रियाओं की संख्या • विषय वस्तु को समझना • प्रक्रिया की प्रवृत्ति
2. **उपपत्तियों का अवलोकन**	• विविध सीढियों का अवलोकन (चर या अचर राशियों से सम्मिलित) • गणितीय सामान्यीकरण और अनुमानों को समझना और निर्माण करना • प्रक्रियाओं के औचित्य को समझना। • तार्किक वाद-विवाद का परीक्षण करना। • उपपत्तियों की संकल्पना को समझना।

	• आगमन और निगमन के तर्क के उपयोग। • गणितीय अनुमानों का परीक्षण करना
3. **संचार**	• गणितीय संकल्पनाओं को लिखना और पढना (शाब्दिक और सांकेतिक रूप) **उदाहरण :** 3+4=7 $n_1+n_2= n_2+n_1$ त्रिभुज के कोणों का योग = 180° • गणितीय व्यंजकों का निर्माण
4. **संबंध**	• गणित की सीमा के भीतर संकल्पनाओं का संबंध। उदाहरण संकलन का गुणनफल से संबंध एक संपूर्ण को अनुपात और भागफल से, प्रतिरूप और सममिति, मापन और स्थान। • दैनिक जीवन से संबंध बनाना। • गणित को अन्य विषयों से संबंधित करना। • विविध गणितीय अवधारणाओं को आँकडों के संचालन और अंक-गणित से या अंक गणित और स्थान से संबंधित करना। • विविध प्रक्रियाओं को संकल्पना से संबंधित करना।
5. **काल्पनिक दर्शन और प्रस्तुतीकरण**	• 2-D आकार और 3- D आकार के चित्र, संख्या रेखा, चित्रालेखन तथा संभालेखन, और तालिका में दिये दत्तों को पढना तथा विश्लेषण करना। • तालिकायें, संख्या रेखा, चित्रालेखन, संभालेखन और चित्र बनाना। • गणितीय संकेत और आकार।

(यह पुस्तक अंग्रेज़ी माध्यम की गणित पुस्तक की अनूदित प्रति है। इसमें शब्द, वाक्य व भाव अनुवादों का यथोचित प्रयोग है। यदि इस पुस्तक के किसी विषय या अंश के विषय में आपको संदेह हो तो अंग्रेज़ी माध्यम की गणित पुस्तक से निवृत्त करलें।)