Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

Shakuntala Devi

Shakuntala Devi popularly known as the "Human Computer" due to her arithmetic abilities.

The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani was an Iranian mathematician and a professor of mathematics at Stanford University.

State Council of Educational Research and Training
Telangana, Hyderabad

MATHEMATICS

CLASS VIII

>DU+

MATHEMATICS

గణితం

Part U‹>+ 2

CLASS
8
తరగతి

Published by
The Government of Telangana

Government's Gift for Students' Progress

B8P4A2

K2Z5W7

Energized Text Books facilitate the students in understanding the concepts clearly, accurately and effectively. Content in the QR Codes can be read with the help of any smart phone or can as well be presented on the Screen with LCD projector/K-Yan projector. The content in the QR Codes is mostly in the form of videos, animations and slides, and is an additional information to what is already there in the text books.

This additional content will help the students understand the concepts clearly and will also help the teachers in making their interaction with the students more meaningful.

At the end of each chapter, questions are provided in a separate QR Code which can assess the level of learning outcomes achieved by the students.

We expect the students and the teachers to use the content available in the QR Codes optimally and make their class room interaction more enjoyable and educative.

Let us know how to use QR codes

In this textbook, you will see many printed QR (Quick Response) codes, such as

Use your mobile phone or tablet or computer to see interesting lessons, videos, documents, etc. linked to the QR code.

Step	Description
A.	**Use Android mobile phone or tablet to view content linked to QR Code:**
1.	Click on **Play Store** on your mobile/ tablet.
2.	In the search bar type **DIKSHA.**
3.	 will appear on your screen.
4.	Click **Install**
5.	After successful download and installation, Click **Open**
6.	Choose your prefered Language - Click **English**
7.	Click **Continue**
8.	Select **Student/ Teacher** (as the case may be) and Click on **Continue**
9.	On the top right, click on the QR code scanner icon and scan a QR code printed in your book OR Click on the search icon and type the code printed below the QR code, in the search bar. ( )
10.	A list of linked topics is displayed
11.	Click on any link to view the desired content
B.	**Use Computer to view content linked to QR code:**
1.	Go to **https://diksha.gov.in/telangana**
2.	Click on **Explore DIKSHA-TELANGANA**
3.	Enter the code printed below the QR code in the browser search bar ( )
4.	A list of linked topics is displayed
5.	Click on any link to view the desired content

MATHEMATICS

Class VIII (Part-2)

Published by

The Government of Telangana, Hyderabad

Respect the Law **Grow by Education**

Get the Rights **Behave Humbly**

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023

This Book has been printed on 90 G.S.M. Maplitho
Title Page 250 G.S.M. White Art Card

Government's Gift for Students' Progress 2023-24

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

Foreword

Education is a process of human enlightenment and empowerment. Recognizing the enormous potential of education, all progressive societies have committed to the Universalization of Elementary Education with an explicit aim of providing quality education to all. As the next step, universalization of Secondary Education has gained momentum.

The secondary stage marks the beginning of the transition from functional mathematics studied upto the upper primary stage to the study of mathematics as a discipline. The logical proofs of propositions, theorems etc. are introduced at this stage. Apart from being a specific subject, it is to be treated as a concomitant to every subject involving analysis as reasoning.

I am confident that the children in our state of Telangana learn to enjoy mathematics, make mathematics a part of their life experience, pose and solve meaningful problems, understand the basic structure of mathematics by reading this text book.

For teachers, to understand and absorb critical issues on curricular and pedagogic perspectives duly focusing on learning rather than of marks, is the need of the hour. Also coping with a mixed class room environment is essentially required for effective transaction of curriculum in teaching learning process. Nurturing class room culture to inculcate positive interest among children with difference in opinions and presumptions of life style, to infuse life in to knowledge is a thrust in the teaching job.

The afore said vision of mathematics teaching presented in State Curriculum Frame work (SCF -2011) has been elaborated in its mathematics position paper which also clearly lays down the academic standards of mathematics teaching in the state. The text books make an attempt to concretize all the sentiments. In the endeavor to continuously improve the quality of our work, we welcome comments and suggestions in this regard.

With an intention to help the students to improve their understanding skills in both the languages i.e. English and Telugu, the Government of Telangana has redesigned this book as bilingual textbook in two parts. Part-1 comprises 1 to 7 lessons/ chapters and Part-2 comprises 8 to 15 lessons/ chapters.

The State Council for Education Research and Training, Telangana appreciates the hard work of the text book development committee and several teachers from all over the state who have contributed to the development of this text book at different levels. I am thankful to the District Educational Officers, Mandal Educational Officers and Head teachers for making this mission possible. I also thank the institutions and organizations which have given their time in the development of this text book. I am grateful to the office of the Commissioner & Director of School Education, (T.S.) and Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan for extending cooperation in developing this text book. Our special thanks to Faculty of School of Education Tata Institute of Social Sciences (TISS), Hyderabad and Sri Ramesh Khade, Communication Officer, CETE, TISS-Mumbai and Designers identified by SCERT for their technical support in redesigning of the textbooks.

Place : Hyderabad
Date : 07 December 2022

Director
SCERT, Hyderabad

NATIONAL ANTHEM

Jana-gana-mana-adhinayaka, jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Punjab-Sindh-Gujarat-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
Uchchhala-jaladhi-taranga.
Tava shubha name jage,
Tava shubha asisa mage,
Gahe tava jaya gatha,
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he! jaya he! jaya he!
Jaya jaya jaya, jaya he!!

- Rabindranath Tagore

PLEDGE

"India is my country; all Indians are my brothers and sisters.
I love my country, and I am proud of its rich and varied heritage.

I shall always strive to be worthy of it.

I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.

To my country and my people, I pledge my devotion.

In their well-being and prosperity alone, lies my happiness."

- Pydimarri Venkata Subba Rao

INDEX

Sl. No. క్ర.సం.	Name of the Chapter అధ్యాయం పేరు	Month నెల	Page No. పేజి సంఖ్య
8	Exploring Geometrical Figures జ్యామితీయ పటాలు అన్వేషణ	September సెప్టెంబర్	2 - 37
9	Area of Plane Figures సమతల పటముల వైశాల్యములు	October అక్టోబర్	38 - 101
10	Direct and Inverse Proportions అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు	November నవంబర్	102 - 135
11	Algebraic Expressions బీజీయ సమాసాలు	November నవంబర్	136 - 173
12	Factorisation కారణాంక విభజన	December డిసెంబర్	174 - 203
13	Visualising 3-D in 2-D త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట	January జనవరి	204-233
14	Surface Areas And Volume (Cube and Cuboid) ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణం (ఘనం, దీర్ఘఘనం)	January, Ferbruary జనవరి, ఫిబ్రవరి	234-261
15	Playing with Numbers సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	February ఫిబ్రవరి	262-313

CHAPTER 8

Exploring Geometrical Figures

H5F8C4

8.0 Introduction

We come across various figures of geometry in our daily life. There are many objects that have direct or indirect connection with geometry. These objects or actions have geometrical properties and applications. Look at the following pictures. Observe are the various geometrical figures and patterns involved in it. You might have found some shapes are similar in nature, some are congruent and some geometrical patterns that are evenly spread on the floor.

Can you identify such congruent shapes, similar shapes and symmetric shapes or patterns in the pictures?

The shapes of windows in the picture are congruent. The triangular elevations are similar and the tile patterns that are spread on the floor are of symmetric figures.

Let us study how these principles of geometrical shapes and patterns are influencing our daily life.

అధ్యాయం

8

జ్యామితీయ పటాలు అన్వేషణ

Z7I4R7

8.0 పరిచయం

మనం నిత్యజీవితంలో అనేక జ్యామితి భావనలను చూస్తూ ఉంటాం. ప్రత్యక్షం గానో లేక పరోక్షంగానో జ్యామితి తో సంబంధం గల అనేక వస్తువులు ఉన్నాయి. ఇవి జ్యామితి ధర్మాలు, అనువర్తనాలతో ముడిపడి ఉంటాయి. క్రింద నీయబడిన చిత్రాలు చూడండి. పటంలో ఇమిడియున్న వివిధ రకాలైన జ్యామితీయ పటాలు మరియు అమరికను గమనించండి వాటిలో కొన్ని సరూప పటాలు, మరికొన్ని సర్వసమాన పటాలు ఇంకా కొన్ని జ్యామితీయ క్రమాలు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉండటాన్ని గమనించి యుంటావు.

చిత్రంలోని సర్వసమాన పటాలు, సరూప పటాలు మరియు సౌష్ఠవ పటాలు లేదా క్రమాలను నీవు గుర్తించగలవా?

పై చిత్రంలో కిటికీల ఆకారాలన్నీ సర్వసమానాలు, ముందుభాగంలో ఉన్న త్రిభుజకార ఉన్నతులు సరూపాలు మరియు నేలపై పరచబడిన రాళ్ళ అమరికలు (రాతిపలకలరచన) సౌష్ఠవ పటాలు.

ఈ అధ్యాయంలో పైన తెలుపబడిన జ్యామితీయ సూత్రాలు నిత్యజీవితంను ఎలా ప్రభావితం చేస్తాయో అధ్యయనం చేద్దాం.

8.1 Congruency

You might have seen various objects with same size and shape which we use in our daily life. For example blades of a fan are of same shape and size.

Another example for congruency of shapes in daily life.

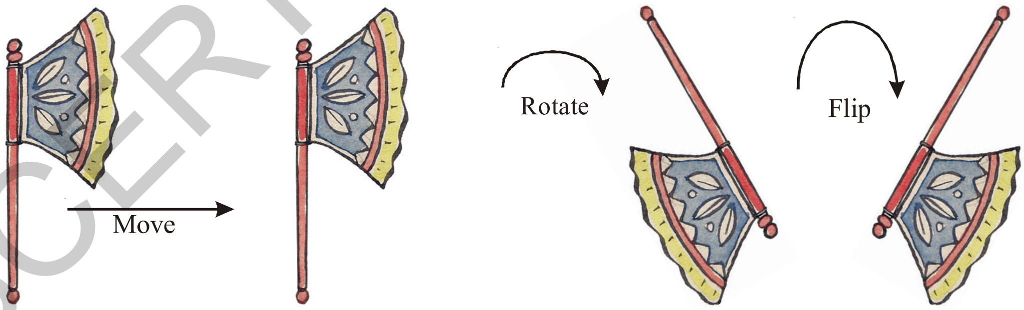
Go to an audio shop and find a Compact Disc (CD) there, what do you notice? The CDs are of same size and shape. If you place them one above the other, they cover each other exactly. We can say that the faces of CDs are congruent to one another. Now put the post cards one above the other. You will find that all post cards have same size and shape; they are all congruent to one another.

Name any three objects with congruent faces.

8.1.1 Congruency of shapes

Observe the following

(i)



In the above pictures, do all the figures represent the same object irrespective of their position?

Here the same figure is moved, rotated and flipped to get figures. They represent the same hand fan.

If we place all figures one above the other, what do you find?

They all cover each other exactly i.e. they have same shape and size.

8.1 సర్వసమానత్వం

ఒకే ఆకారము మరియు పరిమాణం గల వస్తువుల వాడకాన్ని మన నిత్యజీవితంలో నీవు గమనించే ఉంటావు. ఉదాహరణకు ఫ్యాను రెక్కలు అన్నీ ఒకే ఆకారాన్ని మరియు ఒకే పరిమాణాన్ని కలిగి యుంటాయి.

సర్వసమాన ఆకారాలకు నిత్య జీవితం నుండి మరొక ఉదాహరణ :

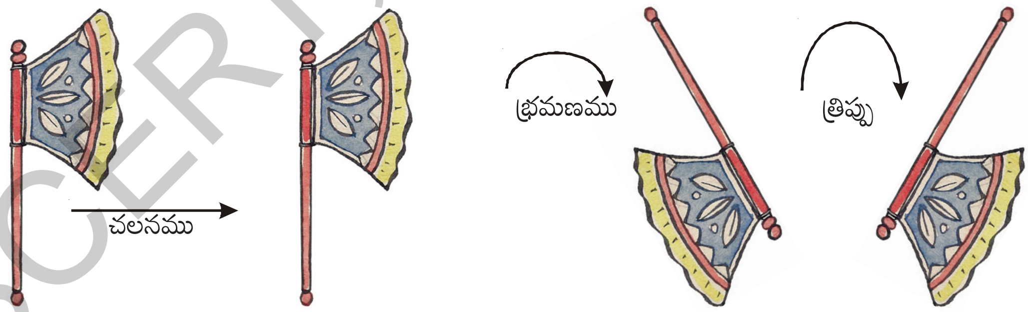
సీడీలు (C.D.) అమ్మే షాపుకు వెళ్ళి సీడీలను పరిశీలిస్తే, నీవేమి గమనిస్తావు? అన్ని సీడీలు ఒకే ఆకారాన్ని మరియు పరిమాణాన్ని కలిగి ఉంటాయి. ఒక దానిపై మరొక సీడీని ఉంచిన, అవి ఒక దానినొకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. (ఆక్రమిస్తాయి). అంటే సీడీల ఉపరితలాలు / ముఖాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమానమని చెప్పగలం.

సర్వ సమాన ముఖాలు గల వస్తువులను ఏవేని మూడింటిని పేర్కొనండి.

8.1.1 ఆకారాల సర్వసమానత

క్రింది వానిని గమనించండి

(i)



పై పటాలన్నీ దిశతో సంబంధం లేకుండా, ఒకే వస్తువుని సూచిస్తాయా?

ఇక్కడ ఒకే వస్తువుని జరపడం, భ్రమణం చెందించడం మరియు బోర్లించడం జరిగింది. పై పటాలన్నీ ఒకే విసన కర్రని సూచిస్తాయి.

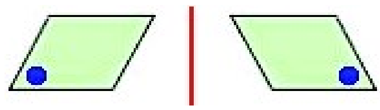
పై పటాలన్నింటినీ ఒకదానిపై నొకటి ఉంచితే నీవేమి గమనిస్తావు?

అవి అన్నీ ఒకదానికొకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. అంటే అవన్నీ ఒకే ఆకారాన్ని, పరిమాణాన్ని కలిగి ఉన్నాయి.

What do we call the figures with same shape and size ?

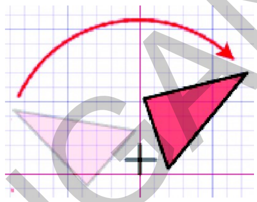
Figures with same shape and size are called congruent figures.

Flip : Flip is a transformation in which a plane figure is reflected across a line, creating a mirror image of the original figure.



After a figure is flipped or reflected, the distance between the line of reflection and each point on the original figure is the same as the distance between the line of reflection and the corresponding point on the mirror image.

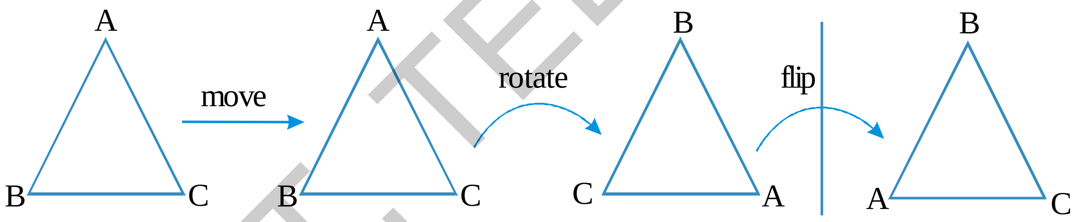
Rotation : "Rotation" means turning around a center. The distance from the center to any point on the shape stays the same. Every point makes a circle around the center.



There is a central point that stays fixed and everything else moves around that point in a circle.   A "Full Rotation" is 360°

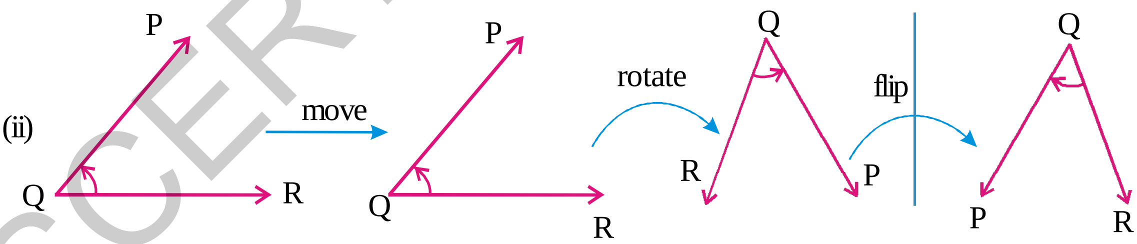
Now observe the following geometrical figures.

(i)



Triangle

(ii)



Angle

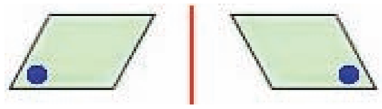
In all the cases, if the first figure in the row is moved, rotated and flipped do you find any change in size and shape? No, the figures in every row are congruent, they represent the same figure but oriented differently.

If two shapes are congruent, still they remain congruent, even they are moved or rotated. The shapes would also remain congruent if we reflect the shapes by producing their mirror images.

We use the symbol ≅ to represent congruency.

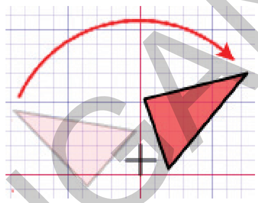
"ఒకే ఆకారము మరియు పరిమాణము గల పటాలను" ఏమని పిలుస్తారో చెప్పగలవా?

ఒకే ఆకారము మరియు పరిమాణము కలిగిన పటాలను సర్వసమాన పటాలు అంటారు.



త్రిప్పు : త్రిప్పుట అనునది పరివర్తనము. దీనిలో ఒక సమతల చిత్రము తిప్పబడును లేదా ఒక రేఖలో పరావర్తనము చేయబడి అసలు చిత్రపు పరావర్తన రూపము కల్పించబడును.

తిప్పబడిన లేక పరావర్తనము చేయబడిన చిత్రము యొక్క ప్రతి బిందువు దాని పరావర్తన చిత్రపు ప్రతి సదృశ బిందువు రెండును పరావర్తన రేఖకు సమాన దూరములో నుండును.

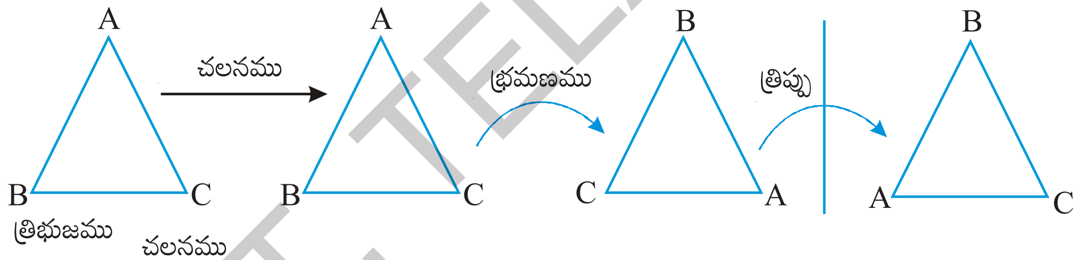


భ్రమణము : భ్రమణము చేయబడు వస్తువు ఒక బిందువు కేంద్రంగా తిప్పబడును. భ్రమణములో వస్తువు ఆకారముగాని, భ్రమణ కేంద్రము నుండి వస్తువుపై గల ఏదేని బిందువు యొక్క దూరములో గాని మార్పుండదు.

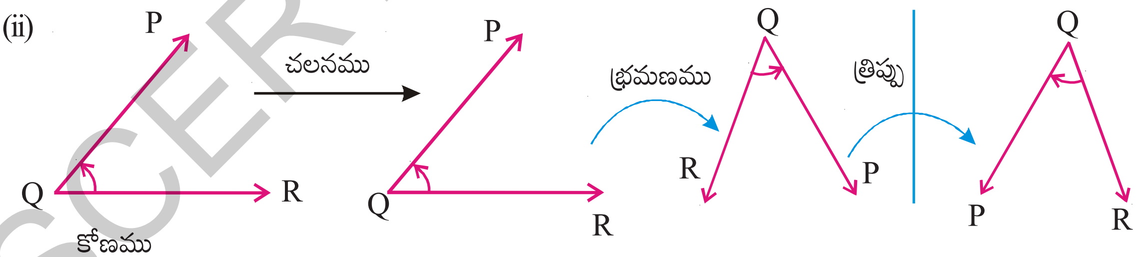
భ్రమణ కేంద్రము చుట్టూ వస్తువులోని ప్రతిబిందువు వృత్తాకారములో తిరుగును. ఒక సంపూర్ణభ్రమణము 360^o

క్రింది జ్యామితీయ చిత్రములను పరిశీలించుము.

(i)



(ii)



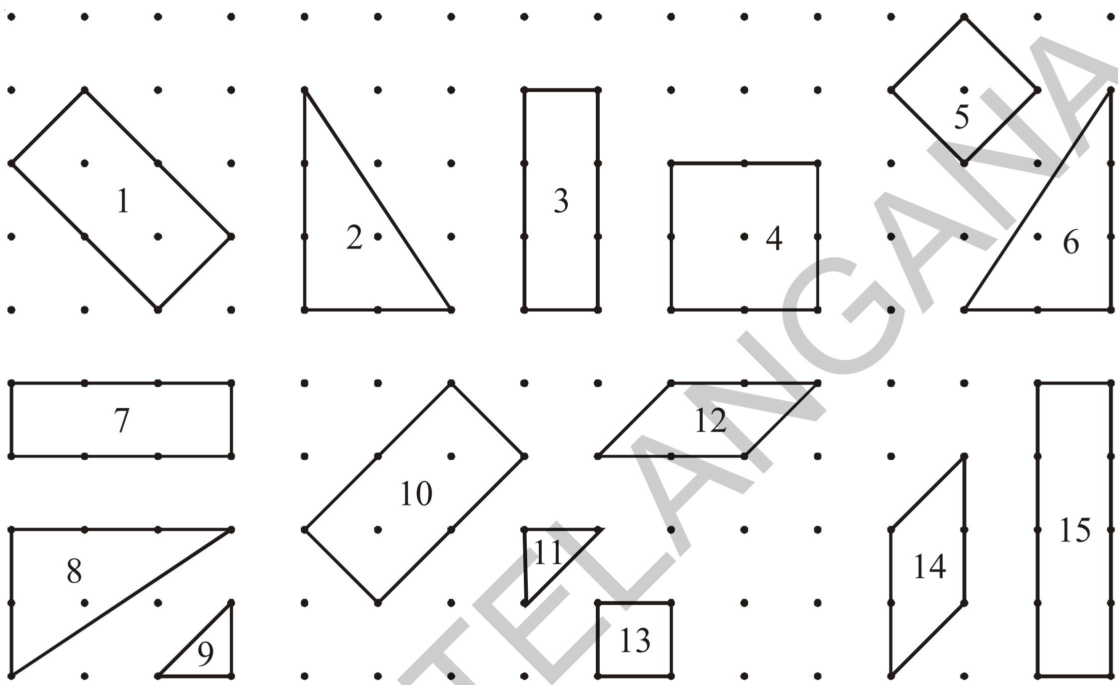
పై అన్ని సందర్భాలలో, ప్రతి వరుసలోని మొదటి పటాన్ని చలించడం, భ్రమణం చెందించడం మరియు త్రిప్పుటద్వారా దాని ఆకారంలోగాని లేక పరిమాణంలో గానీ ఏదైనా మార్పుని గమనించావా? ఎటువంటి మార్పు లేదు. ప్రతి వరుసలోని అన్ని పటాలు వివిధ దిశలలో అమరియున్నప్పటికీ అవన్నీ సర్వసమానమే.

రెండు పటాలు సర్వసమానమైన, వాటిని చలింపజేసిన, భ్రమణం చెందించినా లేదా తిప్పిన వాటి సర్వసమానత్వం అలానే కలిగియుటుంది.

మనం సర్వసమానత్వాన్ని సూచించుటకు $\cong$ గుర్తుని వాడతాము.

Do This

Identify which of the following pairs of figures are congruent.

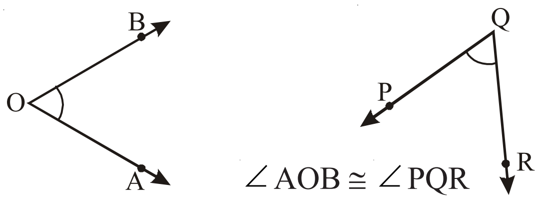


Can you say when do a pair of (a) Line segments (b) angles and (c) triangles are congruent?

(a) We know that two line segments are congruent if they have same lengths.

Length of AB = length of PQ then AB $\cong$ PQ

(b) Two angles are congruent if they have same measure.

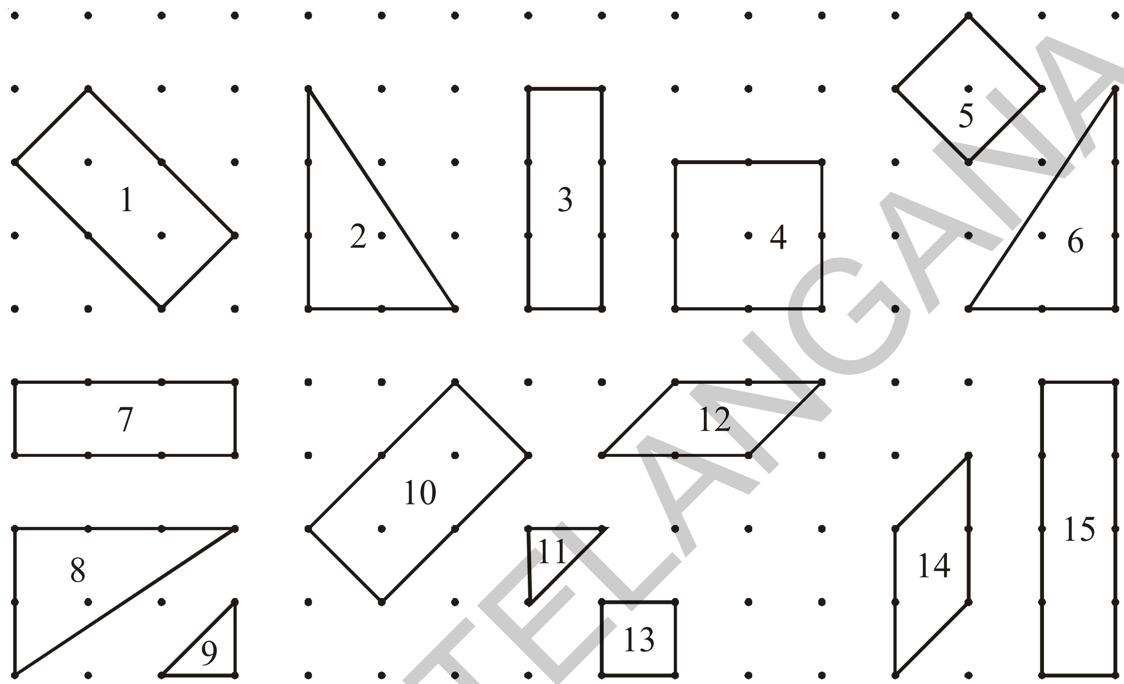


$\angle AOB \cong \angle PQR$

(c) Two triangles ΔABC and ΔPQR are congruent if their corresponding sides and angles are equal.

ఇవి చేయండి

క్రింది పటాలలో సర్వసమాన పటాల జతలను గుర్తించండి.

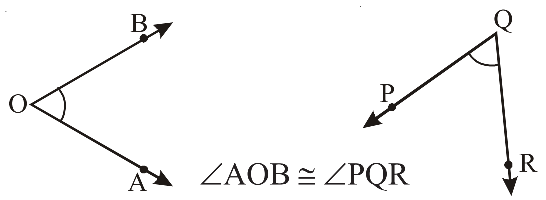


ఒక జత (a) రేఖాఖండాలు (b) కోణాలు మరియు (c) త్రిభుజాలు ఎప్పుడు సర్వసమానమవుతాయో నీవు చెప్పగలవా?

(a) రెండు రేఖాఖండాల పొడవులు సమానమైన అవి సర్వసమానాలవుతాయి.

AB పొడవు $=$ PQ పొడవు అయిన $AB \cong PQ$

(b) రెండు కోణాల కొలతలు సమానమైన అవి సర్వసమానాలు.



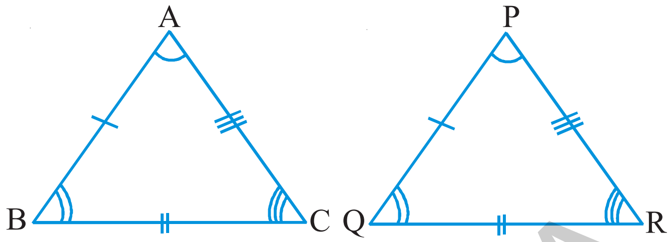
$\angle AOB \cong \angle PQR$

(c) రెండు త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔPQR లు సర్వసమానం కావలెనంటే వాటి అనురూప భుజాలు మరియు కోణాలు సమానం కావాలి.

i.e. AB = PQ and $\angle A = \angle P$

BC = QR $\angle B = \angle Q$

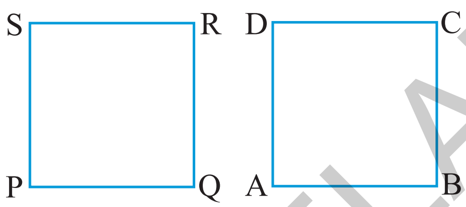
CA = RP $\angle C = \angle R$



$\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

Now, how can you say that two polygons are congruents?

Let us discuss this with an example. Let us consider ABCD and PQRS. If we place one square (i.e.) ABCD on the other i.e. PQRS, they should cover each other exactly



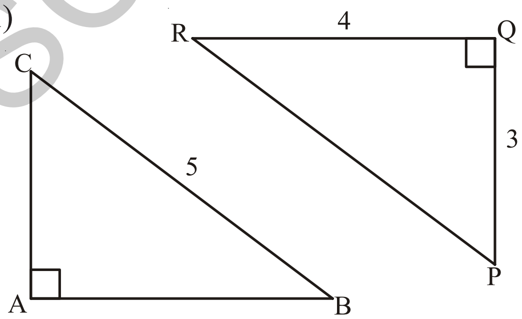
i.e. the edges must coincide with each other, only then we say that the two squares are congruent.

"If two polygons are congruent then their corresponding sides are equal and corresonding angles are equal. Thus the two geometrical shapes are said to be congruent if they coincide with each other exactly."

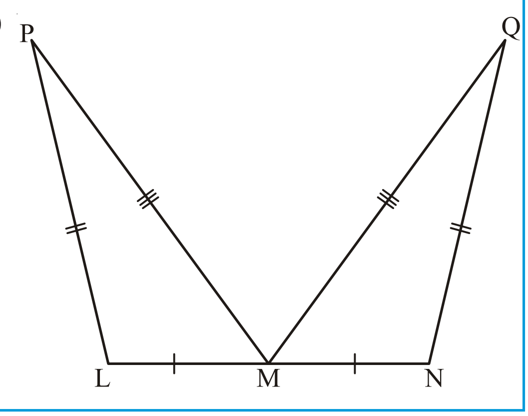
Do This

Look at the following pairs of figures and find whether they are congruent. Give reasons.

(i)



(ii)

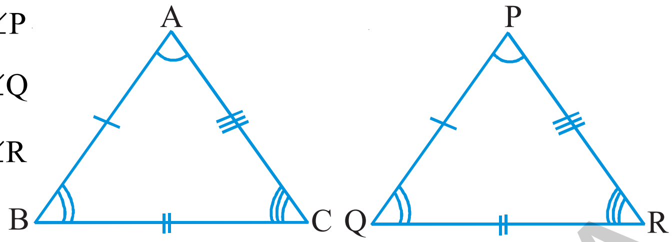


అనగా $AB = PQ$ మరియు $\angle A = \angle P$

$BC = QR$ $\angle B = \angle Q$

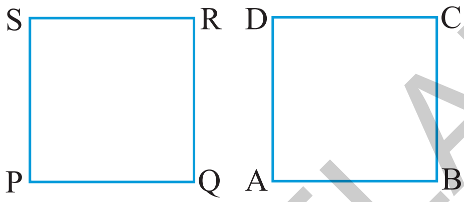
$CA = RP$ $\angle C = \angle R$

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$.



మరి ఇప్పుడు, రెండు బహుభుజులు సమానమని ఎలా చెప్పగలవు ?

దీనిని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా చర్చిద్దాం. రెండు చతురస్రాలు □ABCD మరియు □PQRS లగా తీసుకొందాము. మనం ఒక చతురస్రాన్ని మరొక చతురస్రంపై ఉంచితే అంటే □ABCD ని □PQRS పై ఉంచితే అవి ఒకదానికొకటి పూర్తిగా ఏకీభవించాలి.



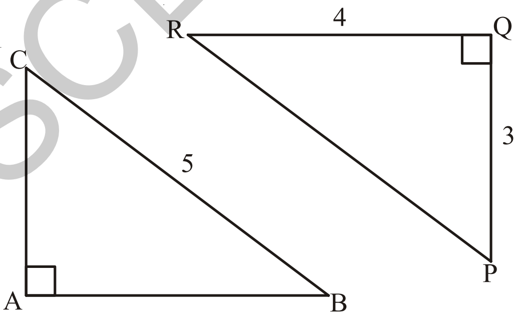
అంటే వాటి అంచులు ఒకదానితోనొకటి ఏకీభవించాలి. అప్పుడు మాత్రమే ఆ రెండు చతురస్రాలు సర్వసమానాలు.

"అదేవిధంగా రెండు బహుభుజులు సర్వసమానమైన వాటి అనురూప భుజాలు సమానం మరియు అనురూప కోణాలు సమానం. కావున రెండు జ్యామితీయ పటాలు ఒకదానిని మరొకటి పూర్తిగా కప్పి వేసిన ఆ పటాలు సర్వసమానాలు."

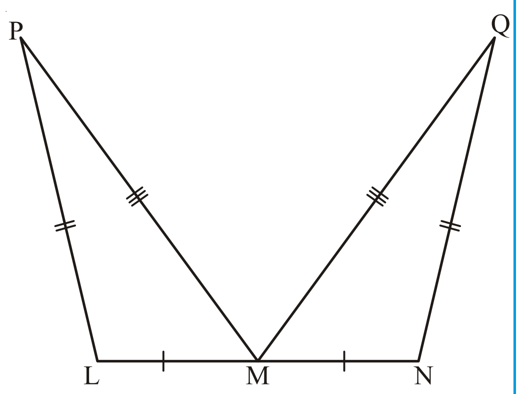
ఇవి చేయండి

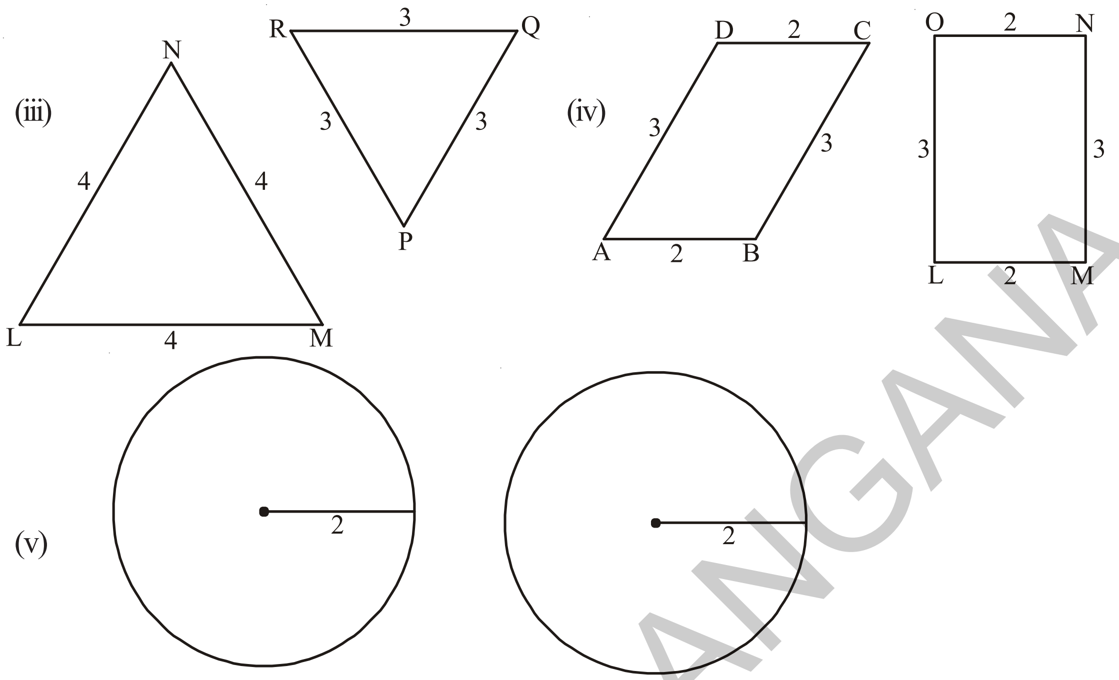
క్రింది పటాల జతలను గమనించండి. మరియు అవి సర్వసమానాలేమో తెల్పండి. కారణాలతో తెల్పండి.

(i)



(ii)





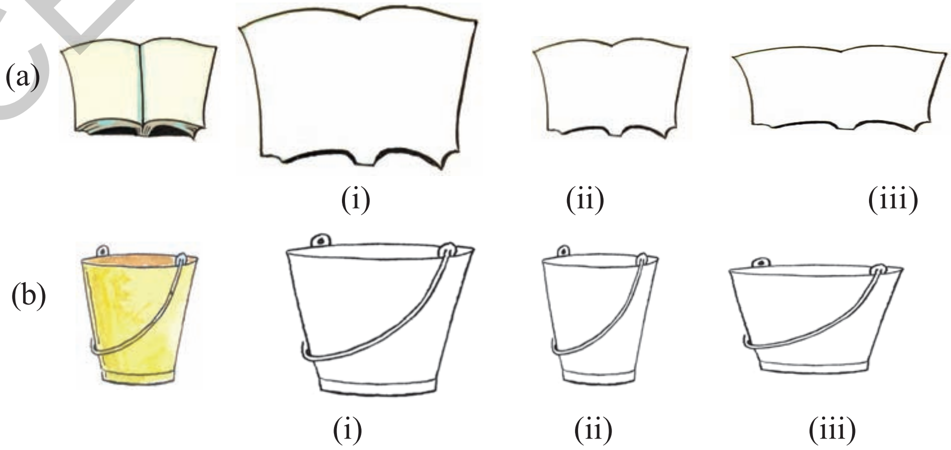
8.1.2 Similar shapes

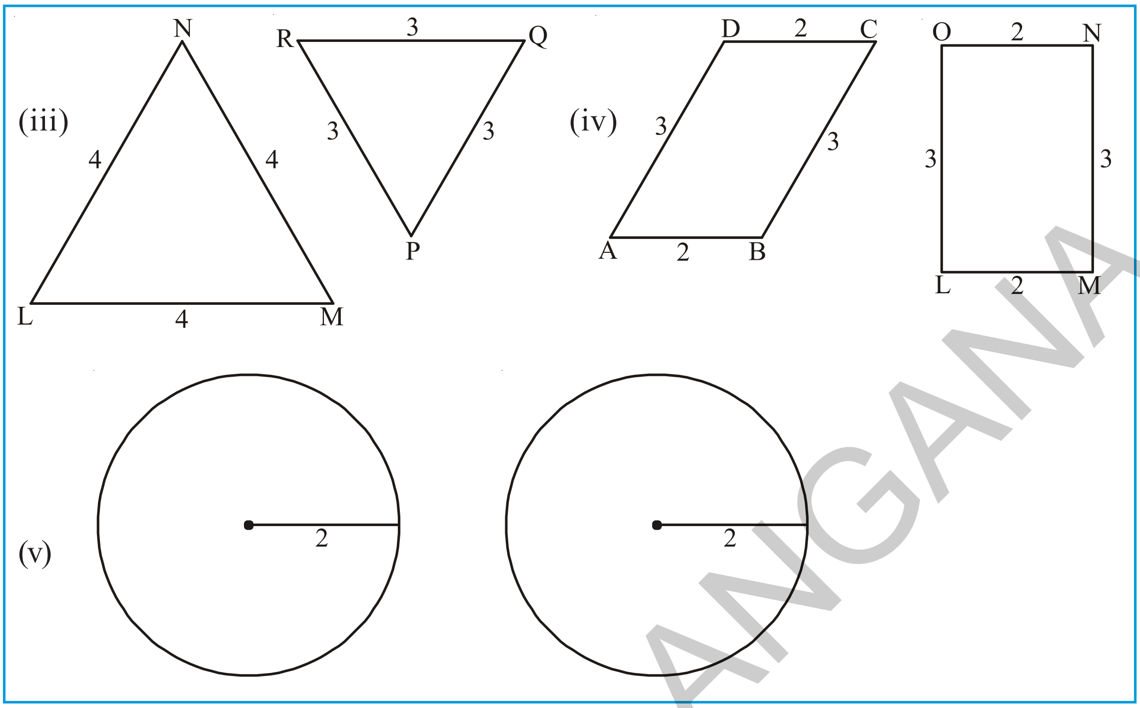
In our books, we have pictures of many objects from our sorroundings. For example pictures of elephants, tigers, elevation plan of a huge building, block diagram of a microchip etc.

Are they drawn to their original size? No, it is not possible. Some of them are drawn smaller than the real object and some of them are drawn larger.

Do This

1. Identify the out line figures which are similar to the first figure.





8.1.2 సరూప పటాలు

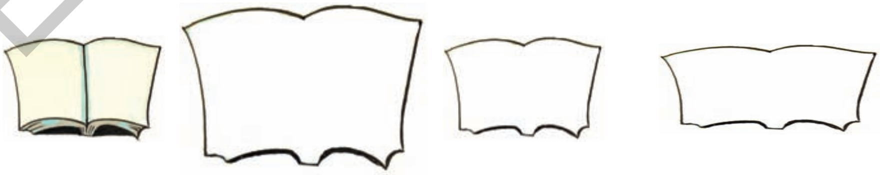
మన పుస్తకాలలో మన పరిసరాల నుండి అనేక పటాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఏనుగు, పులి, భవనాల ప్లానులు, మైక్రోచిప్‌ల నమూనా పటాలు మొదలగునవి.

పై పటాలన్నీ వాటి అసలు కొలతలతో గీయబడ్డాయా? అలా గీయబడలేదు వాటి అసలు కొలతలతో గీయడం, ఎల్లప్పుడు సాధ్యం కాదు. వాటిలో కొన్ని పటాలు వాస్తవ రూపం కన్నా పెద్దవి గానూ, మరికొన్ని చిన్నవిగానూ గీయబడినవి.

ఇవి చేయండి

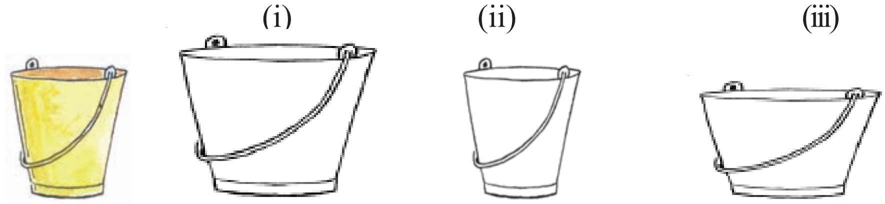
1. క్రింది చిత్రాలలో మొదటి పటంతో సరూపంగా ఉన్న రేఖాచిత్రాలను గుర్తించండి.

(a)



(i) (ii) (iii)

(b)



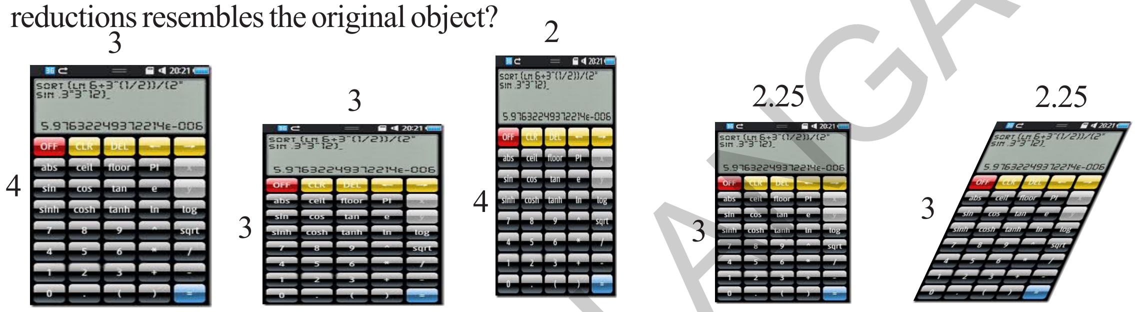
(i) (ii) (iii)

A picture of a tree is drawn on a paper. How do you say the picture drawn is similar to its original?

Tree

Picture

Here is an object is shown which is reduced in different proportions. Which of the following reductions resembles the original object?



Original object Reduction -1 Reduction - 2 Reduction - 3 Reduction -4

By comparing the dimensions, we say that reduction-3 resembles the original object. Why?

Let us, find the ratio of corresponding sides of original object and reduction - 3, what do you notice?

$$\frac{\text{Length of the original}}{\text{length of the reduction -3}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{breadth of the original}}{\text{breadth of the reduction -3}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3 \times 4}{2.25 \times 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

We notice that the ratios of corresponding sides are equal.

Here all the corresponding angles are right angles and are equal.

Hence we conclude that "two polygons are similar if their corresponding angles are congruent and lengths of corresponding sides are proportional".

Find the ratio of corresponding sides for all other reductions.

8.1.3 Where do we find the application of similarity?

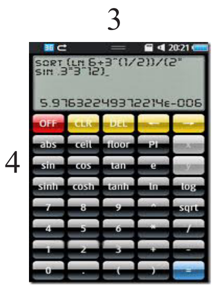
Engineers draw elevation plans, similar to the building to be constructed. D.T.P operators draw diagrams on the computer which can be magnified in proportion to make banners. Photographer makes photo image prints of the same by enlarging or reducing without distortion based on principle of proportion. Diagrams of science apparatus and maps in social studies that you have come across are in proportion i.e. similar to the original objects.

ఒక చెట్టు బొమ్మ కాగితంపై గీయబడింది. మరి గీయబడిన బొమ్మ అసలు బొమ్మలతో సరూపంగా ఉందని ఎలా చెప్పగలవు?

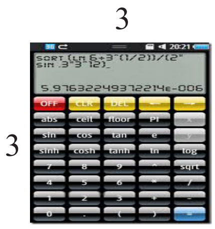
చెట్టు

గీచిన చెట్టు పటం

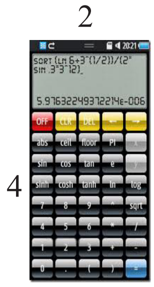
ఇక్కడ ఒక వస్తువు వివిధ రకాలు తగ్గించి చూపబడినది. వీటిలో ఏ తగ్గింపు పటం, అసలు పటాన్ని పోలియుంది?



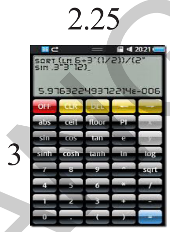
అసలు పటం



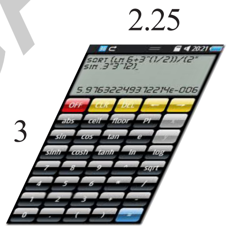
తగ్గింపు పటం-1



తగ్గింపు పటం-2



తగ్గింపు పటం-3



తగ్గింపు పటం-4

కొలతల పోలిక ద్వారా 'తగ్గింపు పటం-3' అసలు పటం పోలి ఉందని చెప్పగలం. ఎందుకు ?

ఇప్పుడు అసలు పటం మరియు 'తగ్గింపు పటం-3' ల అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని కనుగొందాము. మీరేమి గమనిస్తారు?

$$\frac{\text{అసలు వస్తువు పొడవు}}{\text{తగ్గింపు 3లోని పొడవు}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{అసలు వస్తువు వెడల్పు}}{\text{తగ్గింపు 3లోని వెడల్పు}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3 \times 4}{2.25 \times 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

మనము అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమని గమనిస్తాం.

ఈ సందర్భంలో అన్ని అనురూప కోణాల జతలు సమానమే మరియు అవి లంబకోణాలు

కావున "రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావలెనంటే వాటి అనురూప కోణాల జతలు సమానం మరియు వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం కావాలని" నిర్ధారిస్తాం.

ఇతర తగ్గింపు చిత్రాల అనురూప భుజాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

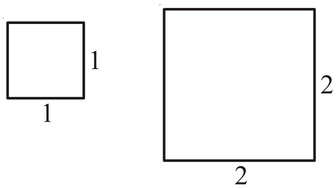
8.1.3 సరూప అనువర్తనాలను ఎక్కడ గమనిస్తాం?

ఇంజనీర్లు తాము నిర్మించబోయే భవనాలకు సరూపంగా నమూనా పటాలు గీస్తాడు. కంప్యూటర్ ఆపరేటర్ బేనర్లపై ఉండవలసిన చిత్రముల కొలతలకు అనుపాతములో కంప్యూటర్‌పై చిత్రములను తయారు చేస్తాడు. ఛాయాగ్రాహకుడు చిత్రముల ప్రతిరూపాలను, అనుపాత నియమము ఉపయోగించి రూపము చెడకుండ చిన్నవిగాను పెద్దవిగాను చేస్తాడు. విజ్ఞాన శాస్త్ర పరికరాల పటాలు సాంఘికశాస్త్రములో గీయబడిన దేశముల పటాలు ఈ అనుపాత నియమముతో గీచినవే అనగా అవి అసలు వస్తువుకు సరూపాలు.

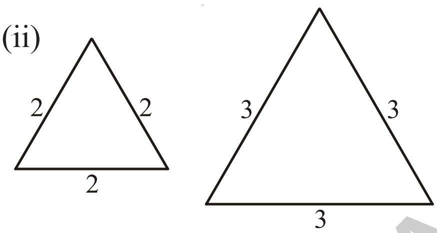
Checking the similarity

Observe the following pairs of similar figures. Measure their sides and find the ratio between their corresponding sides, also find the corresponding angles. What do you observe?

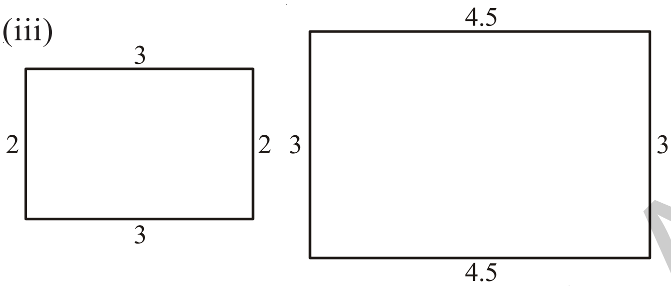
(i)



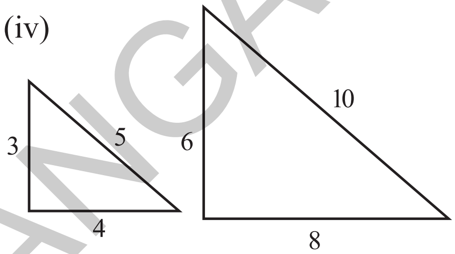
(ii)



(iii)



(iv)



Complete the table based on the figures given above

Ratio of corresponding sides	Corresponding angles
(i) Square = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ) = (90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$
(ii) Equilateral triangle = $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$
(iii) Rectangle = $\frac{2}{3}$ = ...	$(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ) = (90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$
(iv) Right angled triangle = $\frac{3}{6}$ = ...	(......., ..., ...,) = (......., ..., ...,)

In every pair of these examples, we find the ratios of corresponding sides are equal and the pairs of corresponding angles are equal.

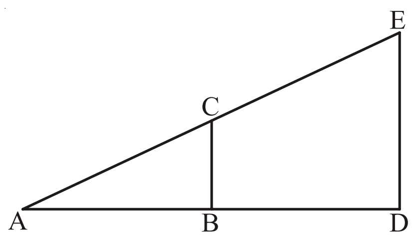
Consider another example.

In the adjacent figure if two triangles ABC and ADE are similar then we write it as $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. If these two triangles are placed one over the other, you will find that the pairs of corresponding angles are equal.

(i.e.) $\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ (why?)

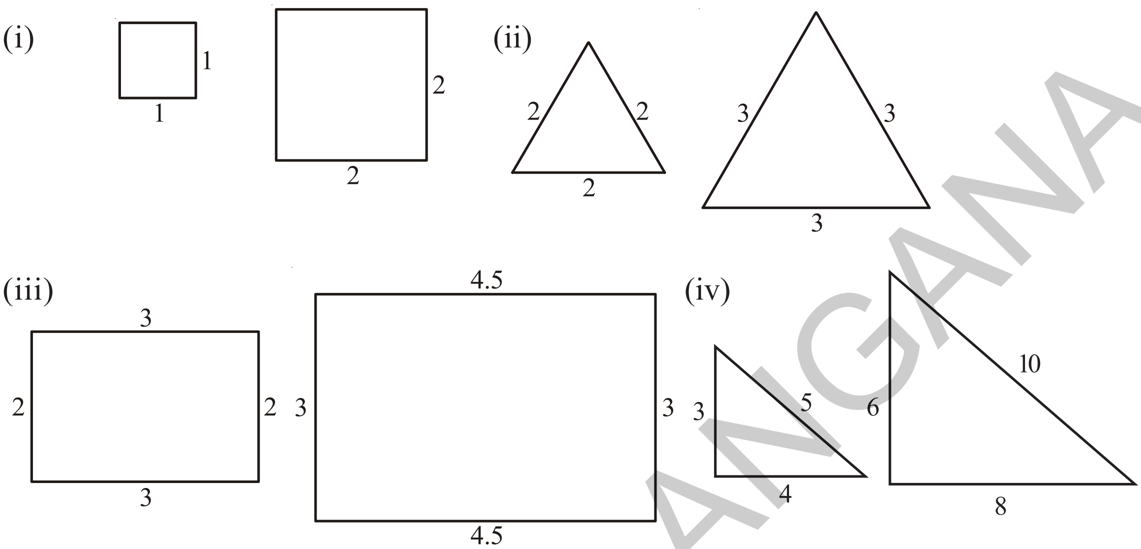
$\angle C \cong \angle E$ (Why?)



and the ratio of corresponding sides are equal

సరూపతను సరిచూడడం

క్రిందనీయబడిన సరూప పటాల జతలను గమనించండి. వాటి భుజాలను కొలిచి అనురూప భుజాల నిష్పత్తుల మధ్యగల సంబంధాన్ని రాబట్టండి. అదేవిధంగా కోణాలను కొలిచి అనురూపకోణాల జతల మధ్యగల సంబంధాన్ని నెలకొల్పండి. మీరేమి గమనించారు?



పై పటాలననుసరించి పట్టికను నింపండి.

అనురూప భుజాల నిష్పత్తి	సంగత కోణాలు
(i) చతురస్రం $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$(90^o,90^o,90^o,90^o)=(90^o,90^o,90^o,90^o)$
(ii) సమబాహు త్రిభుజం $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$	$(60^o,60^o,60^o)=(60^o,60^o,60^o)$
(iii) దీర్ఘచతురస్రం $\frac{2}{3}$ = ...	$(90^o,90^o,90^o,90^o)=(90^o,90^o,90^o,90^o)$
(iv) లంబకోణ త్రిభుజం $\frac{3}{6}$ = ... = ...	(......., ..., ...,) = (......., ..., ...,)

అన్ని ఉదాహరణ జతలలో అనురూప భుజాల నిష్పత్తి సమానం, అనురూప కోణాల జతలు సమానమని గమనిస్తాం. మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

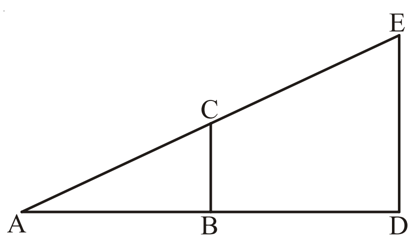
ప్రక్క పటంలో రెండు సరూప త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔADE లు సరూపాలు దీనినే మనము $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ గా వ్రాస్తాము. ఈ రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై ఒకటి ఉంచిన వాటి సంగత కోణాలు సమానముగా ఉండటము గమనించగలవు.

అంటే $\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ (ఎందుకు?)

$\angle C \cong \angle E$ (ఎందుకు?)

నుంచి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం.



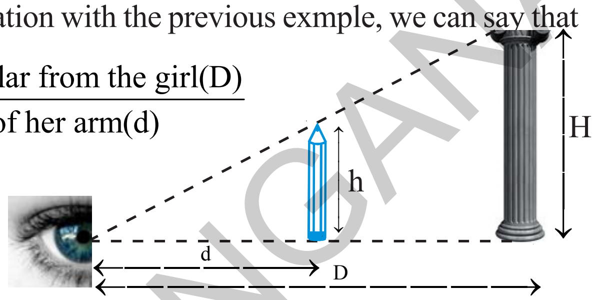
$$\text{(i.e.)} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

Let us see an illustration, how the principle of similar triangles helps us to find out the heights of the objects located far away.

Illustration: A girl stretched her arm towards a pillar, holding a pencil vertically in her arm by standing at a certain distance from the pillar. She found that the pencil exactly covers the pillar as in figure. If we compare this illustration with the previous exmple, we can say that

$$\frac{\text{Height of the pillar(H)}}{\text{Length of the pencil(h)}} = \frac{\text{Distance of pillar from the girl(D)}}{\text{Length of her arm(d)}}$$

By measuring the length of the pencil, length of her arm and distance of the pillar, we can estimate the height of the pillar.



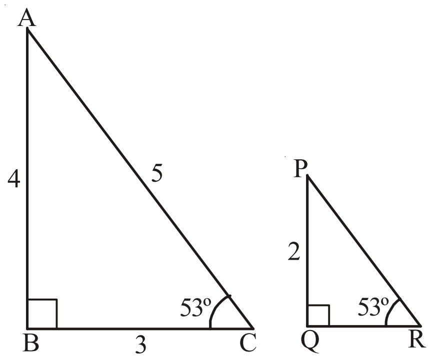
Try This

Stretch your hand, holding a scale in your hand vertically and try to cover your school building by the scale. Adjust your distance from the building. Draw the figure and estimate height of the school building.

Example 1: In the adjacent figure $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$, and $\angle C = 53^0$. Find the side PR and $\angle P$.

Solution: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

When two triangles are similar their corresponding angles are equal and corresponding sides are in proportion.



$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$

and $\angle R = \angle C = 53^o$

Sum of all the three angles in a triangle is 180^o.

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad \angle P + \angle Q + \angle R &= 180^o \\ \angle P + 90^o + 53^o &= 180^o \\ \angle P &= 180^o - 143^o = 37^o \end{aligned}$$

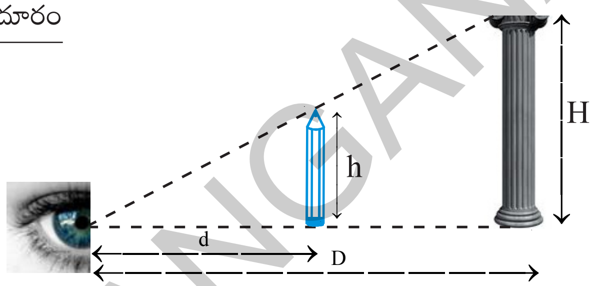
అంటే $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$

"త్రిభుజముల సరూపత" నియమము దూరములో ఉన్న వస్తువుల ఎత్తు కనుగొనుటకు ఎలా ఉపయోగపడుతుందో ఉదాహరణతో గమనిద్దాం.

ఉదాహరణ ద్వారా వివరణ: ఒక స్థంభము నుండి కొంత దూరములో గల బాలిక తనకెదురుగా గల స్తంభము వైపు తన చేతిని చాపి ఒక పెన్సిల్ పట్టుకొని నిలచి ఉన్నది. ఆమె తన చేతిలోని పెన్సిల్ స్తంభముతో ఏకీభవించినట్లు పటంలో చూపినట్లు గమనించినది. ఈ వివరణను పై ఉదాహరణతో పోలిస్తే,

$$\frac{\text{స్థంభము ఎత్తు}}{\text{పెన్సిల్ ఎత్తు}} = \frac{\text{స్థంబము నుండి బాలికకు గల దూరం}}{\text{బాలిక చేతి పొడవు}}$$

పెన్సిల్ పొడవు, బాలిక చేతి పొడవు మరియు బాలికనుండి స్థంభమునకు దూరములను కొలచి స్థంభము ఎత్తును అంచనా వేయవచ్చు.



ప్రయత్నించండి

చాపిన చేతిలో ఒక స్కేలుని నిలువుగా పట్టుకొని మీ పాఠశాల భవనం ఏకీభవించునట్లు పాఠశాల నుండి దూరంగా జరుగుతూ సరిచేసుకొనుము. దీనికి సరిపడు పటాన్ని గీచి పాఠశాల భవనం ఎత్తుని అంచనా వేయండి.

ఉదాహరణ 1: ప్రక్క పటంలో $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, మరియు $\angle C = 53^0$. అయిన PR భుజాన్ని మరియు $\angle P$ని కనుగొనుము.

సాధన: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమైన వాటి సంగత కోణాల జతలు సమానం మరియు అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం.

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$

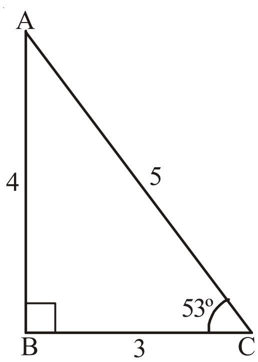
మరియు $\angle R = \angle C = 53^o$

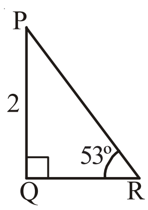
ఒక త్రిభుజంలోని అంతర కోణాల మొత్తం 180^o

అంటే $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle P + 90^o + 53^o = 180^o$

$\angle P = 180^o - 143^o = 37^o$





Example 2: Draw two squares of different sides. Can you say they are similar? Explain. Find the ratio of their perimeters and areas. What do you observe?

Solution: Let us draw two squares of sides 2 cm and 4 cm. As all the sides are in proportion $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

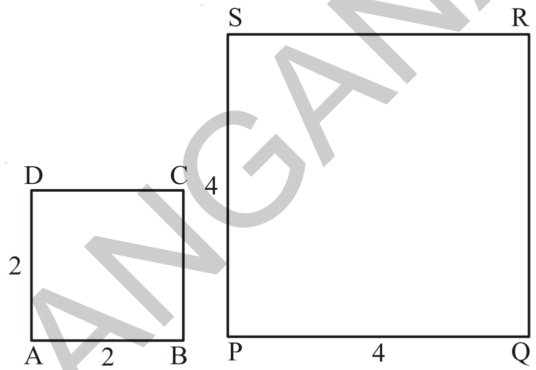
And all the pairs of corresponding angles are 90^o

So □ ABCD ~ □ PQRS

Perimeter of □ ABCD = $4 \times 2 = 8$ cm

Perimeter of □ PQRS = 4×4
= 16 cm

Ratio of their perimeters = 8 : 16 = 1 : 2



Ratio of their perimeters is same as ratio of their corresponding sides.

Area of □ ABCD = 2×2 = 4 cm^2

Area of □ PQRS = 4×4 = 16 cm^2

$\therefore$ Ratio of their areas = $4 : 16 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$

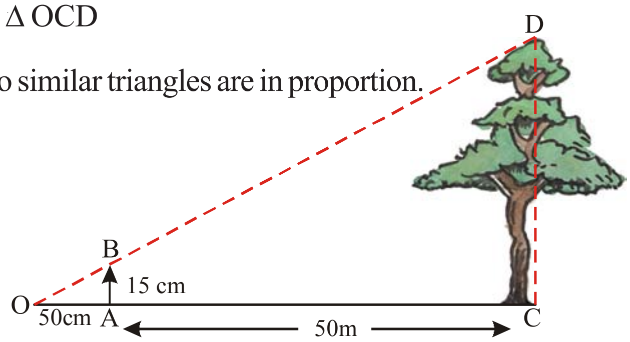
Ratio of the areas of squares = Ratio of squares of their corresponding sides.

Example 3: Jagadeesh tried to estimate the height of a tree by covering the height with a vertical scale holding it at a distance of 50 cm from his eyes along horizontal line as shown in the figure. If the scale measurement of the tree is 15 cm and distance of the tree from Jagadeesh is 50 m. Find the actual height of the tree.

Solution: From the figure Δ OAB ~ Δ OCD

Corresponding sides of two similar triangles are in proportion.

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$



ఉదాహరణ 2: వేర్వేరు కొలతలతో రెండు చతురస్రాలను గీయండి. అవి సరూపాలని మీరు చెప్పగలరా? వివరించండి. వాటి చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాలు కనగొని వాటి నిష్పత్తులను కూడా కనుగొనండి. మీరేమి గమనించారు?

సాధన : ఉదాహరణకు 2 సెం.మీ మరియు 4 సెం.మీ. భుజాలుగా గల రెండు చతురస్రాలను గీద్దాం. అన్ని భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి కనుక $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

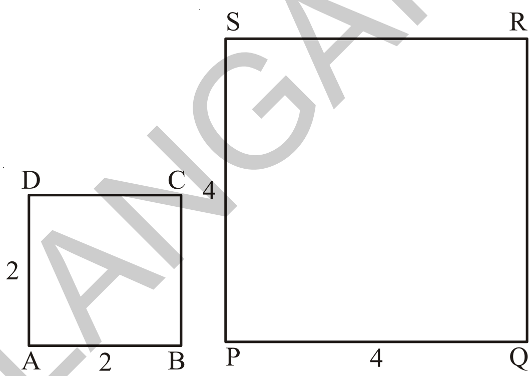
అన్ని జతల అనురూప కోణాలు 90^{o}కు సమానం.

కావున □ ABCD ~ □ PQRS

□ ABCD చుట్టుకొలత $= 4 \times 2 = 8$ చ.సెం.మీ.

□ PQRS చుట్టుకొలత $= 4 \times 4 = 16$ చ.సెం.మీ.

చుట్టుకొలత నిష్పత్తి $= 8 : 16 = 1 : 2$



కావున "చుట్టుకొలతల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి సమానము".

□ ABCD వైశాల్యం $= 2 \times 2 = 4$ చ.సెం.మీ.

□ PQRS వైశాల్యం $= 4 \times 4 = 16$ చ.సెం.మీ.

$\therefore$ వైశాల్యాల నిష్పత్తి $= 4 : 16 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$

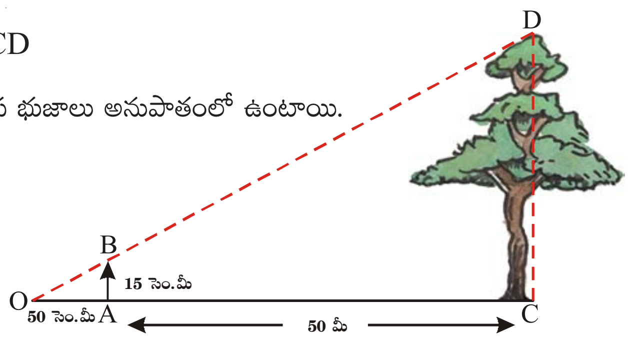
కావున వైశాల్యాల నిష్పత్తి = అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తి

ఉదాహరణ 3: జగదీశ్ ఒక చెట్టు ఎత్తుని అంచనా వేయుటకు ఒక స్కేలును చేతితో 50 సెం.మీ దూరంలో నిలువుగా పట్టుకొని తనకు ఎదురు ఉన్న చెట్టు ఎత్తును కప్పివేయుటకు ప్రయత్నిస్తూ దాని పటమును ఇలా గీచెను. చెట్టు ఎత్తు స్కేలుపై 15 సెం.మీ కు సరిపోయినది, జగదీశ్ నుండి చెట్టు దూరము 50 మీ. అయిన చెట్టు యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన : పటం నుండి $\Delta\, OAB \sim \Delta\, OCD$

రెండు సరూప త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

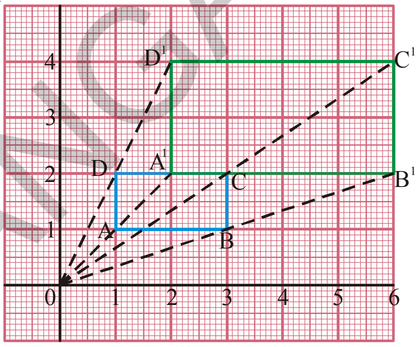


$$\therefore \frac{0.5}{50} = \frac{0.15}{CD} \Rightarrow CD = \frac{50 \times 0.15}{0.5} = 15 \text{ m}$$

$\therefore$ Height of the tree $= 15$ m

8.2 Dilations

Some times we need to enlarge the figures say for example while making cutouts, and some times we reduce the figures during designing. Here in every case the figures must be similar to the original. This means we need to draw enlarged or reduced similar figures in daily life. This method of drawing enlarged or reduced similar figure is called 'Dilation'.



Observe the following dilation ABCD, it is a rectangle drawn on a graph sheet.

Every vertex A, B, C, D are joined from 'O' and produced to double the length upto A^1, B^1, C^1 and D^1 respectively. Then A^1, B^1, C^1, D^1 are joined in order to form a rectangle whose sides are twice the lengths of each side of $\square$ABCD.

Here, O is called centre of dilation and $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$, '2' is called scale factor.

Do This

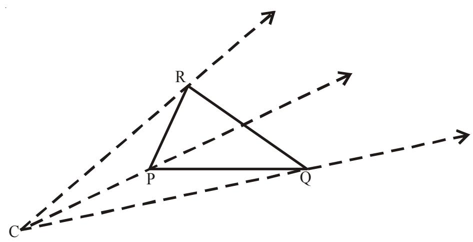
1. Draw a triangle on a graph sheet and draw its dilation with scale factor 3. Are those two figures are similar?
2. Draw a square on a graph sheet and draw its dilations with scale factor 4 and 5.

8.2.1 Constructing a Dilation

Example 4: Construct a dilation with scale factor 2 of a triangle using only a ruler and compasses.

Solution:

Step 1: Draw a Δ PQR and choose the center of dilation C which is not on the triangle. Join every vertex of the triangle from C and produce.

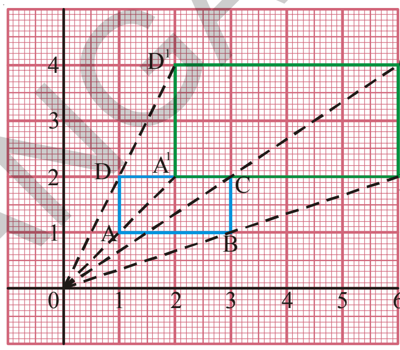


$\therefore \dfrac{0.5}{50} = \dfrac{0.15}{CD} \Rightarrow CD = \dfrac{50 \times 0.15}{0.5} = 15$ మీ.

$\therefore$ చెట్టు యొక్క ఎత్తు = 15 మీ.

8.2 సరూప విస్తరణలు

కొన్నిసార్లు మనం పటాలను వాటి వాస్తవ పరిమాణం కన్నా పెద్దదిగా వేయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు సినిమా కటౌట్ మీరు చూసి ఉంటారు. మరికొన్ని సార్లు పటాలను చిన్నవిగా గీయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు నమూనాలు గీచే సందర్భంగా అసలు పరిమాణం కన్నా చిన్నవిగా గీస్తాము. అంటే మనం పటాల ఆకారాలను పెద్దవిగా కాని చిన్నవిగా కాని చేయవలసిన అవసరం నిత్యజీవితంలో ఏర్పడుతూ ఉంటుంది. ఈవిధంగా పెద్ద లేదా చిన్న సరూప పటాలు గీసే పద్ధతిని "సరూప విస్తరణం" అంటారు.



పటంలో □ABCD విస్తరణను గమనించండి. □ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం గ్రాఫ్ కాగితంపై గీయబడినది.

ప్రతి శీర్షాలు A, B, C, మరియు D లు 'O'నుండి కలుపబడి వాటి రెట్టింపు దూరాలకు వరుసగా A^1, B^1, C^1 మరియు D^1 వరకు పొడిగింపబడినవి. ఇప్పుడు A^1, B^1, C^1, D^1లు కలుపగా □ABCD కు రెట్టింపు కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రమును ఏర్పరచినవి. ఇక్కడ 'O' ను విస్తరణ కేంద్రం అని మరియు $\dfrac{OA^1}{OA} = \dfrac{2}{1} = 2$, '2' ను సూచీ భిన్నం అని అంటారు.

ఇవి చేయండి

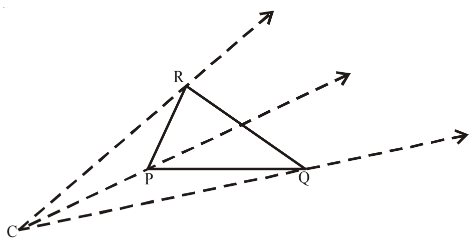
1. ఒక గ్రాఫ్ కాగితంపై ఒక త్రిభుజాన్ని గీచి సూచీ భిన్నం 3గా గల విస్తరణ పటాన్ని గీయండి. ఆ రెండు పటాలు సరూపాలేనా?
2. గ్రాఫ్ కాగితంపై ఒక చతురస్రాన్ని గీచి సూచీ భిన్నాలు 4 మరియు 5 గా గల విస్తరణ పటాలను గీయండి.

8.2.1 సరూప విస్తరణల నిర్మాణం

ఉదాహరణ 4: సూచీ భిన్నం 2 ఉండునట్లు ఏదేని ఒక త్రిభుజ విస్తరణ పటాన్ని స్కేలు మరియు వృత్త లేఖినిని మాత్రమే ఉపయోగించి నిర్మించండి.

సాధన :

సాధన 1: Δ PQRని నిర్మించి, త్రిభుజంపై లేని ఏదేని బిందువు 'C' ని విస్తరణ కేంద్రంగా 'C' ని త్రిభుజ శీర్షాలతో కలిపి ముందుకు పొడిగించుము.

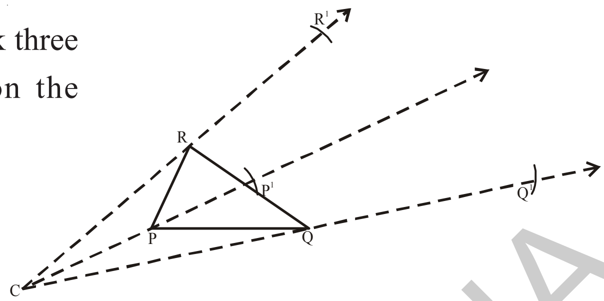


Step 2: By using compasses, mark three points P^1, Q^1 and R^1 on the projections so that

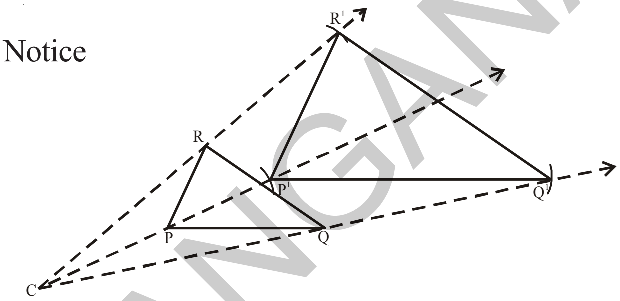
$CP^1 = k\,(CP) = 2\,CP$

$CQ^1 = 2\,CQ$

$CR^1 = 2\,CR$



Step 3: Join P^1Q^1, Q^1R^1 and R^1P^1. Notice that $\Delta\, P^1Q^1R^1 \sim \Delta\, PQR$



Exercise - 8.1

1. Name any three pairs of congruent objects, you use daily.
2. (a) Draw two congruent figures. Are they similar? Explain

   (b) Take two similar shapes. If you slide, rotate or flip one of them, does the similarity remain?
3. If $\Delta\, ABC \cong \Delta\, NMO$, then name pair of the congruent sides and angles.
4. State whether the following statements are true. Explain with reasons.

   (i) Two squares of side 3 cm each and one of them rotated through 45° are congruent.

   (ii) Any two right triangles with hypotenuse 5 cm, are congruent.

   (iii) Any two circles of radii 4 cm each are congruent.

   (iv) Two equilateral triangles of side 4 cm each but labeled as Δ ABC and Δ LHN then, they are not congruent.

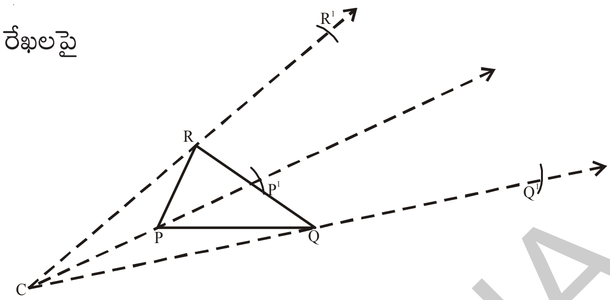
   (v) Mirror image of a polygon is congruent to the original.
5. Draw a polygon on a square dot sheet. Also draw it's congruent figures in different directions and mirror image of it.
6. Using a square dot sheet or a graph sheet draw a rectangle and construct a similar figure. Find the perimeter and areas of both and compare their ratios with the ratio of their corresponding sides.

సోపానం 2: వృత్తలేఖిని సహాయంతో పొడిగింపు రేఖలపై

$CP^1 = k\,(CP) = 2\,CP$

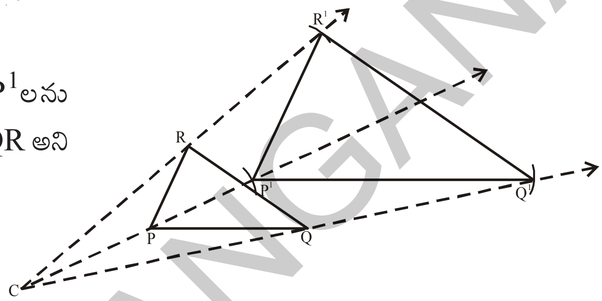
$CQ^1 = 2\,CQ$

$CR^1 = 2\,CR$



అగునట్లు P^1, Q^1 మరియు R^1 బిందువులను విక్షేపములపై గుర్తించుము.

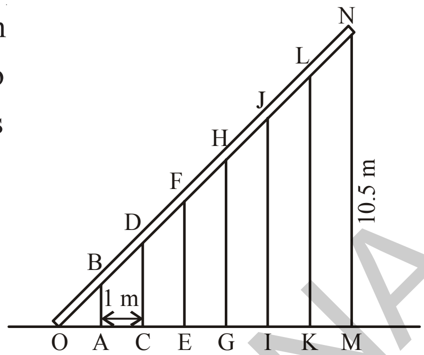
సోపానం 3: P^1Q^1, Q^1R^1 మరియు R^1P^1లను కలుపుము. $\Delta P^1Q^1R^1 \sim \Delta PQR$ అని గమనించవచ్చు.



అభ్యాసం - 8.1

1. నిత్యమూ ఉపయోగించే ఏవైనా మూడు జతల సర్వ సమాన వస్తువులను పేర్కొనండి.
2. (a) రెండు సర్వసమాన పటాలను గీయండి. అవి సరూపాలవుతాయా? వివరించండి.
   (b) రెండు సరూప పటాలను తీసుకోండి. వాటిని జరిపినా, భ్రమణం చెందించినా లేదా త్రిప్పిన అవి సరూపాలుగానే ఉంటాయి.
3. $\Delta ABC \cong \Delta NMO$ అయిన అనురూప భుజాలను, అనురూప కోణాల జతలను తెల్పండి.
4. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమవుతాయో లేదా తెల్పండి. కారణాలను వివరించండి.
   (i) 3 సెం.మీ. భుజాలుగా గల రెండు చతురస్రాలలో ఒక దానిని 45^0 మేర భ్రమణం చెందించిన, అవి సర్వసమానాలు.
   (ii) 5 సెం.మీ కర్ణాలుగా గల రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
   (iii) 4 సెం.మీ వ్యాసార్థంగా గల రెండు వృత్తాలు సర్వసమానాలు.
   (iv) 4 సెం.మీ భుజంగా గల రెండు సమబాహు త్రిభుజాలను ΔABC మరియు ΔLHN లతో సూచించిన, అవి సర్వసమానాలు కావు.
   (v) ఒక బహుభుజి మరియు దాని ప్రతిబింబములు సర్వసమానాలు.
5. ఒక చతురస్ర బిందు మాపని పై బహుభుజిని ఒకదానిని గీయండి. మరియు వివిధ దిశలలో దానియొక్క సర్వసమాన పటాలు మరియు వాటి ప్రతిబింబ పటాలను గీయండి.
6. ఒక గ్రాఫ్ కాగితం పై లేదా చతురస్ర బిందు మాపనిపై ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయండి. దానికి సరూప పటాన్ని నిర్మించండి. ఈ రెండు పటాల వైశాల్యాలు మరియు చుట్టుకొలతలు కనుగొని వాటి వాటి నిష్పత్తులను దీర్ఘచతురస్రాల భుజాల నిష్పత్తులతో పోల్చండి.

7. 7 pillars are used to hold a slant iron gudder as shown in the figure. If the distance between adjoining two pillars is 1 m and height of the last pillar MN is 10.5m. Find the heights of rest of the pillars.

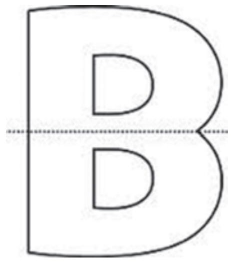


8. Standing at 5 m apart from a vertical pole of height 3 m, Sudha observed a building behind the pillar and found that tip of the pillar is in line with the top of the building. If the distance between pillar and building is 10m, estimate the height of the building. [Here height of Sudha is neglected]

9. Draw a quadrilateral of any measurements. Construct a dilation of scale factor 3. Measure their corresponding sides and verify whether they are similar.

8.3 Symmetry

Look at the following figures. If we fold them exactly to their halves, one half of each figure exactly coincides with other half.

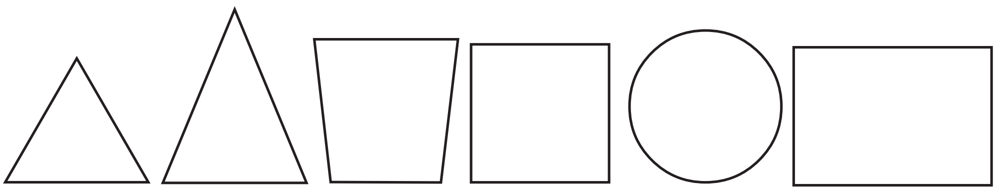


What do we call such figures? What do we call the line along which we fold the figures so that one half coincides with the other? Do you recollect from earlier classes?

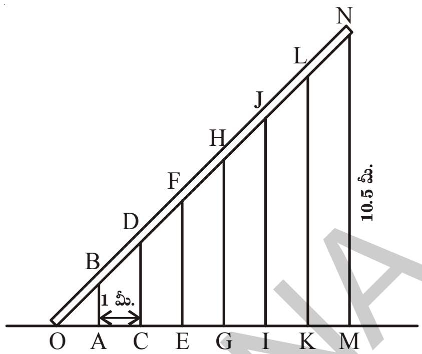
They are called symmetric figures and the line which cuts them exactly into two halves is called line of symmetry.

Do These

Draw all possible lines of symmetry for the following figures.



7 ఒక ఇనుప కమ్మీ 7 స్థంభాలపై పటంలో చూపినట్లుగా ఉంచబడింది. ఏ రెండు స్థంభాల మధ్య దూరమైనా 1 మీ.కి సమానం మరియు చివరి స్థంభం MN ఎత్తు 10.5 మీ అయిన మిగిలిన అన్ని స్థంభాల ఎత్తులను కనుగొనండి.

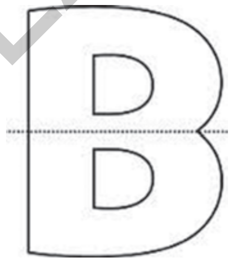


8. 3మీ ఎత్తుగల ఒక నిలువు స్థంభం నుండి 5 మీ దూరంలో నిలబడి, సుధ, ఒక భవనంపై భాగము మరియు స్థంభం పై భాగం ఒకే సరళరేఖలో ఉన్నట్లు గమనించినది. భవనం మరియు స్థంభాల మధ్య దూరం 10 మీ అయిన భవనం ఎత్తును అంచనా వేయుము. (సుధ ఎత్తును పరిగణనలోకి తీసుకోకుండా)

9. ఏదేని ఒక చతుర్భుజాన్ని గీయండి. సూచీ భిన్నం 3 ఉండునట్లు దాని విస్తరణ పటాన్ని గీయండి. వాటి అనురూప భుజాలను కొలచి ఆ రెండు పటాలు సరూపాలేమో సరిచూడండి.

8.3 సౌష్ఠవము

క్రింది పటాలను గమనించండి. వాటిని సరిగ్గా సగానికి మడిచిన, ప్రతి సగమూ రెండవ సగంతో పూర్తిగా ఏకీభవిస్తుంది.

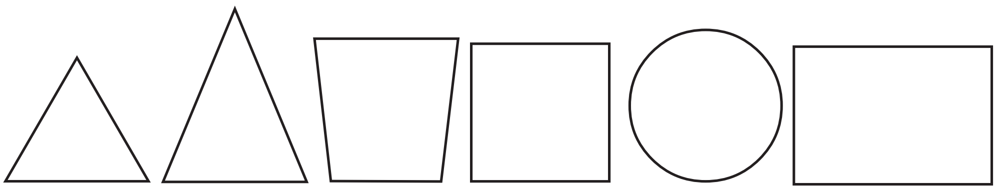


ఇటువంటి పటాలని ఏమని పిలుస్తాం? ఒక సగం రెండవ సగంతో ఏకీభవించునట్లు ఏ రేఖ వెంబడి మడత పెట్టామో ఆ రేఖను ఏమని పిలుస్తారు? నీవు క్రింది తరగతుల నుండి నేర్చుకొనిన ఈ అంశాలను గుర్తుకు తెచ్చుకొనగలవా?

ఇటువంటి పటాలను సౌష్ఠవ పటాలు అంటారు. మరియు ఈ పటాలను ఖచ్చితంగా రెండు అర్ధ పటాలుగా విభజించే రేఖను సౌష్ఠవ అక్షం లేదా సౌష్ఠవ రేఖ అంటాం.

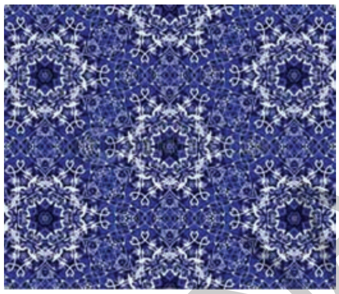
ఇవి చేయండి

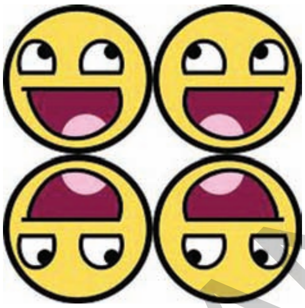
క్రింది ఆకారాలకు సాధ్యమైనన్ని సౌష్ఠవరేఖలు గీయండి.



Observe the following symmetric designs which we see around us.








All these designs are products of different kinds of symmetry.

Here, the dog has her face made perfectly symmetrical with a bit of photo magic. Do you observe a vertical line at the center?

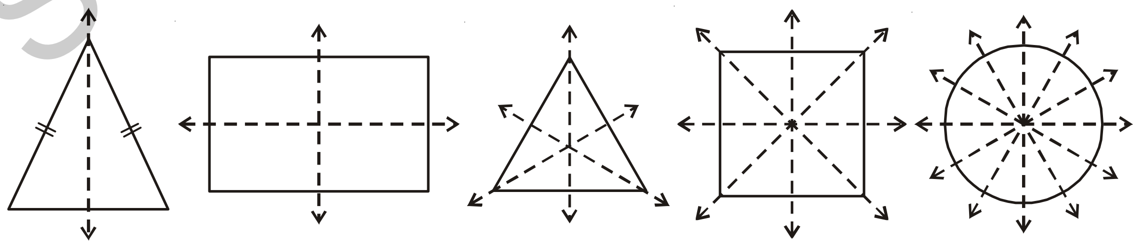
It is called 'line of symmetry' or 'mirror line'.

We call this symmetry as 'Reflection symmetry' or 'Mirror symmetry'.

Consider another example, reflection of a hill in a lake. It is also reflection symmetry and line of symmetry is a horizontal line that separates the hill and its image. This may not be perfectly symmetric because lower part is blurred by the lake surface.

8.3.1 Rotational symmetry

Observe the lines of symmetry in the following.



Different geometrical figures have different number of lines of symmetry.

నీ పరిసరాలలో కనిపించే క్రింది సౌష్ఠవ విన్యాసాలను గమనించండి.

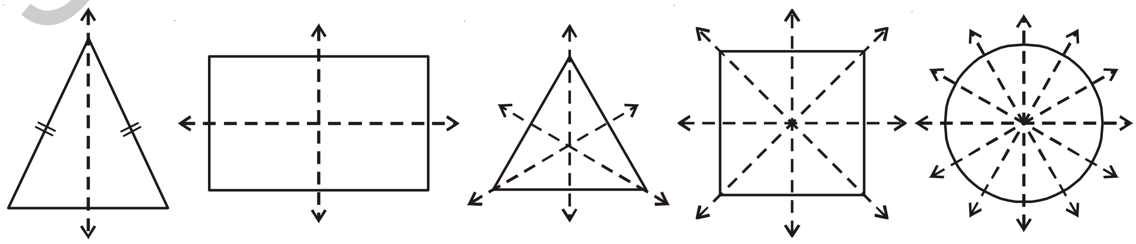
ఈ విన్యాసాలన్నియు వివిధ రకాల సౌష్ఠవ పటాల నుండి ఉత్పన్నమైనవే.

ఇక్కడి పటంలో కుక్క యొక్క ముఖం "ఫోటోమ్యాజిక్" ద్వారా సౌష్ఠవంగా రూపొందించబడినది.
మధ్యలో గీయబడిన నిలువు రేఖను గమనించారా?
దానిని సౌష్ఠవ రేఖ లేదా ప్రతిబింబ అక్షము అంటారు.
ఈ విధమైన సౌష్ఠవమును 'పరావర్తన సౌష్ఠవం' లేదా ప్రతిబింబ సౌష్ఠవం' అంటారు.

మరొక ఉదాహరణను గమనించండి: ఒక కొండ యొక్క ప్రతిబింబము సరస్సులో చూపబడింది. ఇది కూడా ప్రతిబింబ సౌష్ఠవమే. దీనిలో సౌష్ఠవాక్షము కొండ మరియు సరస్సులో దాని ప్రతిబింబాలను కలుపుచున్న అడ్డరేఖ. మసకగా ఉండుటచే ఈ ప్రతిబింబము ఖచ్చితంగా సౌష్ఠవ ప్రతిబింబము కాకపోవచ్చును.

8.3.1 భ్రమణ సౌష్ఠవం

క్రింది వానిలో సౌష్ఠవ రేఖలను గమనించండి.



వివిధ రకాల జ్యామితీయ పటాల వివిధ సంఖ్యలలో సౌష్ఠవ రేఖలు కలిగి ఉంటాయి.

Rotate each figure given above, about its centre and find out how many times it resembles its initial position during its one complete rotation.

For example, rectangle has two lines or axes of symmetry. When a rectangle is rotated about its center its shape resembles the initial position two times. We call this number as 'order of rotation'.

Tabulate your findings in the following table.

Geometrical figure	No. of axes of symmetry	No. of times it resumes its initial position	Order of rotation
Isosceless triangle	....	....	....
Rectangle	2	2	2
Equilateral triangle	....	....	....
Square	....	....	....
Circle	....	....	....

Think, Discuss and Write

1. What is the relation between order of rotation and number of lines of symmetry of a geometrical figure?
2. How many lines of symmetry does a regular polygon have? Is there any relation between number of sides and order of rotation of a regular.polygon?

8.3.2 Point symmetry

Observe the adjacent figure. Does it have line of symmetry? It does not have line symmetry, but it has another type of symmetry. The figure looks the same either you see it from upside or from down side. i.e., from any two opposite directions. This is called point symmetry. If you look at the figure you may observe that every part of it has a matching point. If you draw a line through its centre, it cuts the diagram on either sides of the center at equal distance. Draw some more lines through center and verify. Now this figure is said to have 'point symmetry'.

We also observe that some letters of English alphabet too have point symmetry .

X H I S N Z

పై పటాలలో ప్రతి దానిని పూర్తిగా వాటి కేంద్రం ఆధారంగా ఒక భ్రమణం చేసిన ఎన్నిసార్లు తొలిస్థితిని పోలినట్లు ఉంటాయో కనుగొనండి.

ఉదాహరణకు ఒక దీర్ఘచతురస్రానికి రెండు సౌష్ఠవరేఖలు/అక్షాలు ఉన్నాయి. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పూర్తిగా ఒక భ్రమణం చేసిన, రెండుసార్లు తొలిస్థితిని పోలిన స్థితిలోకి వస్తుంది. ఈ సంఖ్య '2' ను మనం "భ్రమణ పరిమాణం" అంటాము.

మీ పరిశీలనలను క్రింది పట్టికలో నమోదు చేయండి.

జ్యామితి పటం	సౌష్ఠవరేఖల సంఖ్య	తొలిస్థితిని పోలిన స్థితులు పొందు సంఖ్య	భ్రమణ పరిమాణం
సమద్విబాహు త్రిభుజం	....	....	....
దీర్ఘచతురస్రం	2	2	2
సమబాహు త్రిభుజం	....	....	....
చతురస్రం	....	....	....
వృత్తం	....	....	....

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

1. ఒక జ్యామితి పటం యొక్క సౌష్ఠవ రేఖల సంఖ్యకు మరియు దాని భ్రమణ పరిమాణానికి మధ్యగల సంబంధం ఏమిటి?
2. ఒక క్రమ బహుభుజికి గల సౌష్ఠవ రేఖల సంఖ్య ఎంత? ఒక క్రమ బహుభుజి భుజాల సంఖ్యకు మరియు దాని భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణమునకు మధ్యగల సంబంధమేమి?

8.3.2 బిందు సౌష్ఠవం

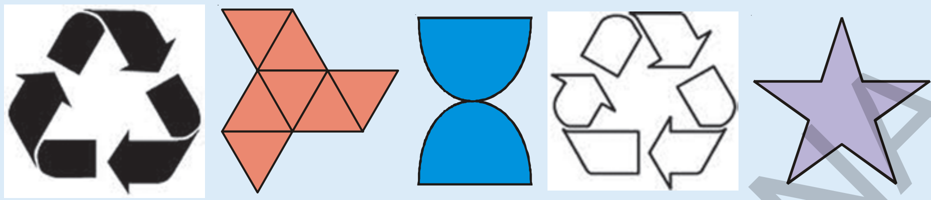
ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించండి. దీనికి రేఖా సౌష్ఠవం ఉందా? ఈ పటానికి రేఖా సౌష్ఠవం లేదు. కానీ ఒక ప్రత్యేక రకమైన సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉంది. పైనుండి క్రిందికి చూచినా క్రింది నుండి పైకి చూచినా ఒకే విధంగా ఉంది లేదా ఏ రెండు వ్యతిరేక దిశల నుండి చూచిన ఒకే విధంగా కనిపిస్తుంది. దీనిని బిందు సౌష్ఠవం అంటారు. పటాన్ని పరిశీలిస్తే అందులోని ప్రతిభాగంను పోలిన మరొక భాగాన్ని గమనించవచ్చు. దాని మధ్య నుండి ఒక రేఖను గీచిన, ఆ రేఖ పటాన్ని సమానదూరంలో భాగాలు ఉండునట్లు రెండు అర్ధభాగాలుగా విభజిస్తుంది. మధ్య నుండి మరికొన్ని రేఖలను గీచి సరిచూడండి. ఈ పటం బిందు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుందని అంటారు.

అదేవిధంగా ఆంగ్ల అక్షరాలలో కొన్ని బిందు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉన్నాయని మనం గమనించవచ్చు.

X	H	I	S	N	Z

Try These

1. Identify which of the following have point symmetry.



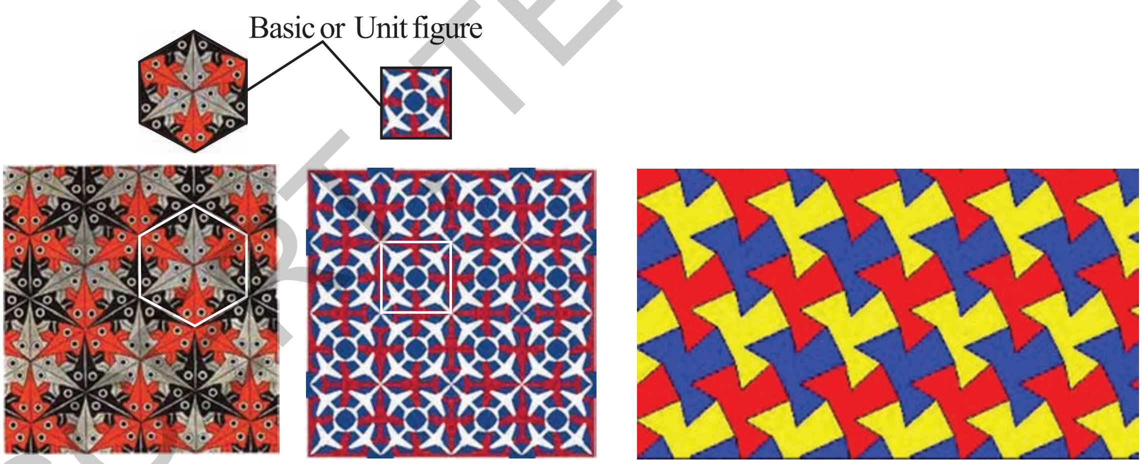
2. Which of the above figures have line of symmetry?

3. What can you say about the relation between line symmetry and point symmetry?

8.3.3 Applications of symmetry

- Majority of the objects what we use have atleast one type of symmetry.
- Most of the Machine made products are symmetric. This speeds up the production.

Observe these patterns



Where do you find these? We find these patterns in floor designs and fabric painting etc.

How these patterns are formed?

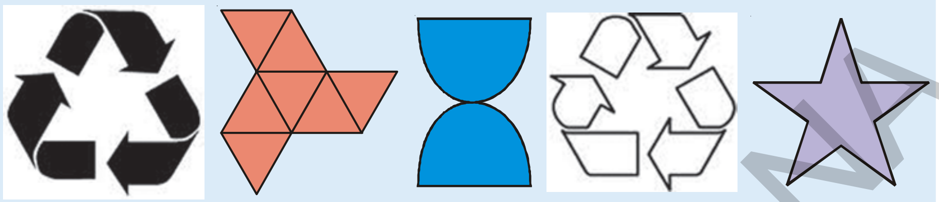
Usually these patterns are formed by arranging congruent figures or mirror images side by side in all the directions to spread upon the area without any overlaps or gaps. This is called tessellation. This enhances the beauty of the diagrams.

Are they symmetric as a whole?

Does the basic figure which is used to form the tessellation is symmetric?

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది వానిలో బిందు సౌష్ఠవం కల వాటిని గుర్తించండి.



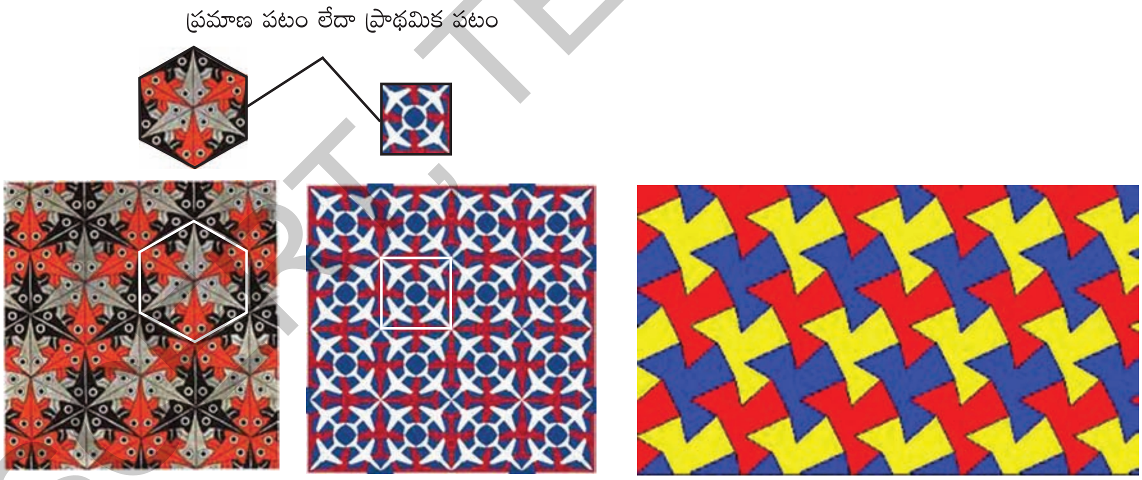
2. పై పటాలలో రేఖా సౌష్ఠవాన్ని కలిగిన పటాలు ఏవి?

3. రేఖాసౌష్ఠవమునకు మరియు బిందు సౌష్ఠవానికి మధ్యగల సంబంధం గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

8.3.3 సౌష్ఠవం అనువర్తనాలు

- మనం ఉపయోగించే అనేక వస్తువులు కనీసం ఏదో ఒక విధమైన సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుంటాయి.
- యంత్రాల ద్వారా ఉత్పత్తి అయ్యే చాలా వస్తువులు సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుంటాయి. ఇది ఉత్పత్తి వేగాన్ని పెంచుతుంది.

క్రింది అమరికలను గమనించండి.



ఈ అమరికలను ఎక్కడ గమనించగలం? ఈ అమరికలను నేలపై రాళ్ళను తాపడంలో గమనిస్తాం.

ఈ క్రమాలు అమరికలు ఎలా ఏర్పడతాయి ?

ఈ అమరికలు అన్నీ సర్వసమాన పటాలు లేదా ఒకే పటం మరియు దాని ప్రతిబింబాలను కొంత వైశాల్యంపై ఖాళీ లేకుండా లేదా అతిక్రమణలు లేకుండా ప్రక్కప్రక్కనే అమర్చడం ద్వారా రూపొందించబడినది. దీనిని క్రమబద్ధమైన తాపడం చేయడం (టెస్సలేషన్) అంటారు. ఇది పటాల సౌందర్యాన్ని ద్విగుణీకరిస్తుంది.(పెంచుతుంది)

పై పటాలు ఏక మొత్తంగా సౌష్ఠవం కలిగి యున్నాయా ?

ఈ టెస్సలేషన్ ఏర్పరచడానికి ఉపయోగించిన ప్రాథమిక పటాలు సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నాయా?

You can observe that only some patterns have symmetry as a whole as in fig(b) and others does n't have any symmetry as a whole as in fig(a), though the basic figures/unit figures are symmetric.

Observe the following tessellations again. What are the basic shapes used in these tessellations?

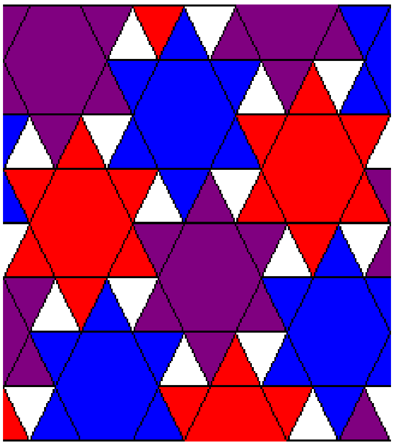


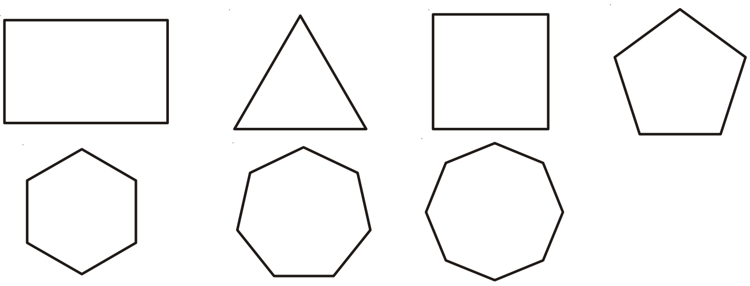
Fig. (a)

Fig. (b)

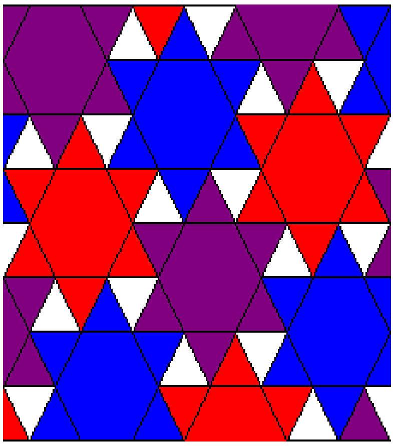
You may notice that the basic shapes used to draw tessellation are pentagon, rectangle, squares and equilateral triangle. Most tessellations can be formed with these shapes.

Exercise - 8.2

1. Cut the bold type English alphabets (capital) and paste in your note book. Draw possible number of lines of symmetry for each of the letter.
   (i) How many letters have no line of symmetry?
   (ii) How many letters have one line of symmetry?
   (iii) How many letters have two lines of symmetry?
   (iv) How many letters have more than two lines of symmetry?
   (v) Which of them have rotational symmetry?
   (vi) Which of then have point symmetry?
2. Draw lines of symmetry for the following figures. Identify which of them have point symmetry. Is there any relation between line symmetry and point symmetry?



కొన్ని అమరికలు పటం (a) లో వలె మొత్తంగా సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉండటాన్ని గమనించవచ్చు. మరికొన్ని అమరికలు పటం (b)లో వలే వాటిలోని ప్రాథమిక పటాలు సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నా మొత్తంగా సౌష్ఠవాన్ని కలిగియుండక పోవచ్చు. మరలా ఈ క్రింది అమరిక గమనించండి. ఈ క్రింది వాటిని ఏర్పరచుటకు ఉపయోగించిన ప్రాథమిక ఆకృతులు ఏవి?


పటం. (a)

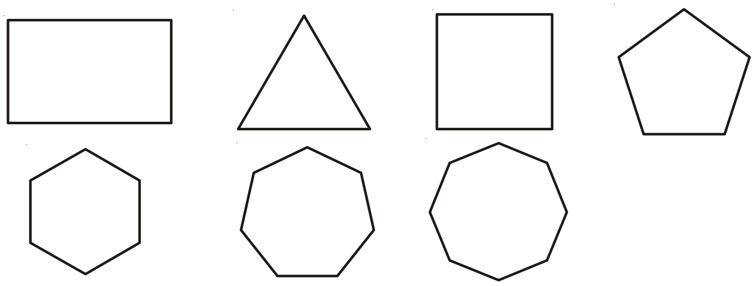

పటం. (b)

ఈ అమరికలను ఏర్పరచుటకు పంచభుజాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, చతురస్రాలు మరియు సమబాహు త్రిభుజాలు ఉపయోగించారు. ఏ టెస్సలేషన్ అయినా ఈ ఆకృతుల ద్వారానే రూపొందిస్తారు.

అభ్యాసము - 8.2

1. ఆంగ్ల అక్షర మాలలోని పెద్ద అక్షరాలను (capital) కత్తిరించి నోటు పుస్తకంలో అతికించుము. వాటికి సాధ్యమైనన్ని సౌష్ఠవ అక్షాలను గీయండి.
   (i) రేఖా సౌష్ఠవం లేని అక్షరాలు ఎన్ని?
   (ii) ఒకే సౌష్ఠవ అక్షాన్ని కలిగి ఉన్న అక్షరాలు ఎన్ని?
   (iii) రెండు సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి ఉన్న అక్షరాలు ఎన్ని?
   (iv) రెండుకన్నా ఎక్కువ సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి యున్న అక్షరాలు ఎన్ని ?
   (v) ఏ అక్షరాలు భ్రమణ సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నాయి?
   (vi) ఏ అక్షరాలు బిందు సౌష్ఠవాన్ని కలిగియున్నాయి ?

2. క్రింది పటాలకు సౌష్ఠవ అక్షాలను గీయండి. వానిలో బిందు సౌష్ఠవం కలిగిన పటాలను గుర్తించండి. సౌష్ఠవ అక్షాలకు, బిందుసౌష్ఠవమునకు మధ్య ఏదేని సంబంధం కలదా?



3. Name some natural objects whose faces have atleast one line of symmetry.

4. Draw three tessellations and name the basic shapes used in your tessellation.

What we have discussed

- Figures are said to be congruent if they have same shape and size.
- Figures are said to be similar if they have same shapes but with different size.
- If we flip, slide or rotate the congruent/similar shapes their congruence/similarity remains the same.
- Some figures may have more than one line of symmetry.
- Symmetry is of three types namely line symmetry, rotational symmetry and point symmetry.
- With rotational symmetry, if the figure is rotated around a central point, it appears the same as original two or more times. The number of times it appears as the same, is called it's order of symmetry.
- The method of drawing enlarged or reduced similar figures is called Dilation.
- The patterns formed by repeating figures to fill a plane without gaps or overlaps are called tessellations.

F2M5H1

3. ప్రకృతిలో కనీసం ఒక సౌష్ఠవ అక్షాన్ని కలిగి ఉండే ముఖాలు గల వస్తువులను కొన్నింటిని పేర్కొనండి.

4. ఏవేని మూడు టెస్సలేషన్‌లను గీచి వానిలో ఉపయోగించిన ప్రాథమిక పటాలను తెల్పండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

- ఒకే ఆకారము మరియు ఒకే పరిమాణము గల పటాలను సర్వసమాన పటాలు అంటారు.
- పరిమాణాలు వేరైనను ఒకే ఆకారము గల పటాలు సరూప పటాలు.
- మనం సర్వసమాన లేదా సరూప పటాలను జరిపినా, భ్రమణం చేసినా లేదా తిప్పిన వాటి సర్వసమానత లేదా సరూపత అలాగే నిలచి యుంటుంది.
- పటాలు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ విధాలైన సౌష్ఠవాన్ని కలిగి యుండవచ్చు.
- సౌష్ఠవం మూడు రకాలు అవి బిందుసౌష్ఠవం, రేఖా సౌష్ఠవం మరియు భ్రమణ సౌష్ఠవం
- భ్రమణ సౌష్ఠవం కల పటాలను భ్రమణం చేసినపుడు అవి తొలిస్థితిని పోలిన స్థితులలోకి ఒకటి కన్నా ఎక్కువసార్లు రావచ్చును. ఈ సంఖ్యను భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం అంటారు.
- ఒక పటాన్ని పోలిన పెద్ద లేదా చిన్న సరూప పటాలను గీచే పద్ధతిని విస్తరణ అంటారు.
- ఒకే పటాలను ప్రక్కప్రక్కనే ఖాళీలు లేకుండా లేదా అతిక్రమణలు లేకుండా కొంత వైశాల్యాన్ని ఆక్రమించేట్లు అమర్చుటను టెస్సలేషన్ అంటారు.

B1V5P8

CHAPTER

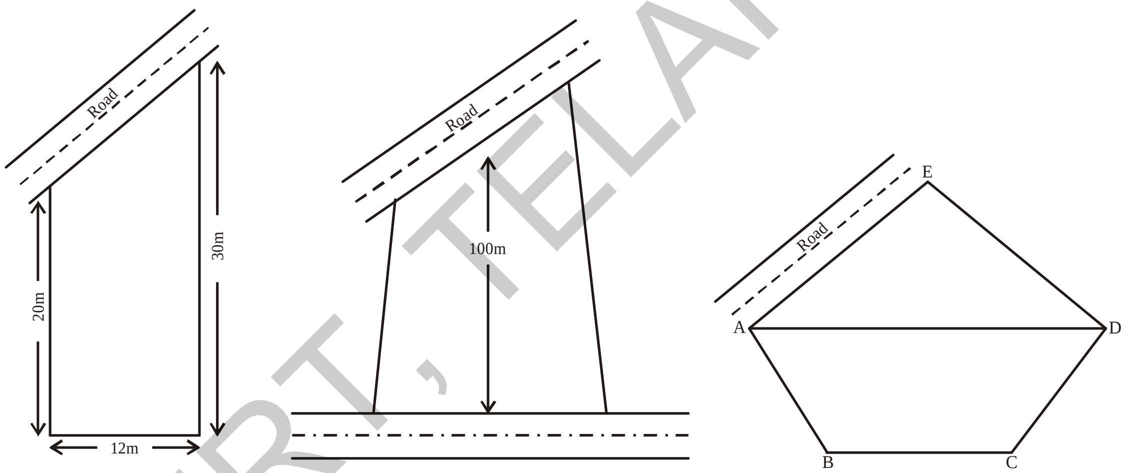
9

Area of Plane Figures

F4Q7V7

9.0 Introduction

Devarsh wants to purchase a plot to construct a house for himself. Some of the shapes of the plots visited by him are shown below.



(a) (b) (c)

Plot (a) is in the shape of a trapezium, Plot (b) is in the shape of a quadrilateral and plot (c) is in the shape of a pentagon . He wants to calculate the area of such figures to construct his house in the field.

We have learnt how to find the area of a rectangle, square, parallelogram, triangle and rhombus. In this chapter we will learn how to find the area of a trapezium, quadrilateral, circle and a sector. First let us review what we have learnt about the area of a rectangle, square, parallelogram and rhombus.

అధ్యాయం

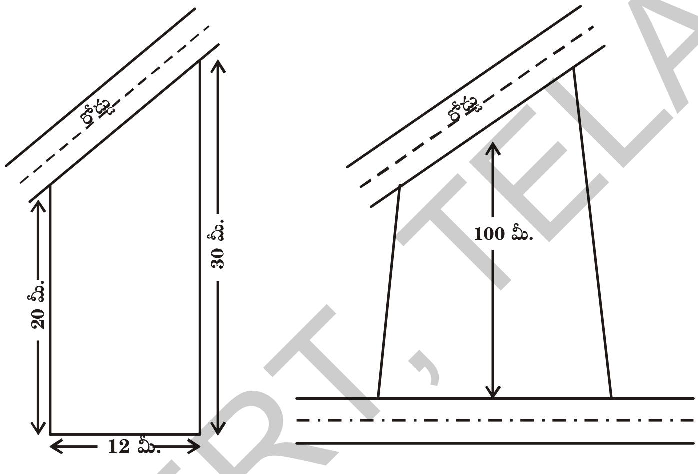
9

సమతల పటముల వైశాల్యములు

X4Q1W4

9.0 పరిచయం

దేవర్ష తను నివసించుట కొరకు ఇంటిస్థలమును కొని దానిలో ఇంటిని నిర్మించాలని అనుకొన్నాడు. అతడు చూసిన కొన్ని స్థలముల ఆకృతులు ఈ క్రింద చూపబడినవి.



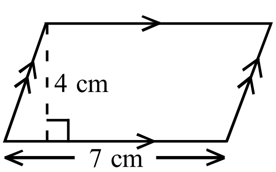
(ఎ) (బి) (సి)

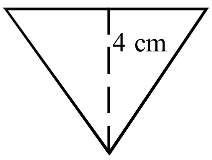
ఇంటిస్థలం (ఎ), సమలంబ చతుర్భుజి ఆకృతిలోనూ, ఇంటిస్థలం (బి) చతుర్భుజి ఆకృతిలోనూ, ఇంటిస్థలం (సి) పంచభుజి ఆకృతిలోనూ వుంది. దేవర్ష తను చూచిన ఇంటిస్థలముల వైశాల్యములను గణించి తనకు అవసరమైన స్థలమును ఎంపిక చేసుకోవాలి అని అనుకొన్నాడు.

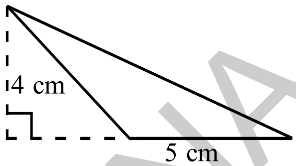
దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం మరియు సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యములను కనుగొను పద్ధతులను నేర్చుకొన్నారు. ఈ అధ్యాయంలో చతుర్భుజం, సమలంబ చతుర్భుజం, వృత్తం మరియు సెక్టరు యొక్క వైశాల్యములను కనుగొను పద్ధతులను నేర్చుకొందాం. ముందుగా మనం నేర్చుకొన్న దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం మరియు సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యములను గూర్చి పునఃశ్చరణ చేసుకుందాం.

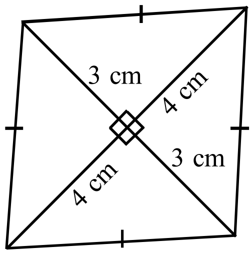
Do This

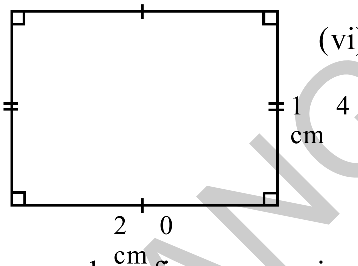
1. Find the area of the following figures.

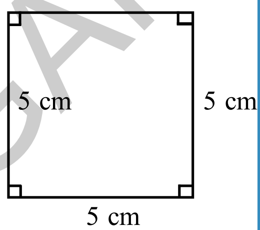
(i)


(ii)


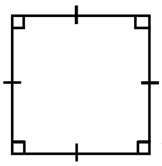
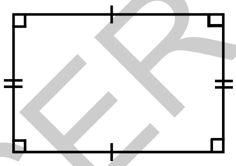
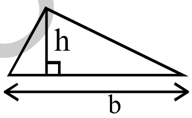
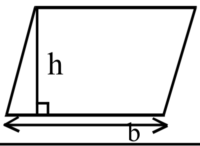
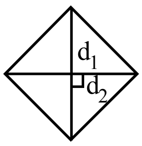
(iii)


(iv)


(v)


(vi)


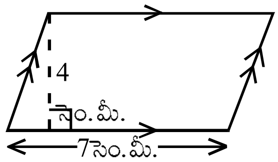
2. The measurements of some plane figures are given in the table below. However, they are incomplete. Find the missing information

Figure	Measurements	Formula for area	Area of the given figure
 Square	Side of the square is 15 cm	A = side×side	....
 Rectangle	Length = 20 cm Breadth = ...	A = l × b	280cm^2
 Triangle	Base = 5 cm Height = ...	A = ...	60cm^2
 Parallelogram	Height = 7.6cm Base = ...	A = b × h	38cm^2
 Rhombus	d_1 = 4 cm d_2 = 3 cm	....	....

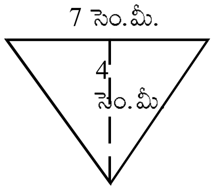
ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది పటముల యొక్క వైశాల్యములను కనుక్కోండి.

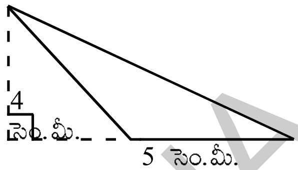
(i)



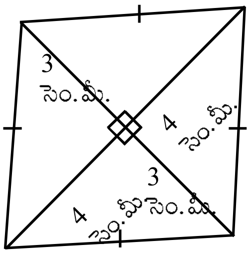
(ii)



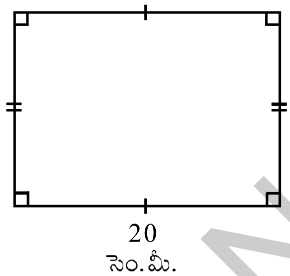
(iii)



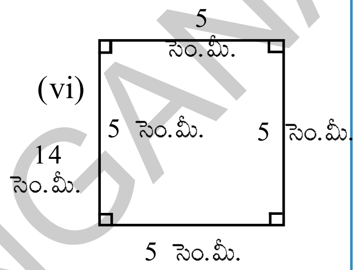
(iv)



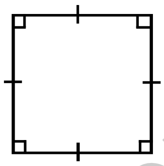
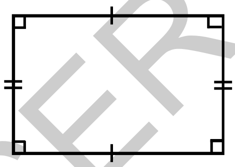
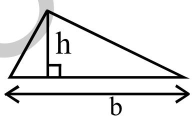
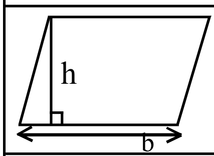
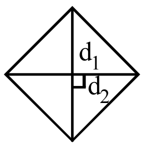
(v)



(vi)

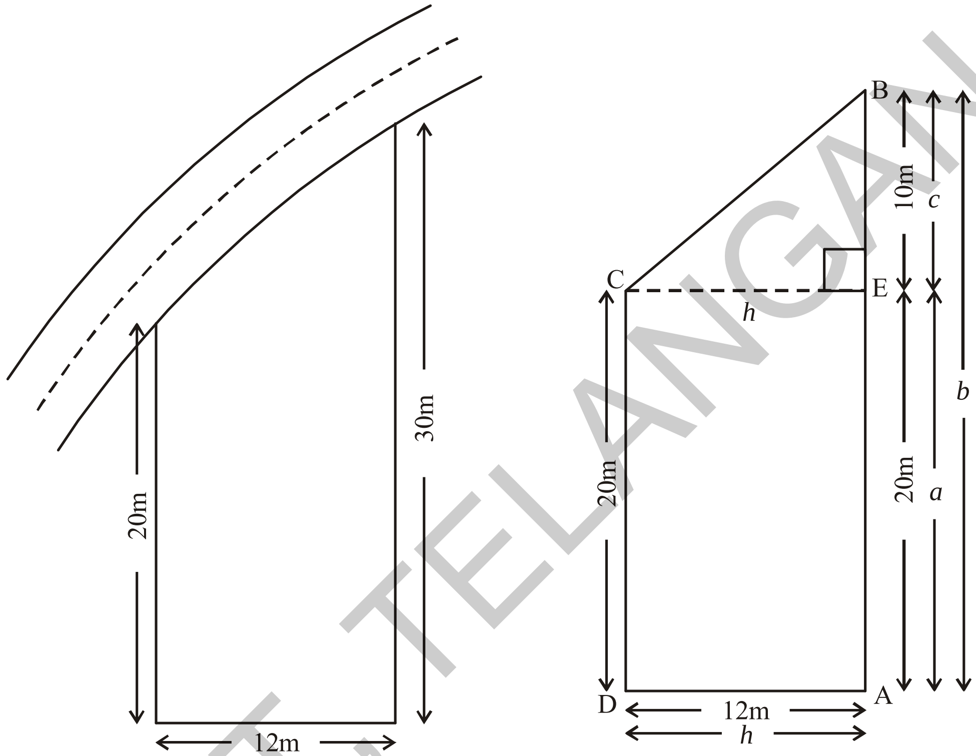


2. కొన్ని సమతల పటముల యొక్క కొలతలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. ఇచ్చిన సమాచారం అసంపూర్తిగా యున్నది. లోపించిన సమాచారమును కనుగొనుము.

పటం	కొలతలు	వైశాల్యమునకు సూత్రం	పటవైశాల్యం
 చతురస్రం	చతురస్రభుజం = 15 సెం.మీ.	A = భుజం × భుజం	....
 దీర్ఘచతురస్రం	పొడవు = 20 సెం.మీ. వెడల్పు = ...	$A = l \times b$	280 చ.సెం.మీ.
 త్రిభుజం	భూమి = 5 సెం.మీ. ఎత్తు = ...	A = ...	60 చ.సెం.మీ.
 సమాంతర చతుర్భుజం	ఎత్తు = 7.6 సెం.మీ. భూమి = ...	$A = b \times h$	38 చ.సెం.మీ.
 (రాంబస్) సమచతుర్భుజం	d_1 = 4 సెం.మీ. d_2 = 3 సెం.మీ.	....	....

9.1 Area of a Trapezium

Kumar owns a plot near the main road as in the figure below. Unlike some other rectanglar plots in his neighbourhood, the plot has only a pair of parallel sides. So, it is nearly a trapezium in shape. Can you find out its area?



(i) (ii)

Let us name the vertices of this plot as shown in figure (i). By drawing CE $\perp$ AB, we can divide it into two parts, one of rectangular shape and the other of triangular shape (which is right angled), as shown in figure (ii).

Area of Δ ECB $= \frac{1}{2} \times h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ m}^2$

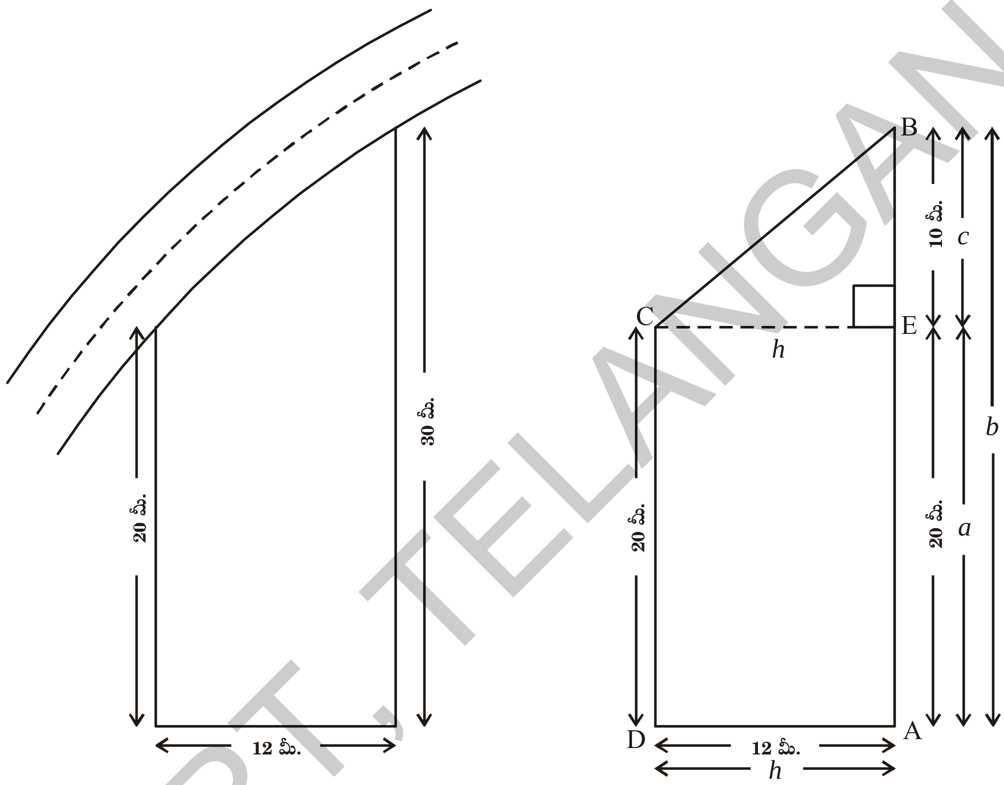
Area of rectangle ADCE $=$ AE $\times$ AD $= 20 \times 12 = 240 \text{ m}^2$

Area of trapezium ABCD $=$ Area of Δ ECB + Area of rectangle ADCE

$= 60 + 240 = 300 \text{ m}^2$

9.1 సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యము

కుమార్‌నకు ప్రధాన రహదారికి సమీపంలో ఇంటిస్థలం యున్నది. తన ఇంటిస్థలంనకు సమీపంలో యున్న ఇంటిస్థలములన్నీ దీర్ఘచతురస్రాకార ఆకృతిలో ఉండగా, తన ఇంటి స్థలం మాత్రము కేవలం ఒక జత సమాంతర భుజములను మాత్రమే కల్గియుంది. అందుచే ఆ స్థలం సమలంబచతుర్భుజి ఆకృతిని పోలియున్నదిగా గుర్తించాడు. ఆ ఇంటి స్థల వైశాల్యమును మీరు కనుగొనగలరా?



(i) (ii)

పటం (i) లో చూపబడిన ఇంటిస్థలము యొక్క శీర్షములకు పేర్లు పెడదాం. $CE \perp AB$ ను గీయడం వలన ఈ స్థలమును రెండు భాగములుగా విభజించవచ్చు. పటం (ii)లో చూపిన విధముగా అందులో ఒకటి దీర్ఘ చతురస్రాకృతి మరొకటి త్రిభుజ ఆకృతిని (లంబకోణత్రిభుజం) కల్గియున్నవి.

Δ ECB వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ చ.మీ.

ADCE దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= AE \times AD = 20 \times 12 = 240$ చ.మీ.

ABCD సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం $=$ Δ ECB వైశాల్యం + ADCE దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

$= 60 + 240 = 300$ చ. మీ.

Thus we can find the area if the trapezium ABCD by combining the two areas i.e. is rectangle ADCE and triangle ECB.

$\overline{AD} = \overline{EC} = h$
$\overline{AE} = a,\ \overline{AB} = b = a + c$

$\therefore$ Area of ABCD = Area of ADCE + Area of Δ ECB

$$= (h \times a) + \frac{1}{2}(h \times c)$$

$$= h(a + \frac{1}{2}c)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a + a + c)$$

$$= \frac{1}{2}h\,(a + b)\ (\because\ c + a = b)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{(perpendicular distance between two parallel sides)} \times \text{(sum of lengths of parallel sides)}$$

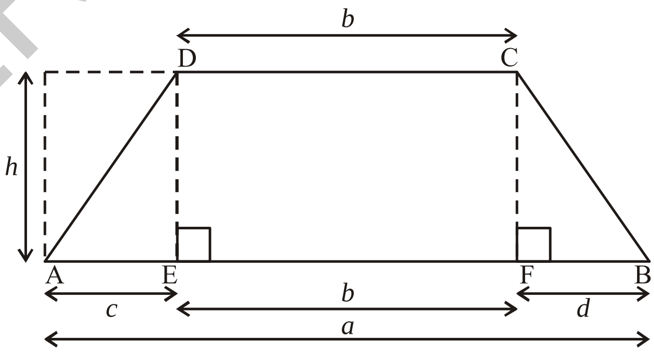
By substituting the values of h, b and a in the above expression

Here $h = 12$
$a = 20$
$b = 30$

Area of trapezium ABCD $= \frac{1}{2}h\,(a + b)$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times (30 + 20) = 300\ m^2$$

Example1: Here is a figure of a playground. Find the area of the playground.



Solution: Here we can not divide the figure into one rectangle and one triangle. Instead, we may divide it into a rectangle and two triangles conveniently. Draw $DE \perp AB$ and $CF \perp AB$. So that trapezium ABCD is divided into three parts. One is rectangle DEFC and the other two are triangles; ΔADE and ΔCFB.

కావున సమలంబ చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం కనుగొనాలంటే ADCE దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం మరియు ECB త్రిభుజ వైశాల్యం కలపాలి.

$\overline{AD} = \overline{EC} = h$
$\overline{AE} = a,\ \overline{AB} = b = a + c$

$\therefore$ ABCD వైశాల్యం $=$ ADCE వైశాల్యం $+$ ΔECB వైశాల్యం

$$= (h \times a) + \frac{1}{2}(h \times c)$$

$$= h(a + \frac{1}{2}c)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a + a + c)$$

$$= \frac{1}{2}h\,(a + b)\ (\because\ c + a = b)$$

$= \frac{1}{2} \times$ (సమాంతర భుజముల మధ్య లంబదూరం)

$\times$ (సమాంతర భుజముల పొడవుల మొత్తం)

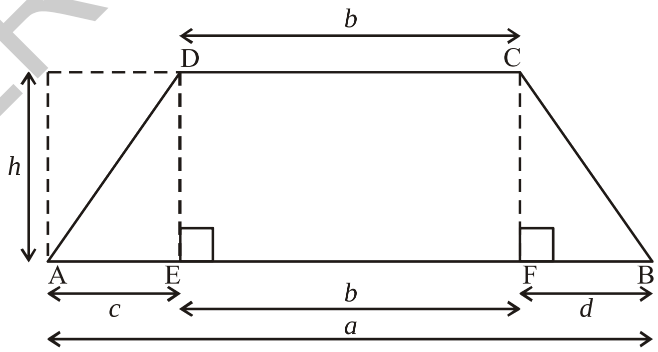
h, b మరియు a విలువలను ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

ఇక్కడ	$h = 12$
	$a = 20$
	$b = 30$

సమలంబ చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం $= \frac{1}{2}h\,(a + b)$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times (30 + 20) = 300$ చ.మీ.

ఉదాహరణ 1: ఇక్కడ ఆటస్థలము యొక్క పటము ఇవ్వబడింది. ఆటస్థలము యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



సాధన: పటంను దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజంగా విభజించలేము. దానికి బదులుగా ఒక దీర్ఘచతురస్రం, రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు. $DE \perp AB$ మరియు $CF \perp AB$ ను గీయుట ద్వారా సమలంబ చతుర్భుజం ABCD ను మూడు భాగాలుగా విభజించవచ్చు. వాటిలో DEFC దీర్ఘచతురస్రం మరియు రెండు త్రిభుజాలు ΔADE మరియు ΔCFB.

Area of trapezium ABCD = Area of triangle ADE+ Area of Rectangle DEFC+Area of triangle CFB

$$=(\frac{1}{2}\times h\times c)+(b\times h)+(\frac{1}{2}\times h\times d)$$

$$=h\left[\frac{1}{2}c+b+\frac{1}{2}d\right]$$

$$=h\left[\frac{c+2b+d}{2}\right]$$

$$=h\left[\frac{c+b+d+b}{2}\right]$$

$$=h\left[\frac{a+b}{2}\right]\quad(\because c+b+d=a)$$

So, we can write the formula for the area of a trapezium

$$=\text{height}\times\left[\frac{\text{sum of parallel sides}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\text{perpendicular distance between two parallel sides}\times(\text{sum of parallel sides})$$

1. Draw a trapezium WXYZ on a piece of graph paper as shown in the figure and cut it out as shown in Fig. (i)

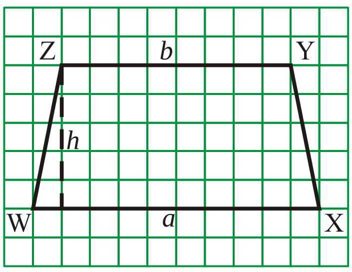


Fig. (i)

2. Find the Mid point of XY by folding its side XY and name it 'A' as shown in Fig.(ii)

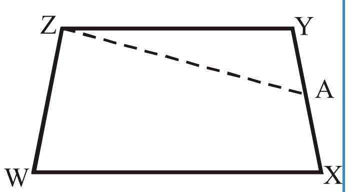


Fig. (ii)

3. Draw line segment AZ.

ABCD సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం = త్రిభుజం ADE వైశాల్యం + DEFC దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం + CFB త్రిభుజ వైశాల్యం

$$= (\frac{1}{2} \times h \times c) + (b \times h) + (\frac{1}{2} \times h \times d)$$

$$= h\left[\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d\right]$$

$$= h\left[\frac{c+2b+d}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{c+b+d+b}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{a+b}{2}\right] \quad (\because c + b + d = a)$$

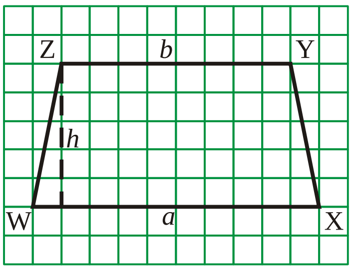
కావున సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమునకు సూత్రమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

వైశాల్యం = ఎత్తు $\times \left[\frac{\text{సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం}}{2}\right]$

$= \frac{1}{2} \times$ (సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం) $\times$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం)

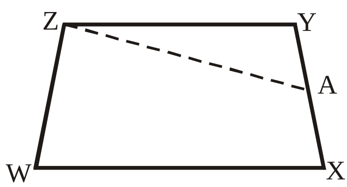
కృత్యము

1. గ్రాఫు కాగితంపై సమలంబ చతుర్భుజం WXYZ ను ప్రక్క పటములో (పటం (i)) చూపిన విధముగా గీయుము మరియు దానిని కత్తిరించుము.



పటం (i)

2. XY యొక్క మధ్యబిందువును గుర్తించి (పటం (ii))లో చూపిన విధంగా మడచాలి.



పటం (ii)

3. రేఖాఖండము AZ ను గీయుము.

4. Cut trapezium WXAZ into two pieces by cutting along ZA. Place ⊔ ZYA as shown in the fig. (iii) where AY placed on AX in such a way that 'Y' coincides with 'X'. We get ⊔ WZB.

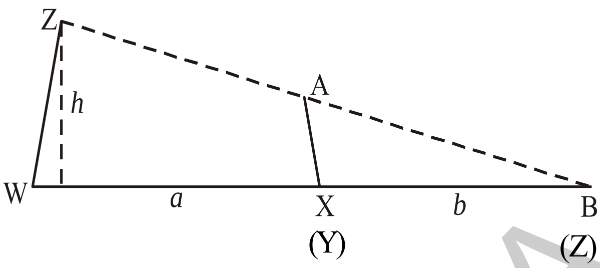


Fig.(iii)

What is the length of the base of the larger triangle? Write an expression for the area of this triangle fig. (iii)

5. The area of this triangle WZB and the area of the trapezium WXAZ are the same (How?)

Area of trapezium WXAZ = Area of triangle WZB

$$= \frac{1}{2} \times \text{height} \times \text{base} = \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$$

Note: Check the area by counting the unit squares of graph.

Do This

1. Find the area of the following trapezium.

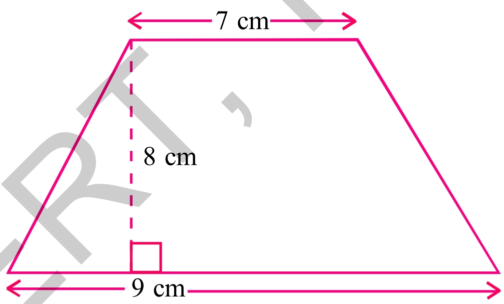


Fig. (i)

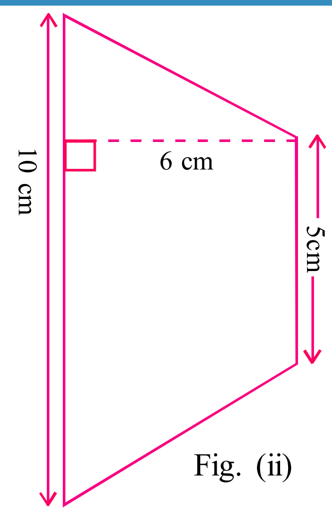
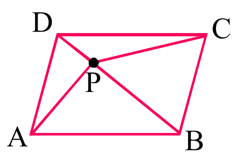


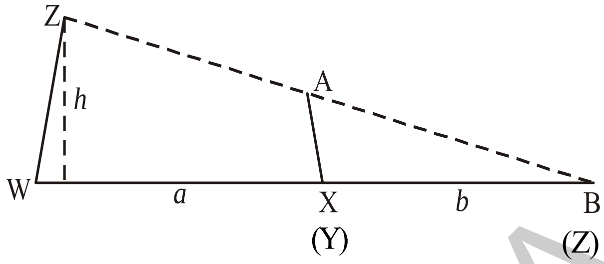
Fig. (ii)

2. Area of a trapezium is 16cm^{23}. Length of one parallel side is 5 cm and distance between two parallel sides is 4 cm. Find the length of the other parallel side. Try to draw this trapezium on a graph paper and check the area.

3. ABCD is a parallelogram whose area is 100 sq. cm. P is any point inside the parellelogram (see fig.) find the area of arΔAPB + arΔCPD.



4. ZA వెంబడి సమలంబ చతుర్భుజంలో WXAZ ను కత్తిరించడం ద్వారా అది రెండు భాగాలుగా విభజింపబడుతుంది. AY ను AX తో ఏకీభవించేటట్లుగా పటం (iii) లో చూపినవిధంగా ⌴ ZYA ను అమర్చితే త్రిభుజములో ⌴ WZB ఏర్పడుతుంది.



పటం (iii)

పెద్ద త్రిభుజం యొక్క భూమి పొడవు ఎంత? పటం (iii) ఆధారంగా దాని వైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రం రాయండి.

5. ⌴ WZB వైశాల్యం మరియు సమలంబ చతుర్భుజం WXAZ వైశాల్యముల సమానమేనా? (ఎందుచేత))

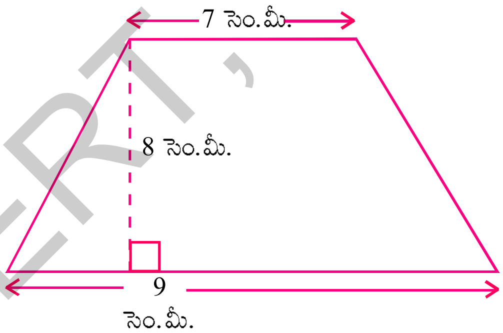
సమలంబ చతుర్భుజం WXAZ వైశాల్యం = త్రిభుజం WZB వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times \text{ఎత్తు} \times \text{భూమి} = \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$$

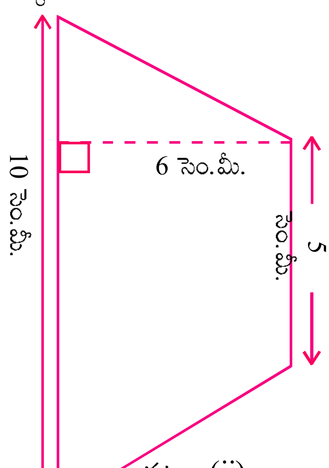
గమనిక: గ్రాఫ్ కాగితంలోని ప్రమాణ చదరాలను లెక్కించుట ద్వారా వైశాల్యాన్ని పరీక్షించండి.

ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యములను కనుక్కోండి.



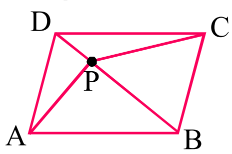
పటం (i)



పటం (ii)

2. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం 16 చ.సెం.మీ. సమాంతరభుజాలలో ఒక భుజం పొడవు 5 సెంమీ మరియు వాటి మధ్యదూరం 4 సెంమీ. రెండవ సమాంతర భుజం యొక్క పొడవును కనుగొనుము. ఈ సమలంబ చతుర్భుజమును గ్రాఫు కాగితముపై గీసి దాని వైశాల్యంతో సరిచూడండి.

3. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము దాని వైశాల్యం 100 చ.సెం.మీ. P అనేది పటంలో చూపినట్లు దాని అంతరంలో బిందువు అయినా $\Delta APB + \Delta CPD$ ల వైశాల్యం కనుగొనండి.

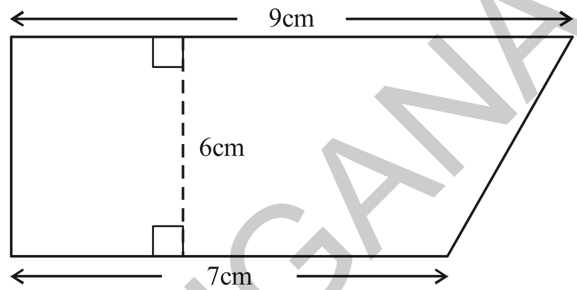


Solved examples

Example 2: The parallel sides of trapezium are 9cm and 7cm long and the distance between them is 6cm. Find the area of the trapezium.

Solution: The sum of the lengths of parallel sides = 9 + 7 = 16cm

Perpendicular Distance between them = 6cm



Area of the trapezium = $\frac{1}{2}$ (sum of the lengths of parallel sides) × (distance between them)

$= (\frac{1}{2} \times 16 \times 6)\ cm^2$

$= 48cm^2$

Example 3: Area of a trapezium is $480cm^2$. Length of one of the parallel sides is 24cm and the distance between the parallel sides is 8cm. Find the length of the other parallel side.

Solution : One of the parallel sides = 24cm

Let the length of the other parallel sides be 'x' cm

Also, area of the trapezium = $480\ cm^2$

Distance between the parallel sides = 8 cm

$\therefore$ Area of a trapezium $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$

$\Rightarrow \quad 480 = 96 + 4x$

$\Rightarrow \quad 480 - 96 = 4x$

$\Rightarrow \quad 4x = 384$

$\Rightarrow \quad x = \frac{384}{4} = 96$

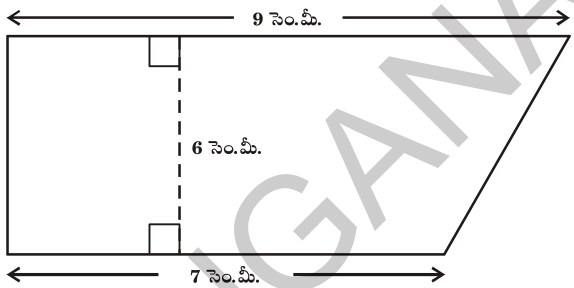
$\therefore$ The length of the other parallel side = 96 cm

సాధించిన సమస్యలు

ఉదాహరణ 2 : సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క సమాంతర భుజాల కొలతలు వరుసగా 9 సెంమీ మరియు 7 సెం.మీ. వాటి మధ్య లంబదూరం 6 సెం.మీ అయిన సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన: సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం = $9 + 7 = 16$ సెం.మీ.

వాటి మధ్య లంబదూరం = 6 సెం.మీ.



సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × (సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం)

= $(\frac{1}{2} \times 16 \times 6)$ చ.సెం.మీ.

= 48 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3: సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యం 480 చ.సెంమీ. సమాంతర భుజాలలో ఒక భుజం కొలత 24 సెంమీ మరియు వాటి మధ్య లంబదూరం 8సెం.మీ రెండవ సమాంతర భుజం యొక్క కొలతను కనుగొనుము.

సాధన: సమాంతర భుజాలలో ఒకదాని పొడవు = 24 సెం.మీ.

రెండవ సమాంతర భుజము పొడవు 'x' సెం.మీ. అనుకొందాం

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం = 480 చ.సెం.మీ.

సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం = 8 సెం.మీ.

∴ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$

$\Rightarrow \quad 480 = 96 + 4x$

$\Rightarrow \quad 480 - 96 = 4x$

$\Rightarrow \quad 4x = 384$

$\Rightarrow \quad x = \frac{384}{4} = 96$

రెండవ సమాంతర భుజము పొడవు = 96 సెం.మీ.

Example 4: The ratio of the lengths of the parallel sides of a trapezium is 4:1. The distance between them is 10cm. If the area of the trapezium is 500 cm^2. Find the lengths of the parallel sides.

Solution: Area of the trapezium = $500 cm^2$

Distance between the parallel sides of the trapezium =10 cm

Ratio of the lengths of the parallel sides of the trapezium = 4 : 1

Let the lengths of the parallel sides of the trapezium be $4x$ and x.

Area of the trapezium = $\frac{1}{2}(a + b) \times h$

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2}(x + 4x) \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 500 = (x + 4x)\, 5$$

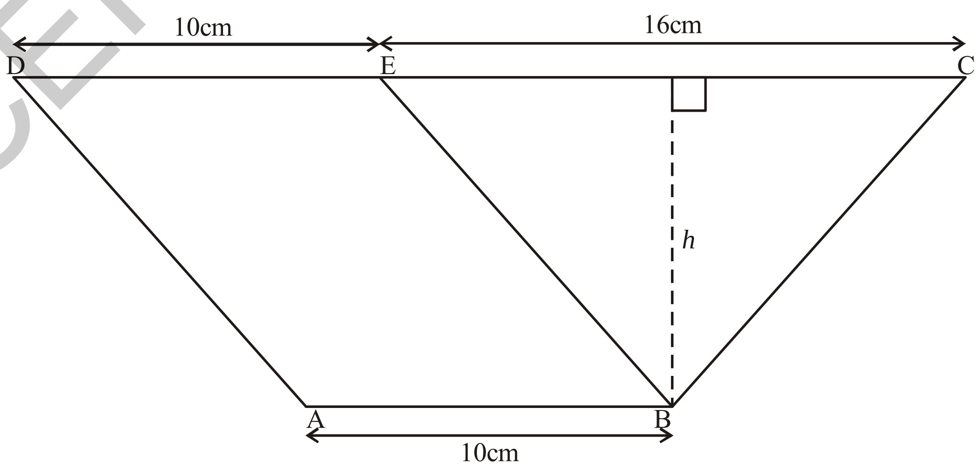
$$\Rightarrow \quad 500 = 25x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{500}{25} = 20$$

$\therefore$ One parallel side = 20cm

$\therefore$ The other parallel side = $4x = 4 \times 20 = 80$cm ($\because$ parallel sides are in 4:1)

Example 5: In the given figure, ABED is a parallelogram in which AB = DE = 10 cm and the area of Δ BEC is $72cm^2$. If CE = 16cm, find the area of the trapezium ABCD.



Solution: Area of Δ BEC = $\frac{1}{2} \times$ Base $\times$ altitude

ఉదాహరణ 4: సమలంబ చతుర్భుజములోని సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 4:1. వాటి మధ్యదూరం 10సెం.మీ. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం 500 చ.సెం.మీ. అయిన సమాంతర భుజాల కొలతలను కనుగొనుము.

సాధన: సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 500 చ.సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజ సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం = 10 సెం.మీ.

సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి = 4 : 1

సమలంబ చతుర్భుజ సమాంతర భుజాల పొడవులు $4x$ మరియు x లు అనుకొందాం.

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2}(x+4x) \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 500 = (x+4x)\,5$$

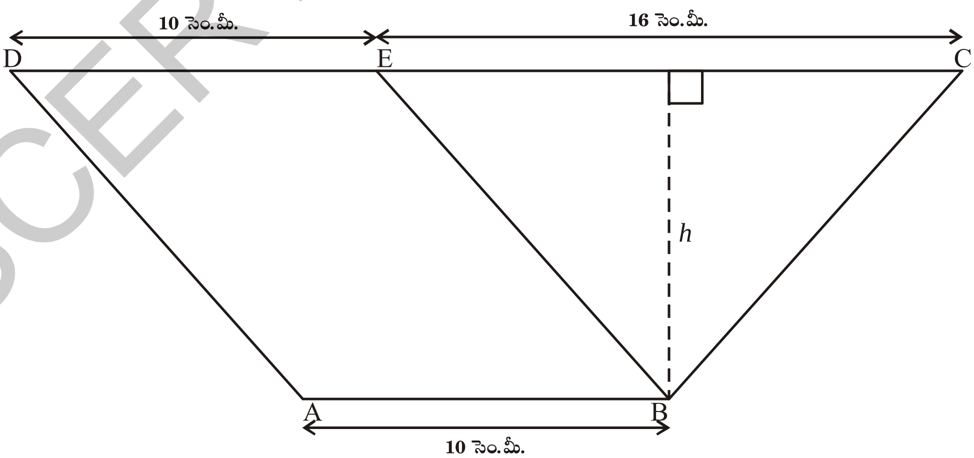
$$\Rightarrow \quad 500 = 25x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{500}{25} = 20$$

$\therefore$ ఒక సమాంతర భుజం పొడవు = 20 సెం.మీ

$\therefore$ మరో సమాంతర భుజం పొడవు $= 4x = 4 \times 20 = 80$ సెం.మీ ($\because$ సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 4:1)

ఉదాహరణ 5: ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజం ABEDలో AB = DE = 10 సెం.మీ. మరియు Δ BEC వైశాల్యం 72 చ.సెం.మీ. CE = 16సెం.మీ. అయినచో సమలంబ చతుర్భుజం ABCD యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



సాధన: Δ BEC త్రిభుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ cm}$$

In trapezium ABCD

AB = 10 cm

DC = DE + EC ($\because$ DE = AB)

= 10 + 16 = 26 cm

$\therefore$ Area of the trapezium ABCD

$$= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$$

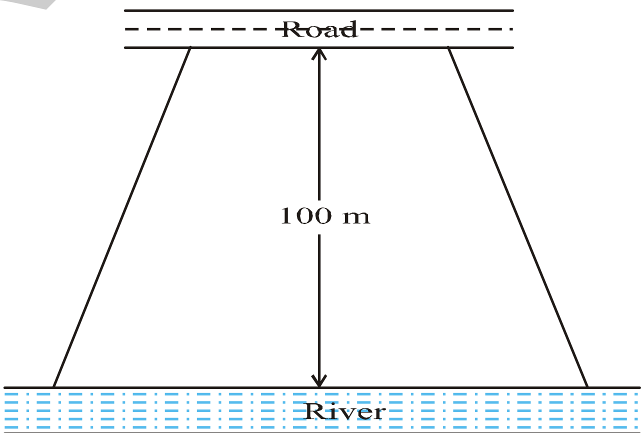
$$= \frac{1}{2}(AB + DC)\, h$$

$$= \frac{1}{2}(10 + 26) \times 9$$

$$= 18 \times 9$$

$$= 162 \text{ cm}^2$$

Example 6: Mohan wants to buy a field on a river-side. A plot of field as shown in the adjacent figure is available for sale. The length of the river side is double the length of the road side and are parallel.



The area of this field is 10,500m^2 and the distance between the river and road is 100 m. Find the length of the side of the plot along the river.

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ సెం.మీ.}$$

సమలంబ చతుర్భుజం ABCD లో

$AB = 10$ సెం.మీ.

$DC = DE + EC \ (\because DE = AB)$

$= 10 + 16 = 26$ సెం.మీ.

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం ABCD

$$= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$$

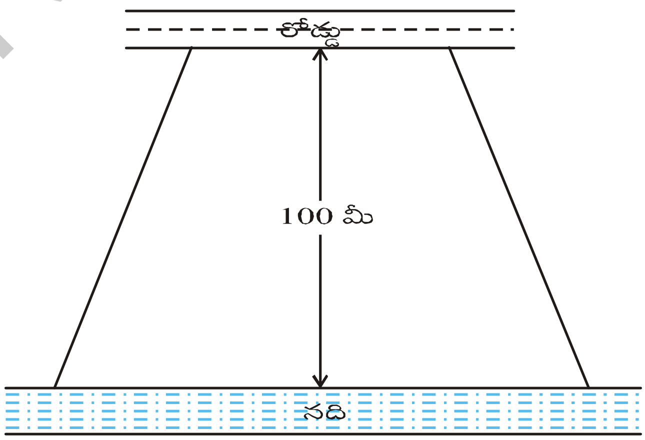
$$= \frac{1}{2}(AB + DC)\, h$$

$$= \frac{1}{2}(10 + 26) \times 9$$

$$= 18 \times 9$$

$= 162$ చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 6: మోహన్ నదీతీరంలో యున్న కొంత పొలంను కొనాలి అని అనుకొన్నాడు. ఆ పొలం యొక్క ఆకృతి ఈ క్రింది పటమువలె యున్నది. నదీతీరము వైపు యున్న స్థలం పొడవు, రహదారి వైపు యున్న పొడవునకు రెట్టింపు యున్నది మరియు రెండు వైపులు సమాంతరముగా యున్నవి.



ఆ స్థల వైశాల్యం 10,500 చదరపు మీటర్లు మరియు నది, రహదారి మధ్యదూరం 100 మీ. నదీతీరము వెంబడి యున్న స్థలం యొక్క పొడవును కనుక్కోండి.

Solution: Let the length of the side of the field along the road be x m.

Then, length of its side along the river = $2x$ m.

Distance between them = 100 m.

Area of the field = $\frac{1}{2}(a+b) \times h$

$\Rightarrow \quad 10{,}500 = \frac{1}{2}(x+2x) \times 100$

$\Rightarrow \quad 10{,}500 = 3x \times 50$

$\Rightarrow \quad x = \frac{10{,}500}{3 \times 50} = 70$

$\therefore$ Length of the plot on river side $= 2x = 2 \times 70$

$= 140$ m

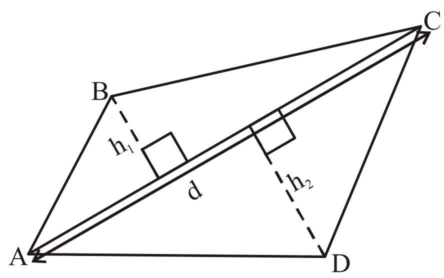
9.2 Area of a Quadrilateral

A quadrilateral can be split into two triangles by drawing one of its diagonals. This 'Triangulation' helps us to find the area of a quadrilateral.

Mahesh split the quadrilateral ABCD into two triangles by drawing the diagonal AC.

We know that the area of a triangle can be found using two measurements, base of the triangle and vertical height of the triangle

Mahesh has drawn two perpendicular lines to AC from B and D; named their lengths as h_1 and h_2 respectively.



Area of the quadrilateral ABCD = (area of ΔABC) + (areaof ΔADC)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times h_1\right) + \left(\frac{1}{2} AC \times h_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} AC(h_1 + h_2)$$

Area of quadrilateral ABCD = $\frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

Where 'd' denotes the length of the diagonal AC.

సాధన: రహదారి వైపు యున్న స్థలము యొక్క అంచు పొడవు = x మీ. అనుకొందాం.

అయిన, నది తీరము వెంబడి యున్న స్థలము యొక్క అంచుపొడవు = $2x$ మీ.

రెండింటి మధ్య దూరము = 100 మీ.

$$\text{స్థల వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$$

$$\Rightarrow \quad 10,500 = \frac{1}{2}(x+2x) \times 100$$

$$\Rightarrow \quad 10,500 = 3x \times 50$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{10,500}{3 \times 50} = 70$$

$\therefore$ నదీతీరం వెంబడి యున్న స్థలము యొక్క అంచుపొడవు $= 2x = 2 \times 70$

$= 140$ మీ.

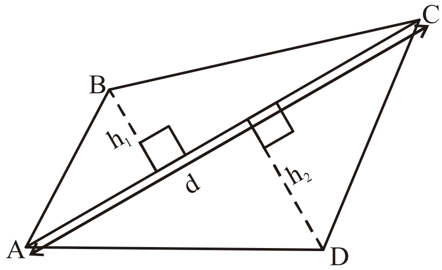
9.2 చతుర్భుజ వైశాల్యం

ఒక చతుర్భుజము కర్ణం గీయడం ద్వారా ఆ చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు. ఈ “త్రిభుజీకరణ” (ట్రయాంగులేషన్) పద్ధతి కనుగొనుటకు చతుర్భుజ వైశాల్యము ఉపయోగపడుతుంది.

మహేష్ చతుర్భుజం ABCD ని కర్ణం AC గీయుట ద్వారా చతుర్భుజ మును రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించారు.

త్రిభుజవైశాల్యమును కనుగొనడానికి కావలసిన కొలతలు రెండు. అవి త్రిభుజము భూమి మరియు దానిపై గీయబడిన ఉన్నతి (ఎత్తు) యొక్క కొలతలు.

మహేష్ కర్ణము AC పై శీర్షములు B మరియు D ల నుండి రెండు లంబాలను గీసాడు. వాటిని వరుసగా h_1 మరియు h_2 లుగా గుర్తించాడు.



$$\text{చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యం} = (\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}) + (\Delta ADC \text{ వైశాల్యం})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times h_1\right) + \left(\frac{1}{2} AC \times h_2\right)$$

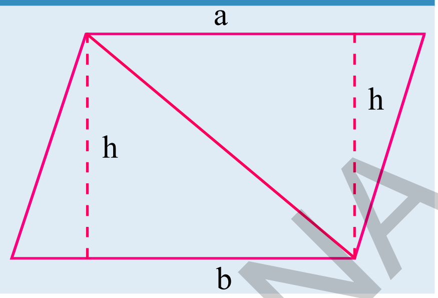
$$= \frac{1}{2} AC(h_1 + h_2)$$

$$\text{ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$$

ఇక్కడ కర్ణము AC యొక్క పొడవును "d" తో సూచిస్తారు.

Try These

We know that parallelogram is also a quadrilateral. Let us split such a quadrilateral into two triangles. Find their areas and subsequently that of the parallelogram. Does this process in tune with the formula that you already know?



Area of a quadrilateral = $\frac{1}{2}$ × Length of a diagonal × Sum of the lengths of the perpendiculars drawn from the remaining two vertices on the diagonal.

Example 7: Find the area of quadrilateral ABCD

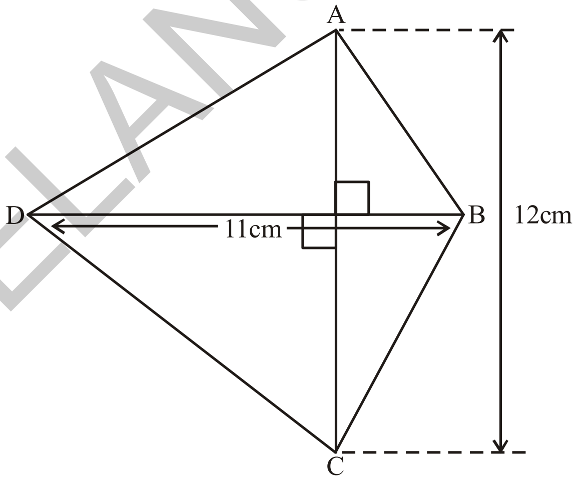


Fig. (i)

Solution: Area of quadrilateral ABCD = $\frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$

Sum of the lengths of perpendiculars from the remaining two vertices on the diagonal AC = $(h_1 + h_2)$

$h_1 + h_2 = 12$ cm.

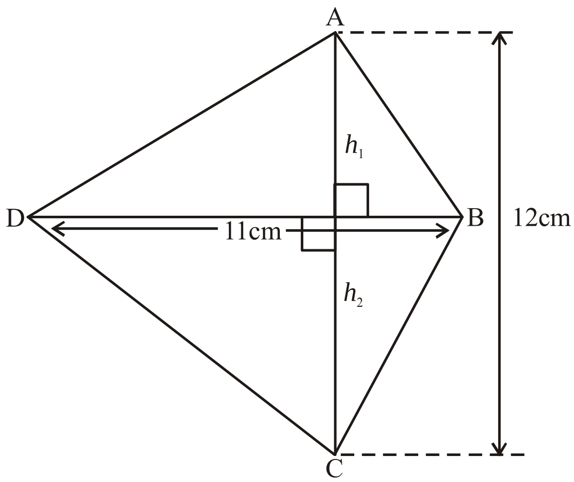
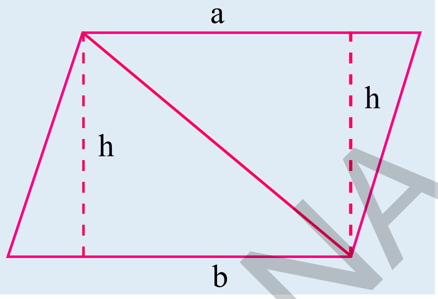


Fig. (ii)

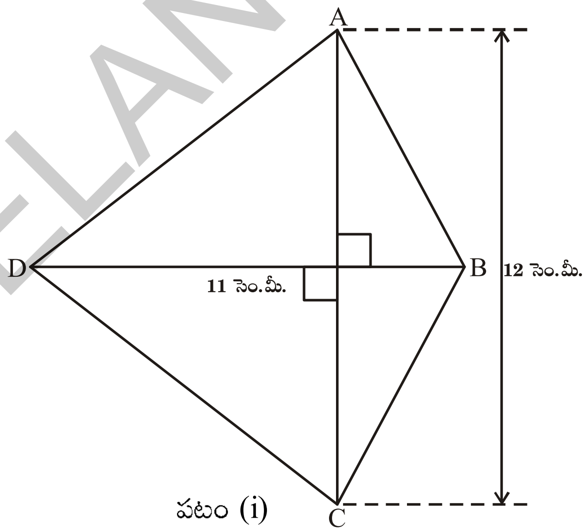
ప్రయత్నించండి

సమాంతర చతుర్భుజము, ఒక చతుర్భుజము అని మనకు తెలుసుకదా! అందుచే సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిద్దాం. ఆ రెండు త్రిభుజల వైశాల్యాలను గణించి, తద్వారా ఆ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనండి. ఈ పద్ధతి మీకు గతంలో తెలిసిన సూత్రముతో సరిపోలుతుందా?



చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ × (కర్ణం పొడవు) × (కర్ణముపై మిగిలిన రెండు శీర్షముల నుండి గీచిన లంబముల పొడవుల మొత్తము)

ఉదాహరణ 7: ప్రక్క పటములో చూపబడిన చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



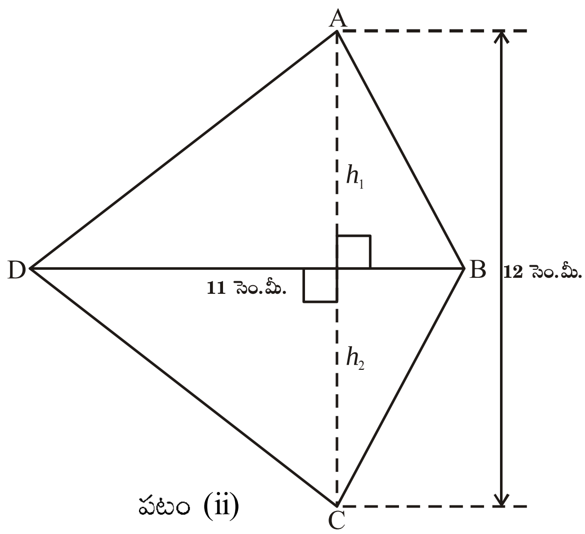
పటం (i)

సాధన: చతుర్భుజము ABCD యొక్క

వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

కర్ణముపై మిగిలిన రెండు శీర్షముల నుండి గీచిన లంబముల పొడవుల మొత్తం $AC = (h_1 + h_2)$

$h_1 + h_2 = 12$ సెం.మీ.

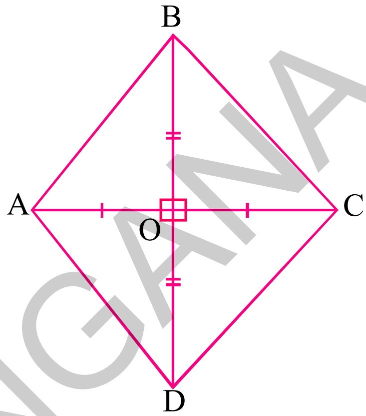


పటం (ii)

Length of the diagonal (BD) = 11 cm.

$\therefore$ Area of quadrilateral $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 6 \times 11 = 66 \text{ cm}^2$.

9.3 Area of Rhombus



We use triangulation method of splitting into triangles to find a formula for the area of rhombus.

In the figure ABCD is a rhombus. We know that the diagonals of a rhombus are perpendicular bisectors of each other.

$\therefore$ OA = OC, OB = OD

And $\angle BOA = \angle COB = \angle DOC = \angle AOD = 90^0$

Area of rhombus ABCD = area of Δ ABC + area of Δ ADC

$$= \frac{1}{2} \times AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times AC\,(OB+OD)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD \qquad (\because OB + OD = BD)$$

Thus area of a rhombus $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$, where d_1, d_2 are its diagonals.

In other words we say, area of a rhombus is half the product of its diagonals.

Example 8: Find the area of a rhombus whose diagonals are of length 10 cm and 8.2 cm.

Solution:

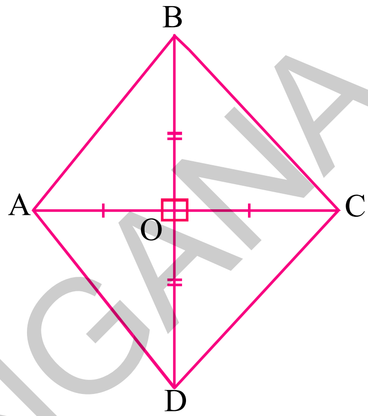
Area of the rhombus $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ (where d_1, d_2 are lengths of diagonals)

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2$$

$$= 41 \text{cm}^2$$

కర్ణము BD యొక్క పొడవు $= 11$ సెం.మీ.

$\therefore$ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 6 \times 11 = 66$ చ.సెం.మీ.



9.3 సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము

త్రిభుజీకరణ పద్ధతి ద్వారా సమచతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజములుగా విభజించి వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

సమ చతుర్భుజం ABCD కర్ణములు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయన్న విషయము మనకు తెలుసు.

$\therefore OA = OC, \quad OB = OD$

మరియు $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$

సమ చతుర్భుజం ABCD యొక్క వైశాల్యం $= \Delta$ ABC వైశాల్యం $+ \Delta$ ADC వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times AC\,(OB+OD)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD \qquad (\because OB + OD = BD)$$

అందుచే సమచతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$, ఇచ్చట d_1 మరియు d_2 లు కర్ణములు యొక్క పొడవులు.

వేరే విధంగా సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము వాటి కర్ణముల పొడవుల లబ్ధములో సగము అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 8: కర్ణముల పొడవులు 10 సెంమీ మరియు 8.2 సెంమీలుగా గల సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.

సాధన:

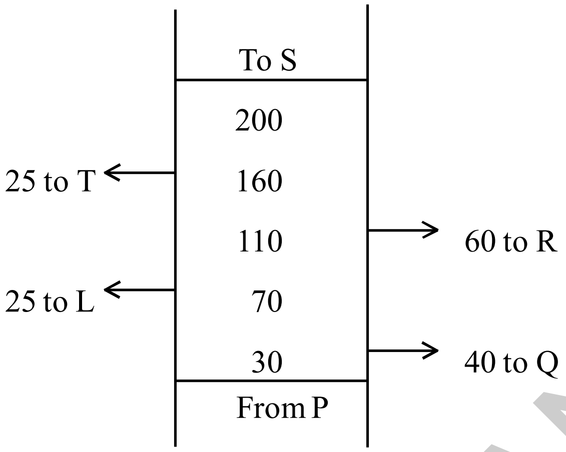
సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ (ఇచ్చట d_1, d_2 లు కర్ణముల యొక్క పొడవులు)

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2$$

$= 41$ చ.సెం.మీ.

9.4 Surveying the field

A surveyor has noted the measurements of a field in his field book in metres as shown below. Find the area of that field.



The above data gives the following information

1. The field is in the shape of a hexagon whose vertices are P, Q, R, S, T and L.
2. PS is taken as diagonal
3. Vertices Q and R on one side of the diagonal and the vertices T and L are on another side.
4. The perpendicular drawn from Q to A is 40 m. Similarly other perpendiculars drawn from R, T, and L.
5. In the field book the measurements are real and recorded from bottom to top.
6. The field is divided into 2 triangles, 2 trapeziums.

We can find the following measurements from the above figure

AC = PC – PA

= 110 – 30 = 80 m

CS = PS – PC

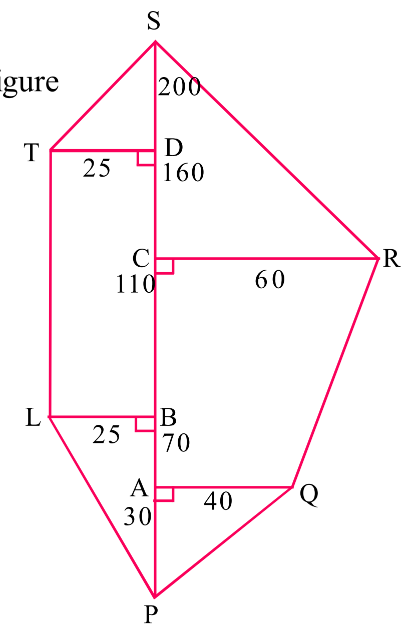
= 200 – 110 = 90 m

DS = PS – PD

= 200 – 160 = 40 m

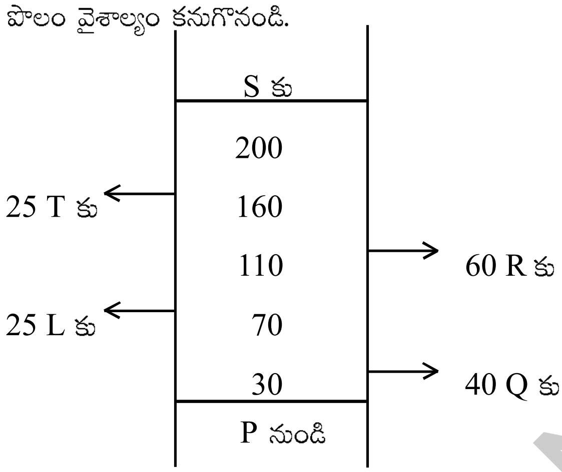
BD = PD – PB

= 160 – 70 = 90 m



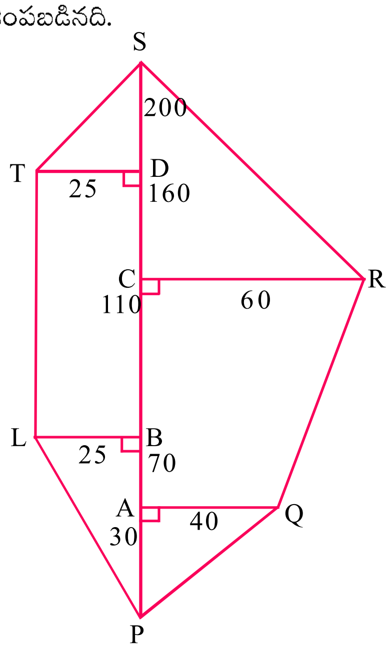
9.4 పొలం కొలతలతో వైశాల్యం కనుగొనుట

ఒక సర్వేయరు తన పొలం చిట్టాలో ఒక పొలమును గురించి కొలతలు ఈ క్రింది విధంగా నమోదు చేసుకొన్నాడు. ఆ పొలం వైశాల్యం కనుగొనండి.



పై దత్తాంశము ఈ క్రింది సమాచారంను తెలియ జేస్తుంది.

1. పొలం P, Q, R, S, T, L శీర్షాలుగా గల షడ్భుజి ఆకారంలో ఉన్నది.
2. PS కర్ణంగా తీసుకోబడింది.
3. PS కు ఒక వైపున శీర్షములు Q, R లు రెండవ వైపున T, L లు శీర్షములుగా ఉన్నవి.
4. Q నుండి A కు 40 మీ. లంబం గీయబడినది. ఇదేవిధంగా R, T, L ల నుండి మిగిలిన లంబాలు గీయబడ్డాయి.
5. పొలం యొక్క నిజమైన కొలతలను క్రింది నుండి పై వరకు పొలం చిట్టాలో నమోదు చేయబడి ఉంటాయి.
6. పొలం రెండు త్రిభుజాలు, రెండు సమలంబ చతుర్భుజాలుగా విభజింపబడినది.



పై పటం నుండి ఈ క్రింది కొలతలను కనుగొనగలము..

AC = PC – PA

= 110 – 30 = 80 మీ.

CS = PS – PC

= 200 – 110 = 90 మీ.

DS = PS – PD

= 200 – 160 = 40 మీ.

BD = PD – PB

= 160 – 70 = 90 మీ.

Area of Δ APQ $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ Sq.m.

Area of trapezium AQRC $= \frac{1}{2} \times h(a + b)$

$= \frac{1}{2} \times AC\,(AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$

$= 4000$ Sq. m.

Area of Δ CRS $= \frac{1}{2} \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700$ Sq.m.

Area of trapezium PLTS $= \frac{1}{2} \times h(a + b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\,(TL + SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200)$ $(\because TL = BD = 90)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$

$= 3625$ Sq.m.

Area of the field $= 600 + 4000 + 2700 + 3625$

$= 10{,}925$ Sq. m.

Δ APQ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ చ.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజం AQRC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC\,(AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$

$= 4000$ చ.మీ.

Δ CRS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700$ చ.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజం PLTS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\,(TL + SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200)$ $(\because TL = BD = 90)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$

$= 3625$ చ.మీ.

పొలం వైశాల్యం $= 600 + 4000 + 2700 + 3625$

$= 10,925$ చ.మీ.

Do This

The following details are noted in metres in the field book of a surveyor. Find the area of the fields.

(i)

	To D	
	140	
50 to E ←	80	
	50	→ 50 to C
	30	→ 30 to B
	From A	

(ii)

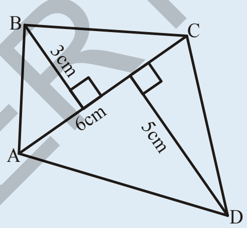
	To C	
	160	
30 to D ←	130	
	90	→ 60 to B
40 to E ←	60	
	From A	

Think and Discuss

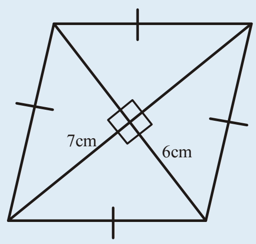
A parallelogram is divided into two congruent triangles by drawing a diagonal across it. Can we divide a trapezium into two congruent triangles?

Try These

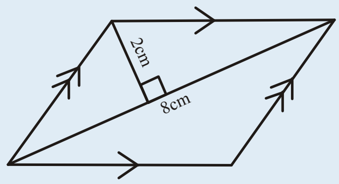
Find the area of following quadrilaterals.



(i)



(ii)



(iii)

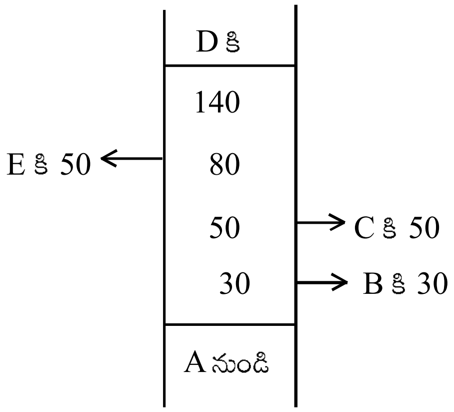
9.5 Area of a Polygon

The area of a polygon may be obtained by dividing the polygon into a number of simple shapes (triangles, rectangles etc.) Then the areas of each of them can be calculated and added up to get the required area.

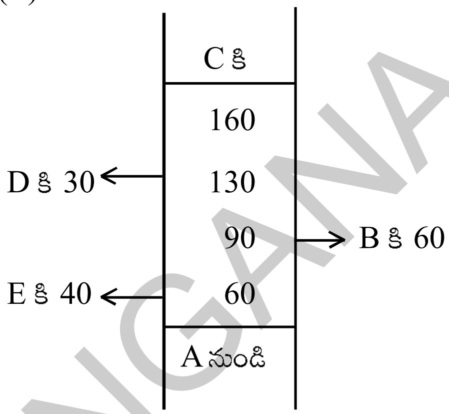
ఇవి చేయండి

ఒక సర్వేయరు ఫీల్డుబుక్‌లో నమోదు చేయబడిన ఈ దిగువ వివరాల సహాయంతో పొలముల వైశ్యాలం కనుగొనండి.

(i)



(ii)

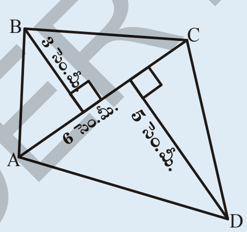


ఆలోచించండి మరియు చర్చించండి

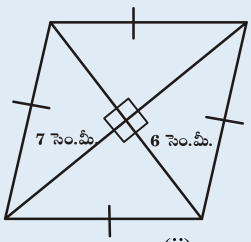
సమాంతర చతుర్భుజములో, ఒక కర్ణము గీయడం ద్వారా ఆ సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించవచ్చు. ఈ విధముగానే సమలంబ చతుర్భుజమును రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించగలమా?

ప్రయత్నించండి

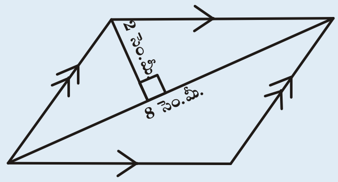
ఈ క్రింది చతుర్భుజముల యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనండి.



(i)



(ii)



(iii)

9.5 బహుభుజి వైశాల్యం

బహుభుజి యొక్క వైశాల్యమును, బహుభుజిని కొన్ని చిన్న చిన్న సమతల పటములుగా (త్రిభుజము, దీర్ఘచతురస్రం మొదలగునవి) విభజించడం ద్వారా కనుక్కోవచ్చు. ప్రతి సమతల పటముల వైశాల్యములను గణించి వాటిని కూడుట ద్వారా ఇచ్చిన బహుభుజి యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

Observe the following pentagon in the given figure:

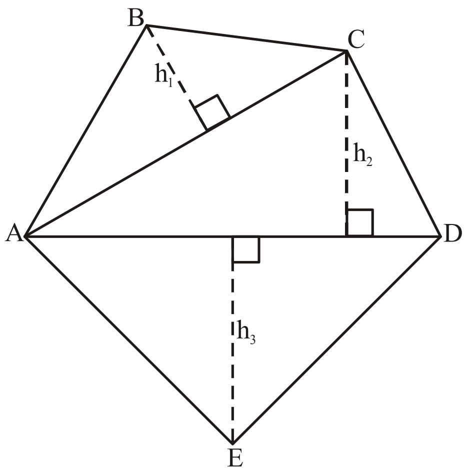


Fig. (i)

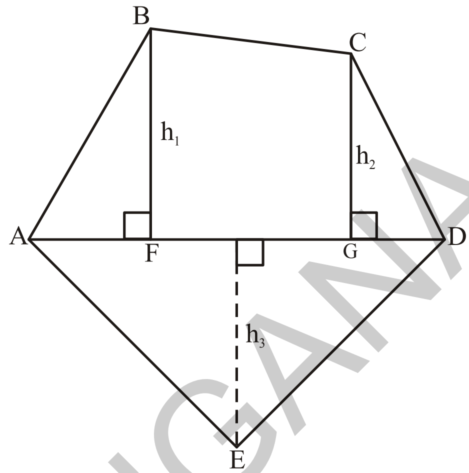


Fig. (ii)

Fig.(i) : By drawing two diagonals AC and AD the pentagon ABCDE is divided into three parts. So, area ABCDE = area of ΔABC + area of ΔACD + area of ΔAED

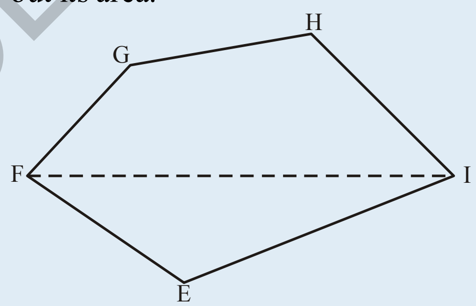
Fig.(ii) : By drawing one diagonal AD and two perpendiculars BF and CG on it, pentagon ABCDE is divided into four parts. So,

area of ABCDE = area of right angled ΔFBA + area of trapezium BFGC + area of right angled ΔCGD + area of ΔAED.

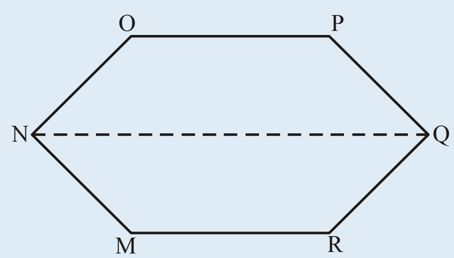
Why is this so? (Identify the parallel sides of trapezium BFGC).

Try These

(i) Divide the following polygon into parts (triangles and trapezium) to find out its area.

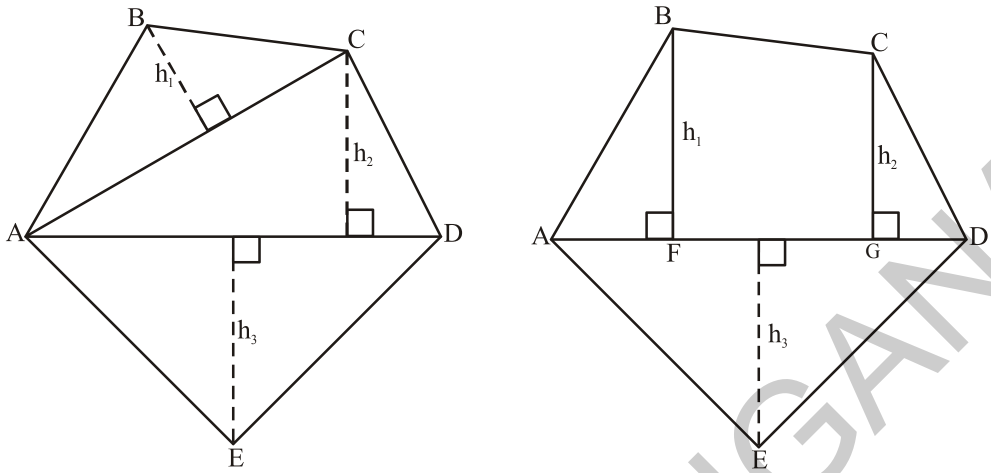


FI is a diagonal of polygon EFGHI



NQ is a diagonal of polygon MNOPQR

ఈ క్రింది పంచభుజిని పరిశీలించండి.



(i) (ii)

పటం.(i) : కర్ణములు AC మరియు AD లను గీయుట ద్వారా పంచభుజి ABCDE ను మూడు భాగములుగా విభజించవచ్చు. అందుచే

పంచభుజి ABCDE వైశాల్యం = ΔABC వైశాల్యం + ΔACD వైశాల్యం + ΔAED వైశాల్యం

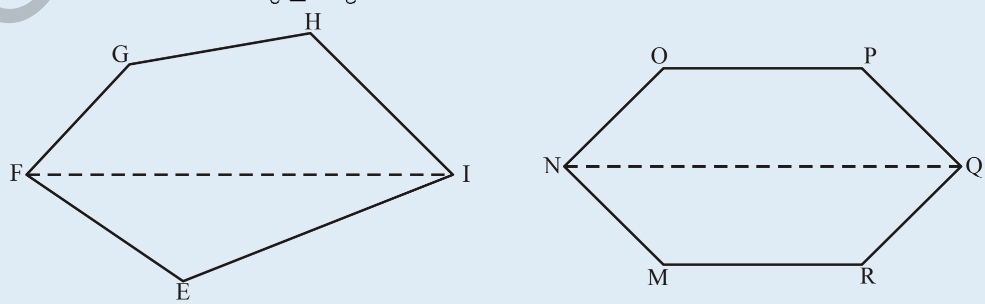
పటం.(ii) : కర్ణము AD పై రెండు లంబములు BF మరియు CG లను గీయుట ద్వారా పంచభుజి ABCDE ను నాలుగు భాగాలుగా విభజించవచ్చు. అందుచే

పంచభుజి ABCDE వైశాల్యం = AFB లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం + సమలంబ చతుర్భుజం BFGC వైశాల్యం + CGD లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం + AED త్రిభుజ వైశాల్యం

దీనికి గల కారణములు ఏమిటి? (సమలంబ చతుర్భుజం BFGC యొక్క సమాంతర భుజాలను గుర్తించండి).

ప్రయత్నించండి

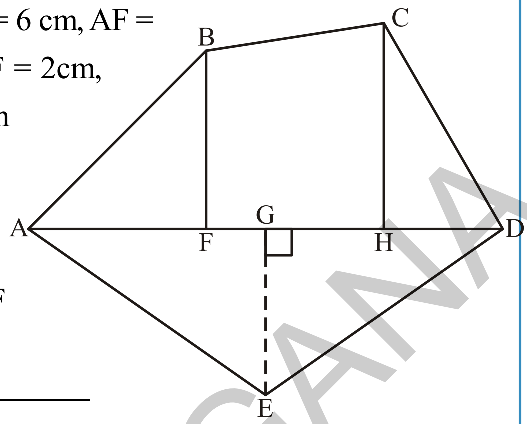
(i) ఈ క్రింద గీయబడిన బహుభుజిని భాగములుగా (త్రిభుజములు మరియు సమలంబ చతుర్భుజం)గా విభజించి వాటి యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనండి.



బహుభుజి EFGHI యొక్క కర్ణం FI

బహుభుజి MNOPQRలో NQ కర్ణం

(ii) Polygon ABCDE is divided into parts as shown in the figure. Find the area if AD = 8cm, AH = 6 cm, AF = 3cm and perpendicular BF = 2cm, CH = 3cm and EG = 2.5cm



Area of polygon ABCDE = area of ΔAFB + ________

Area of $\Delta AFB = \frac{1}{2} \times AF \times BF$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ________

Area of trapezium FBCH $= FH \times \frac{(BF + CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [$\because$ FH = AH - AF]

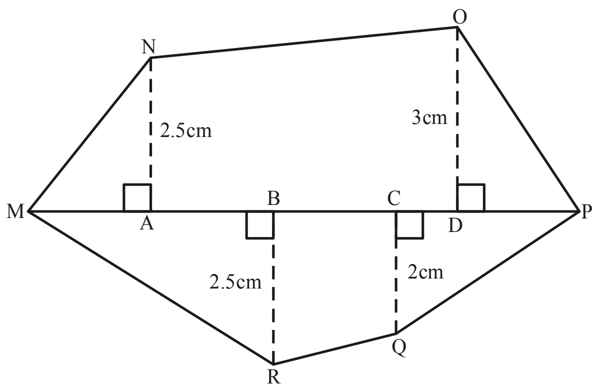
Area of Δ CHD $= \frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ________

Area of Δ ADE $= \frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ________

So, the area of polygon ABCDE = ...

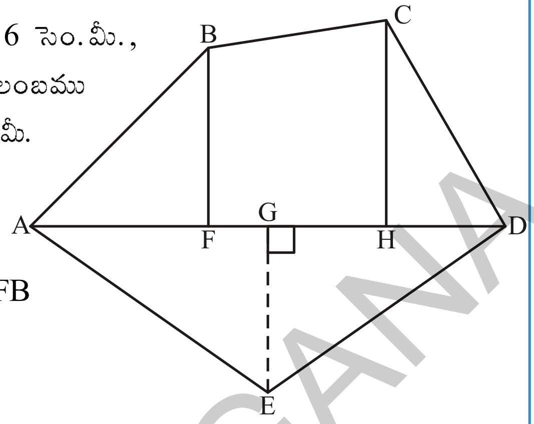
(iii) Find the area of polygon MNOPQR if MP = 9 cm, MD = 7 cm, MC = 6 cm, MB = 4 cm, MA = 2 cm

NA, OD, QC and RB are perpendiculars to diagonal MP



(ii) ప్రక్క పటంలో బహుభుజి ABCDE భాగములుగా విభజించబడింది.

AD = 8సెం.మీ., AH = 6 సెం.మీ., AF = 3సెం.మీ. మరియు లంబము BF = 2సెం.మీ., CH = 3సెం.మీ. EG = 2.5సెం.మీ. అయిన వైశాల్యం కనుక్కోండి.



ABCDE బహుభుజి వైశాల్యం = ΔAFB వైశాల్యం + ________

ΔAFB వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times AF \times BF$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ________

FBCH సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం = $FH \times \frac{(BF+CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [$\because$ FH = AH - AF]

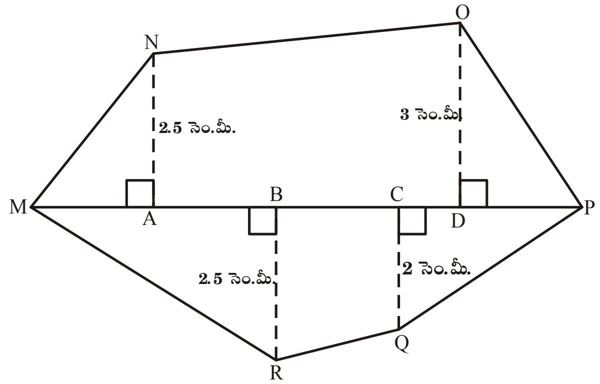
Δ CHD వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ________

Δ ADE వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ________

కావున ABCDE బహుభుజి వైశాల్యం = ...

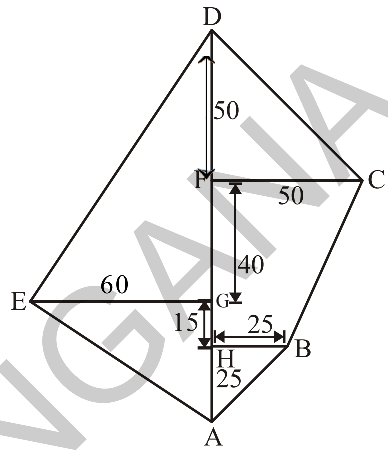
(iii) MNOPQR బహుభుజిలో MP = 9 సెం.మీ., MD = 7 సెం.మీ., MC = 6 సెం.మీ., MB = 4 సెం.మీ., MA = 2 సెం.మీ. అయితే వైశాల్యము కనుక్కోండి.

కర్ణము MP పై గీయబడిన లంబాలు NA, OD, QC మరియు RB.



Example 9: Find the area of the field shown, along side all dimension are in metres.

Solution: Area of ABCDE = Area of Δ ABH + area of trap BCFH + area of Δ CDF + + Area of Δ AED



Now, area of Δ ABH

$$= \frac{1}{2} \times AH \times HB$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$$

$$= \frac{625}{2} = 312.5 \text{ m}^2$$

Area of trap BCFH $= \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$

$$= \frac{1}{2}(25 + 50) \times 55$$

$$= \frac{75 \times 55}{2} = 2062.5 \text{ m}^2$$

Area of Δ CDF $= \frac{1}{2} \times FC \times DF$

$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50 = 1250 \text{ m}^2$$

Area of Δ AED $= \frac{1}{2} \times AD \times EG$

$$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$$

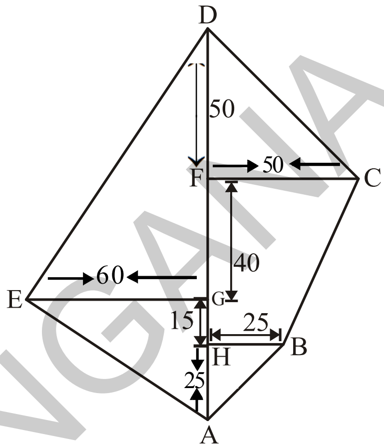
$$= 3900 \text{ m}^2$$

Thus, area of ABCDE = 312.5 + 2062.5 + 1250 + 3900

$$= 7525 \text{m}^2$$

ఉదాహరణ 9: ప్రక్క పటములో చూపిన పొలము యొక్క వైశాల్యము కనక్కోండి. పటములో చూపిన కొలతలు అన్నియూ మీటర్లలో ఉన్నవి.

సాధన: ABCDE వైశాల్యం = Δ ABH వైశాల్యం + సమలంబ చతుర్భుజం BCFH వైశాల్యం + Δ CDF వైశాల్యం + Δ AED వైశాల్యం



Δ ABH త్రిభుజ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times AH \times HB$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$$

$$= \frac{625}{2} = 312.5 \text{ చ.మీ.}$$

సమలంబ చతుర్భుజ BCFH వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$

$$= \frac{1}{2}(25 + 50) \times 55$$

$$= \frac{75 \times 55}{2} = 2062.5 \text{ చ.మీ.}$$

Δ CDF వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times FC \times DF$

$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50 = 1250 \text{ చ.మీ.}$$

Δ AED వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AD \times EG$

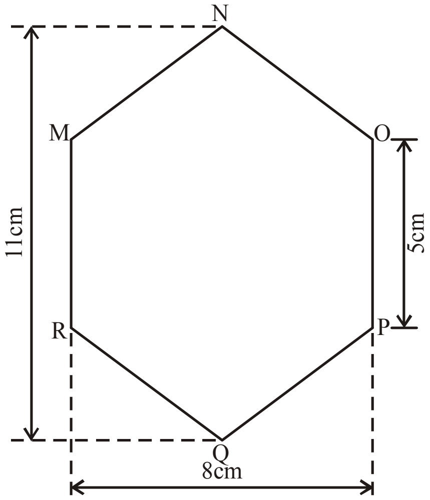
$$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$$

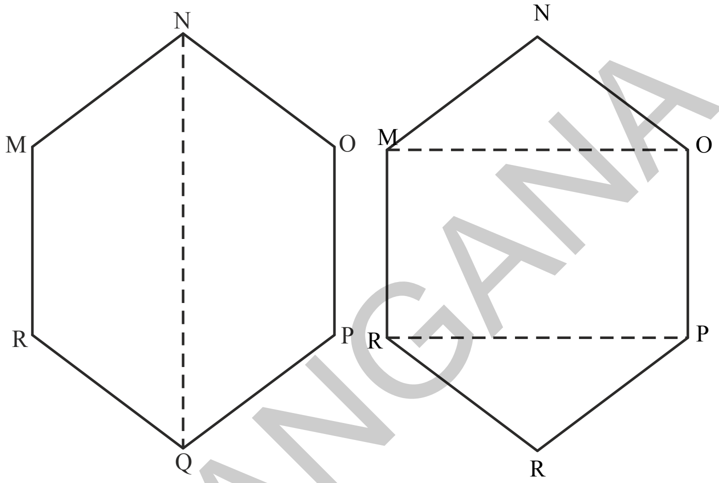
$$= 3900 \text{ చ.మీ.}$$

కనుక ABCDE బహుభుజి వైశాల్యం $= 312.5 + 2062.5 + 1250 + 3900$

$$= 7525 \text{ చ.మీ.}$$

Example 10: There is a hexagon MNOPQR of each side 5 cm and symmetric about NQ. Suresh and Rushika divided it into different ways. Find the area of this hexagon using both ways.



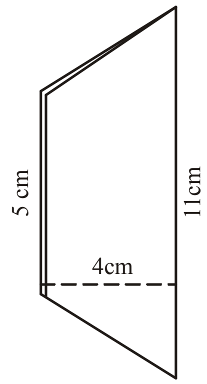


Suresh's Method **Rushika's Method**

Fig. (i) Fig. (ii)

Solution: **Method adopted by Suresh**

Since it is a regular hexagon. So, NQ divides the hexagon into two congruent trapeziums. You can verify it by paper folding.



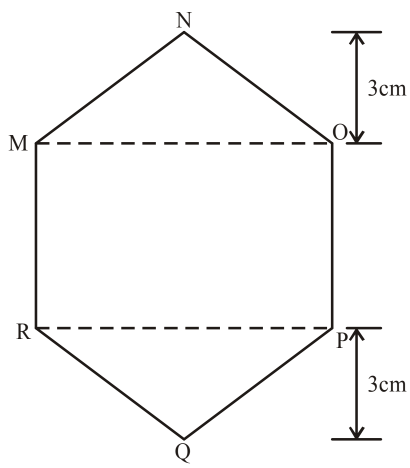
Now area of trapezium MNQR

$= 4 \times \dfrac{11+5}{2}$

$= 2 \times 16 = 32 \text{ cm}^2$

So the area of hexagon MNOPQR = 2 × 32 = 64 cm^2

Method adopted by Rushika



ΔMNO and ΔRPQ are congruent triangles with altitude 3 cm (fig.4). You can verify this by cutting off these two triangles and placing them on one another.

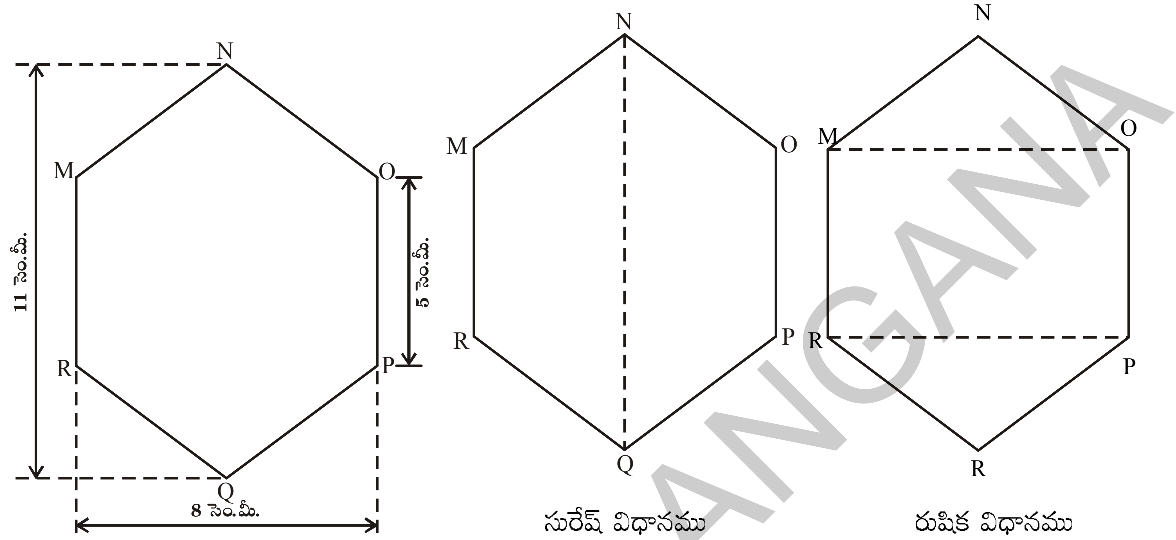
Area of $\Delta MNO = \dfrac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$

$= \text{ Area of } \Delta RPQ$

Area of rectangle MOPR = $8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$

Now, area of hexagon MNOPQR=40+12+12=64 cm^2.

ఉదాహరణ 10: షడ్భుజి MNOPQR లో ప్రతి భుజము పొడవు 5 సెం.మీ. మరియు NQ సౌష్టవాక్షము. సురేష్ మరియు రుషిక షడ్భుజిని విభిన్న విధాలుగా (పటములో చూపిన విధముగా) విభజించారు. రెండు విధాలుగా షడ్భుజి యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.

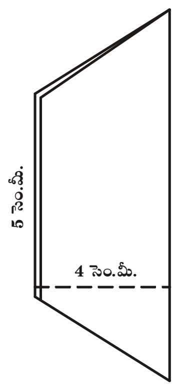


సురేష్ విధానము   రుషిక విధానము

(i)   (ii)

సాధన: **సురేష్ అనుసరించిన విధానము**

ఇచ్చిన పటము క్రమ షడ్భుజి కనుక NQ షడ్భుజిని రెండు సర్వసమానమయిన సమలంబ చతుర్భుజములుగా విభజిస్తుంది. దీనిని 'పేపర్ ఫోల్డింగ్' సమలంబ చతుర్భుజము వైశాల్యము



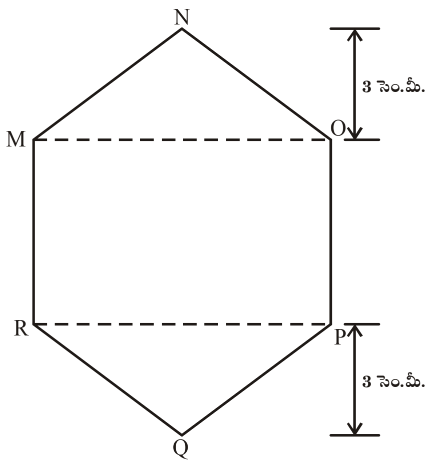
MNQR సమలంబ చతుర్భుజము వైశాల్యము

$$= 4 \times \frac{11+5}{2} = 2 \times 16 = 32 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

కావున MNOPQR షడ్భుజి యొక్క వైశాల్యము $= 2 \times 32 = 64$ చ.సెం.మీ.

రుషిక అనుసరించిన విధానము

ΔMNO మరియు ΔRPQ లు 3 సెం.మీ. ఉన్నతికల్గిన సర్వసమాన త్రిభుజాలు. దానిని ΔMNO, ΔRPQ లను కత్తిరించి ఒకదానిపై మరొకటి అమర్చుట ద్వారా (అధ్యారోపణం) గమనించవచ్చు.



ΔMNO వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ చ.సెం.మీ.

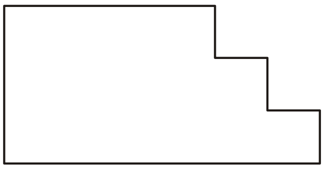
$= \Delta RPQ$ వైశాల్యం

MOPR దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= 8 \times 5 = 40$ చ.మీ.

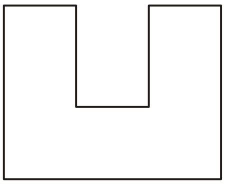
$\therefore$ MNOPQR షడ్భుజి వైశాల్యం $= 40+12+12 = 64$ చ.సెం.మీ.

Exercise - 9.1

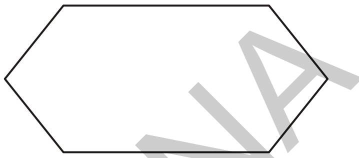
1. Divide the given shapes as instructed



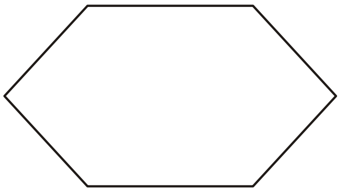
(i) into 3 rectangles



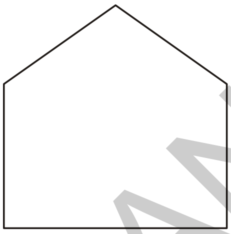
(ii) into 3 rectangles



(iii) into 2 trapezium

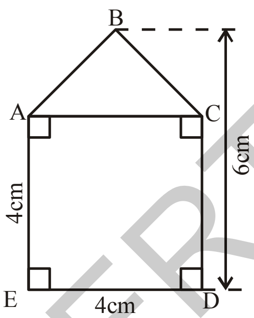


(iv) 2 triangles and a rectangle

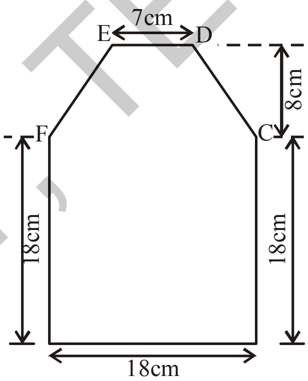


(v) into 3 triangles

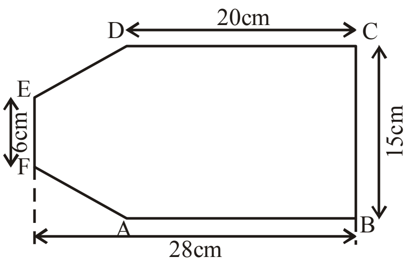
2. Find the area enclosed by each of the following figures



(i)



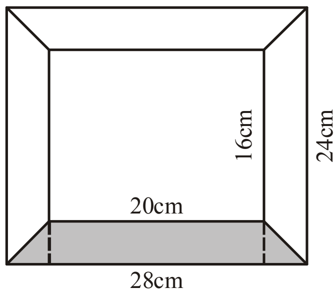
(ii)



(iii)

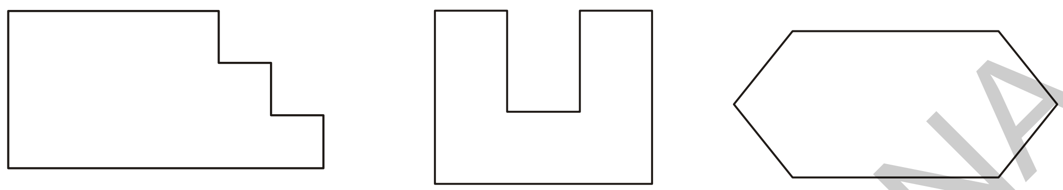
3. Calculate the area of a quadrilateral ABCD when length of the diagonal AC = 10 cm and the lengths of perpendiculars from B and D on AC be 5 cm and 6 cm respectively.

4. Diagram of the adjacent picture frame has outer dimensions 28 cm × 24 cm and inner dimensions 20 cm × 16 cm. Find the area of shaded part of frame, if width of each section is the same.

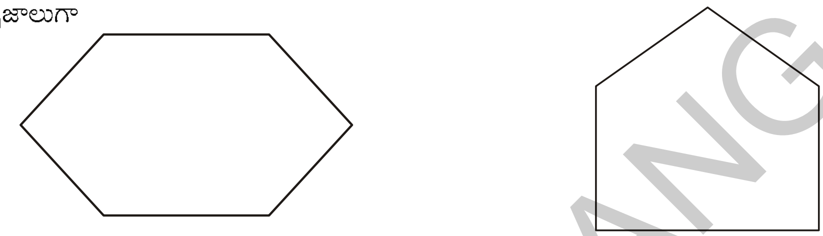


అభ్యాసం - 9.1

1. సూచించిన విధముగా ఇచ్చిన ఆకృతులను విభజించండి.

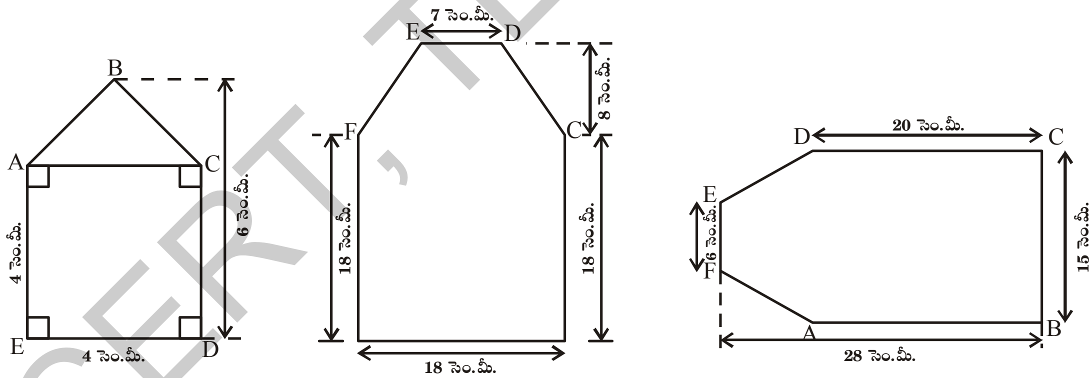


(i) మూడు దీర్ఘచతురస్రాలుగా (ii) మూడు దీర్ఘచతురస్రాలుగా (iii) రెండు సమలంబ చతుర్భుజాలుగా



(iv) రెండు త్రిభుజాలు మరియు ఒక దీర్ఘచతురస్రము (v) 3 త్రిభుజాలుగా

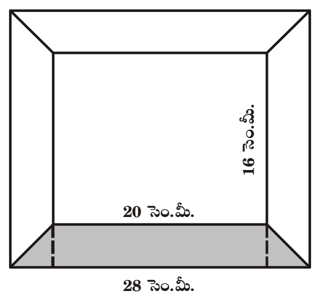
2. ఈ క్రింది పటములచే ఆవరించబడిన వైశాల్యములను కనుగొనుము.



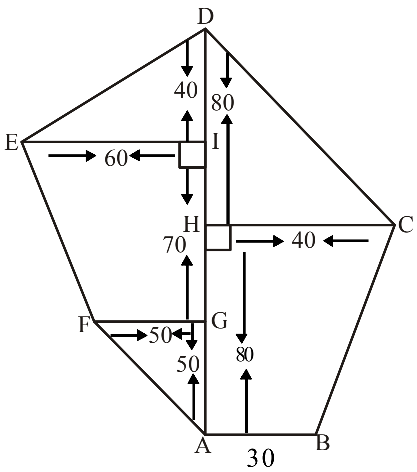
(i) (ii) (iii)

3. ABCD చతుర్భుజములో కర్ణము AC = 10 సెం.మీ. మరియు AC పై శీర్షములు B మరియు D నుండి గీచిన లంబములు వరుసగా 5 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. పొడవు కల్గియుంటే ABCD చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

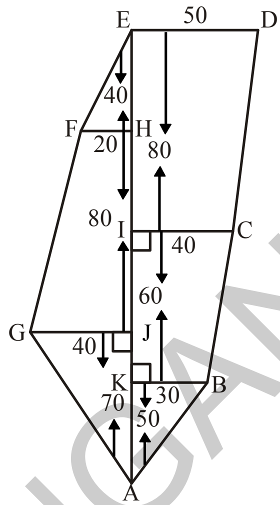
4. ప్రక్క పటములో చూపబడిన ఫోటో ఫ్రేము యొక్క బయటి అంచుకొలతలు 28 సెం.మీ. ×24 సెం.మీ. మరియు లోపలి అంచుకొలతలు 20 సెం.మీ. × 16 సెం.మీ. ఫ్రేమ్ వెడల్పు ఏకరీతిగా ఉన్నచో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము



5. Find the area of each of the following fields. All dimensions are in metres.



(i)

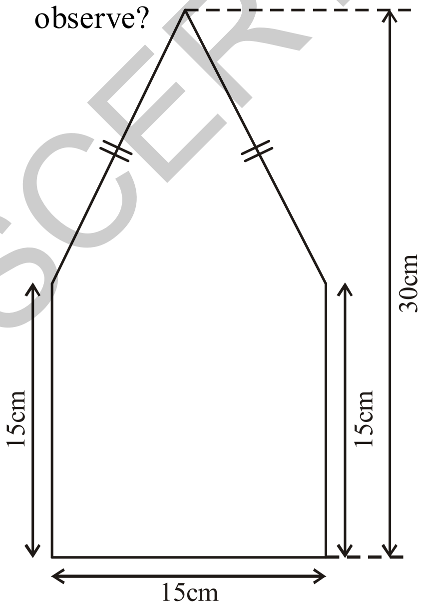


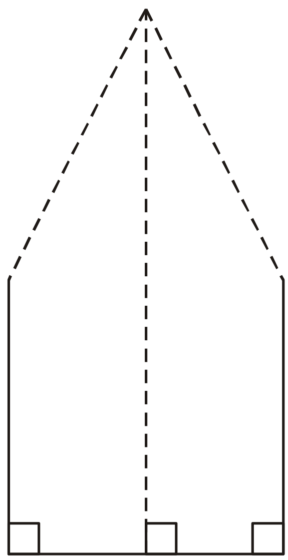
(ii)

6. The ratio of the length of the parallel sides of a trapezium is 5:3 and the distance between them is 16cm. If the area of the trapezium is 960 cm^2, find the length of the parallel sides.

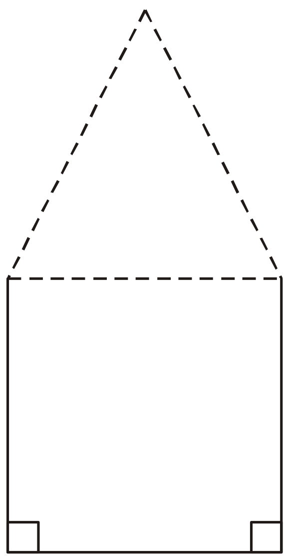
7. The floor of a building consists of around 3000 tiles which are rhombus shaped and each of its diagonals are 45 cm and 30 cm in length. Find the total cost of flooring if each tile costs rupees 20 per m^2.

8. There is a pentagonal shaped parts as shown in figure. For finding its area Jyothi and Rashida divided it in two different ways. Find the area in both ways and what do you observe?



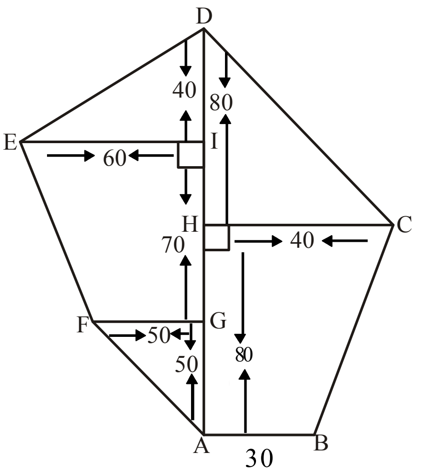


Jyoti Diagram

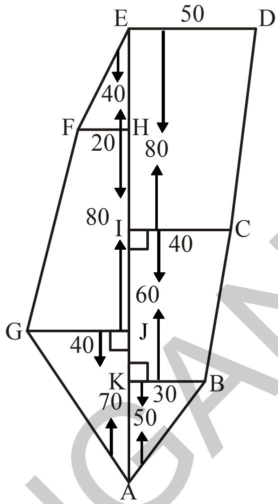


Rashida's Diagram

5. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన పొలముల యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. కొలతలన్నీ మీటర్లలో ఉన్నవి.



(i)

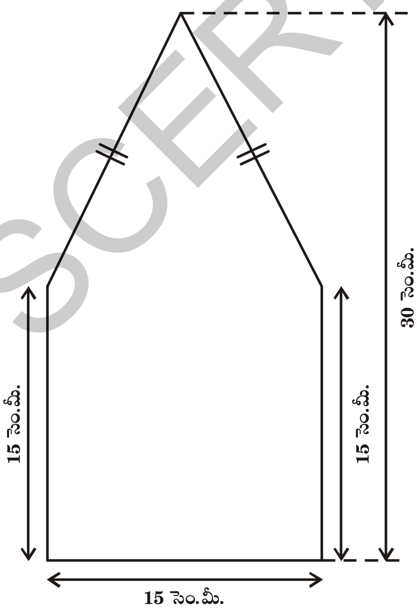


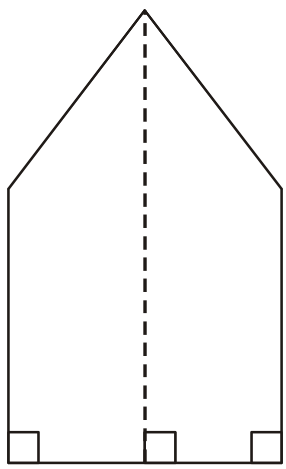
(ii)

6. సమలంబ చతుర్భుజంలోని సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 5:3 వాటి మధ్యదూరం 16 సెంమీ. సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యము 960 చ.సెంమీ అయిన సమాంతర భుజముల పొడవులను కనుగొనుము.

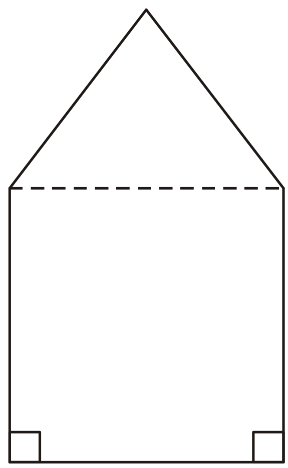
7. ఒక భవనము యొక్క నేల 3000 టైల్స్‌చే కప్పబడినది. ప్రతి టైల్ సమచతుర్భుజ ఆకృతిని కల్గియుండి కర్ణముల పొడవులు 45 సెంమీ, 30 సెంమీలు కల్గియున్నది. ప్రతీ టైల్ యొక్క వెల చదరపు మీటరుకు 20 రూపాయలు అయిన ఫ్లోరింగ్‌నకు అయ్యే మొత్తము ఖర్చుఎంత?

8. ఈ క్రింద పంచభుజి ఆకృతిలో యున్న పటము ఇయ్యబడినది. దీని వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు జ్యోతి మరియు రషీదా దానిని రెండు వేర్వేరు విధాలుగా విభజించారు. అయిన రెండు విధాలుగా పంచభుజి వైశాల్యం కనుగొనండి. దాని నుండి మీరు ఏమి గమనించారు?





జ్యోతి విధానం

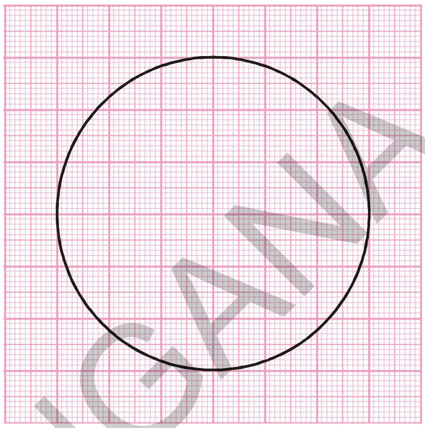


రషీదా విధానం

9.6 Area of circle

Let us find the area of a circle, using graph paper.

Draw a circle of radius 4 cm. on a graph paper . Find the area by counting the number of squares enclosed. As the edges are not straight, we roughly estimate the area of circle by this method. There is another way of finding the area of a circle.



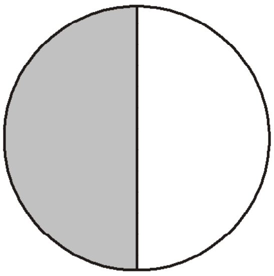


Fig.(i)

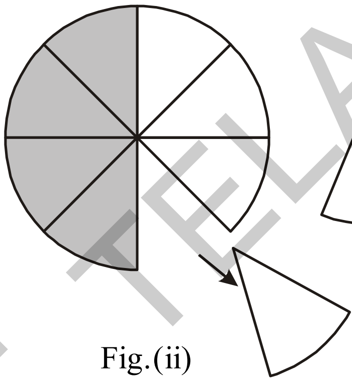


Fig.(ii)

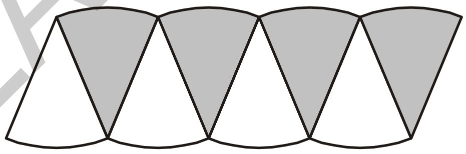


Fig.(iii)

Draw a circle and shade one half of the circle as in (Fig.(i)), now fold the circle into eight equal parts and cut along the folds as in Fig (ii))

Arrange the separate pieces as shown in Fig. (iii), which is roughly a parallelogram. The more sectors we have, the nearer we reach an appropriate parallelogram as done above. If we divide the circle into 64 sectors, and arrange these sectors as shown in figure it forms almost a rectangle Fig(iv)

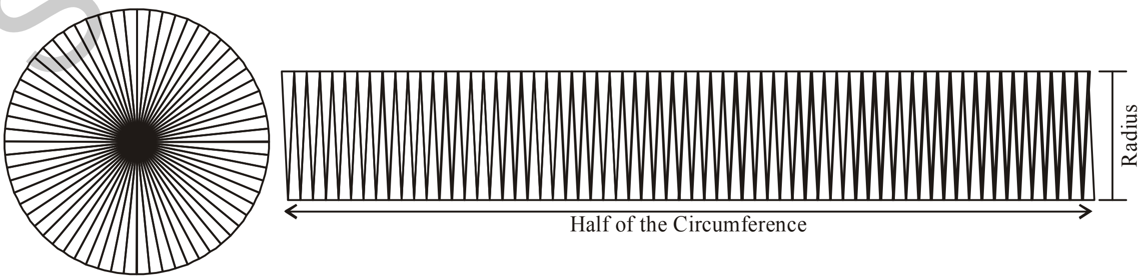
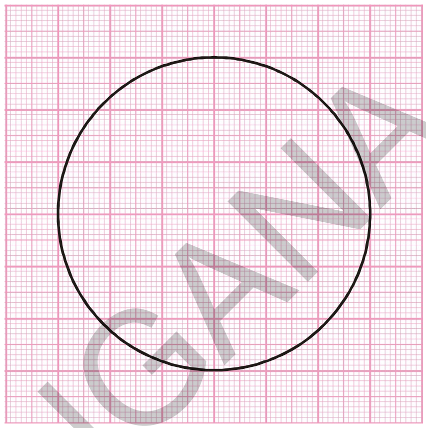


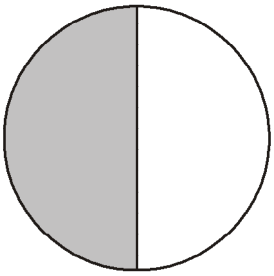
Fig.(iv)

9.6 వృత్త వైశాల్యం

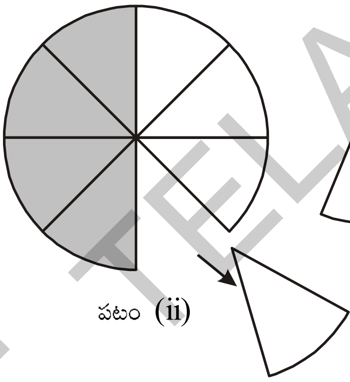
మనము వృత్త వైశాల్యమును గ్రాఫు పేపరు ద్వారా గణిద్దాం.

4 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తమును గ్రాఫు కాగితముపై గీద్దాం. వృత్తముచే ఆవరించబడిన చతురస్రములను గణించి వృత్త వైశాల్యమును కనుగొందాం. వృత్త అంచులు సరళరేఖలు కావు కనుక, ఈ పద్ధతిలో గణించిన వృత్త వైశాల్యము ఖచ్చితమైనదిగా కాకుండా సుమారుగా ఉన్న విలువను ఇస్తుంది. వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు మరో పద్ధతి వున్నది.

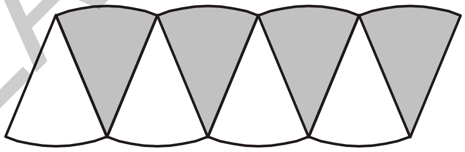




పటం (i)

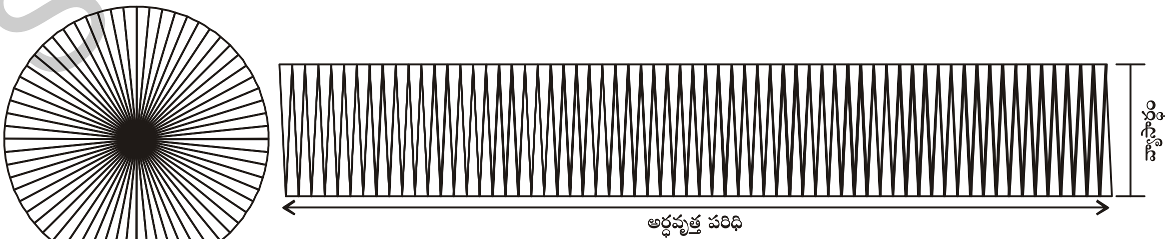


పటం (ii)



పటం (iii)

పటం (i) లో చూపిన విధంగా ఒక వృత్తమును గీచి, దానిలో సగభాగమును షేడ్ చేయుము. వృత్తమును పటము (ii) లో చూపిన విధముగా 8 సమాన భాగములుగా మడిచి, మడిచిన విధముగానే కత్తిరించవలెను. తరువాత పటము (iii) లో చూపిన విధముగా 8 భాగములను అమర్చవలెను. పటము సుమారుగా సమాంతర చతుర్భుజము వలే ఉంటుంది. వృత్తమును 64 సెక్టార్ భాగములుగా పటములో చూపిన విధముగా మడిచి, కత్తిరించినట్లయితే సుమారుగా దీర్ఘచతురస్రమువలే ఉంటుంది.



పటం (iv)

What is the breadth of this rectangle? The breadth of this rectangle is the radius of the circle 'r'

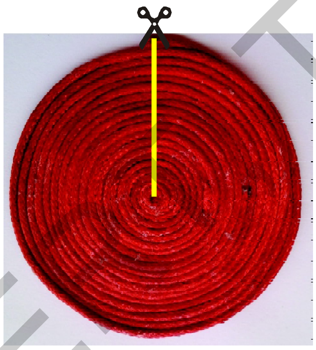
As the whole circle is divided into 64 sectors and on each side we have 32 sectors, the length of the rectangle is the length of the 32 sectors, which is half of the circumference (Fig.(iv)).

$$\begin{aligned}
\text{Area of the circle} &= \text{Area of rectangle thus formed} \\
&= l \times b \\
&= (\text{half of circumference}) \times \text{radius} \\
&= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2
\end{aligned}$$

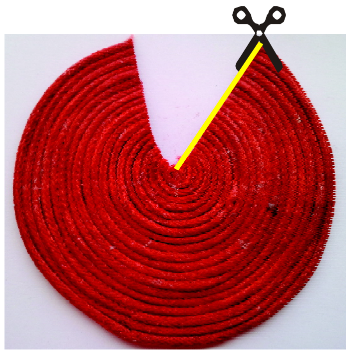
So the area of the circle = πr^2

Thread activity:

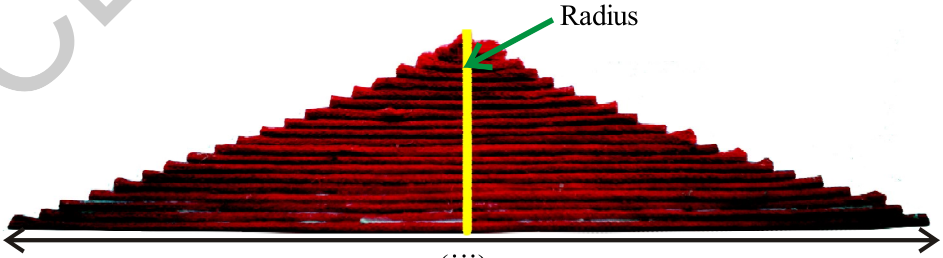
The commentaries of the Talmud (A book of Jews) presents a nice approach to the formula, $A = \pi r^2$ to calculate the area of a circle. Imagine that the interior of a circle is covered by concentric circles of yarn. Cut the yarn circles along a vertical radius. Each strand is then straightened and arranged as shown in the figure below to form an isosceles triangle



(i)



(ii)



(iii)

Circumference of the circle

The base of the isosceles triangle is equal to the circumference of the circle and height is equal to the radius of the circle.

The area of the triangle= $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$

దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు ఎంత? దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు వృత్త వ్యాసార్థమునకు (r) సమానముగా యుంటుంది.

వృత్తమును 64 సెక్టరులుగా విభజించినట్లయితే ప్రతి వైపు 32 సెక్టర్లు. ఉంటాయి. అనగా దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు, 32 సెక్టర్లు యొక్క పొడవునకు సమానము. ఇది వృత్తపరిధిలో సగమునకు సమానము. (పటం iv నుండి)

వృత్తవైశాల్యము = ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము

$= l \times b$

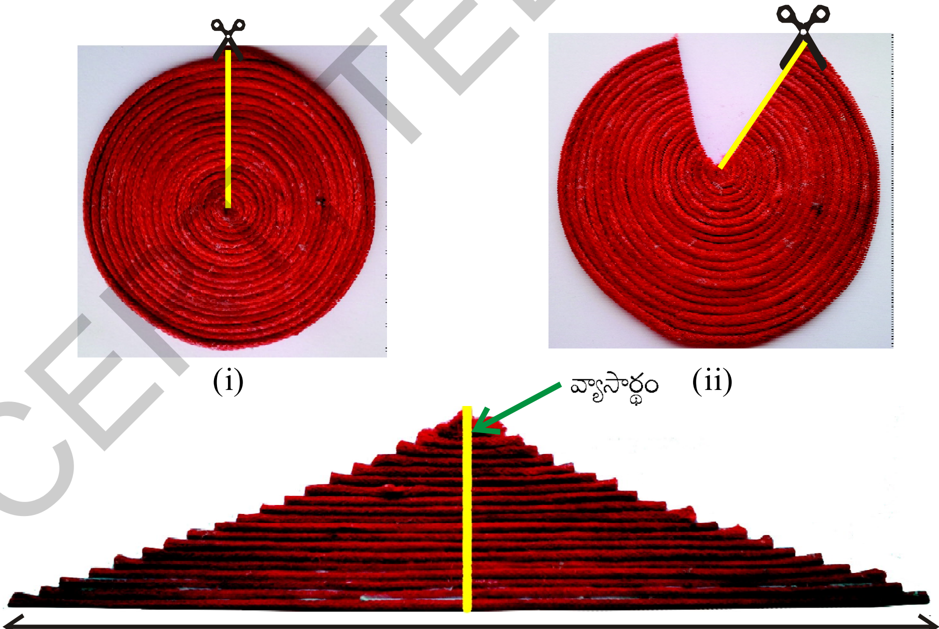
= (వృత్త పరిధిలో సగము) $\times$ వ్యాసార్థం

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

అందుచే వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

దారపు కృత్యము :

వృత్త వైశాల్యము $A = \pi r^2$ ద్వారా గణించడం ('ఏబుక్ ఆఫ్ జ్యూస్') లో ఒక ఆసక్తికర పద్ధతి ద్వారా వివరించబడింది. ఒక దారపు యొక్క కొనను ఒక బిందువు వద్ద స్థిరముగా యుంచి పటములో చూపిన విధముగా ఏక కేంద్ర వృత్తములుగా చుట్టి, క్షితిజ లంబముగా కత్తిరించి ఆధారపుకొనలన్నీ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజముగా ఏర్పడవచ్చు.



(i) (ii) (iii)
వృత్త పరిధి

సమద్విబాహు త్రిభుజము యొక్క భూమి వృత్త పరిధినకు సమానముగా, ఎత్తు వృత్త వ్యాసార్థమునకు సమానముగా ఉంటుంది.

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

$\therefore$ Area of a circle $= \pi r^2$ (Where r is the radius of the circle)

Try These

Draw circles having different radius on a graph paper. Find the area by counting the number of squares. Also find the area by using formula. Compare the two answers.

Example 11: A wire is bent into the form of a square of side 27.5 cm. The wire is straightened and bent into the form of a circle. What will be the radius of the circle so formed?

Solution: Length of wire = perimeter of the square

$= (27.5 \times 4) = 110$ cm.

When the wire is bent into the form of a circle, then it represents the circumference of the circle which would be 110 cm.

Let r be the radius of this circle

Thus, circumference $= 2 \times \pi \times r = 110$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times r = 110$$

$$= \frac{44}{7} \times r = 110$$

$= 17.5$ cm

Example 12: The circumference of a circle is 22 cm. Find its area and also find the area of the semicircle.

Solution: Let the radius of the circle be r cm

Then circumference $= 2\pi r$

$\therefore \quad 2\pi r = 22$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$ (ఇందులో r వృత్తవ్యాసార్థం)

ప్రయత్నించండి

వివిధ వ్యాసార్థములు గల వృత్తములను గ్రాఫు కాగితముపై గీయుము. ఆ వృత్తములోని యూనిట్ చతురస్రములను లెక్కించి వృత్త వైశాల్యములను గణించండి. సూత్రము ద్వారా కూడా వృత్త వైశాల్యములను లెక్కించి, ఆ రెండు విలువలను పోల్చి చూడండి.

ఉదాహరణ 11: ఒక తీగ 27.5 సెంమీ. భుజముగా గల చతురస్రముగా తయారు చేయబడినది. తీగను నిటారుగా చేసి వృత్తముగా మార్చబడినది. అయిన ఆ వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము ఎంత?

సాధన: తీగ పొడవు = చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత

$= (27.5 \times 4) = 110$ సెం.మీ.

తీగ, వృత్తముగా మలచబడితే, ఆ వృత్తము యొక్క పరిధి 110 సెం.మీ. అవుతుంది కదా!

వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము 'r' అనుకొందాం.

అందువలన వృత్తపరిధి $= 2\times\pi\times r = 110$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times r = 110$$

$$= \frac{44}{7}\times r = 110$$

$= 17.5$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 12 : వృత్తపరిధి 22 సెం.మీ. అయిన వృత్త వైశాల్యము మరియు దాని అర్ధవృత్త వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన: వృత్తవ్యాసార్థము r సెం.మీ. అనుకొందాం.

వృత్తపరిధి $= 2\pi r$

$\therefore \quad 2\pi r = 22$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$r = 22 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

$\therefore$ Radius of the circle $= 3.5\text{cm}$

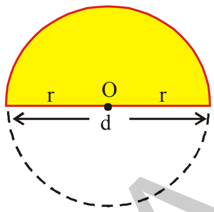
Area of the circle πr^2 $= \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$

$= 38.5 \text{ cm}^2$

Area of the semi circle $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25 \text{cm}^2$

What is area of Semi-circle?



Imagine, if we fold the circle along its diameter, we get the area of the shaded region. Can we say area of the shaded region is half of area of the circle?

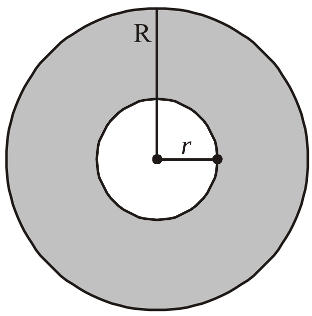
Its area is half of the area of circle

$= \frac{1}{2}\pi r^2$

what will be the perimeter of the semi-circle ?

9.7 Area of a Circular Path or Area of a ring

In a park a circular path is laid as shown in the given figure.Its outer and inner circles are concentric. Let us find the area of this circular path.



The Area of the circular path is the difference of Area of outer circle and inner circle.

If we say the radius of outer circle is 'R' and inner circle is 'r' then

Area of the circular path = Area of outer circle – Area of inner circle

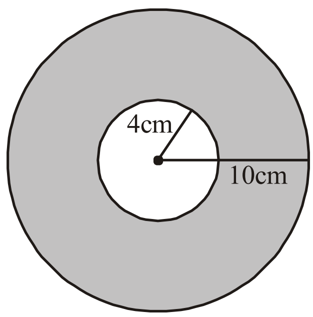
$= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi (R^2 - r^2)$

Hence, Area of the circular path or Area of a ring $= \pi (R^2 - r^2)$ or $\pi (R + r) (R - r)$

Where R, r are radii of outer circle and inner circle respectively

Example:13 Observe the adjacent figure. It shows two circles with the same centre. The radius of the larger circle is 10cm and the radius of the smaller circle is 4cm.



Find (i) the area of the larger circle

(ii) The area of the smaller circle

(iii) The shaded area between the two circles. (take $\pi = 3.14$)

$$r = 22 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} = 3.5 \text{ సెం.మీ.}$$

$\therefore$ వృత్తవ్యాసార్థం $= 3.5$ సెం.మీ.

$\therefore$ వృత్తవైశాల్యం $\pi r^2 = \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$.

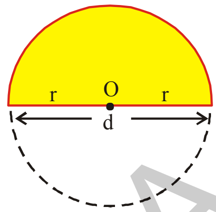
$= 38.5$ చ.సెం.మీ.

అర్ధవృత్త వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25$ చ.సెం.మీ.

అర్ధ వృత్త వైశాల్యం ఎంత?

ఒక వృత్తాన్ని దాని వ్యాసం వెంబడి మడిచినట్లుగా ఊహించిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం ఏర్పడినది.



షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం వృత్త వైశాల్యంలో సగము అని చెప్పగలమా?

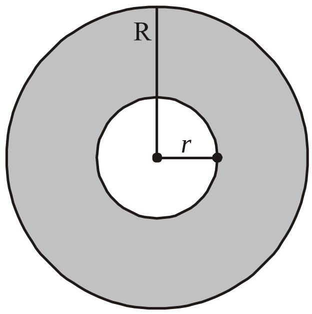
దాని వైశాల్యం వృత్త వైశాల్యంలో సగము

$= \frac{1}{2}\pi r^2$

అర్ధవృత్తం చుట్టుకొలత ఎంత?

9.7 బాట లేదా కంకణాకార స్థల వైశాల్యం

ఒక పార్కులో పటంలో చూపిన విధంగా వృత్తాకార బాట వేయబడినది. వృత్తాకార బాటలో బాహ్య, అంతరవృత్తాలు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు. అయిన ఆ వృత్తాకార బాట వైశాల్యం కనుగొందాం. కంకణాకార స్థల వైశాల్యము, బాహ్యవృత్త, అంతర వృత్తవైశాల్యముల భేదమునకు సమానము.



బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థము 'R' మరియు అంతర వృత్త వ్యాసార్థం 'r' అయిన

కంకణాకార స్థల వైశాల్యము = బాహ్యవృత్త వైశాల్యం − అంతర వృత్త వైశాల్యం

$= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi (R^2 - r^2)$

అందుచే, కంకణాకార స్థల వైశాల్యం $= \pi (R^2 - r^2)$ లేదా $\pi (R + r)(R - r)$

ఇచ్చట వరుసగా R, r బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థం మరియు అంతర వృత్త వ్యాసార్థము.

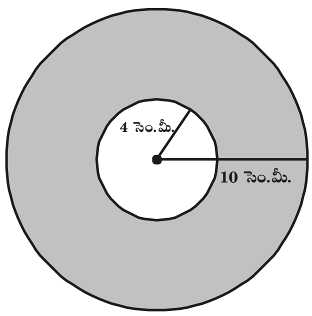
ఉదాహరణ 13: ప్రక్కపటమును పరిశీలించండి. ఇది ఏకకేంద్రము గల రెండు వృత్తములను సూచిస్తుంది. బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థము 10 సెంమీ॥ అంతర వృత్త వ్యాసార్థము 4 సెంమీ॥

అయిన (i) పెద్ద వృత్త వైశాల్యం

(ii) చిన్న వృత్త వైశాల్యం

(iii) షేడ్ చేయబడిన భాగం వైశాల్యంలను కనుగొనండి.

($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి)



Solution: (i) Radius of the larger circle = 10 cm

So, area of the larger circle = πR^2

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$

(ii) Radius of the smaller circle = 4 cm

So, area of the smaller circle = πr^2

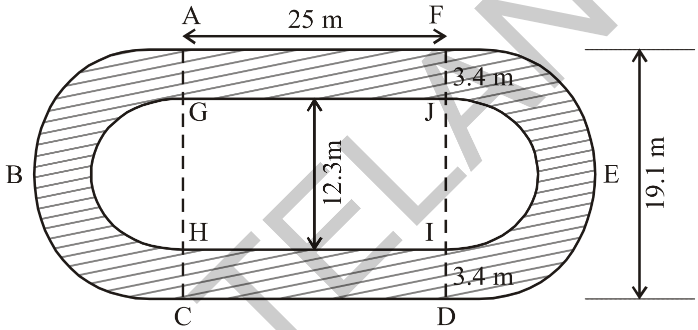
$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24 \text{ cm}^2$

(iii) Area of the shaded region = Area of the larger circle – Area of the smaller circle

$= 314 - 50.24$

$= 263.76 \text{ cm}^2$.

Example 14: Calculate the area of shaded part of the figure given below.



Solution: Shaded Area = Area of rectangle AGJF + Area of rectangle HCDI + Area of semi circular ring ABCHG + Area of semicircular ring DEFJI

Area of rectangle AGJF = 25 × 3.4 = 85 m^2.

Area of rectangle HCDI = 25 × 3.4 = 85 m^2.

Area of a semi circular ring ABCHG = $\frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{7} \times \frac{1}{2}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

Area of a semi circular ring DEFJI = $\frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{7} \times \frac{1}{2}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

Area of shaded part

$= (25 \times 3.4) + (25 \times 3.4) + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4]$

$= (170 + 167.77)$

$= 337.7.77 \text{ m}^2$

$R = \frac{19.1}{2} = 9.55$

$r = \frac{12.3}{2} = 6.15$

సాధన: (i) బాహ్యవృత్త వ్యాసార్థం $= 10$ సెం.మీ.

అందుకే బాహ్యవృత్త వైశాల్యం $= \pi R^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ చ.సెం.మీ.

(ii) అంతర వృత్త వ్యాసార్థం $= 4$ సెం.మీ.

అందుచే అంతర వృత్త వ్యాసార్థం $= \pi r^2$

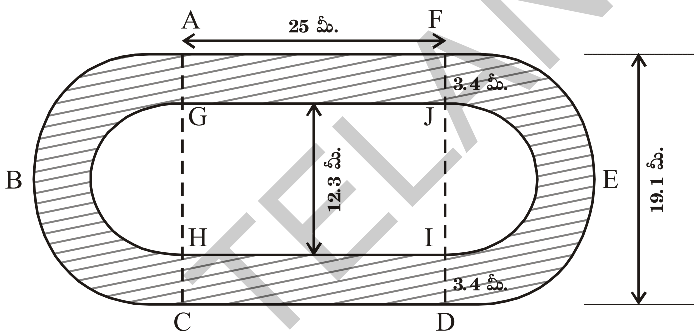
$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ చ.సెం.మీ.

(iii) షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం = బాహ్యవృత్త వైశాల్యం – అంతరవృత్త వైశాల్యం

$= 314 - 50.24$

$= 263.76$ చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 14: ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.



సాధన: షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యము = AGJF దీ.చ.వై. + HCDI దీ.చ.వై.+ ABCHG అర్ధ కంకణ వైశాల్యం + DEFJI అర్ధ కంకణ వైశాల్యం

AGJF దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము $= 25 \times 3.4 = 85$ చ.మీ.

HCDI దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము $= 25 \times 3.4 = 85$ చ.మీ.

ABCHG అర్ధ కంకణ వైశాల్యం $= \frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{7} \times \frac{1}{2}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

DEFJI అర్ధ కంకణ వైశాల్యం $= \frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{7} \times \frac{1}{2}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం

$= (25 \times 3.4) + (25 \times 3.4) + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4]$.

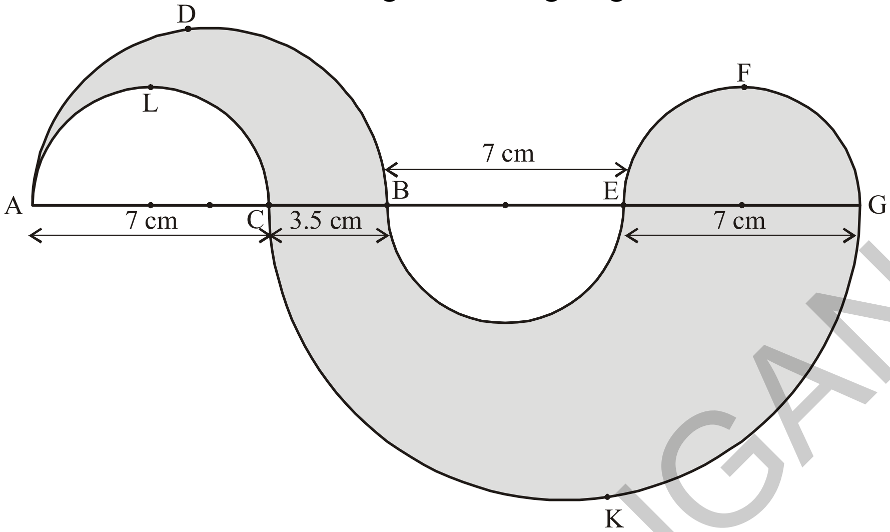
$= (170 + 167.77)$

$= 337.77$ చ.మీ.

$R = \frac{19.1}{2} = 9.55$

$r = \frac{12.3}{2} = 6.15$

Example 15: Find the area of shaded region of the figure given below.



Solution: Shaded area = Area ADBCLA + Area EFGE + Area BEGKCB

$$= \frac{1}{2} \times \pi \left[\left(\frac{10.5}{2} \right)^2 - \left(\frac{7}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{7}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left[\left(\frac{17.5}{2} \right)^2 - \left(\frac{7}{2} \right)^2 \right] \text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{4} \times \frac{7}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{49}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{49}{4} \right)$$

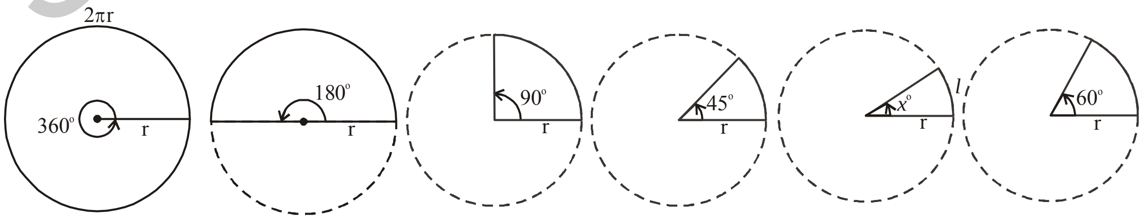
$$= \left(\frac{385}{16} + \frac{77}{4} + \frac{1617}{16} \right)$$

$$= \left(\frac{2310}{16} \right)$$

$$= 144.375 \text{ cm}^2$$

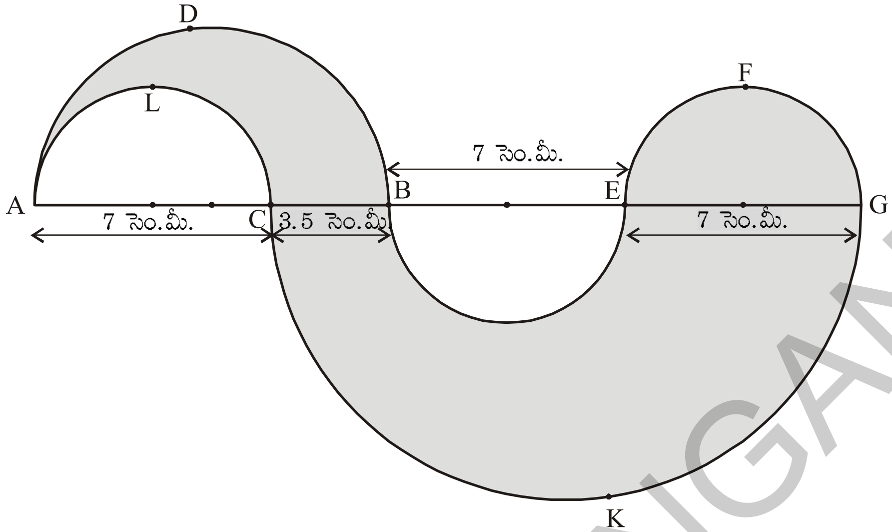
9.8 Length of the arc

Observe the following circles and complete the table



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

ఉదాహరణ 15: ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యంను కనుగొనుము.



సాధన: షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం = ADBCLA వైశాల్యం + EFGE వైశాల్యం + BEGKCB వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\times\pi\left[\left(\frac{10.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{17.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{4}\times\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{49}{4}\right)$$

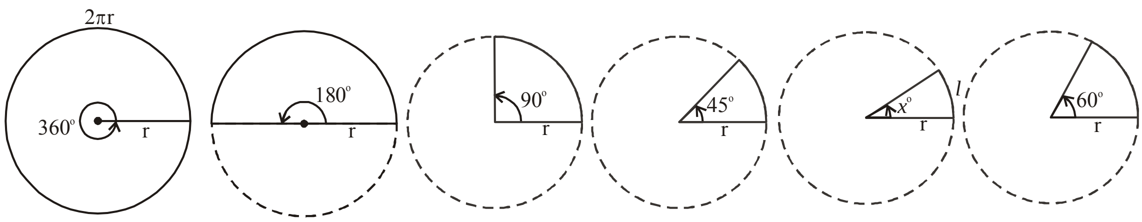
$$= \left(\frac{385}{16}+\frac{77}{4}+\frac{1617}{16}\right)$$

$$= \left(\frac{2310}{16}\right)$$

$= 144.375$ చ.సెం.మీ.

9.8 చాపము పొడవు

ఈ క్రింది వృత్తములను పరిశీలించి, దిగువనియ్యబడిన పట్టికను పూరింపుము



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

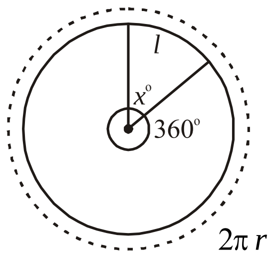
Fig	Angle	Length of Arc	Relation between angle and length of arc
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	________
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	________
(v)	x^o	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	60^0	$\frac{\pi r}{3}$	________

From the above observations, the length of the arc of a sector $(l) = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ where 'r' is the radius of the circle and 'x' is the angle subtended by the arc of the sector at the centre.

If the length of arc of a sector is l

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

Then $$l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$



9.9 Area of Sector

We know that part of a circle bounded by two radii and an arc is called sector.

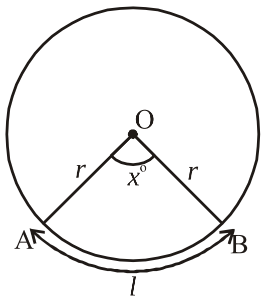
The Area of a circle with radius r = πr^2

Angle subtended by the arc of the sector at centre of the circle is x^0

Area of a sector and its angle are in direct proportion

$\therefore$ Area of sector : Area of circle = $x^0 : 360^0$

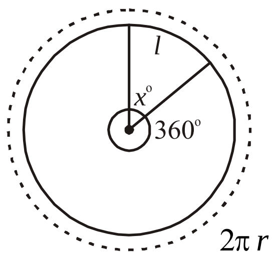
The area of sector OAB = $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ Area of the circle



పటం	కోణం	చాపం పొడవు	చాపము పొడవు మరియు సెక్టరు కోణము మధ్య గల సంబంధం
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	________
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	________
(v)	x^o	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	60^0	$\frac{\pi r}{3}$	________

పట్టికను పరిశీలించిన తరువాత సెక్టరు చాపము పొడవు $(l) = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ఇందులో r వృత్త వ్యాసార్థం మరియు 'x' అనేది సెక్టరు చాపము కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం

సెక్టరు చాపము పొడవు l అయిన



$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

అయితే $$l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$

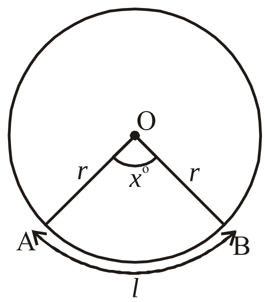
9.9 సెక్టరు వైశాల్యము

చాపము, రెండు వ్యాసార్థములతో ఆవరించబడిన వృత్తములోని భాగమును సెక్టరు అంటారు.

r వ్యాసార్థం కల్గిన వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2$

సెక్టరు చాపము వృత్త కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము $= x^0$

సెక్టరు కోణము, వైశాల్యము అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.



$\therefore$ సెక్టరు వైశాల్యము : వృత్తవైశాల్యము $= x^o : 360^o$

సెక్టరు OAB వైశాల్యం $= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ వృత్త వైశాల్యం

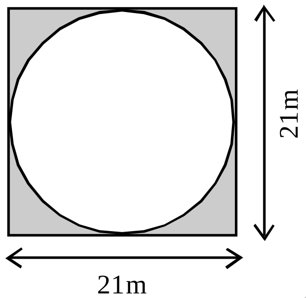
Hence Area of sector OAB = $\frac{x^o}{360^o} \times \pi r^2$ $[\pi r^2 = \pi r \times \frac{2r}{2}]$

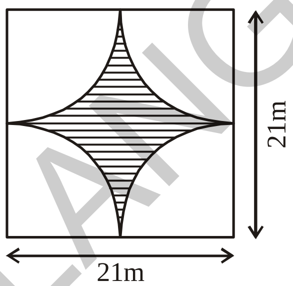
$$= \frac{x^o}{360^o} \times 2\pi r \times \frac{r}{2}$$

$$= l \times \frac{r}{2}$$

$$A = \frac{lr}{2} \qquad (l \text{ is length of the arc})$$

Example 13: Find the area of shaded region in each of the following figures.





Solution: **(i)** Area of the shaded region

=(Area of the square with side 21m) – (Area of the circle with diameter 21m)

If the diameter of the circle is 21m

Then the radius of the circle = $\frac{21}{2}$ =10.5m

Area of the shaded region = $(21 \times 21) - \left(\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$

$= 441 - 346.5$

$= 94.5 \text{ m}^2$

(ii) Area of shaded region = (Area of the square with side 21 m) – (4 × Area of the sector)

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{90^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

(If diameter is 21m, then radius is $\frac{21}{2}$ m)

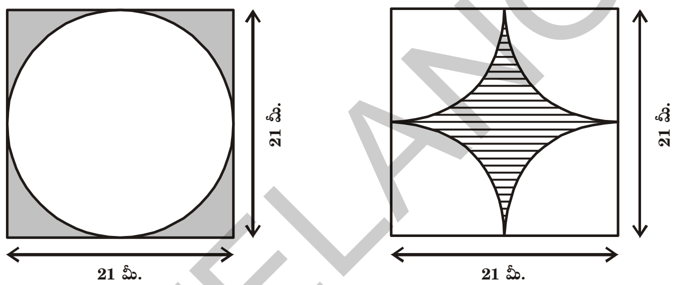
$\therefore$ సెక్టరు OAB వైశాల్యం $= \dfrac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \quad [\because \pi r^2 = \pi r \times \dfrac{2r}{2}]$

$$= \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r \times \frac{r}{2}$$

$$= l \times \frac{r}{2}$$

$$A = \frac{lr}{2}$$ (l అనేది చాపం పొడవు)

ఉదాహరణ 13: క్రింద ఇచ్చిన పటములలో షేడ్ చేయబడిన భాగము కనుగొనండి.



సాధన: **(i)** షేర్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యము

=(21మీ. భుజముగా గల చతురస్ర వైశాల్యం) – (21మీ. వ్యాసముగా గల వృత్త వైశాల్యము)

వృత్తము యొక్క వ్యాసము 21 మీ.

కావున వృత్త వ్యాసార్థము = $\dfrac{21}{2}$ =10.5 మీ.

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం $= (21 \times 21) - \left(\dfrac{22}{7} \times \dfrac{21}{2} \times \dfrac{21}{2}\right)$

$= 441 - 346.5$

$= 94.5$ చ.మీ.

(ii) షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం = (21 మీ. భుజముగా గల చతురస్ర వైశాల్యము) –

($4 \times$ సెక్టారు వైశాల్యం)

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{90^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

(వ్యాసం 21 మీ. కావున వ్యాసార్థం $\dfrac{21}{2}$ మీ.)

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

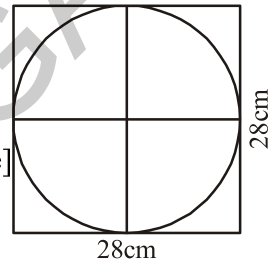
$$= (441 - 346.5)$$

$$= 94.5 \text{ m}^2$$

Exercise - 9.2

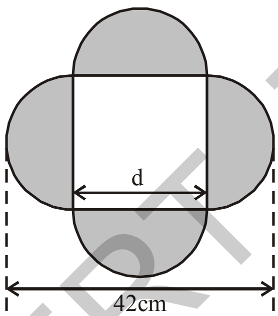
1. A rectangular acrylic sheet is 36 cm by 25 cm. From it, 56 circular buttons, each of diameter 3.5 cm have been cut out. Find the area of the remaining sheet.

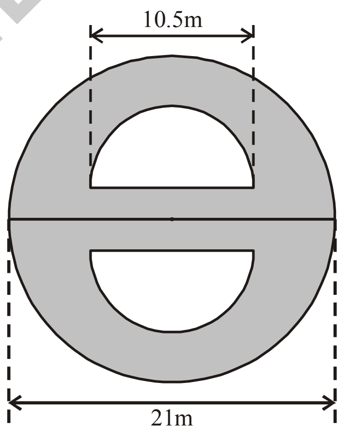
2. Find the area of a circle inscribed in a square of side 28 cm.



[**Hint.** Diameter of the circle is equal to the side of the square]

3. Find the area of the shaded region in each of the following figures.



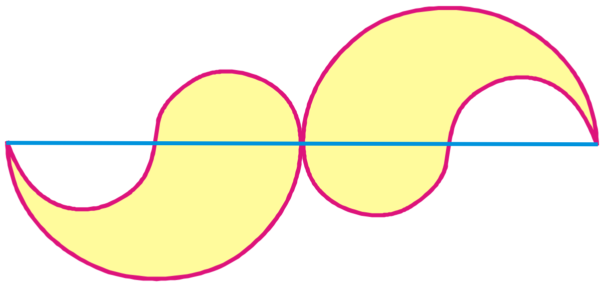


[Hint: $d + \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 42$]

$d = 21$

$\therefore$ side of the square 21 cm

4. The adjacent figure consists of four small semi-circles of equal radii and two big semi-circles of equal radii (each 42 cm). Find the area of the shaded region



$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

$$= (441 - 346.5)$$

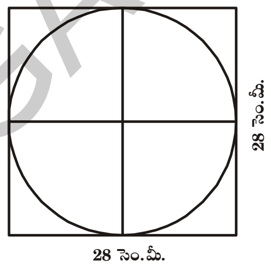
$$= 94.5 \text{ చ.మీ.}$$

అభ్యాసము - 9.2

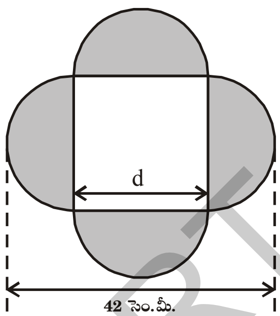
1. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార షీట్ యొక్క కొలతలు 36 సెంమీ × 25 సెం.మీ. షీట్ నుండి 3.5 సెం.మీ వ్యాసము కల్గిన 56 వృత్తాకార గుండీలను కత్తిరించగా మిగిలిన షీట్ వైశాల్యము ఎంత?

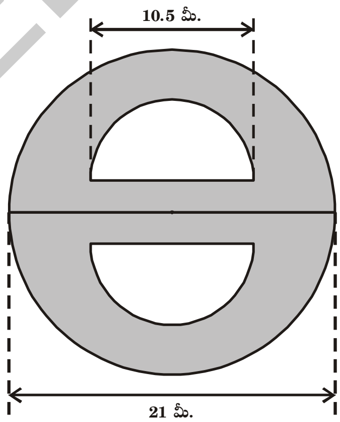
2. 28 సెంమీ. భుజముగా గల చతురస్రములో అంతర్లిఖించబడిన వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనుము.

   [**సూచన** : వృత్తము యొక్క వ్యాసము చతురస్ర భుజమునకు సమానము.]



3. క్రింది ఇవ్వబడిన పటములలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యములను కనుగొనుము.



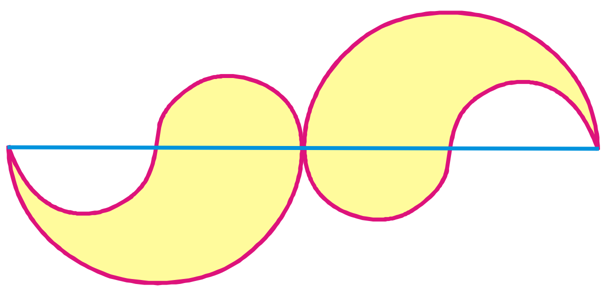


[గమనిక: $d + \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 42$]

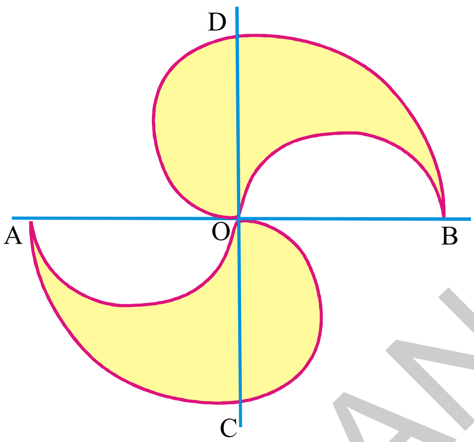
$d = 21$

$\therefore$ చతురస్రభుజం = 21 సెం.మీ.

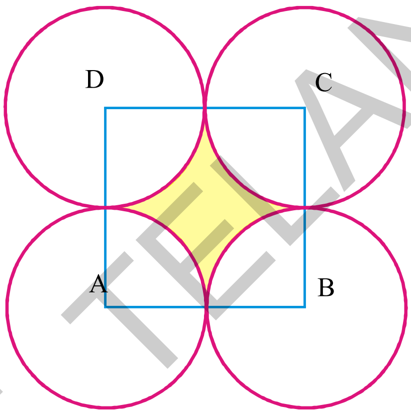
4. సమాన వ్యాసార్ధములు కల్గిన 4 అర్ధ వృత్తములు మరియు సమాన వ్యాసార్ధాలు (ప్రతిది 42 సెం.మీ) కల్గిన రెండు పెద్ద అర్ధ వృత్తములు. పటములో చూపిన విధముగా జతచేయబడినవి. అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతము వైశాల్యం కనుగొనండి.



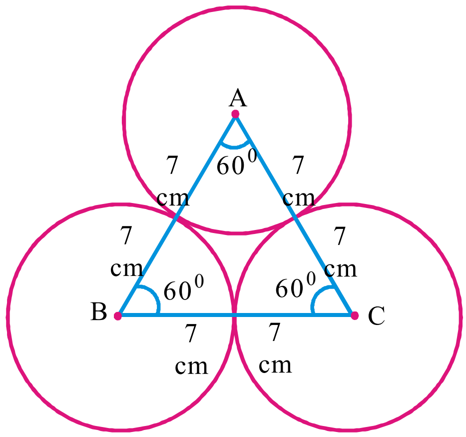
5. The adjacent figure consists of four half circles and two quarter circles. If OA = OB = OC = OD = 14 cm. Find the area of the shaded region.



6. In adjacent figure A, B, C and D are centres of equal circles which touch externally in pairs and ABCD is a square of side 7 cm. Find the area of the shaded region.



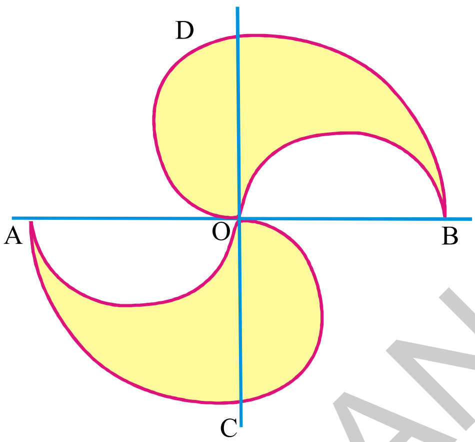
7. The area of an equilateral triangle is $49\sqrt{3}$ cm^2. Taking each angular point as centre, a circle is described with radius equal to half the length of the side of the triangle as shown in the figure. Find the area of the portion in the triangle not included in the circles.



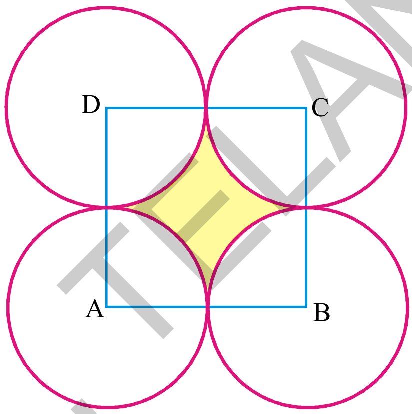
8.(i) Four equal circles, each of radius 'a' touch one another. Find the area between them.

(ii) Four equal circles are described about the four corners of a square so that each circle touches two of the others. Find the area of the space enclosed between the circumferences of the circles, each side of the square measuring 24 cm.

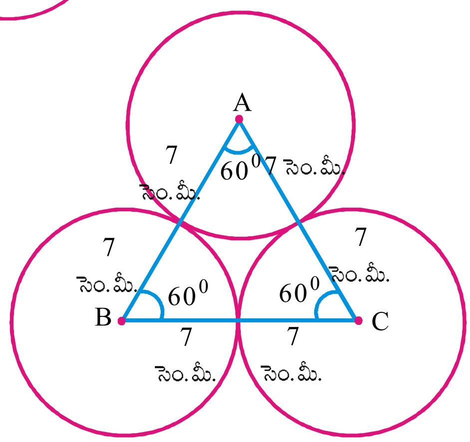
5. నాలుగు అర్ధవృత్తములు, రెండు పావు వృత్తములు ప్రక్క పటములో చూపిన విధంగా జతచేయబడినది. OA = OB = OC = OD = 14 సెం.మీ. అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



6. పటములో చూపిన విధంగా A, B, C మరియు D కేంద్రముగా గల సమాన వ్యాసార్థములు కల్గిన నాల్గు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించు కొంటున్నాయి. ABCD చతురస్రము యొక్క భుజము 7 సెం.మీ. అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



7. ఒక సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము $49\sqrt{3}$ చ. సెంమీ. వృత్త కేంద్రమును శీర్షములుగా మూడు వృత్తములు బాహ్యముగా పటములో చూపిన విధముగా స్పృశించుకొంటున్నాయి. అయినచో వృత్తమును కల్గియుండని త్రిభుజ ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

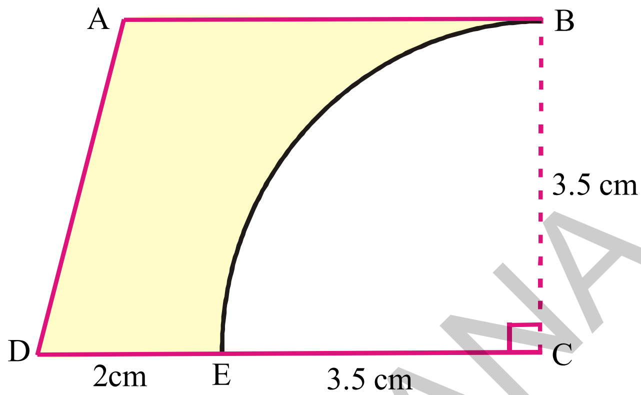


8. (i) 'a' వ్యాసార్థము కల్గిన నాలుగు సమాన వృత్తములు స్పృశించుకొంటున్నాయి. అయినచో ఆ వృత్తముల మధ్య ప్రాంత వైశాల్యం కనుగొనండి.

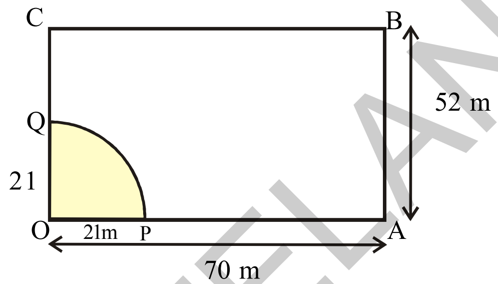
(ii) నాలుగు వృత్తవ్యాసార్థములు సమానము మరియు ప్రతి వృత్తము మరో రెండు వృత్తములను బాహ్యంగా స్పృశించుకొంటూ ఉంటే వృత్త కేంద్రములు శీర్షములుగా ఒక చతురస్రమును ఏర్పాటు చేస్తే, ఆ చతురస్ర భుజము 24 సెం.మీ. అయిన ఆ వృత్తముల మధ్యప్రాంతమును షేడ్‌చేస్తే, షేడ్ చేయవలసిన ప్రాంత వైశాల్యము ఎంత?

9. In adjacent figure ABCD, is a trapezium and AB||CD and $\angle BCD = 90^0$, quarter circle is removed. Given AB=BC=3.5 cm and DE = 2 cm. Calculate the area of the remaining portion.

(Take π to be $\frac{22}{7}$)



10. A horse is placed for grazing inside a rectangular field 70 m by 52 m and is tethered to one corner by a rope 21 m long. How much area can it graze?



What we have discussed

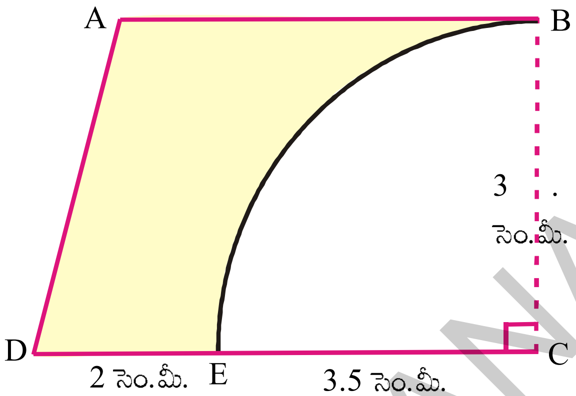
Area of a trapezium = $\frac{1}{2}$ (Sum of the lengths of parallel sides) × (Distance between them)

- Area of a quadrilateral = $\frac{1}{2}$ × length of a diagonal × Sum of the lengths of the perpendiculars from the remaining two vertices on the diagonal)
- Area of a rhombus = Half of the product of diagonals.
- Area of a circle = πr^2 where 'r' is the radius of the circle.
- Area of a circular path (or) Area of a Ring = $\pi(R^2 - r^2)$ or $\pi(R + r)(R - r)$ where R, r are radii of outer circle and inner circle respectively.
- Area of a sector = $\frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$ where x° is the angle subtended by the arc of the sector at the center of the circle and r is radius of the circle.

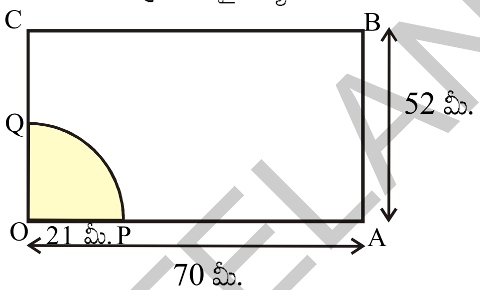
$A = \frac{lr}{2}$. Where l - length of the arc, r - radius of the circle

Y6Y8A5

9. ప్రక్క పటములో ABCD ఒక సమలంబ చతుర్భుజం $AB||CD$ మరియు $\angle BCD = 90^0$ మరియు పావు భాగము వృత్తము తొలగించబడినది. AB = BC = 3.5 సెం.మీ. మరియు DE = 2 సెం.మీ. అయిన మిగిలిన ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి)



10. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలములో ఒక గుర్రం కట్టబడి ఉన్నది. దీర్ఘచతురస్రకొలతలు 70 మీ మరియు 52 మీ. కల్గియున్నది. దీర్ఘచతురస్రకార పొలములో ఒక మూలలో 21 మీ. పొడవు కల్గిన ఒక తాడుకి గుర్రము కట్టబడి యున్నది అయిన గుర్రము కదలగలిగే ప్రాంత వైశాల్యము కనుగొనుము.



మనం ఏమి చర్చించాం

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × (సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం)

- చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × కర్ణము పొడవు × కర్ణముపై గీయబడిన లంబముల పొడవుల మొత్తము
- సమచతుర్భుజ వైశాల్యం = కర్ణముల పొడవుల లబ్ధములో సగం
- వృత్త వైశాల్యం = πr^2 ఇచ్చట 'r' వృత్త వ్యాసార్థం
- కంకణాకార స్థల వైశాల్యం = $\pi(R^2 - r^2)$ లేదా $\pi(R + r)(R - r)$ ఇచ్చట R – బాహ్యవృత్త వ్యాసార్థం r – అంతర వృత్త వ్యాసార్థం.
- సెక్టరు వైశాల్యము $(A) = \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$ ఇచ్చట r– వృత్తవ్యాసార్థం x° – సెక్టరు వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం లేదా $A = \frac{lr}{2}$, ఇచ్చట l – సెక్టరు చాపము పొడవు, r– వృత్త వ్యాసార్థము

Y7L9F6

CHAPTER 10

Direct and Inverse Proportions

S1C2K3

10.0 Introduction

Let us consider the following situation, Gopi uses 4 cups of water to cook 2 cups of rice everyday. Oneday when some guests visited his house, he needed to cook 6 cups of rice. How many cups of water will he need to cook 6 cups of rice? Can you help him?

We come across many such situations in our day-to-day life, where we observe changes in one quantity brings change in other quantity. For example,

(i) What happens to the quantity of mid day meal needed if more number of students are enrolled in your school? More quantity of mid day meal is required.

(ii) If we deposit more money in a bank, what can you say about the interest earned? Definitely the interest earned also will be more.

(iii) What happens to the total cost, if the number of articles purchased decreases? Obviously the total cost also decreases.

(iv) What is the weight of 20 tea packets, if the weight of 40 tea packets is 1.6 kg? Clearly the weight of 20 tea packets is less.

In the above examples, we observe that variation in one quantity leads to variation in the other quantity.

Do This

Write five more such situations where change in one quantity leads to change in another quantity.

How do we find out the quantity of water needed by Gopi? To answer this question, now we will discuss some variations.

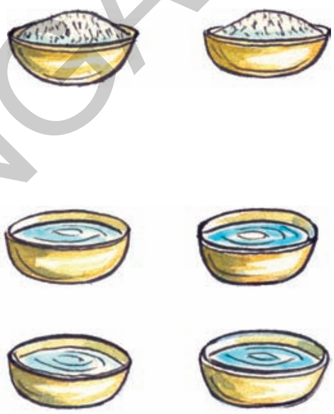
అధ్యాయం

10

అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు

S1Z3Q4

10.0 పరిచయం



గోపి అన్నము వండటానికి ప్రతి దినము 2 కప్పుల బియ్యానికి 4 కప్పుల నీటిని తీసుకొంటాడు. ఒకరోజు అతని యింటి బంధువులు రావడం వల్ల 6 కప్పుల బియ్యం వండవలసి వచ్చింది. ఇలా 6 కప్పుల బియ్యం వండడానికి అతను ఎన్ని కప్పుల నీరు తీసుకోవాలి?

మన దైనందిన జీవితంలో ఇలా అనేక సందర్భాలలో ఒక రాశిలోని మార్పు, వేరొక రాశిలో కూడా మార్పు తీసుకురావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. ఉదాహరణకు

(i) మీ పాఠశాలలో నమోదు అయిన విద్యార్థుల సంఖ్య పెరిగినపుడు మధ్యాహ్నభోజనానికి కావలసిన ఆహార పరిమాణంలో ఏరకమైన మార్పు గమనిస్తావు? మధ్యాహ్నభోజనానికి కావలసిన ఆహార పరిమాణం పెరుగుతుంది. కదా!

(ii) బ్యాంక్‌లో మీరు మరింత సొమ్ము డిపాజిట్ చేసిన, ఆ సొమ్ముపై వచ్చే వడ్డీ గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఆ సొమ్ముపై వచ్చే వడ్డీ కూడా పెరుగుతుంది. కదా!

(iii) మీరు కొన్న వస్తువుల సంఖ్య తగ్గినపుడు వాటి మొత్తం వెల ఏ రకంగా మారుతుంది? ఖచ్చితంగా ఆ వస్తువుల వెల కూడా తగ్గుతుంది కదూ!

(iv) 40 టీ ప్యాకెట్ల బరువు 1.6 కి.గ్రా. అయిన 20 టీ ప్యాకెట్ల బరువు ఎంత? ఖచ్చితంగా 20 టీ ప్యాకెట్ల బరువు తక్కువే.

పై ఉదాహరణలలో, ఒక రాశిలోని మార్పు వలన వేరొక రాశిలో కూడా మార్పు రావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

ఇవి చేయండి

ఒక రాశిలోని మార్పు వలన వేరొక రాశిలో కూడా మార్పు వచ్చే ఐదు సందర్భాలను వ్రాయండి.

గోపికి కావలసిన నీటి పరిమాణాన్ని ఎలా కనుగొంటాము? దీనికి జవాబు చెప్పడానికి మనం కొన్ని మార్పులలోని రకాలను నేర్చుకుందాం.

10.1 Direct Proportion

On the occasion of Vanamahotsavam, Head of Eco team in a school decided to take up plantation of saplings. Number of Eco club members of each class is furnished here.

Class	VI	VII	VIII	IX	X
Number of Eco students	5	7	10	12	15

Each student has to plant two saplings. Find the number of saplings needed for plantation for each class.

Class	VI	VII	VIII	IX	X
Number of Eco students	5	7	10	12	15
Number of saplings required	10	14	20	24	30

What can you say regarding the number of saplings required? What kind of a change do you find in the number of saplings required and the number of students? Either both increase or decrease.

$$\frac{\text{Number of saplings required}}{\text{Number of students}} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10} = \ldots\ldots = \frac{2}{1} = 2$$ which is a constant and is called constant of proportion.

As the ratio is same, we call this variation as direct proportion.

If x and y are any two quantities such that both of them increase or decrease together and $\frac{x}{y}$ remains constant (say k), then we say that x and y are in direct proportion. This can be written as $x \propto y$ and read as x is directly proportional to y.

$\therefore \frac{x}{y} = \text{k} \Rightarrow x = ky$ where k is constant of proportion.

If y_1 and y_2 are the values of y corresponding to the values of x_1 and x_2 of x respectively, then $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

10.1 అనులోమ పాతము

వన మహోత్సవం సందర్భంగా ఒక పాఠశాలలోని పర్యావరణ పరిరక్షణ కమిటీ అధ్యక్షుడు, ఆ పాఠశాలో మొక్కలు నాటాలని నిశ్చయించుకున్నాడు. ఆ పాఠశాలలోని పర్యావరణ కమిటీలో ప్రతీ తరగతి నుండి వున్న విద్యార్థుల సంఖ్య క్రింద వ్రాయబడింది.

తరగతి	VI	VII	VIII	IX	X
పర్యావరణ కమిటీలో విద్యార్థుల సంఖ్య	5	7	10	12	15

ప్రతీ విద్యార్థి రెండు మొక్కలను నాటాలి. అయిన ప్రతీ తరగతికి కావలసిన మొక్కల సంఖ్యను కనుగొనండి.

తరగతి	VI	VII	VIII	IX	X
పర్యావరణ కమిటీలో విద్యార్థుల సంఖ్య	5	7	10	12	15
కావలసిన మొక్కల సంఖ్య	10	14	20	24	30

కావలసిన మొక్కల సంఖ్య గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? విద్యార్థుల సంఖ్యలోను, కావలసిన మొక్కల సంఖ్యలోను ఏరకమైన మార్పుని మీరు కనుగొన్నారు? రెండూ పెరుగుతున్నాయి లేదా తగ్గుతున్నాయి.

$\dfrac{\text{కావలససిన మొక్కల సంఖ్య}}{\text{విద్యార్థుల సంఖ్య}} = \dfrac{10}{5} = \dfrac{14}{7} = \dfrac{20}{10} = \ldots\ldots = \dfrac{2}{1} = 2$ ఇది ఎప్పుడూ ఒక స్థిరరాశి. దీనినే మనం అనుపాత స్థిరాంకం అంటారు.

స్థిర నిష్పత్తి వుంది కనుక ఇటువంటి మార్పునే మనం "అనులోమానుపాతం" అంటాము.

x, y అనే రెండు రాశులు రెండూ పెరుగుతూ లే రెండూ తగ్గుతూ వుండి $\dfrac{x}{y}$ విలువ స్థిరాంకం వుంటే (k అనుకొనుము) ఆ రెండు రాశులు x, y లు అనులోమానుపాతంలో వున్నాయి అంటాము. దీనిని మనం $x \propto y$ అని వ్రాస్తాము మరియు x అనే రాశి y అనే రాశికి అనులోమానుపాతంలో వుంది అని చదువుతాము.

$\therefore \dfrac{x}{y} = \mathrm{k} \Rightarrow x = ky$ దీనిలో k అనేది అనుపాత స్థిరాంకం

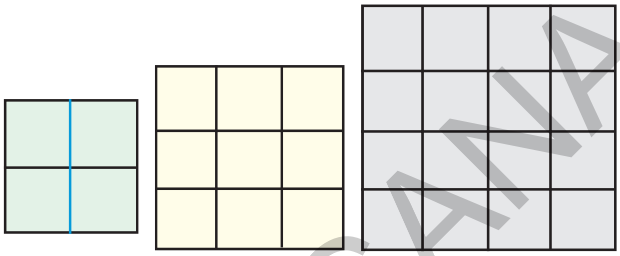
x యొక్క విలువ x_1, x_2 కు అనుగుణంగా y యొక్క విలువలు వరుసగా y_1, y_2 అయితే $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$

Do These

1. 1. Write three situations from your daily life in which you see direct proportion.

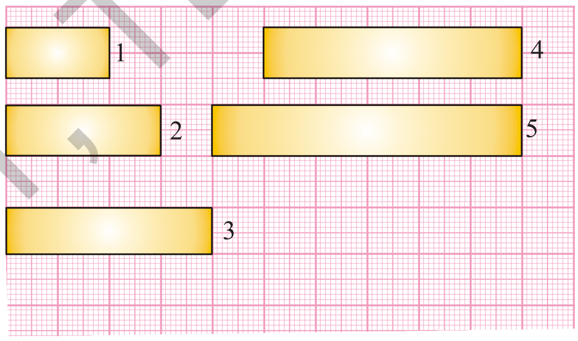
2. Let us consider different squares of sides 2, 3, 4 and 5cm, Find the areas of the squares and fill the table.

Side in cm	Area in cm^2
2	
3	
4	
5	



What do you observe? Do you find any change in the area of the square with a change in its side? Further, find the ratio of area of a square to the length of its side. Is the ratio same? Obviously not! This variation is not a direct proportion.

3. The following are rectagles of equal breadth on a graph paper. Find the area for each rectangle and fill in the table.



Rectangle	1	2	3	4	5
Length (cm)					
Area (cm^2)					

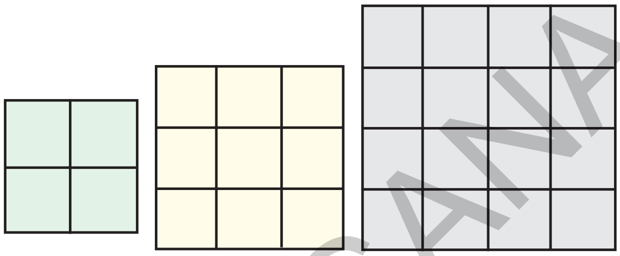
Is the area directly proportional to length?

4.. Take a graph paper make same rectangles of same length and different width. Find the area for each. What can you conclude about the breadth and area?

ఇవి చేయండి

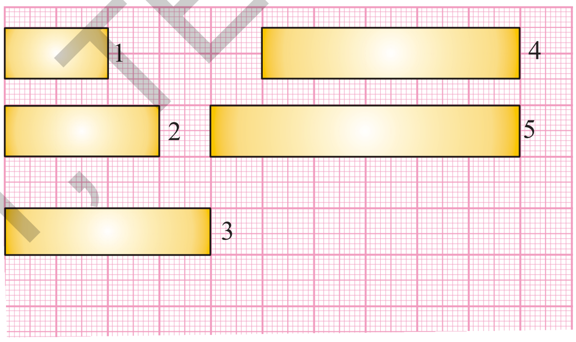
1. మీరు మీ నిజజీవితంలో గమనించిన మూడు అనులోమానుపాత సందర్భాలను రాయండి.
2. భుజముల పొడవులు 2 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., మరియు 5 సెం.మీ., గల చతురస్రాలను తీసుకొని వాటి వైశాల్యాలను లెక్కించి క్రింది పట్టికను నింపండి.

భుజం పొడవు (సెం.మీ.లలో)	వైశాల్యము (చ.సెం.మీ.లలో)
2	
3	
4	
5	



మీరు ఏమి గమనిస్తారు ? చతురస్రభుజము కొలత మారితే చతురస్ర వైశాల్యంలో ఏమైనా మార్పు వచ్చినదా? ఖచ్చితంగా వస్తుంది కదా! ఇంకా దాని వైశాల్యానికి, భుజము పొడవుకి గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి. ఈ నిష్పత్తి సమానంగా వుందా? లేదు కదా. కాబట్టి ఈ మార్పు అనులోమానుపాతం కాదు.

3. ఇక్కడ మీకు గ్రాఫ్ కాగితంపై ఒకే వెడల్పు కలిగిన కొన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలు యివ్వబడ్డాయి. ప్రతీ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుగొని క్రింది పట్టికను నింపండి.



దీర్ఘచతురస్రము	1	2	3	4	5
పొడవు (సెం.మీ.)					
వైశాల్యం (చ.సెం.మీ.)					

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము పొడవుకు అనులోమానుపాతంలో వుందా?

4. ఒకగ్రాఫ్ కాగితంపై ఒకే పొడవు వేరువేరు వెడల్పులు గల దీర్ఘచతురస్రాలను గీయండి. ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రము వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. వాటి వైశాల్యాలు మరియు వెడల్పుల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలుగుతారు?

Example1: If the cost of 65 tea-packets of same size is ₹ 2600, what is the cost of 75 such packets?

Solution: We know if the number of tea packets purchased increases then the cost also increases. Therefore, cost of tea-packets directly varies with the number of teapackets.

No. of tea packets (x)	65	75
Cost (y)	2600	?

So $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ Here $x_1 = 65$ $y_1 = 2600$ $x_2 = 75$ $y_2 = ?$

by substituting; $\frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} =$ ₹ 3000

So cost of 75 such packets is ₹ 3000.

Example 2: Following are the car parking charges near a railway station

	Number of Hours (x)	Parking Charge (y)
upto	4 hours	₹ 60
	8 hours	₹ 100
	12 hours	₹ 140
	24 hours	₹ 180

Check if the parking charges and parking hours are in direct proportion.

Solution: We can observe that both values are gradually increasing.

Are they in direct proportion? What is the value of $\frac{x}{y}$?

If it is a constant, then they are in direct proportion. Otherwise they are not in direct proportion. Let‘s check in this case.

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

You can easily observe that all these ratios are not equal. So they are not in direct proportion.

Example 3: A pole of 8 m height casts a 10m long shadow. Find the height of the tree that casts a 40 m long shadow under similar conditions.

ఉదాహరణ 1: ఒకే పరిమాణంలో గల 65 టీ ప్యాకెట్ల వెల ₹ 2600 అయిన అదే పరిమాణం గల అటువంటి 75 టీ ప్యాకెట్ల వెల ఎంత?

సాధన : టీ ప్యాకెట్ల సంఖ్య పెరిగిన వాటి ధర కూడా పెరుగుతుందని మనకు తెలుసును. కావున టీ ప్యాకెట్ల ధర వాటి సంఖ్యతో అనులోమానుపాతంలో వుంటుంది.

టీ ప్యాకెట్ల సంఖ్య (x)	65	75
వెల (y)	2600	?

అందువలన $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 65$ $y_1 = 2600$ $x_2 = 75$ $y_2 = ?$

ప్రతిక్షేపించగా $\frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} =$ ₹ 3000

కావున అటువంటి 25 టీ ప్యాకెట్ల ధర ₹ 3000.

ఉదాహరణ 2 : ఒక రైల్వేస్టేషన్ వద్ద కారు పార్కింగ్ ధరలు యీ క్రింది విధంగా వున్నాయి.

పార్కింగ్ కాలము (x)	పార్కింగ్ రుసుము (y)
4 గంటల వరకు	₹ 60
8 గంటల వరకు	₹ 100
12 గంటల వరకు	₹ 140
24 గంటల వరకు	₹ 180

పార్కింగ్ ధరలు మరియు పార్కింగ్ చేయబడిన సమయము అనులోమానుపాతంలో వున్నాయో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : ఇక్కడ రెండు రాశుల విలువలు క్రమంగా పెరగడాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

అయితే అవి అనులోమానుపాతంలో వున్నాయా? $\frac{x}{y}$ విలువ ?

ఒకవేళ $\frac{x}{y}$ విలువ స్థిరాంకము అయితే ఇవి అనులోమానుపాతంలో వున్నట్లు. అలా కానిచో అవి అనులోమానుపాతంలో లేనట్లు. ప్రతి సందర్భంలో పరిశీలిద్దాం.

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

ఈ నిష్పత్తులన్నీ సమానం కాదని మీరు సులభంగా గ్రహించగలరు. కావున యీ రెండు రాశులు అనులోమానుపాతంలో లేవు.

ఉదాహరణ 3: 8 మీటర్ల ఎత్తుగల ఒక స్తంభం 10 మీటర్ల పొడవుగల నీడను ఏర్పరచినది. అదే సమయంలో అవే పరిస్థితుల వద్ద ఒక చెట్టు 40 మీటర్ల పొడవుగల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ చెట్టు ఎత్తును కనుగొనుము.

Solution: Length of a shadow directly varies to the height of the pole.

So $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ Here $x_1 = 8$m $y_1 = 10$m $x_2 = ?$ and $y_2 = 40$m

Substitute $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$ m

So height of the tree is 32 m.

Example 4: If a pipe can fill a tank of capacity 50 l in 5 hours. Then how long will it take to fill a tank of capacity 75l.

Solution: Volume of water in a tank $\propto$ time required to fill it.

So here $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ Here $x_1 = 50\ l$ $y_1 = 5$hr $x_2 = 75\ l$ and $y_2 = ?$

$$\frac{50}{5} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{\cancel{375}^{15}}{\cancel{50}_{2}} = 7\frac{1}{2}\text{hr}$$

Time required to fill a tank of capacity 75 l is $7\frac{1}{2}$ hr

Example 5: If the cost of 20m of a cloth is ₹ 1600, then what will be the cost of 24.5 m of that cloth.

Solution: Cost directly varies with the length of cloth.

So $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ where $x_1 = 20$ m $y_1 =$ ₹ 1600, $x_2 = 24.5$ m and $y_2 = ?$

By substituting; $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} = 1960$

Cost of 24.5 m of cloth is ₹ 1960.

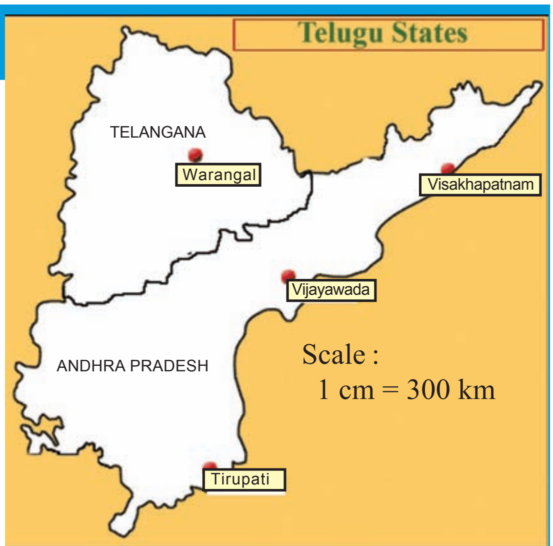
Do This

Measure the distance in the given map; and by using that calculate actual distance between (i) Vijayawada and Vishakapattanum, (ii) Tirupati and Warangal (scale is given). Scale shows how the lengths between two cities are reduced in drawing

Scale : 1 cm = 300 km

Converting the scale to ratio we get

1 cm : 30000000 cm.



సాధన: స్థంభము నీడ పొడవు, స్థంభము ఎత్తునకు అనులోమానుపాతంలో వున్నది.

కావున $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 8$ మీ, $y_1 = 10$ మీ, $x_2 = ?$ మరియు $y_2 = 40$ మీ.

ప్రతిక్షేపించగా $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$ మీ.

కావున ఆ చెట్టు ఎత్తు 32 మీ.

ఉదాహరణ 4: ఒక కుళాయి 50 లీటర్ల సామర్థ్యము గల ఒక ట్యాంకును 5 గంటలలో నింపిన, 75 లీటర్ల సామర్థ్యము గల వేరొక ట్యాంకును నింపుటకు ఎంతకాలము పట్టును ?

సాధన: ట్యాంక్‌లోని నీటి ఘనపరిమాణం, దానిని నింపుటకు పట్టుకాలం అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

కావున $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 50$ లీటర్లు $y_1 = 5$ గం. $x_2 = 75$ గం., $y_2 = ?$

$$\frac{50}{5} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{\cancel{375}^{15}}{\cancel{50}_{2}} = 7\frac{1}{2} \text{ గం.}$$

కావున 75 లీ. సామర్థ్యము గల ట్యాంక్‌ను నింపుటకు $7\frac{1}{2}$ గంటల కాలం పట్టును

ఉదాహరణ 5: 20 మీటర్ల బట్ట ఖరీదు ₹ 1600. అయిన అదే బట్ట 24.5 మీటర్ల ఖరీదు ఎంత?

సాధన: బట్ట ఖరీదు మరియు బట్ట పొడవులు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

కావున $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ఇక్కడ $x_1 = 20$ మీ. $y_1 =$ ₹ 1600, $x_2 = 24.5$ మీ. మరియు $y_2 = ?$

ప్రతిక్షేపించగా $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} = 1960$

24.5 మీటర్ల బట్ట ఖరీదు ₹ 1960.

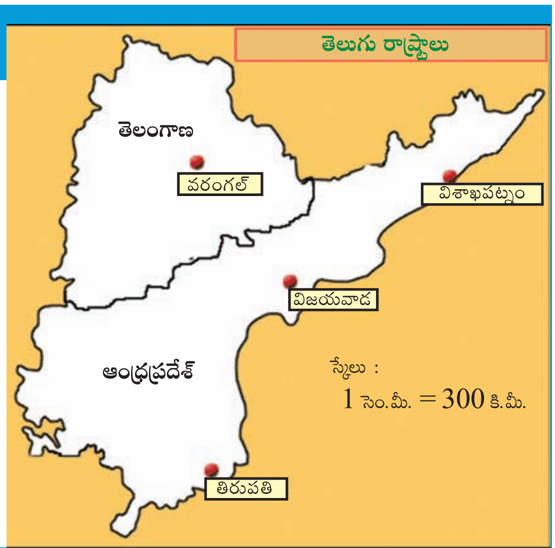
ఇవి చేయండి

ఇచ్చిన మ్యాపులోని దూరాలను కొలిచి, దాని సహాయంతో (i) విజయవాడ మరియు విశాఖపట్నం (ii) తిరుపతి మరియు వరంగల్‌ల మధ్య గల నిజదూరాలను కనుగొనండి (స్కేలు ఇవ్వబడింది). ఇచ్చిన 'స్కేలు' రెండు పట్టణాల దూరం కనిష్ఠ రూపంలో గీయబడింది.

స్కేలు; : 1 సెం.మీ. = 300 కి.మీ.

స్కేలును నుండి నిష్పత్తికి మార్పు చేయగా

1సెం.మీ. : 30000000 సెం.మీ.



Exercise - 10.1

1. The cost of 5 meters of a particular quality of cloth is ₹ 210. Find the cost of (i) 2m (ii) 4m (iii) 10m (iv) 13m of cloth of the same quality.

2. Fill the table.

No. of Apples	1	4	7	12	20
Cost of Apples (in ₹)	8	…….	……..	……..	………

3. 48 bags of paddy costs ₹ 16, 800 then find the cost of 36 bags of paddy.

4. Monthly average expenditure of a family with 4 members is ₹ 2,800. Find the monthly average expenditure of a family with only 3 members.

5. In a ship of length 28 m, height of its mast is 12 m. If the height of the mast in its model is 9 cm what is the length of the model ship?

6. A vertical pole of 5.6 m height casts a shadow 3.2 m long. At the same time find (i) the length of the shadow cast by another pole 10.5 m high (ii) the height of a pole which casts a shadow 5m long.

7. A loaded truck travels 14 km in 25 minutes. If the speed remains the same, how far can it travel in 5 hours?

8. If the weight of 12 sheets of thick paper is 40 grams, how many sheets of the same paper would weigh $16\frac{2}{3}$ kilograms?

9. A train moves at a constant speed of 75 km/hr.
(i) How far will it travel in 20 minutes?
(ii) Find the time required to cover a distance of 250 km.

10. The design of a microchip has the scale 40:1. The length of the design is 18cm, find the actual length of the micro chip?

11. The average age of doctors and lawyers together is 40. If the doctors average age is 35 and the lawyers average age is 50, find the ratio of the number of doctors to the number of lawyers.

Project work

1. Take a map of India. Note the scale used there. Measure the map distance between any two cities using a scale. Calculate the actual distance between them.

2. The following ingredients are required to make halwa for 5 persons: Suji / Rawa=250 g, Sugar = 300 g, Ghee = 200 g, Water = 500 ml. Using the concept of proportion, estimate the changes in the quantity of ingredients, to prepare halwa for your class.

అభ్యాసము - 10.1

1. ఒక ప్రత్యేక నాణ్యత గల బట్ట 5 మీటర్ల ఖరీదు ₹ 210 అయిన, (i) 2 మీ. (ii) 4 మీ. (iii) 10 మీ. (iv) 13 మీటర్లు పొడవు కల అదే నాణ్యత కలిగియున్న బట్ట ఖరీదు ఎంతో కనుగొనండి.
2. ఈ క్రింది పట్టకను నింపండి.

యాపిల్ పండ్ల సంఖ్య	1	4	7	12	20
వాటి వెల (₹లలో)	8	....	....	....	....

3. 48 ధాన్యం బస్తాల ఖరీదు ₹ 16, 800 అయిన 36 ధాన్యం బస్తాల ఖరీదు ఎంతో కనుగొనండి.
4. నలుగురు సభ్యులు కల ఒక కుటుంబానికి నెలకు అయ్యే సగటు ఖర్చు ₹ 2,800. ముగ్గురు సభ్యులు గల కుటుంబానికి నెలకు అయ్యే సగటు ఖర్చు ఎంతో కనుగొనండి.
5. 28 మీటర్ల పొడవు గల ఒక ఓడ స్థంభము ఎత్తు 12 మీ. ఆ ఓడ నమూనా తయారీలో ఓడ స్థంభము ఎత్తు 9 సెం.మీ. అయిన ఆ నమూనా ఓడ పొడవు ఎంత?
6. 5.6 మీ ఎత్తు గల ఒక స్తంభము ఏర్పరచు నీడ పొడవు 3.2 మీ. అదే సమయంలో (i) 10.5 మీ ఎత్తు గల మరొక స్తంభము యొక్క నీడపొడవు ఎంత? (ii) 5 మీ నీడను ఏర్పరచు స్తంభము యొక్క పొడవు ఎంత?
7. సరుకులతో నింపబడిన ఒక లారీ 14 కి.మీ దూరము ప్రయాణించుటకు పట్టుకాలం 25 నిమిషములు. ఆ లారీ అదే వేగముతో ప్రయాణించుచున్న 5 గంటల కాలములో అది ప్రయాణించు దూరమెంత?
8. 12 దళసరి కాగితముల బరువు 40 గ్రాములు అయిన అటువంటి ఎన్ని దళసరి కాగితముల బరువు $16\frac{2}{3}$ కిలోగ్రాములగును?
9. ఒక రైలు గంటకు 75 కి.మీ. సమవేగంతో ప్రయాణించుచున్నది.
   (i) అయిన అది 20 నిమిషాలలో ఎంతదూరము ప్రయాణించును?
   (ii) 250 కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించుటకు ఆ రైలుకు ఎంతకాలము పట్టును?
10. ఒక మైక్రోచిప్ పథకం(డిజైన్) యొక్క స్కేలు 40:1. గా వున్నది. నమూనాలో దాని పొడవు 18సెం.మీ. అయిన ఆ మైక్రోచిప్ యొక్క నిజమైన పొడవును కనుగొనండి.
11. డాక్టర్లు, లాయర్లు యొక్క సరాసరి వయస్సు '40'. డాక్టర్ల యొక్క సరాసరి వయస్సు 35 , లాయర్ల యొక్క సరాసరి వయస్సు '50' అయినచో డాక్టర్ల సంఖ్య, లాయర్ల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

ప్రాజెక్టు పని

1. భారతదేశపటాన్ని తీసుకొనుము. ఆ మ్యాపులో సూచించిన స్కేలును మీ నోట్ పుస్తకంలో రాయండి. ఏవైనా రెండు ప్రదేశాల మధ్యదూరాన్ని కొలవండి. దాని సహాయంతో ఆ రెండు ప్రదేశాల నిజదూరాన్ని కనుగొనండి.
2. 5 గురు వ్యక్తులకు హల్వా చేయడానికి కావలసిన పదార్థాలు. రవ్వ = 250 గ్రా., పంచదార = 300 గ్రా., నెయ్యి = 200 గ్రా., నీరు = 500 మి.లీ. అనుపాత భావనను వుపయోగించుకుంటూ, మీ క్లాసులోని విద్యార్థులందరికీ హల్వా చేయడానికి కావలసిన పదార్థాల పరిమాణాలను అంచనా వేయండి.

10.2 Inverse Proportion

A parcel company has certain number of parcels to deliver. If the company engages 36 persons, it takes 12 days. If there are only 18 persons, it will take 24 days to finish the task. Here we observe that as the number of persons is halved, the time taken is doubled. If the company engages 72 persons, will the time taken be halved?

Observe the following table.

$\div 2$ $\div 4$ $\times 2$ $\times 3$

No. of persons	36	18	9	72	108
Time taken	12	24	48	6	4

$\times 2$ $\times 4$ $\div 2$ $\div 3$

How many persons shall the company engage if it intends to deliver the parcels with in a day?

Two quantities change in such a manner that, if one quantity increases, the other quantity decreases in the same proportion and vice versa. This is called inverse proportion. In above example ,the number of persons engaged and number of days are inversely proportional to each other.

Symbolically, this is expressed as

$$\text{number of days required} \propto \frac{1}{\text{number of persons engaged}}$$

If x and y are in inverse proportion then $x \propto \frac{1}{y}$

$x = \frac{k}{y}$ where k is constant of proportionality.

$xy = \text{k}.$

> If y_1 and y_2 are the values of y corresponding to the values x_1 and x_2 of x respectively then $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), or $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

10.2 విలోమానుపాతము

ఒక పార్శిళ్ళు రవాణా చేసే సంస్థ వద్ద కొన్ని పార్శిళ్ళు రవాణాకు సిద్ధంగా వున్నాయి. ఆ సంస్థ 36 మంది వ్యక్తులను ఆ పనిలో నియమిస్తే 12 రోజులలో వాటిని రవాణా చేయగలదు. 18 మంది వ్యక్తులనే ఆ పనికి నియమిస్తే, ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు 24 రోజుల కాలం పట్టును. అనగా రోజుల సంఖ్య రెట్టింపు అయినది. ఆ సంస్థ 72 మంది వ్యక్తులను నియమిస్తే, రవాణాకు పట్టే కాలము సగము అవుతుందా?

క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

$\div 2$ $\div 4$ $\times 2$ $\times 3$

వ్యక్తుల సంఖ్య	36	18	9	72	108
పట్టేకాలం	12	24	48	6	4

$\times 2$ $\times 4$ $\div 2$ $\div 3$

ఒకవేళ ఆ సంస్థ ఒకేరోజులో అన్ని పార్శిళ్ళను రవాణా చేయాలంటే ఎంతమంది వ్యక్తులను నియమించాలి?

రెండు రాశులలోని మార్పు, ఒకరాశిలో పెరుగుదల (తగ్గుదల) రెండవరాశిలో తగ్గుదల (పెరుగుదల) వుండి అవి అనుపాతంలో వుంటే ఆ రాశులు విలోమానుపాతంలో వున్నాయి అంటాము. పై ఉదాహరణలో కావలసిన వ్యక్తుల సంఖ్య, రవాణాకు పట్టే రోజుల సంఖ్య ఒకదానికొకటి విలోమానుపాతంలో వున్నాయి.

దీనిని మనం రవాణాకు పట్టే రోజు సంఖ్య $\propto \dfrac{1}{\text{కావలసిన వ్యక్తుల సంఖ్య}}$ అని వ్రాస్తాము.

x, y లు విలోమానుపాతంలో వుంటే $x \propto \dfrac{1}{y}$

$x = \dfrac{k}{y}$ ఇచ్చట k అనుపాత స్థిరాంకము

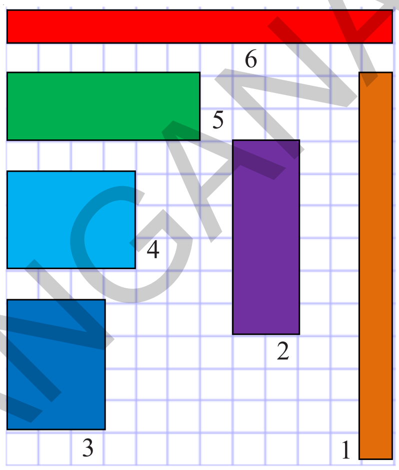
$xy = \text{k}.$

> $x_1,\ x_2$ లకు అనుగుణంగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా y_1, y_2 అయిన $x_1y_1 = x_2y_2\ (=\text{k})$ (లేదా) $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$.

Do These

1. Write three situations from your day-to-day life where you see inverse proportion.
2. To make rectangles of different dimensions on a squared paper using 12 adjacent squares.Calculate length and breadth of each of the rectangles so formed. Note down the values in the following table.

Rectangle Number	Length (in cm)	Breadth (in cm)	Area (sq.cm)
1	l_1......	b_1......	....
2	l_2......	b_2......	....
3	l_3......	b_3......	....
4	l_4......	b_4......	....
5	l_5......	b_5......	....
6	l_6......	b_6......	....



What do you observe? As length increases, breadth decreases and vice-versa (for constant area).

In each case, are length and breadth inversely proportional to each other?

Example 6: If 36 workers can build a wall in 12 days, how many days will 16 workers take to build the same wall ? (assuming the number of working hours per day is constant)

Solution: If the number of workers decreases, the time taken to build the wall increases in the same proportion. Clearly, number of workers varies inversely to the number of days.

So here $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ where $x_1 = 36$ workers

$y_1 = 12$days $\quad x_2 = 16$ workers

and $y_2 = (?)$ days

No. of workers	No. of days
36	12
16	y_2

Substitute, $\frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27$ days.

Therefore 16 workers will build the same wall in 27 days.

Since the number of workers are decreasing

$36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$

So the number of days will increase in the same proportion.

i.e. $x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$

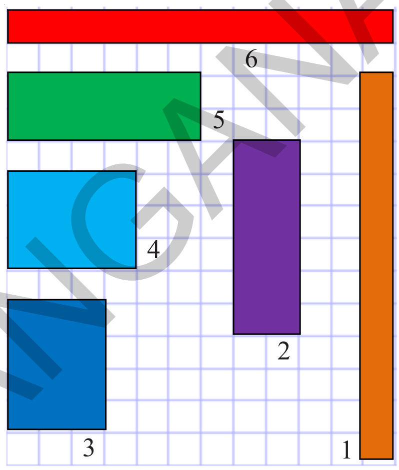
$= 27$ days

ఇవి చేయండి

1. మీరు మీ నిజజీవితంలో గమనించిన మూడు విలోమానుపాత సందర్భాలను రాయండి.

2. గళ్ళ కాగితంపై ప్రక్క ప్రక్క నుండే 12 చదరాలను వుపయోగించుకొంటూ వివిధ కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాలను గీయాలి. ఇలా ఏర్పడిన ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు వెడల్పులను కనుగొని, ఆ వచ్చిన విలువలను క్రింది పట్టికలో రాయండి.

దీర్ఘచతురస్రం సంఖ్య	పొడవు (సెం.మీలలో)	వెడల్పు (సెం.మీలలో)	వైశాల్యము (చసెం.మీలలో)
1	l	b	....
2	l	b	....
3	l	b	....
4	l	b	....
5	l	b	....
6	l	b	....



మీరు ఏమి గమనిస్తారు? పొడవు పెరిగిన, వెడల్పు తగ్గును లేదా వెడల్పు పెరిగిన, పొడవు తగ్గును (వైశాల్యము స్థిరాంకముగా వున్నపుడు)

ప్రతి సందర్భంలో పొడవు, వెడల్పులు పరస్పరం విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయా?

ఉదాహరణ 6: 36 మంది కూలీలు ఒక గోడను 12 రోజులలో కట్టగలరు. అయిన అదేగోడను 16 మంది కూలీలు ఎన్నిరోజులలో కట్టగలరు?

సాధన: కూలీల సంఖ్య తగ్గిన, కావలసిన రోజుల సంఖ్య విలోమానుపాతంలో వున్నాయి.

కావున $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ ఇక్కడ $x_1 = 36$ మంది కూలీలు $y_1 = 12$ రోజులు $x_2 = 16$ మంది కూలీలు మరియు $y_2 = ?$ రోజులు

కూలీల సంఖ్య	కావలసిన రోజుల సంఖ్య
36	12
16	y_2

ప్రతిక్షేపించగా, $\frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27$ రోజులు.

కావున 16 మంది కూలీలు ఆ గోడను 27 రోజులలో కట్టగలరు.

కూలీల సంఖ్య తగ్గుచున్నది కావున

$36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$

అయిన రోజుల సంఖ్య

$x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$

$= 27$ రోజులు

Think Discuss and Write

Can we say that every variation is a proportion?

A book consists of 100 pages. How do the number of pages read and the number of pages left over in the book vary?

No.of pages read (x)	10	20	30	50	70
No.of left over pages (y)	90	80	70	50	30

What happened to the number of left over pages, when completed pages are gradually increasing? Do they vary inversely? Explain.

Exercise - 10.2

Observe the following tables and find which pair of variables (x and y) are in inverse proportion

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

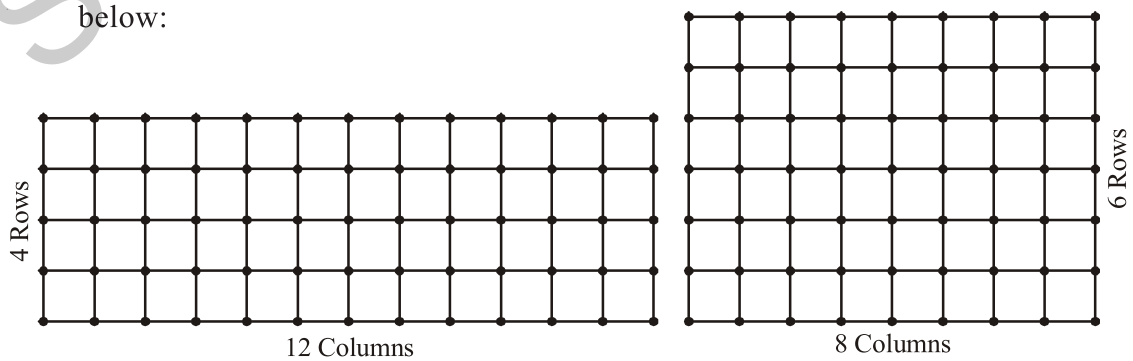
(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

2. A school wants to spend ₹ 6000 to purchase books. Using this data, fill the following table.

Price of each book (in ₹)	40	50		75	
Number of books that can be purchased	150		100		75

3. Take a squared paper and arrange 48 squares in different number of rows as shown below:



ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

ప్రతీ మార్పుని మనం అనుపాతంలో వుంది అని చెప్పగలమా?

ఒక పుస్తకంలో 100 పేజీలు కలవు. పుస్తకంలో మనము చదివిన పేజీల సంఖ్య, మిగిలిన పేజీల సంఖ్య ఏవిధంగా మారుతాయో గమనించండి.

చదివిన పేజీల సంఖ్య (x)	10	20	30	50	70
మిగిలిన పేజీల సంఖ్య (y)	90	80	70	50	30

మనం చదివిన పేజీల సంఖ్య క్రమంగా పెరుగుతూ వున్నపుడు మిగిలిన పేజీల సంఖ్యలోమార్పు ఏరకంగా వస్తోంది? ఆ రెండు రాశులు విలోమానుపాతంలో వుంటాయా? వివరించండి.

అభ్యాసము - 10.2

పట్టికను పరిశీలించండి. ఏ పట్టికలోని చరరాశులు (x మరియు y) లు విలోమానుపాతంలో వున్నాయో కనుగొనండి.

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

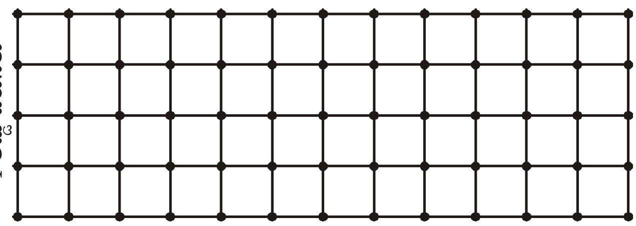
(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

2. ఒక పాఠశాల వారు పుస్తకాలను కొనడానికి ₹ 6000 ఖర్చుపెట్టదలిచినారు. ఈ సమాచారాన్ని వుపయోగించుకొంటూ క్రింది పట్టికను నింపండి.

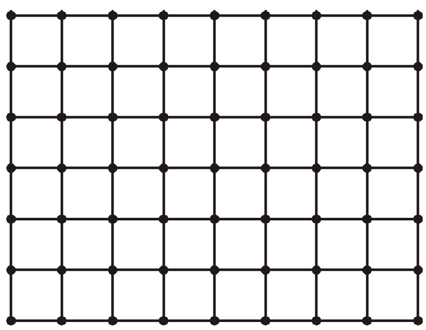
ప్రతీ పుస్తకము వెల (₹లలో)	40	50		75	
కొనగలిగిన పుస్తకాల సంఖ్య	150		100		75

3. ఒక గళ్ళకాగితాన్ని తీసుకోండి. 48 చదరపు గదులను క్రింద చూపినట్లు వివిధ వరుసలలో అమర్చండి.



4 అడ్డు వరుసలు

12 నిలువు వరుసలు



6 అడ్డు వరుసలు

8 నిలువు వరుసలు

Number of Rows (R)	2	3	4	6	8
Number of Columns (C)	---	---	12	8	---

What do you observe? As R increases, C decreases

(i) Is $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$?

(ii) Is $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$?

(iii) Is R and C inversely proportional to each other?

(iv) Do this activity with 36 squares.

Clasroom Project

Prepare a table with number of students present and number of students absent in your class for a week.

Discuss with your friends and write your observations in your note book.

Day of the week	Number of students present (x)	Number of students absent (y)	$x : y$
Monday			
Tuesday			
Wednesday			
Thursday			
Friday			
Saturday			

Now let us solve some examples.

Example 7: Ration is available for 100 students in a hostel for 40 days. How long will it last, if 20 more students join in the hostel after 4 days?

Solution: As the number of students increases the ration will last for less number of days in the same proportions. The no.of students and no.of days are in inverse proportion.

	No. of days ration available	No. of students
	40 ↓	↑ 100
After 4 days	36	100
	x	120

Now the question is; if the ration is available for 36 days for 100 students. How long will it last for 120 students.

అడ్డ వరుసల సంఖ్య (R)	2	3	4	6	8
నిలువు వరుసల సంఖ్య (C)	---	---	12	8	---

మీరు ఏమి గమనిస్తారు? R విలువ పెరిగితే, C విలువ పెరుగుతుంది.

(i) $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ అవుతుందా?

(ii) $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ అవుతుందా?

(iii) R మరియు C లు ఒకదానికొకటి విలోమానుపాతంలో వున్నాయా?

(iv) ఇదే కృత్యాన్ని గళ్ళకాగితంపై 36 చదరపు గడులను తీసుకొని చేయండి.

తరగతిగది ప్రాజెక్టు

ఒక వారం రోజుల పాటు మీ తరగతిలో పాఠశాలకు హాజరయ్యే మరియు హాజరు కాని వారి సంఖ్యను పట్టికలో పొందు పరుచుము.

మీ మిత్రులతో చర్చించి మీ పరిశీలనలను నోట్‌పుస్తకంలో రాయండి

వారంలోని రోజులు	హాజరైన విద్యార్థుల సంఖ్య (x)	హాజరుకాని విద్యార్థుల సంఖ్య (y)	$x:y$
సోమవారం			
మంగళవారం			
బుధవారం			
గురువారం			
శుక్రవారం			
శనివారం			

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 7: ఒక బాలుర వసతి గృహంలో 100 మంది విద్యార్థులకు 40 రోజులకు సరిపడు బియ్యము నిల్వ కలదు. ఆ వసతి గృహమునకు 4 రోజుల తరువాత అదనంగా 20 మంది విద్యార్థులు వచ్చిన ఆ బియ్యము ఎన్ని రోజుల వరకు సరిపోవును?

సాధన: విద్యార్థుల సంఖ్య పెరిగిన, బియ్యము నిల్వ సరిపోయే రోజుల సంఖ్య అదే అనుపాతములో తగ్గును. అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య సరిపోయే రోజుల సంఖ్య విలోమానుపాతములో వుండును.

	రోజుల సంఖ్య	విద్యార్థుల సంఖ్య
	40 ↓	↑ 100
4 రోజుల తరువాత	36	100
	x	120

నాలుగు రోజుల తరువాత 100 మంది విద్యార్థులకు సరిపడు బియ్యము 36 రోజులు వచ్చిన 120 మంది విద్యార్థులకు ఆ బిందువు ఎన్నిరోజులకు సరిపోవును?

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\,\cancel{0}} = 30\ days$$

Since the number of students are increasing

$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$

So the number of days will decrease in same proportion.

i.e. $36 \div x$

$= 36 \div \frac{120}{100}$

$\Rightarrow 36 \times \frac{100}{120} = 30$ days

Example 8: A car takes 4 hours to reach the destination by travelling at a speed of 60 km/h. How long will it take if the car travels at a speed of 80 km/h?

Solution: As speed increases, time taken decreases in same proportion. So the time taken varies inversely to the speed of the vehicle ,for the same distance.

method 1

Speed	Time
60	4
80	x

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$$60 \times 4 = 80 \times x$$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ hr.}$$

(or)

method 2

Speed	Time
60	4
80	y

$x \times$; $\div x$

$60 \times x = 80$ and $4 \div x = y$

$$x = \frac{80}{60}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3\ hr.$$

Example 9: 6 pumps are required to fill a tank in 1 hour 20 minutes. How long will it take if only 5 pumps of the same type are used?

Solution: Let the desired time to fill the tank be x minutes. Thus, we have the following table.

Number of pumps	6	5
Time (in minutes)	80	x

Lesser the number of pumps, more will be the time required by them to fill the tank.

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\,\cancel{0}} = 30 \text{ రోజులు}$$

విద్యార్థుల సంఖ్య పెరుగుతున్నది. కావున

$$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$$

కావున విద్యార్థుల సంఖ్య అదే అనుపాతములో తగ్గును.

అనగా $36 \div x$

$$= 36 \div \frac{120}{100}$$

$$\Rightarrow 36 \times \frac{100}{120} = 30 \text{ రోజులు}$$

ఉదాహరణ 8: ఒక కారు గంటకు 60 కి.మీ వేగముతో ప్రయాణించి గమ్యమును 4 గంటలలో చేరును. ఒకవేళ ఆ కారు గంటకు 80 కి.మీ వేగముతో ప్రయాణించిన, గమ్యమును చేరుటకు ఎంతకాలము పట్టును?

సాధన : వేగము పెరిగిన, కావలసిన కాలము అదే నిష్పత్తిలో తగ్గును. అనగా స్థిరదూరానికి, ప్రయాణానికి పట్టు కాలము ఆ వాహన వేగానికి విలోమానుపాతములో వుండును.

పద్ధతి 1

వేగము	కాలము
60 $\downarrow$	4 $\uparrow$
80	x

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$$60 \times 4 = 80 \times x$$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ గం.లు}$$

(లేదా)

పద్ధతి 2

వేగము	కాలము
$x \times$ (60	4) $\div x$
80	y

$60 \times x = 80$ and $4 \div x = y$

$$x = \frac{80}{60}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3 \text{ గం.లు}$$

ఉదాహరణ 9: ఒక ట్యాంకును నింపుటకు 6 కుళాయిలకు 1 గంట 20 నిమిషాల కాలము పట్టును. అవే కుళాయిలు 5 మాత్రమే వదిలిన ఆ ట్యాంకు ఎంతకాలములో నిండును?

సాధన : **5** కుళాయిలు ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలము ని నిమిషములు అనుకొనుము. వీటిని పట్టికలో వ్రాయగా

కుళాయిల సంఖ్య	6	5
సమయము (నిమిషములలో)	80	x

కుళాయిల సంఖ్య తగ్గిన, ట్యాంకు నిండుటకు పట్టు సమయము పెరుగును. కావున విలోమానుపాతము.

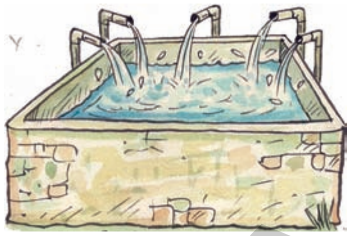
So, this is a case of inverse proportion.

Hence, $80 \times 6 = x \times 5$ $\quad [x_1 y_1 = x_2 y_2]$

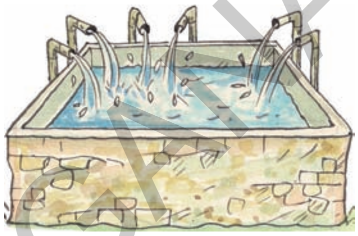
or $\quad \dfrac{80 \times 6}{5} = x$

or $\quad x = 96$ minutes.

Thus, time taken to fill the tank by 5 pumps is 96 minutes or 1 hour 36 minutes.



5 pipes in a tank



6 pipes in a tank

Exercise - 10.3

1. Siri has enough money to buy 5 kg of potatoes at the price of ₹ 8 per kg. How much can she buy for the same amount if the price is increased to ₹ 10 per kg?

2. A camp has food stock for 500 people for 70 days. If 200 more people join the camp, how long will the stock last?

3. 36 men can do a piece of work in 12 days. In how many days 9 men can do the same work?

4. A tank can be filled by 5 pipes in 80 minutes. How long will it take to fill the tank by 8 pipes of the same size?

5. A ship can cover a certain distance in 10 hours at a speed of 16 nautical miles per hour. By how much should its speed be increased so that it takes only 8 hours to cover the same distance? (1 nautical mile =1852 metres).

6. 5 pumps are required to fill a tank in $1\frac{1}{2}$ hours. How many pumps of the same type are used to fill the tank in half an hour.

7. If 15 workers can build a wall in 48 hours, how many workers will be required to do the same work in 30 hours?

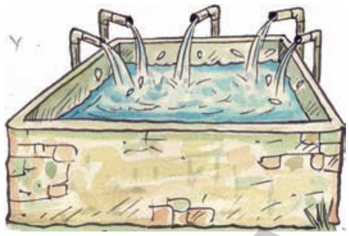
8. A School has 8 periods a day each of 45 minutes duration. How long would each period become ,if the school has 6 periods a day ? (assuming the number of school hours to be the same)

కావున, $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

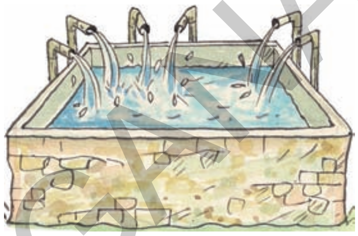
$$\frac{80 \times 6}{5} = x$$

లేదా $x = 96$ నిమిషములు

5 కుళాయిలు ఆ ట్యాంకును నింపుటకు పట్టుకాలము 96 నిమిషములు లేదా 1 గంట 36 నిమిషములు



5 కుళాయి నింపుతున్న తొట్టె



6 కుళాయి నింపుతున్న తొట్టె

అభ్యాసము - 10.3

1. సిరివద్ద, కిలో 8 రూపాయల చొప్పున 5 కిలోల బంగాళ దుంపలు కొనుటకు సరిపడ డబ్బులు కలవు. బంగాళా దుంపల వెల కిలో 10 రూపాయలకు పెరిగిన ఆమె వద్ద వున్న సొమ్ముతో ఎన్నికిలోలు కొనగలదు ?
2. ఒక శిబిరంలో 500 మంది వ్యక్తులకు 70 రోజులకు సరిపడు ఆహార ధాన్యాల నిల్వ కలదు. ఆ శిబిరంలో అదనంగా 200 మంది చేరిన ఆ ఆహారధాన్యాల నిల్వ ఎన్ని రోజుల వరకు సరిపోతుంది?
3. 36 గురు కూలీలు ఒక పనిని 12 రోజులలో చేయగలరు. అయిన అదే పనిని 9 గురు కూలీలు ఎన్ని రోజులలో చేయగలరు?
4. ఒకే సైజుగల 5 పైపులను ఉపయోగించి ఒక నీటి ట్యాంకును పూర్తి నింపడానికి 80 నిమిషాల సమయం పడుతుంది. అదే సైజుగలవి 8 పైపులను ఉపయోగించి ఆ నీటి టాంకును పూర్తిగా నింపడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది.
5. ఒక ఓడ గంటకు 16 నాటికల్ మైళ్ళ వేగముతో కొంత దూరమును 10 గంటలలో చేరగలదు. అదే దూరము 8 గంటలలో చేరవలెనన్న ఆ ఓడ ఎంత అధిక వేగముతో ప్రయాణము చేయాలి? (1 నాటికల్ మైల్ = 1852 మీటర్లు).
6. ఒక ట్యాంకును 5 కుళాయిలు $1\frac{1}{2}$ గంటల కాలములో నింపును. అదే ట్యాంకును అర్థగంటలో నింపవలెనన్న అటువంటి కుళాయిలు ఎన్ని కావలెను?
7. 15 మంది కూలీలు ఒక గోడను 48 గంటలలో కట్టగలరు. అదే గోడను 30 గంటలలోనే కట్టవలెనన్న ఎంతమంది కూలీలు కావలెను?
8. ఒక పాఠశాలలో 45 నిమిషములలో కాల వ్యవధితో 8 పీరియడ్లు కలవు. ఒక రోజులో 6 పీరియడ్లు మాత్రమే వుండవలెనన్న ఒక పీరియడ్‌కు కాల వ్యవధి ఎంత ఉండవలెను? (పాఠశాల పనివేళలలో మార్పులేదని భావించుము)

9. If z varies directly as x and inversely as y. Find the percentage increase in z due to an increase of 12% in x and a decrease of 20% in y.

10. If $x+1$ men will do the work in $x+1$ days, find the number of days that $(x+2)$ men can finish the same work.

11. Given a rectangle with a fixed perimeter of 24 meters, if we increase the length by 1m the width and area will vary accordingly. Use the following table of values to look at how the width and area vary as the length varies.

    What do you observe? Write your observations in your note books

Length(in cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Width(in cm)	11	10	....	....	....	....	....	......	.....
Area (in cm^2)	11	20	....	....	....	....	....	......	......

10.3 Compound Proportion

Some times change in one quantity depends upon the change in two or more quantities in some proportion. Then we equate the ratio of the first quantity to the compound ratio of the other two quantities.

(i) One quantity may be in direct proportion with the other two quantities.

(ii) One quantity may be in inverse proportion with the other two quantities

(iii) One quantity may be in direct proportion with the one of the two quantities and in inverse proportion with the remaining quantity.

Example 10: Consider the mess charges for 35 students for 24 days is ₹ 6300. How much will be the mess charges for 25 students for 18days.

Solution: Here, we have three quantities i.e mess charges, number of students and number of days.

Mess charges in ₹	Number of students	Number of days
6300	35	24
? (x)	25	18
$6300 : x$	$35{:}25 = 7{:}5$	$24{:}18 = 4{:}3$

Mess charges is directly proportional to number of students.

Mess charges $\propto$ number of students.

$6300 : x = 7{:}5$

9. z అనే రాశి x అనే రాశికి అనులోమానుపాతంలోను, y అనే రాశికి విలోమానుపాతంలోను వుంటుంది. x రాశిలో 12% పెరుగుదల, y రాశిలో 20% తరుగుదల z రాశిలో వచ్చే పెరుగుదల శాతమును కనుగొనుము.

10. $(x + 1)$ మంది పనివారు ఒక పనిని $(x + 1)$ రోజులలో చేయగలరు. అయిన అదే పనిని $(x + 2)$ మంది పనివారు ఎన్ని రోజులలో చేయగలరు?

11. ఒక దీర్ఘచతురస్రము చుట్టుకొలత 24 మీ. దాని చుట్టుకొలతను మార్పు చేయకుండా పొడవును 1మీ పెంచినపుడు, దాని వెడల్పు మరియు వైశాల్యములలో మార్పు వచ్చును. క్రింది పట్టికను నింపి ఆ విలువల ఆధారంగా, వెడల్పు, వైశాల్యములలో విలువలు పొడవు విలువ మార్పు మీద ఏ విధంగా ఆధారపడతాయో గమనించుము.
మీరు ఏమి గమనించారు? మీ పరిశీలనను నోట్ పుస్తకములో వ్రాయండి.

పొడవు (సెం.మీ.లలో)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
వెడల్పు (సెం.మీ.లలో)	11	10	...	...	...	...	...	...	...
వైశాల్యం (చ.సెం.మీ.లలో)	11	20	...	...	...	...	...	...	...

10.3 మిశ్రమానుపాతము

కొన్ని సందర్భాలలో ఒక రాశిలోని మార్పు, ఒకటి కంటే ఎక్కువ రాశులలో అనుపాతంలో వుండేటట్లు మార్పును కలిగించవచ్చును. అటువంటి సందర్భాలలో మనం మొదటి రాశి నిష్పత్తిని, మిగిలిన రెండు రాశులలో బహుళ నిష్పత్తికి సమానం చేస్తాము.

(i) ఒకరాశి, మిగిలిన రాశులతో అనులోమానుపాతంలో వుండవచ్చును.

(ii) ఒకరాశి, మిగిలిన రెండు రాశులతో విలోమానుపాతంలో వుండవచ్చును.

(iii) ఒకరాశి మిగిలిన రెండు రాశులలో ఒకదానితో అనులోమానుపాతంలోను రెండవ దానితో విలోమానుపాతంలోను వుండవచ్చును.

ఉదాహరణ 10: 35 మంది విద్యార్థులకు 24 రోజులకు భోజనాలకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 6300 అయిన 25 మంది విద్యార్థులకు 18 రోజులకు భోజనాలకు ఎంతఖర్చు అవుతుంది?

సాధన: ఇక్కడ మనకు మూడు రాశులు అనగా భోజన ఖర్చులు, విద్యార్థుల సంఖ్య, రోజుల సంఖ్య వున్నాయి.

భోజన ఖర్చు (₹లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య	రోజుల సంఖ్య
6300	35	24
? (x)	25	18
$6300 : x$	$35:25 = 7:5$	$24:18 = 4:3$

భోజన ఖర్చులు విద్యార్థుల సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

అంటే, భోజన ఖర్చు $\propto$ విద్యార్థుల సంఖ్య

$6300 : x = 7:5$

Again mess charges are directly proportional to number of days.

Mess charges $\propto$ number of days.

$6300 : x = 4 : 3$

Since, mess charges depends upon both the values i.e number of students and number of days so we will take a compound ratio of these two variables.

Mess charges $\propto$ compound ratio of ratio of number of students and ratio of number of days.

$6300 : x =$ compound ratio of $7 : 5$ and $4 : 3$

$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$

$6300 : x = 28 : 15$

Product of means = product of extremes.

$28 \times x = 15 \times 6300$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$$x = ₹\ 3375.$$

Hence, the required mess charges is ₹ 3375.

Example 11: 24 workers working 6 hours a day can finish a piece of work in 14 days. If each worker works 7 hours a day, find the number of workers to finish the same piece of work in 8 days.

Solution: Here we have three quantities i.e number of workers, number of hours per day and number of days.

No. of workers	No. of hours per day	No. of days
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

Number of workers inversly proportional to number of hours per day.

$$\text{Number of workers} \propto \frac{1}{\text{number of hours per day}}$$

$24 : x =$ inverse ratio of $6 : 7$ i.e. $7 : 6$

అదేవిధంగా భోజన ఖర్చులు రోజుల సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

అంటే, భోజన ఖర్చు $\propto$ రోజుల సంఖ్య

$6300 : x = 4 : 3$

ఇక్కడ భోజన ఖర్చులు రెండు రాశుల మీద అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు రోజుల సంఖ్య మీద ఆధారపడతాయి. కావున మనం ఆ రెండు రాశుల బహుళనిష్పత్తి తీసుకోవాలి.

భోజన ఖర్చులు $\propto$ విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు రోజుల సంఖ్య యొక్క బహుళనిష్పత్తి

$6300 : x = 7 : 5$ మరియు $4 : 3$ ల బహుళ నిష్పత్తి

$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$

$6300 : x = 28 : 15$

మధ్యముల లబ్ధము = అంత్యముల లబ్ధము

$28 \times x = 15 \times 6300$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$x = ₹\ 3375.$

కావున భోజన ఖర్చులకు అయ్యే సొమ్ము ₹ 3375.

ఉదాహరణ 11: 24 మంది పనివారు ఒక పనిని రోజుకు 6 గంటల వంతున పనిచేస్తూ 14 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. అయిన రోజుకు 7 గంటల వంతున పనిచేస్తూ ఆ పనిని 8 రోజులలో పూర్తి చేయవలెనన్న కావలసిన పనివారి సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: ఇక్కడ మనకు మూడురాశులు అనగా పనివారి సంఖ్య, రోజుకు పనిచేసే పనిగంటలు, రోజుల సంఖ్య వున్నాయి.

పనివారి సంఖ్య	రోజుకు పనిగంటలు	రోజుల సంఖ్య
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

పనివారి సంఖ్య, రోజులో చేసే పనిగంటల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో వుండును.

అంటే, పనివారి సంఖ్య $\propto \dfrac{1}{\text{ఒక రోజులో చేసే పని గంటలు}}$

$24 : x = 6 : 7$ విలోమ నిష్పత్తి అనగా $7 : 6$

$\Rightarrow$ 24 : x is directly proportional to 7 : 6.

Again ,number of days is inversely proportional to number of workers.

Number of workers $\propto \dfrac{1}{\text{number of days}}$

24: x = inverse ratio of 7 : 4 i.e. 4 : 7

As, number of workers depends upon two variables i.e number of days and number of hours per day. Therefore,

Number of workers $\propto$ compound ratio of inverse ratio of number of hours per day and inverse ratio of number of days.

24 : x = compound ratio of 7 : 6 and 4 : 7

24 : x = 7 $\times$ 4 : 6 $\times$ 7

24 : x = 4 : 6

24 : x = 2 : 3

Product of means = product of extremes .

2 $\times$ x = 24 $\times$ 3

x = 36

Hence the required number of workers = 36.

Alternate method

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

Example 12: 12 painters can paint a wall of 180 m long in 3 days. How many painters are required to paint 200 m long wall in 5 days?

Solution: Here number of painters are in direct proportion to length of the wall and inversely proportional to the number of days.

No. of painter	Length of the wall (m)	No. of days
12	180	3
x	200	5
12 : x	180 : 200 = 9 : 10	3 : 5

Number of painters α length of the wall

12 : x = 9 : 10 ---- (1) and

Number of painters $\alpha \dfrac{1}{\text{number of days}}$

$\Rightarrow$ 24 : x అనునది 7 : 6కు అనులోమానుపాతంలో వుండును.

అదేవిధంగా పనివారి సంఖ్య, రోజుల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో వుండును.

అంటే, పనివారి సంఖ్య $\propto \dfrac{1}{\text{రోజుల సంఖ్య}}$

24: x = 7 : 4 విలోమ నిష్పత్తి అనగా 4 : 7

పనివారి సంఖ్య రెండు రాశుల మీద అనగా రోజుల సంఖ్య మరియు ఒక రోజులో చేసే పనిగంటల సంఖ్యపై ఆధారపడును కావున

పనివారి సంఖ్య $\propto$ రోజుల సంఖ్య విలోమ నిష్పత్తి మరియు రోజులో చేసే పనిగంటల సంఖ్య విలోమ నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి

24 : x = 7 : 6 మరియు 4 : 7 ల బహుళ నిష్పత్తి

$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$

$24 : x = 4 : 6$

$24 : x = 2 : 3$

అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము

$2 \times x = 24 \times 3$

$x = 36$

కావలసిన పనివారి సంఖ్య = 36.

వేరొక పద్ధతి

$\dfrac{24}{x} = \dfrac{7}{6} \times \dfrac{4}{7}$

$\dfrac{24}{x} = \dfrac{2}{3}$

$2 \times x = 24 \times 3$

$x = \dfrac{72}{2} = 36$

ఉదాహరణ 12: 12 మంది పెయింటర్లు 180 మీటర్ల పొడవు గల గోడకు 3 రోజులలో రంగు వేయగలరు. అయిన 200 మీటర్లు పొడవు గల గోడకు 5 రోజులలో రంగు వేయవలెనన్న ఎంతమంది పెయింటర్లు కావలెను?

సాధన : దీనిలో పెయింటర్ల సంఖ్య, గోడ పొడవుకు అనులోమానుపాతంలోను, రోజుల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో వుండును.

పెయింటర్ల సంఖ్య	గోడ పొడవు (మీటర్లలో)	రోజుల సంఖ్య
12	180	3
x	200	5
12 : x	180 : 200 = 9 : 10	3 : 5

పెయింటర్ల సంఖ్య $\propto$ గోడ పొడవు కావున,

12 : x = 9 : 10 ---- (1) మరియు

పెయింటర్ల సంఖ్య $\propto \dfrac{1}{\text{రోజుల సంఖ్య}}$

$12 : x$ = inverse ratio of $3 : 5$

$12 : x = 5 : 3$ ---- (2)

from (1) and (2)

$12 : x$ = compound ratio of $9 : 10$ and $5 : 3$

$12 : x = (9 : 10) \times (5 : 3)$

$12 : x = 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12 : x = 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$ (product of extremes = product of means)

$3 \times x = 12 \times 2$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

Number of painters required = 8

Alternate method

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times 2}{\cancel{3}} = 8$$

Exercise - 10.4

1. Rice costing ₹ 480 is needed for 8 members for 20 days. What is the cost of rice required for 12 members for 15 days ?

2. 10 men can lay a road of 75 km. long in 5 days. In how many days can 15 men lay a road of 45 km. long ?

3. 24 men working at 8 hours per day can do a piece of work in 15 days. In how many days can 20 men working at 9 hours per day can complete the same work ?

4. 175 men can dig a canal 3150 m long in 36 days. How many men are required to dig a canal 3900 m. long in 24 days?

5. 14 typists typing 6 hours a day can take 12 days to complete the manuscript of a book. How many days will 4 typists, working 7 hours a day, can take to do the same job?

$12 : x = 3 : 5$ యొక్క విలోమ నిష్పత్తి

$12 : x = 5 : 3$ ---- (2)

(1), (2) ల నుండి

$12 : x \ = \ 9 : 10$ మరియు $5 : 3$ల బహుళ నిష్పత్తి

$12 : x \ = \ (9 : 10) \times (5 : 3)$

$12 : x \ = \ 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12 : x \ = \ 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$ (అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము)

$3 \times x = 12 \times 2$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

కావలసిన పెయింటర్ల సంఖ్య = 8

వేరొక పద్ధతి

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times 2}{\cancel{3}} = 8$$

అభ్యాసము - 10.4

1. 8 మందికి 20 రోజులకు కావలసిన బియ్యము వెల ₹ 480. అయిన 12 మందికి 15 రోజులకు కావలసిన బియ్యము వెల ఎంత?

2. 10 మంది పనివారు 75 కి.మీ. పొడవు గల రోడ్డును 5 రోజులలో వేయగలరు. అదే పనితనము గల 15 మంది పనివారు 45 కి.మీ. పొడవు గల రోడ్డును ఎన్ని రోజులలో వేయగలరు?

3. రోజుకు 8 గంటల వంతున పనిచేస్తూ 24 మంది ఒక పనిని 15 రోజులలో చేయగలరు. రోజుకు 9 గంటల వంతున పనిచేస్తూ 20 మంది అదేపనిని ఎన్ని రోజులలో చేస్తారు ?

4. 175 మంది పనివారు 36 రోజులలో 3150 మీటర్ల పొడవు గల కాలువను త్రవ్వగలరు అయిన 3900 మీటర్ల పొడవు గల కాలువను 24 రోజులలో త్రవ్వుటకు ఎంతమంది పనివారు కావలెను?

5. 14 మంది టైపిస్ట్లు రోజుకు 6 గంటల వంతున పనిచేయుచూ 12 రోజులలో ఒక పుస్తకమును టైప్ చేయగలరు అయిన అదే పుస్తకమును 4 గురు టైపిస్ట్లు రోజుకు 7 గంటల వంతున పనిచేయుచూ ఎన్ని రోజులలో టైప్ చేయగలరు?

What we have discussed

- If x and y are in direct proportion, the two quantities vary in the same ratio i.e. if $\frac{x}{y}=k$ or $x = ky$. We can write $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ or $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ [y_1, y_2 are values of y corresponding to the values x_1, x_2 of x respectively]
- Two quantities x and y are said to vary in inverse proportion, if there exists a relation of the type $xy = k$ between them, k being a constant. If y_1, y_2 are the values of y corresponding to the values x_1 and x_2 of x respectively, then $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), or $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
- If one quantity increases (decreases) as the other quanitity decreases (increases) in same proportion, then we say it varies in the inverse ratio of the other quantity. The ratio of the first quantity ($x_1 : x_2$) is equal to the inverse ratio of the second quantity ($y_1 : y_2$). As both the ratios are the same, we can express this inverse variation as proportion and it is called inverse proportion.
- Sometimes change in one quantity depends upon the change in two or more other quantities in same proportion. Then we equate the ratio of the first quantity to the compound ratio of the other two quantities.

K9T4H1

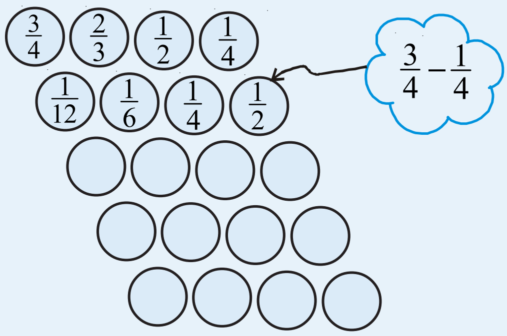
Diffy with fractions

The process in this activity is called Diffy. The name comes from the process of taking successive differences of numbers and the activity provides practicing skills in subtraction.

Directions:

Step1 : Make an array of circles as shown and choose four fractions in the top four circles

Step2 : In the first three circles of the second row write the difference of the fractions above and to the right and left of the circle in the question, always being careful to subtract the smaller of these two fractions from the larger. In the fourth circle of second row place the difference of fractions in the first and fourth circles in the preceding row, again always subtracting the smaller fraction from the larger.



Step3 : Repeat step 2 to fill the successive rows of the circles. You may stop if you obtain a row of zeros.

Step4 : Repeat steps 1, 2 and 3 several times and each time start with different fractions.

Try Fraction Diffy with the fractions in first row $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$

మనం ఏమి చర్చించాం

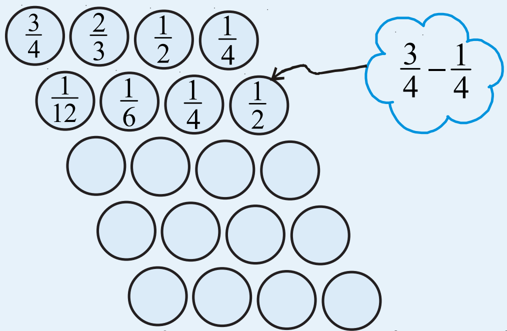
- x మరియు y అనే రెండు రాశులు అనులోమానుపాతంలో నున్న ఆ రెండు రాశులు ఒకే నిష్పత్తిలో మార్పుచెందును. అనగా $\frac{x}{y} = k$ లేదా $x = ky$. దానిని మనం $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ లేదా $x_1 : y_2 = x_2 : y_1$ గా వ్రాయవచ్చు. [ఇక్కడ x_1, x_2 విలువలకు అనుగుణంగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా y_1, y_2].
- రెండు రాశులు x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో వుంటే వాటి మధ్య $xy = k$ (k స్థిరాంకము) వంటి సంబంధము ఏర్పడుతుంది. x_1, x_2 విలువలకు అనుగుణంగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా y_1, y_2 అయిన $x_1 y_1 = x_2 y_2$ (= k), లేదా $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
- ఒక రాశి పెరుగుదల (తగ్గుదల) రెండవరాశి తగ్గుదల (పెరుగుదల) ఒకే అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు రాశులు విలోమానుపాతంలో వుంటాయి. అపుడు మొదటి రాశి నిష్పత్తి $(x_1 : x_2)$ రెండవ రాశి నిష్పత్తి $(y_1 : y_2)$ యొక్క విలోమ నిష్పత్తికి సమానంగా వుంటుంది. ఇక్కడ రెండు నిష్పత్తులు సమానం కావున ఈ విలోమ మార్పునే మనం విలోమానుపాతం అంటాము.
- కొన్నిసార్లు ఒకరాశిలోని మార్పు, రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులలో మార్పుకు కారణమవుతుంది. ఆ మార్పులు అనుపాతంలో వుంటే దానినే మనం మిశ్రమానుపాతం అంటాం. అప్పుడు మొదటి రాశి నిష్పత్తిని మిగిలిన రెండు రాశుల బహుళనిష్పత్తికి సమానం చేస్తాము.

W4T6K3

వరుస సంఖ్యల వ్యవకలము Diffy

ఈ పద్ధతిలో వ్యవకలనము చేయు విధానమును Diffy అంటారు. వరుస సంఖ్యల నుండి తీసివేయుట జరుగును. కావున దీనికి Diffy అనిపేరు వచ్చినది. ఈ విధానము సంఖ్యల(భిన్నముల) తీసివేయుట యందు నేర్పు కలుగును.

సూచనలు:



సోపానము 1: నాలుగు వృత్తములను ఒక వరుసగా పటములో చూపినట్లు వ్రాసిపై వరుసయందు ఏవైనా నాలుగు భిన్నములు తీసుకొనుము.

సోపానము 2: పై వరుసలోని మొదటి మూడు వృత్తములతో గల భిన్నములను పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసివేయుచూ వాటికి క్రింద వరుసతో కల వృత్తములతో జవాబు వ్రాయండి. మొదటి వరుసలోని అన్నింటి కంటే మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య నుండి మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య తీసివేసి ఫలితమును రెండవ వరుసలోని నాలుగవ వృత్తములో పటములో చూపినట్లు వ్రాయండి.

సోపానము 3: మిగిలిన వృత్తములు నింపుటకు సోపానము 2 నందు చెప్పబడి నట్లు పూరించండి. చివరిగా ఒక వరుసలోని అన్ని సంఖ్యలు '0' వచ్చే వరకు చేయండి.

సోపానము4 : వేర్వేరు భిన్నములు తీసుకొని మరలా పై విధంగా వ్రాయుచూ వృత్తములను పూరించండి.

ఉదా: $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ భిన్నములతో ప్రయత్నించండి.

CHAPTER 11

Algebraic Expressions

S3F4Y9

11.0 Introduction

Observe the following expressions.

(i) $3 + 8 - 9$ (ii) $\frac{1}{3}xy$ (iii) 0 (iv) $3x + 5$ (v) $4xy + 7$ (vi) $15 + 0 - 19$ (vii) $\frac{3x}{y}(y \neq 0)$

(i), (iii) and (vi) are numerical expressions where as (ii), (iv) and (v), (vii) are algebraic expressions.

Do you identify the difference between them?

You can form many more expressions. As you know expressions are formed with variables and constants. In the expression $3x + 5$, x is varaible and 3, 5 are constants. $3x$ is an algebraic term and 5 is a numerical term. The expression $4xy + 7$ is formed with variables x and y and constants 4 and 7.

Now $\frac{1}{3}xy$ has one term and $2xy + pq - 3$ has 3 terms in it.

So you know that terms are formed as a product of constants and one or more variables. Terms are added or subtracted to form an **expression**.

We know that the value of the expression $3x + 5$ could be any number. If $x = 2$ the value of the expression would be $3(2) + 5 = 6 + 5 = 11$. For different values of x, the expression $3x + 5$ holds different values.

Do This

1. Find the number of terms in following algebraic expressions
   $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$, $9x^2 + 2x + pq + q$.
2. Take different values for x and find values of $3x + 5$.

Let us consider some more algebraic expressions $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$ etc. It is clear that $5xy^2$ is monomial, $5xy^3 - 9x$ is binomial and $3xy + 4y - 8$ is trinomial.

The sum of all exponents of the variables in a monomial is the degree of the monomial

As you know that the degree of a monomial $5x^2y$ is '3'.

Moreover the degree of the binomial $5xy^3 - 9x$ is '4'.

Similarly, the degree of the trinomial $3xy + 4y - 8$ is '2'.

The highest degree among the degrees of the different terms of an algebraic expression is called the degree of that algebraic expression.

అధ్యాయం

11 బీజీయ సమాసాలు

W6W8Y9

11.0 పరిచయం

క్రింది సమాసాలను పరిశీలించండి.

(i) $3 + 8 - 9$ (ii) $\frac{1}{3}xy$ (iii) 0 (iv) $3x + 5$ (v) $4xy + 7$ (vi) $15 + 0 - 19$ (vii) $\frac{3x}{y} (y \neq 0)$

(i), (iii) మరియు (vi) లు సంఖ్యా సమాసాలు, (ii), (iv), (v) మరియు (vii) లు బీజీయసమాసాలు. వీటి మధ్య తేడాల్ని గుర్తించారా?

మీరు మరిన్ని సమాసాలను ఏర్పరచడానికి ప్రయత్నించండి. వివిధ చరరాశులు, స్థిరరాశులతో సమాసాలు ఏర్పడతాయని మీకు తెలుసు కదా! $3x + 5$ సమాసంలో చలరాశి x ; 3, 5 లు స్థిరరాశులు. $3x$ అనునది బీజీయ పదం, 5 సంఖ్యా పదం. x, y చరరాశులు 4 మరియు 7 స్థిరరాశులు ఉండేటట్లు రెండు పదాలతో $4xy + 7$ సమాసాన్ని ఏర్పరచగలం.

$\frac{1}{3}xy$ లో పదాల సంఖ్య 1, మరియు $2xy + pq - 3$ పదాల సంఖ్య 3.

ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ చరరాశులు మరియు స్థిరరాశుల లబ్ధంతో పదాలు ఏర్పడును. కొన్ని పదాల సంకలనం లేదా వ్యవకలనంతో సమాసాలు ఏర్పడుతాయి.

$3x + 5$ సమాసము విలువ ఏదైనా ఒక సంఖ్య ఉండగలదని మనకు తెలుసును. $x = 2$ ఐతే, సమాసము $3(2) + 5 = 6 + 5 = 11$, వివిధ x యొక్క వేర్వేరు విలువలకు $3x + 5$ సమాసానికి వేర్వేరు విలువలు ఉంటాయి. విలువలు రాబట్టండి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది బీజీయ సమాసాలలోని పదాల సంఖ్యను తెలుపండి.
   $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$, $9x^2 + 2x + pq + q$.
2. x యొక్క వేర్వేరు విలువలను తీసుకొని $3x + 5$ యొక్క విలువలను కనుగొనండి.

చరరాశులు, స్థిరాశులతో ఏర్పడే మరిన్ని సమాసాలను $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$ మొదలగు వాటిని పరిశీలించండి. మనకు $5xy^2$ ఏకపది, $5xy^3 - 9x$ ద్విపది $3xy + 4y - 8$ త్రిపది అని తెలుసు.

> ఒక ఏకపదిలోని చరరాశుల ఘాతాంకాల మొత్తాన్ని ఆ ఏకపది పరిమాణం అంటారు.

$5x^2y$ ఏకపద సమాసము యొక్క పరిమాణం '3' అని మనకు తెలుసు.

$5xy^3 - 9x$ సమాసము యొక్క పరిమాణము '4'.

అలాగే, $3xy + 4y - 8$ త్రిపది యొక్క పరిమాణం '2'.

> ఒక బీజీయ సమాసంలోని వివిధ పదాల పరిమాణాల్లో గరిష్ఠ పరిమాణాన్ని ఆ బీజీయ సమాస పరిమాణం అంటాము.

Expressions that contain exactly one, two and three terms are called **monomials**, **binomials** and **trinomials** respectively. In general, any expression containing one or more terms with non-zero coefficients is called a **multinomial**.

11.1 Like and unlike terms

Observe the following terms.

$2x,\ 3x^2,\ 4x,\ -5x,\ 7x^3$

Among these $2x$, $4x$ and $-5x$ have same variable x with same exponent. These are called like terms. Like terms may not have same numerical coefficients. Why $8p$ and $8p^2$ are not like terms?

Do This

1. Find the like terms in the following
   $ax^2y,\ 2x,\ 5y^2,\ -9x^2,\ -6x,\ 7xy,\ 18y^2$.
2. Write 3 like terms for $5pq^2$

11.2 Addition and subtraction of algebraic expressions

Example 1: Add $5x^2 + 3xy + 2y^2$ and $2y^2 - xy + 4x^2$

Solution: Write the expression one under another so that like terms align in columns. Then add

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5x^2 & + & 3xy & + & 2y^2 \\ + & 4x^2 & - & xy & + & 2y^2 \\ \hline & 9x^2 & + & 2xy & + & 4y^2 \\ \hline \end{array}$$

Think, Discuss and Write

1. Sheela says the sum of $2pq$ and $4pq$ is $8p^2q^2$. Is she right? Give your explanation.
2. Rehman added $4x$ and $7y$ and got $11xy$. Do you agree with Rehman ?

Example 2: Subtract $2xy + 9x^2$ from $12xy + 4x^2 - 3y^2$

Solution: Write the expressions being subtracted (subtrahend) below the expression from which it is being subtracted (minuend) aligning like terms in columns.

$$\begin{array}{lrrr} \text{minuend} & 12xy & +\ 4x^2 & -\ 3y^2 \\ \text{subtrahend} & 2xy & +\ 9x^2 & \\ & (-) & (-) & \\ \hline & 10xy & -\ 5x^2 & -\ 3y^2 \\ \hline \end{array}$$

Change the signs of each term in the expression being subtracted, then add.

సమాసములో ఒకేఒక పదముంటే **ఏకపది** అని, రెండు పదాలుంటే **ద్విపది** అనీ మూడు పదాలుంటే **త్రిపది** అని అంటారు. సాధారణంగా శూన్యేతర గుణకాలతో ఒకటి లేదా ఎక్కువ పదాలు గల సమాసాన్ని **బహుళపది** అంటారు.

11.1 సజాతి - విజాతి పదాలు

కింది పదాలను పరిశీలించండి.

$2x,\ 3x^2,\ 4x,\ -5x,\ 7x^3$

వీటిలో $2x, 4x$ మరియు $-5x$, లలో ఒకే చరరాశి x మరియు ఒకే ఘాతం కలిగి ఉన్నాయి. ఇలాంటి పదాలను సజాతి పదాలు అంటారు. సజాతి పదాలకు సంఖ్యా గుణకాలు ఒకే రకంగా ఉండకపోవచ్చు. $8p$, $8p^2$ లు ఎందుకు సజాతి పదాలు కావు?

ఇవి చేయండి

1. కింది వాటిలో సజాతి పదాలను గుర్తించండి.
   $ax^2y, 2x, 5y^2, -9x^2, -6x, 7xy, 18y^2$.
2. $5pq^2$ కు 3 సజాతి పదాలను తయారుచేయండి.

11.2 బీజీయ సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలు

ఉదాహరణ 1: $5x^2 + 3xy + 2y^2$ మరియు $2y^2 - xy + 4x^2$ లను కూడండి.

సాధన: సమాసాలలోని సజాతి పదాలు ఒకదాని క్రింద ఒకటిగా ఉండేట్లు గుర్తులు మారకుండా అమర్చి కూడాలి.

$$\begin{array}{rcrcr} 5x^2 & + & 3xy & + & 2y^2 \\ +\ 4x^2 & - & xy & + & 2y^2 \\ \hline 9x^2 & + & 2xy & + & 4y^2 \\ \hline \end{array}$$

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

1. షీలా $2pq, 4pq$ ల మొత్తం $8p^2q^2$ అని చెప్పింది. ఆమె సమాధానం సరైందా? మీ వివరణ ఇవ్వండి.
2. రెహమాన్ $4x$ ను $7y$ కు కలిపితే $11xy$ వస్తుందన్నాడు మీరు రెహమాన్‌తో ఏకీభవిస్తారా?

ఉదాహరణ 2: $12xy + 4x^2 - 3y^2$ నుండి $2xy + 9x^2$ ను తీసివేయండి.

సాధన: సజాతి పదాలు ఒకదానిపై మరొకటి ఉండేట్లు క్రింద అమర్చి, క్రింద చూపిన విధంగా తీసివేయండి.

$$\begin{array}{rcrcr} 12xy & + & 4x^2 & - & 3y^2 \\ 2xy & + & 9x^2 & & \\ (-) & & (-) & & \\ \hline 10xy & - & 5x^2 & - & 3y^2 \\ \hline \end{array}$$

రెండవ సమాసంలోని ప్రతీపదం గుర్తు మార్చి సూక్ష్మీకరించండి

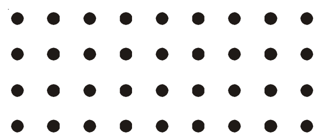
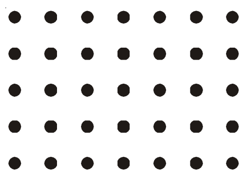
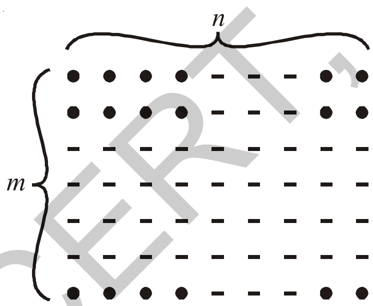
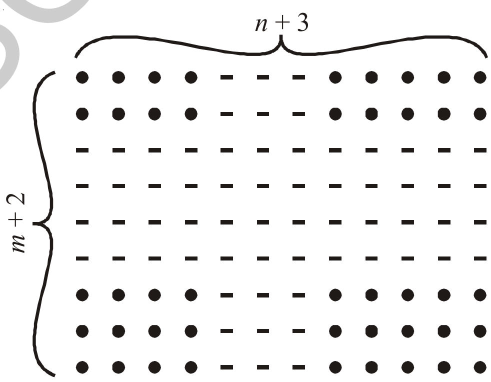
[**Note:** Subtraction of a number is the same as addition of its additive inverse. Thus subtracting –3 is the same as adding +3. Similarly subtracting $9x^2$ is the same as adding $-9x^2$, subtracting $-3xy$ is same as adding $+3xy$].

Do This

1. If $A = 2y^2 + 3x - x^2$, $B = 3x^2 - y^2$ and $C = 5x^2 - 3xy$ then find
   (i) A+B (ii) A–B (iii) B+C (iv) B–C (v) A+B+C (vi) A+B–C

11.3 Multiplication of Algebraic Expressions

Introduction: (i) Look at the following patterns of dots.

Pattern of dots	Total number of dots
	Row × Column
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

To find the number of dots we have to multiply the number of rows by the number of columns.

Here the number of rows is increased by 2, i.e. $m+2$ and number of columns increased by 3, i.e. $n+3$

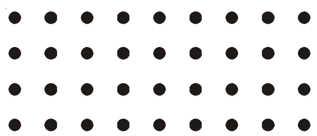
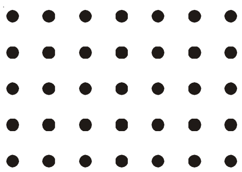
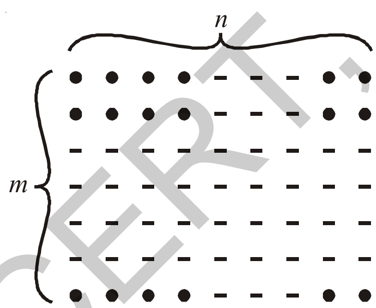
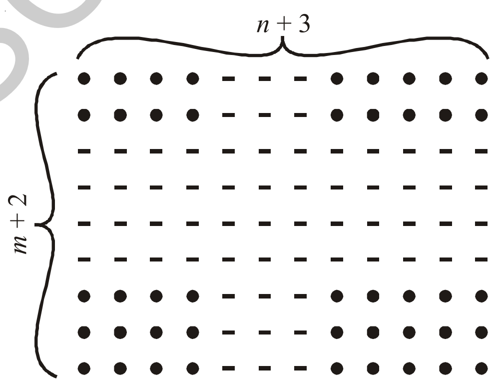
[**గమనిక:** ఒక సంఖ్యను తీసివేయడం అంటే, ఆ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని కూడడమే ఆ విధంగా -3 ని తీసివేయడం అంటే $+3$ ను కలపడమే, అదేవిధంగా $9x^2$ ను తీసివేయడం అంటే $-9x^2$ ను కలపడమే. $-3xy$ ని తీసివేయడమంటే $+3xy$ ని కలపడం].

ఇవి చేయండి

1. $A = 2y^2 + 3x - x^2$, $B = 3x^2 - y^2$ మరియు $C = 5x^2 - 3xy$ అయితే
   (i) A+B (ii) A–B (iii) B+C (iv) B–C (v) A+B+C (vi) A+B–C లను కనుగొనండి.

11.3 బీజీయ సమాసాల గుణకారం

పరిచయం: (i) కింద ఇవ్వబడిన చుక్కల అమరికను చూడండి.

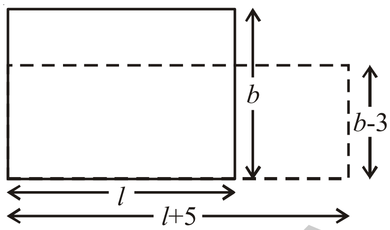
చుక్కల అమరిక	మొత్తం చుక్కల సంఖ్య
	అడ్డువరుస×నిలువువరుస
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

మొత్తం చుక్కల సంఖ్యను తెలుసుకొనుటకు అడ్డువరుసలోని చుక్కల సంఖ్యను నిలువు వరుసలోని చుక్కల సంఖ్యతో గుణించుము.

ఇందులో అడ్డువరుసలోని సంఖ్యకు 2 వరుసలు కలుపబడినవి. (అనగా m+2), నిలువు వరుసలోని సంఖ్యకు 3 వరుసలు కలపబడినవి (అనగా n+3)

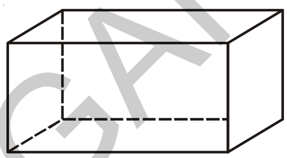
(ii) Can you now think of similar situations in which two algebraic expressions have to be multiplied?

We can think of area of a rectangle. The area of a rectangle is $l \times b$, where l is the length, and b is breadth. If the length of the rectangle is increased by 5 units, i.e., $(l + 5)$ units and breadth is decreased by 3 units , i.e., $(b - 3)$ units, then the area of the new rectangle will be $(l + 5) \times (b - 3)$ sq. units.



To find the area of a rectangle. We have to multiply algebraic expression like $l \times b$ and extended as $(l+5)\times(b-3)$.

(iii) Can you think about volume of a cuboid in the form of algebraic expression? (The volume of a rectangular box is given by the product of its length, breadth and height).



(iv) When we buy things, we have to carry out multiplication. For example, if price of bananas per dozen is ₹ p

and bananas needed for the school picnic are z dozens,

then we have to pay = ₹ p × z

Suppose, the price per dozen was less by ₹ 2 and the bananas needed were less by 4 dozens.

The price of bananas per dozen = ₹ (p – 2) and

Bananas needed = $(z - 4)$ dozens,

Therefore, we would have to pay = ₹ (p – 2) × (z – 4)

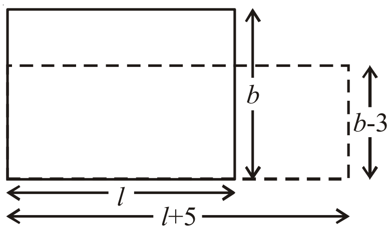
Try These

Write an algebriac expression using speed and time to calculate the distance, simple interest to be paid, using principal, time, and the rate of simple interest.

Can you think of two more such situations, where we can express in algebraic expressions?

In all the above examples, we have to carry out multiplication of two or more quantities. If the quantities are given by algebraic expressions, we need to find their product. This means that we should know how to obtain this product. Let us do this systematically. To begin with we shall look at the multiplication of two monomials.

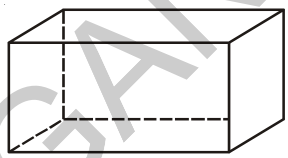
(ii) మీరు ఏవైనా రెండు బీజీయ సమాసాల లబ్ధం వ్రాయడానికి ఇలాంటి సందర్భాలను ఆలోచించండి.



దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని గణించాలంటే $(l+5)\times(b-3)$ ల లబ్ధం కనుక్కోవాలి.

l పొడవు, b వెడల్పుగా గల దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవును 5 యూనిట్లు పెంచి అనగా $(l + 5)$ యూనిట్లుని వెడల్పును 3 యూనిట్లు తగ్గించి అనగా $(b - 3)$ యూనిట్లు గల నూతన దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని గుణిస్తే $(l + 5)\,(b - 3)$ చ.యూ.

(iii) ఘనపరిమాణం గురించి ఆలోచించండి. (దీర్ఘ ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల లబ్ధం ఇస్తుంది).



(iv) మనం వస్తువులను ఖరీదు చేసినపుడు (కొన్నప్పుడు) గుణకారాలను చేస్తాము. ఉదా॥ డజను అరటిపళ్ళ వెల ₹ p లు, పాఠశాల విహారయాత్రకు z డజన్లు అవసరమైతే మనం చెల్లించాల్సిన మొత్తం వెల = ₹ $p \times z$

ఒకవేళ ధరను ₹ 2 తగ్గిస్తే, అలాగే ముందు కొనాలనుకొన్న z డజన్లలో 4 డజన్లను తగ్గిస్తే, చెల్లించవలసిన వెల ఎంత?

అరటి పళ్ళ ధర ప్రతి డజనుకు = ₹ $(p - 2)$ మరియు

అరటిపళ్ళు కొనాల్సినవి = $(z - 4)$ డజన్లు

కాబట్టి మొత్తం ధర = ₹ $(p - 2) \times (z - 4)$

ప్రయత్నించండి

వేగము కాలము ఉపయోగించి దూరము లెక్కించునపుడు, అసలు, రేటు, కాలము ఇచ్చిననపుడు సామాన్య వడ్డీ లెక్కించుటకు బీజీయ సమాసములు వ్రాయుము.

బీజీయ సమాసములు ఉపయోగించి విలువలు కనుగొను మరొక రెండు సందర్భములు తెల్పగలరా?

పై ఉదాహరణలలో రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులతో గుణకారం చేయాలి. ఒకవేళ ఈ రాశులు బీజీయ సమాసాలు అయితే బీజీయ సమాసాల లబ్ధం కనుగొనాలి. ఈ బీజీయ లబ్ధాలను కనుగొనే విధానం మనం నేర్చుకొందాం. రెండు ఏకపదుల గుణకారాన్ని చూద్దాం.

11.4 Multiplying a monomial by a monomial

11.4.1 Multiplying two monomials

We know that

$$4 \times x \ = x + x + x + x = 4x$$

and $$4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$$

Now, observe the following products.

(i) $x \times 3y \quad = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y \quad = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 \quad = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

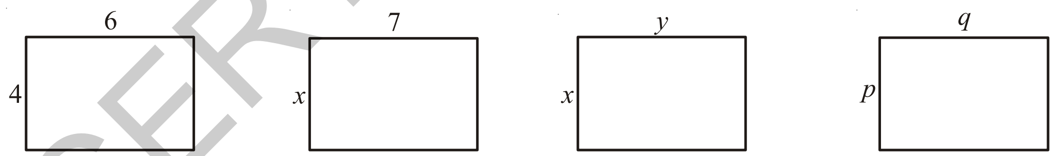
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

For finding the product of algebraic terms, we use the rules of exponents, where the exponents having the same base are added.

Observe the following and fill the blanks.



Area = 4×6 = 24units Area = $x \times 7$ = ...Area = $x \times y$ =........ Area = ... ×....... = ...

Observe the following products:-

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

11.4 ఏకపదుల గుణకారము

11.4.1 రెండు ఏకపదులను గుణించుట

మనకు

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$ అని తెలుసు

మరియు $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

ఇప్పుడు క్రింది లబ్దాలను గమనించండి.

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

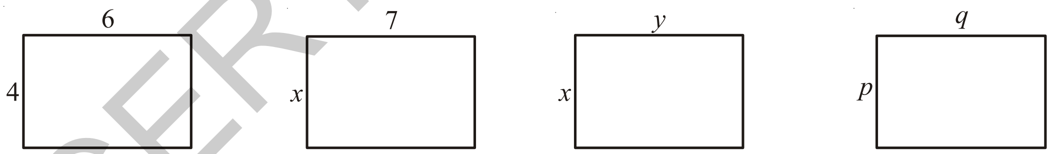
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

బీజీయ పదాల గుణకారం కనుగొనే సందర్భంలో ఘాతాంకాల న్యాయాలను ఉపయోగిస్తారు. ఇచ్చట ఒకే భూమి కలిగిన ఘాతాంకాలను కూడడం జరుగుతుంది.

క్రింది వాటిని పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.



వైశాల్యము $= 4 \times 6 = 24$ వైశాల్యము $= x \times 7 =$ ..... వైశాల్యము $= x \times y =$......వైశాల్యము = ... ×...... = ...

దిగువ లబ్దాలను గమనించండి.

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

Note:	
	(i) Product of two positive integers is a positive integer.
	(ii) Product of two negative integers is a positive integer.
	(iii) Product of a positive and a negative integers is a negative integer.

Do This

1. Complete the table.

1^{st} Monomial	2^{nd} Monomial	Product of two monomials
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	....
$3abc$	$5bcd$	....
mn	$-4m$	....
$-3mq$	$-3nq$	....

2. Check whether you always get a monomial when two monomials are multiplied.

11.4.2 Multiplying three or more monomials

Observe the following examples:-

Example 3: Find the product of $5x$, $6y$ and $7z$

Solution:

Method I

$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$

$= 30xy \times 7z$

$= 210xyz$

Method II

$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$

$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$

$= 210\ xyz$ (first multiply coefficients then variables)

Example 4: Find $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$

Solution: $3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$

$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$

$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$

$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6$.

Example 5: Find the product of $3x$, $-4xy$, $2x^2$, $3y^2$, $5x^3y^2$

Solution: $3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$

$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$

$= -360x^7y^5$.

Have you observed that the product of any number of monomials is a monomial?

గమనిక: (i) రెండు ధనసంఖ్యల లబ్ధము ధనసంఖ్య.
(ii) రెండు ఋణసంఖ్యల లబ్ధము ధనసంఖ్య.
(iii) ఒక ధన మరియు ఒక ఋణసంఖ్యల లబ్ధము ఋణసంఖ్య.

ఇది చేయండి

1. పట్టికను పూర్తిచేయండి.

మొదటి ఏకపది	రెండవ ఏకపది	రెండు ఏకపదుల లబ్ధము
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	....
$3abc$	$5bcd$	....
mn	$-4m$	....
$-3mq$	$-3nq$	....

2. రెండు ఏక పదుల లబ్ధము ఎల్లప్పుడు ఏకపదియేనా? సరిచూడండి.

11.4.2 మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఏకపదుల గుణించుట

దిగువ ఉదాహరణలు గమనించండి.

ఉదాహరణ 3: $5x$, $6y$ మరియు $7z$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

మొదటి పద్ధతి

$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$
$= 30xy \times 7z$
$= 210xyz$

రెండవ పద్ధతి

$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$
$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$
$= 210\,xyz$ (చరరాశుల గుణకాలను మొదట గుణించండి)

ఉదాహరణ 4: $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$ ను కనుగొనండి

సాధన: $3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$
$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$
$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$
$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6$.

ఉదాహరణ 5: $3x$, $-4xy$, $2x^2$, $3y^2$ మరియు $5x^3y^2$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$
$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$
$= -360x^7y^5$.

పై ఉదాహరణల నుండి రెండు, రెండు కన్నా ఎక్కువ ఏకపదులను గుణించిన ఏకపదియే వచ్చునని గమనించారా?

Exercise - 11.1

1. Find the product of the following pairs of monomials.

   (i) $6,\ 7k$ (ii) $-3l,\ -2m$ (iii) $-5t^2\ -3t^2$ (iv) $6n,\ 3m$ (v) $-5p^2,\ -2p$

2. Complete the table of the products.

X	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	….	….	….	….	….	….	….
$4y$	….	….	….	….	….	….	….	….
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	….	….	….	….	….	….
$6xy$	….	….	….	….	….	….	….	….
$2y^2$	….	….	….	….	….	….	….	….
$3x^2y$	….	….	….	….	….	….	….	….
$2xy^2$	….	….	….	….	….	….	….	….
$5x^2y^2$	….	….	….	….	….	….	….	….

3. Find the volumes of rectangular boxes with given length, breadth and height in the following table.

S.No.	Length	Breadth	Height	Volume (v) = $l \times b \times h$
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ …………………
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ …………………
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ …………………
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ …………………

4. Find the product of the following monomials

   (i) $xy,\ x^2y,\ xy,\ x$ (ii) $a,\ b,\ ab,\ a^3b,\ ab^3$ (iii) $kl,\ lm,\ km,\ klm$

   (iv) $pq\ ,pqr,\ r$ (v) $-3a,\ 4ab,\ -6c,\ d$

5. If $A = xy$, $B = yz$ and $C = zx$, then ABC = ...

6. If $P = 4x^2$, $T = 5x$ and $R = 5y$, then $\dfrac{PTR}{100} =$ ....

7. Write some monomials of your own and find their products .

అభ్యాసము - 11.1

1. దిగువ ఇచ్చిన ఏకపది జతల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.
(i) $6, 7k$ (ii) $-3l, -2m$ (iii) $-5t^2, -3t^2$ (iv) $6n, 3m$ (v) $-5p^2, -2p$

2. క్రింది లబ్ధాల పట్టికను పూర్తిచేయండి.

x	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	....	....	....	....	....	....	....
$4y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	....	....	....	....	....	....
$6xy$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$3x^2y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2xy^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$5x^2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....

3. క్రింది పట్టికలోని కొన్ని దీర్ఘఘనాల పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల కొలతలు ఇవ్వబడినవి. వాటి ఘన పరిమాణాల్ని కనుగొనండి.

వ.సం.	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు	ఘనపరిమాణము $(v) = l \times b \times h$
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ ....
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ ....
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ ....
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ ....

4. క్రింది ఏకపదుల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.
(i) xy, x^2y, xy, x (ii) a, b, ab, a^3b, ab^3 (iii) kl, lm, km, klm
(iv) pq, pqr, r (v) $-3a, 4ab, -6c, d$

5. $A = xy$, $B = yz$ మరియు $C = zx$, అయిన $ABC =$ ....

6. $P = 4x^2$, $T = 5x$ మరియు $R = 5y$, అయిన $\dfrac{PTR}{100} =$ ....

7. స్వంతంగా కొన్ని ఏకపదులను వ్రాసి, వాటి లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

11.5 Multiplying a binomial or trinomial by a monomial

11.5.1 Multiplying a binomial by a monomial

Multiplying a monomial $5x$ and a binomial $6y+3$

The process involved in the multiplication is:

Step	Instruction	Procedure
1.	Write the product of monomial and binomial using multiplication symbol	$5x \times (6y+3)$
2.	**Use distributive law:** Multiply the monomial by the first term of the binomial then multiply the monomial by the second term of the binomial and add their products.	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	Simplify the terms	$30xy + 15x$

Hence, the product of $5x$ and $6y+3$

$$5x(6y + 3) = 5x \times (6y + 3)$$
$$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$$
$$= 30xy + 15x$$

Example6: Find the product of $(-4xy)(2x - y)$

Solution: $(-4xy)(2x - y) = (-4xy) \times (2x - y)$

$$= (-4xy)\times 2x + (-4xy) \times (-y)$$
$$= -8x^2y + 4xy^2$$

Example7: Find the product of $(3m - 2n^2)(-7mn)$

Solution: $(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$ ∵ Commutative law

$$= (-7mn) \times (3m - 2n^2)$$ ∵ Distributive law

$$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$$
$$= -21m^2n + 14mn^3$$

Do This

1. Find the product: (i) $3x(4ax + 8by)$ (ii) $4a^2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)pq$ (iv) $(m^3 + n^3)5mn^2$
2. Find the number of maximum terms in the product of a monomial and a binomial?

11.5 ద్విపది లేక త్రిపదిని ఏకపదితో గుణించుట

11.5.1 ద్విపదిని ఏకపదితో గుణించుట

ఏకపది $5x$ మరియు ద్విపది $6y + 3$ ల గుణించుట

గుణకార విధాన క్రమము (క్రింది విధంగా ఉండును)

సోపానము	సూచనలు	విధానక్రమము
1.	ఏకపది మరియు ద్విపదుల మధ్య గుణకార గుర్తు ఉంచి లబ్ధంగా వ్రాయండి.	$5x \times (6y+3)$
2.	విభాగన్యాయమును ఉపయోగించి ఏకపదిని ద్విపది మొదటి పదముతో మొదట గుణించి తరువాత ఏకపదిని ద్విపది రెండవ పదముతో గుణించి లబ్ధాలను సంకలనంగా వ్రాయండి.	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	పదాలను సూక్ష్మీకరించండి.	$30xy + 15x$

కావున $5x$ మరియు $6y+3$ లబ్ధాన్ని కనుగొనండి

$$5x(6y + 3) = 5x \times (6y + 3)$$
$$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$$
$$= 30xy + 15x$$

ఉదాహరణ 6: $(-4xy)(2x - y)$ లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $(-4xy)(2x - y) = (-4xy) \times (2x - y)$

$= (-4xy)\times 2x + (-4xy) \times (-y)$

$= -8x^2y + 4xy^2$

ఉదాహరణ 7: $(3m - 2n^2)(-7mn)$ లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$

$= (-7mn) \times (3m - 2n^2)$ ∵ స్థిత్యంతర న్యాయము

$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$ ∵ విభాగ న్యాయము

$= -21m^2n + 14mn^3$

ఇవి చేయండి

1. (i) $3x(4ax + 8by)$ (ii) $4a^2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)\,pq$ (iv) $(m^3 + n^3)5mn^2$ లబ్ధాలను కనుగొనండి.
2. ఒక ఏకపది మరియు ఒక ద్విపది లబ్ధంలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదాలు ఉంటాయి?

11.5.2 Multiplying a trinomial by a monomial

How many maximum terms are there in the product of a monomial and a trinomial?

Consider a monomial $2x$ and a trinomial $(3x + 4y - 6)$

Their product$= 2x \times (3x + 4y - 6)$

$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$ (by using distributive law)

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

Exercise - 11.2

1. Complete the table.

S.No.	First Expression	Second Expression	Product
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	…………………………………
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	…………………………………
4	$x-2y+3z$	xyz	…………………………………
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	…………………………………

2. Simplify: $4y(3y+4)$
3. Simplify $x(2x^2-7x+3)$ and find the values of it for (i) $x = 1$ and (ii) $x = 0$
4. Add the product: $a(a-b), b(b-c), c(c-a)$
5. Add the product: $x(x+y-r), y(x-y+r), z(x-y-z)$
6. Subtract the product of $2x(5x-y)$ from product of $3x(x+2y)$
7. Subtract $3k(5k-l+3m)$ from $6k(2k+3l-2m)$
8. Simplify: $a^2(a-b+c)+b^2(a+b-c)-c^2(a-b-c)$

11.6 Multiplying a binomial by a binomial or trinomial

11.6.1 Multiplying a binomial by a binomial

Consider two binomials as $5x+6y$ and $3x - 2y$

Now, let us find the product of two binomials $5x+6y$ and $3x -2y$

11.5.2 త్రిపదిని ఏకపదితో గుణించుట

త్రిపది మరియు ఏకపదిల లబ్ధంలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదాలు ఉంటాయి?

ఏకపది $2x$ మరియు త్రిపది $(3x + 4y - 6)$ లను తీసుకొనిన

వాటి లబ్ధము $= 2x \times (3x + 4y - 6)$

$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$ (విభాగన్యాయమును ఉపయోగించి)

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

అభ్యాసము - 11.2

1. పట్టికను పూర్తిచేయండి.

క్ర.సం.	మొదటి సమాసము	రెండవ సమాసము	లబ్ధము
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	....
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	....
4	$x-2y+3z$	xyz	....
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	....

2. $4y(3y+4)$ సూక్ష్మీకరించండి.
3. $x(2x^2-7x+3)$ ను సూక్ష్మీకరించి (i) $x = 1$ మరియు (ii) $x = 0$ విలువలకు లబ్ధము విలువలను కనుగొనండి.
4. $a(a-b)$, $b(b-c)$, $c(c-a)$ ల లబ్ధాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.
5. $x(x+y-r)$, $y(x-y+r)$, $z(x-y-z)$ ల లబ్ధాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.
6. $3x(x+2y)$ ల లబ్ధం నుండి $2x(5x-y)$ లబ్ధాన్ని తీసివేయండి.
7. $6k(2k+3l-2m)$ నుండి $3k(5k-l+3m)$ ను తీసివేయండి.
8. $a^2(a-b+c)+b^2(a+b-c)-c^2(a-b-c)$ ని సూక్ష్మీకరించండి.

11.6 ద్విపదిని, ఒక ద్విపది లేదా ఒక త్రిపదితో గుణించుట

11.6.1 ద్విపదుల మధ్య గుణకారము

ద్విపదులు $5x+6y$ మరియు $3x - 2y$ లను తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు మనము $5x+6y$ మరియు $3x -2y$ ద్విపదుల లబ్ధాన్ని కనుగొందాము.

The procedure of multiplication is:

Step	Instructions	Procedure
1.	Write the product of two binomials	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x\text{-}2y)$
2.	Using distributive law multiply the first term of the first binomial by the second binomial, multiply the second term of the first binomial by the second binomial and add the products.	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $= (5x\times 3x)\text{-}(5x\times 2y) + (6y\times 3x)-(6y\times 2y)$
3.	Simplify the terms	$(5x\times 3x)-(5x\times 2y) + (6y\times 3x)-(6y\times 2y)$ $=15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2$
4.	Add like terms	$15\ x^2+8xy\text{-}12y^2$

Hence, the product of $5x + 6y$ and $3x - 2y$

$= (5x + 6y)(3x - 2y)$

$= 5x(3x - 2y) + 6y(3x - 2y)$ (by using distributive law)

$= (5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y\times 3x)-(6y\times 2y)$

$=15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2$

$= 15\ x^2+8xy - 12y^2$

Do This

1. Find the product:

   (i) $(a - b)(2a + 4b)$ (ii) $(3x + 2y)(3y - 4x)$

   (iii) $(2m - l)(2l - m)$ (iv) $(k + 3m)(3m - k)$

2. How many number of maximum terms will be there in the product of two binomials?

11.6.2 Multiplying a binomial by a trinomial

Consider a binomial $2x + 3y$ and trinomial $3x + 4y - 5z$.

Now, let us multiply $2x + 3y$ by $3x + 4y - 5z$.

గుణకార విధానక్రమము క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

సోపానము	సూచనలు	విధానక్రమము
1.	రెండు ద్విపదులను లబ్ధముగా వ్రాయండి.	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x-2y)$
2.	విభాగన్యాయాన్ని ఉపయోగించి మొదటి ద్విపది మొదటి పదముతో రెండవ ద్విపదిని గుణించి పిదప మొదటి ద్విపది రెండవ పదముతో రెండవ ద్విపదిని గుణించి సంకలనంగా వ్రాయండి.	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $=(5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$
3.	పదాలను సూక్ష్మీకరించండి.	$(5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$ $=15x^2-10xy+18xy-12y^2$
4.	సజాతి పదాలను కూడండి.	$15x^2+8xy-12y^2$

కావున $(5x+6y)$ మరియు $3x-2y$ ల లబ్ధము

$= (5x+6y)(3x-2y)$

$= 5x(3x-2y)+6y(3x-2y)$ (విభాగన్యాయమును ఉపయోగించి)

$= (5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$

$=15x^2-10xy+18xy-12y^2$

$= 15x^2+8xy-12y^2$

ఇవి చేయండి

1. లబ్ధాలను కనుగొనండి:
   (i) $(a-b)(2a+4b)$ (ii) $(3x+2y)(3y-4x)$
   (iii) $(2m-l)(2l-m)$ (iv) $(k+3m)(3m-k)$
2. రెండు ద్విపదుల లబ్ధములో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదములు ఉండును?

11.6.2 ద్విపదిని త్రిపదిచే గుణించుట

ద్విపది $2x+3y$ మరియు త్రిపది $3x+4y-5z$ లను తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు మనము $2x+3y$ ని $3x+4y-5z$ చే గుణిద్దాము.

The process of the multiplication is:

Step	Instructions	Process
1.	Write the products of the binomials and trinomial using multiplicative symbol	$(2x+3y)\ (3x+4y-5z)$
2.	Use distributive law: Multiply the first term of the binomial by the trinomial and multiply the second term of the binomial by the trinomial and then add the products.	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	Simplify the terms	$(2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+$ $(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$
4.	Add like terms	$6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$ $6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

Hence, the product *of* $(2x+3y)$ and $(3x+4y-5z)$ can be written as

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ (by using distributive law)

$= (2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+ (3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$

$=6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

How many maximum number of terms we get in the products of a binomial and a trinomial?

Exercise - 11.3

1. Multiply the binomials:
   (i) $2a-9$ and $3a+4$ (ii) $x-2y$ and $2x-y$
   (iii) $kl+lm$ and $k-l$ (iv) m^2-n^2 and $m+n$
2. Find the product of the following:
   (i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (ii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$
   (iii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$
3. Simplify the following:
   (i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

గుణకార విధానక్రమము క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

సోపానము	సూచనలు	విధానక్రమము
1.	ద్విపది మరియు త్రిపదుల మధ్య గుణకార గుర్తునుంచి లబ్ధముగా వ్రాయాలి.	$(2x+3y)\,(3x+4y-5z)$
2.	విభాగన్యాయాన్ని ఉపయోగించి ద్విపదిలోని మొదటి పదముతో త్రిపదిని గుణించి తరువాత ద్విపది రెండవ పదముతో త్రిపది గుణించి లబ్ధాలను సంకలనంగా వ్రాయాలి.	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	పదాలను సూక్ష్మీకరించండి.	$(2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+$ $(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$
4.	సజాతి పదాలను కూడగా	$6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$ $6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

కావున $(2x+3y)$ మరియు $(3x+4y-5z)$ ల లబ్ధము

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ (విభాగన్యాయమును ఉపయోగించి)

$= (2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$

$=6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

> ఒక ద్విపది మరియు త్రిపదుల లబ్ధంలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని పదాలు ఉంటాయి?

అభ్యాసము - 11.3

1. క్రింది ద్విపదులను గుణించండి.
   (i) $2a-9$ మరియు $3a+4$ (ii) $x-2y$ మరియు $2x-y$
   (iii) $kl+lm$ మరియు $k-l$ (iv) m^2-n^2 మరియు $m+n$
2. క్రింది లబ్ధాలను కనుగొనండి.
   (i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (ii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$
   (iii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$
3. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.
   (i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

4. If a, b, c are positive real numbers such that $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$, find the value of $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

11.7 What is an identity?

Consider the equation $a(a-2)=a^2-2a$

Verify both sides of the equation for any value of a

For $a=5,$ LHS $= 5(5-2) = 5\times3 = 15$

RHS $= 5^2-2(5) = 25 - 10 = 15$

Hence, in the equation LHS = RHS for $a=5$.

Similarly, let us consider $a = -2$

LHS $= (-2)(-2-2) = (-2)\times(-4) = 8$

RHS $= (-2)^2-2(-2) = 4+4 = 8$

Thus, in the equation LHS = RHS for $a=-2$ *also.*

We can say that the equation is true for any value of a. Therefore, the equation is called an identity.

Consider an equation $a(a+1) = 6$

This equation is true only for $a = 2$ and -3 but it is not true for other values.

So, this $a(a+1)=6$ equation is not an identity. An equation is called an identity if it is satisfied by any value that replaces its variable(s).

An equation is true for certain values of the variable in it, where as an identity is true for all its variables. Thus it is known as universally true equation. We use symbol for denoting identity is '$\equiv$' (read as identically equal to)

11.8 Some important Identities

We often use some of the identities, which are very useful in solving problems. Those identities used in multiplication are also called as special products. Among them, we shall study three important identities, which are products of a binomial.

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

4. a, b, c లు ధనవాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$, అయిన $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ విలువ కనుగొనుము.

11.7 సర్వసమీకరణము అనగా నేమి?

$a(a-2)=a^2-2a$ సమీకరణమును తీసుకొనుము.

సమీకరణం ఇరువైపులా, a యొక్క వివిధ విలువలకు సరిచూడండి.

$a=5$ విలువ తీసుకొంటే L.H.S $= 5(5-2) = 5\times3 = 15$

R.H.S $= 5^2-2(5) = 25 - 10 = 15$

కావున, సమీకరణములో $a=5$ విలువలకు L.H.S = R.H.S.

అలాగే $a = -2$ ను తీసుకోండి.

L.H.S $= (-2)(-2-2) = (-2)\times(-4) = 8$

R.H.S $= (-2)^2-2(-2) = 4+4 = 8$

ఆ విధంగా $a=-2$ విలువలకు కూడా సమీకరణములోని L.H.S = R.H.S నకు సమానం.

సమీకరణం a యొక్క ఏ విలువకైనా సత్యమైనది. అందువలన ఇలాంటి సమీకరణాల్ని సర్వసమీకరణం అంటారు.

$a(a+1) = 6$ అనే సమీకరణాన్ని తీసుకోండి.

ఈ సమీకరణం $a = 2$ లేదా -3కు సత్యం కాని ఇతర విలువలకు సత్యం కావు.

ఈ విధమైన సమీకరణాలు చరరాశి ఏ విలువకైనా సంతృప్తినొందవు.

కావున $a(a+1) = 6$ సమీకరణం "సర్వసమీకరణం"కాదు. సమీకరణంలోని చరరాశుల బదులుగా ఏ విభాగము ప్రతిక్షేపించినా సత్యమైతే దాన్ని సర్వసమీకరణమని, కొన్ని విలువలకే సత్యమైతే సమీకరణమని అంటారు. సర్వసమీకరణం రాసేటప్పుడు L.H.S మరియు R.H.S ల మధ్య '$\equiv$' గుర్తు (సర్వసమానం అని చదువుతారు.) ఉపయోగిస్తాం.

11.8 ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు

సమస్యల సాధనలో కొన్ని సర్వసమీకరణాలను తరచుగా ఉపయోగిస్తాము. అలాంటి సర్వసమీకరణాలను ప్రత్యేక లబ్ధాలని కూడా పిలుస్తారు. అందులో ముఖ్యమైన మూడు సర్వసమీకరణాలను అధ్యయనం చేద్దాం అవి ద్విపదుల లబ్ధముగా ఉండేవి అంటే ఒక ద్విపది ఇంకో ద్విపదిచే గుణించబడేవి.

Consider $(a+b)^2$

Now,

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a(a+b) + b(a+b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \qquad \text{(since } ab = ba\text{)} \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

Thus $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

Now, take a=2, b=3, we obtain (LHS) $= (a+b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

(RHS) $= a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

Observe the LHS and RHS. The values of the expressions on the LHS and RHS are equal.

Verify Identity-I for some positive integer, negative integer and fraction by (taking some values for a,b)

Do This

Taking a, b, c as positive integers,verify the following whether they are identities or not?

(i) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

(iii) $(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Consider one more identity, $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$,

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x+b) &= x(x+b) + a(x+b) \\
&= x^2 + bx + ax + ab \\
&= x^2 + (a+b)x + ab
\end{aligned}
$$

Do This

Now take $x = 2$, $a = 1$ and $b = 3$, verify the above identity.

- What do you observe? Is LHS = RHS?
- Take different values for x, a and b for verification of the above identity.
- Is it always LHS = RHS for all values of a and b?

$(a+b)^2$ ను పరిశీలించండి

ఇప్పుడు,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{(ఎందుచేతననగా } ab = ba)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

కావున $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (I)

ఇప్పుడు, a=2, b=3 తీసుకుంటే (L.H.S) $= (a+b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

(R.H.S) $= a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

L.H.S మరియు R.H.S ల విలువలు సమానం. కొన్ని ఋణ మరియు ధన పూర్ణసంఖ్యలను, భిన్నాలను a, b లకు విలువలుగా ఎంచుకొని సర్వసమీకరణంను సరిచూడండి.

ఇవి చేయండి

a, b, c లను ధన పూర్ణసంఖ్యలుగా తీసుకొని క్రింద ఇవ్వబడిన సర్వసమీకరణాలు అవునో, కావో సరిచూడండి.

(i) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

(iii) $(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ఇంకొక సమీకరణాన్ని తీసుకొనుము. $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$,

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

ఇవి చేయండి

ఇప్పుడు $x = 2$, $a = 1$ మరియు $b = 3$, విలువలకు పై సర్వసమీకరణం సరిచూడండి.

- L.H.S = R.H.S అవుతుందా? మీరేమి గమనించారు?
- x, a మరియు b యొక్క వివిధ విలువలకు పై సర్వసమీకరణం సరిచూడండి.
- a, b యొక్క అన్ని విలువలకు ఎల్లప్పుడు L.H.S = R.H.S అవుతుందా?

- Consider $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$

  (i) Put q instead of 'p' what do you observe?

  (ii) Put p instead of 'q' what do you observe?

11.9 Application of Identities

Example 8: Expand $(3x + 4y)^2$

Solution: $(3x + 4y)^2$ is the product of two binomial expressions, which have the same terms $(3x + 4y)$ and $(3x + 4y)$. It can be expanded by the method of multiplying a binomial by a binomial. Compare the identities with this product. In this product $a = 3x$ *and* $b = 4y$. We can get the result of this product by substituting $3x$ and $4y$ terms in the place of a and b respectively in the first identity $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Hence, $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

Where $a = 3x$ and $b = 4y$
identity $(a + b)^2 \equiv a^2+2ab + b^2$

Example 9: Find 204^2 using suitable identify

$204^2 = (200 + 4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

Where $a = 200$ and $b = 4$
identity $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

Do This

Expand: (i) $(5m + 7n)^2$ (ii) $(6kl + 7mn)^2$ (iii) $(5a^2 + 6b^2)^2$ (iv) 302^2

(v) 807^2 (vi) 704^2

(vii) Verify the identity : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, where $a = 3m$ and $b = 5n$

Example10: Expand $(3m - 5n)^2$

Solution: $(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

Where $a = 3m$ and $b = 5n$
identity: $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

- $(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$ అని భావించి

  (i) 'p' బదులుగా 'q' ప్రతిక్షేపించండి. ఏమి గమనించారు?

  (ii) 'q' బదులుగా 'p' ప్రతిక్షేపించండి. ఏమి గమనించారు?

11.9 సర్వసమీకరణాల వినియోగం

ఉదాహరణ 8: $(3x + 4y)^2$ విస్తరించండి.

సాధన: $(3x + 4y)^2$, రెండు ద్విపదుల లబ్ధం. ఇందులో రెండు పదాలు $(3x + 4y)$ మరియు $(3x + 4y)$ సమాన పదాలు. ద్విపదులను రెండింటిని గుణించడం వల్ల విస్తరణ చేయవచ్చు. ఈ లబ్ధంతో సర్వసమీకరణాలను పోల్చండి. ఈ లబ్ధంలో $a = 3x$ మరియు $b = 4y$ లను మొదటి సర్వ సమీకరణం $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ లోను ప్రతిక్షేపించి సరిచూడవచ్చును.

కావున $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

$a = 3x$ మరియు $b = 4y$ సర్వసమీకరణం $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ వాస్తవం.

ఉదాహరణ 9: 204^2 విలువను సరియైన సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

సాధన: $204^2 = (200 + 4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

$a = 200$ మరియు $b = 4$
$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
సర్వసమీకరణం

ఇవి చేయండి

(i) $(5m + 7n)^2$ (ii) $(6kl + 7mn)^2$ (iii) $(5a^2 + 6b^2)^2$ (iv) 302^2

(v) 807^2 (vi) 704^2 లను విస్తరించండి.

(vii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ సర్వసమీకరణాన్ని, $a = 3m$ మరియు $b = 5n$ అయినప్పుడు సరిచూడండి

ఉదాహరణ10: $(3m - 5n)^2$ను విస్తరించుము.

సాధన: $(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

$a = 3m$, $b = 5n$ అయినప్పుడు
$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

Example11: Find 196^2

> Where $a = 200$ and $b = 4$
> identity: $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

Solution: $196^2 = (200-4)^2$

$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 - 1600 + 16$

$= 38416$

Do This

Find: (i) $(9m-2n)^2$ (ii) $(6pq-7rs)^2$ (iii) $(5x^2 - 6y^2)^2$

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2

Example:12: Find $(4x+5y)(4x-5y)$

> Where $a = 4x$ and $b = 5y$
> identity: $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

Solution: $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2 - (5y)^2$

$= 16x^2 - 25y^2$

Example:13: Find 407×393

> Where $a = 400$ and $b = 7$ in the identity: $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

Solution: $407 \times 393 = (400+7)(400-7)$

$= 400^2 - 7^2$

$= 160000 - 49$

$= 159951$

Example:14: Find $987^2 - 13^2$

> Where $a = 987$ and $b = 13$ in the identity: $a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$

Solution: $987^2 - 13^2 = (987+13)(987-13)$

$= 1000 \times 974 = 974000$

Do These

Find the values of the following.

(i) $(6m+7n)(6m-7n)$ (ii) $(5a+10b)(5a-10b)$

(iii) $(3x^2+4y^2)(3x^2-4y^2)$ (iv) 106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$

(vii) $984^2 - 16^2$

Example15: Find 302×308

> Where $x = 300$, $a = 2$ and $b = 8$ in the identity: $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

Solution: $302 \times 308 = (300+2)(300+8)$

$= 300^2 + (2+8)(300) + (2)(8)$

$= 90000 + (10 \times 300) + 16$

$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

ఉదాహరణ 11: 196^2 విలువను కనుగొనుము.

$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ సర్వ సమీకరణంలో $a = 200, b = 4$ అయినప్పుడు

సాధన: $196^2 = (200-4)^2$

$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 - 1600 + 16$

$= 38416$

ఇవి చేయండి

(i) $(9m-2n)^2$ (ii) $(6pq-7rs)^2$ (iii) $(5x^2 - 6y^2)^2$ లను విస్తరించండి.

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2 ల విలువలు కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 12: $(4x+5y)(4x-5y)$ విలువను కనుగొనుము.

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$
$a = 4x, b = 5y$ అయినప్పుడు

సాధన: $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2 - (5y)^2$

$= 16x^2 - 25y^2$

ఉదాహరణ 13: 407×393 విలువను కనుగొనుము.

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$
$a = 400, b = 7$ అయినప్పుడు

సాధన: $407 \times 393 = (400+7)(400-7)$

$= 400^2 - 7^2$

$= 160000 - 49$

$= 159951$

ఉదాహరణ 14: $987^2 - 13^2$ విలువను కనుగొనుము.

$a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$
$a = 987, b = 13$ అయినప్పుడు

సాధన: $987^2 - 13^2 = (987+13)(987-13)$

$= 1000 \times 974 = 974000$

ఇవి చేయండి

క్రింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $(6m+7n)(6m-7n)$ (ii) $(5a+10b)(5a-10b)$

(iii) $(3x^2+4y^2)(3x^2-4y^2)$ (iv) 106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$

(vii) $984^2 - 16^2$

ఉదాహరణ 15: 302×308 విలువను కనుగొనుము.

సర్వసమీకరణం $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$, $x = 300, a = 2, b = 8$ అయినప్పుడు

సాధన: $302 \times 308 = (300+2)(300+8)$

$= 300^2 + (2+8)(300) + (2)(8)$

$= 90000 + (10 \times 300) + 16$

$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

Example16: Find 93×104

> Where $x = 100$ $a = -7$ and $b = 4$ in the identity: $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

Solution: $93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$

$$93 \times 104 = (100 - 7)(100 + 4)$$
$$= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4)$$
$$= 10000 + (-3)(100) + (-28)$$
$$= 10000 - 300 - 28$$
$$= 10000 - 328 = 9672$$

> Do you notice? Finding the products by using identities is much easier than finding by direct multiplication.

Exercise - 11.4

1. Select a suitable identity and find the following products

   (i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$

   (iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$

   (v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$

   (vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$

2. Evaluate the following by using suitable identities:

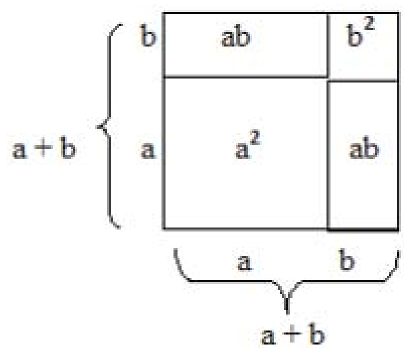
   (i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2

   (v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

11.10 Geometrical Verification of the identities

11.10.1 Geometrical Verification of the identity $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

Observe the following square:



Consider a square with side $(a + b)$

Its area = square of the side = $(\text{side})^2 = (\mathbf{a + b})^2$

Divide the square into four regions as shown in figure.

It consists of two squares with sides 'a' and 'b' respectively and two rectangles with length and breadth as 'a' and 'b' respectively.

Clearly, the area of the given square is equal to sum of the area of four regions.

ఉదాహరణ 16: 93 × 104 విలువను కనుగొనుము.

> సర్వసమీకరణం $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$, $x = 100$ $a = -7, b = 4$ అయినప్పుడు

సాధన:

$$
\begin{aligned}
93 \times 104 &= (100 + (-7))(100 + 4) \\
93 \times 104 &= (100 - 7)(100 + 4) \\
&= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4) \\
&= 10000 + (-3)(100) + (-28) \\
&= 10000 - 300 - 28 \\
&= 10000 - 328 = 9672
\end{aligned}
$$

> మీరు గమనించారా? నేరుగా సంఖ్యలను గుణించే కన్నా ప్రత్యేక లబ్ధాలను ఉపయోగించడం వల్ల సులభమవుతుంది కదా!

అభ్యాసము - 11.4

1. తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి, క్రింది వాటి లబ్ధములను కనుక్కోండి.

(i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$

(iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$

(v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$

(vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$

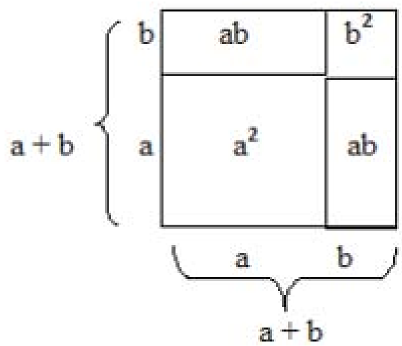
2. క్రింది వాటిని తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విలువలను కనుక్కోండి.

(i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2

(v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

11.10 సర్వసమీకరణాలను జ్యామితీయంగా సరిచూచుట

11.10.1 క్రింది చతురస్రాన్ని పరిశీలించండి. $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$



$(a + b)$ భుజంగాగల ఒక చతురస్రాన్ని తీసుకోండి.

దాని వైశాల్యము = భుజం యొక్క వర్గం. = $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$

చతురస్రంను పటంలో చూపినట్లు నాలుగు భాగాలుగా విభజింపబడ్డాయి.

ఇందులో రెండు వర్గాలు a, b భుజాలు కలిగిన రెండు చతురస్రాలు పొడవు 'a', వెడల్పు 'b' గా కల రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు కవలవు.

చతురస్ర వైశాల్యం, 4 భాగాల వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానము.

Area of the given square

$=$ Area of the square with side a + area of rectangle with sides a and b + area of rectangle with sides b and a + area of square with side b

$= a^2 + ab + ba + b^2$

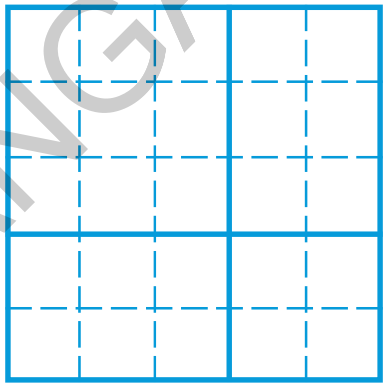
$= a^2 + 2ab + b^2$

Therefore, $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

Example17: Verify the identity $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ geometrically by taking $a = 3$ and $b = 2$

Solution: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

Draw a square with the side $a + b$, i.e., $3 + 2$



L.H.S. Area of whole square

$= (3 + 2)^2 = 5^2 = 25$

R.H.S. = Area of square with side 3 units +

Area of square with side 2 units +

Area of rectangle with sides 3 units, 2 units +

Area of rectangle with sides 2 units, 3 units

$= 3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$

$= 9 + 4 + 6 + 6 = 25$

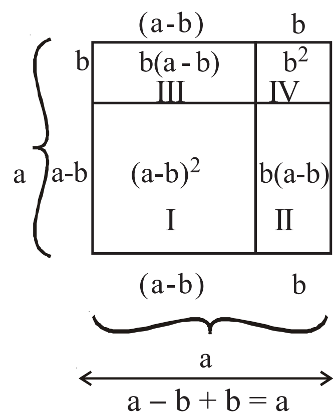
L.H.S. = R.H.S.

$\therefore$ Hence the identity is verified.

11.10.2 Geometrical Verification of the identity $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

Consider a square with side a.

- The area of the square = side × side = a^2
- The square is divided into four regions.
- It consists of two squares with sides $a - b$ and b respectively and two rectangles with length and breadth as ‘a – b’ and ‘b’ respectively.



ఇచ్చిన చతురస్రవైశాల్యం

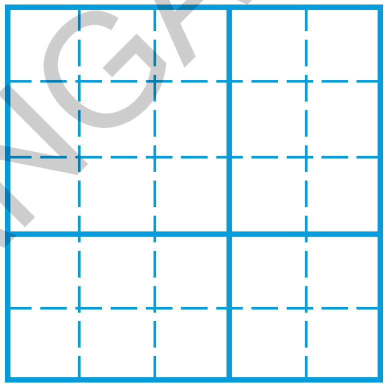
= భుజం a పొడవులు గల చతురస్రవైశాల్యం + a, b లు భుజాలుగా కల దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం + b, aలు భుజాలుగా కల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం + 'b' భుజాలుగా కల చతురస్ర వైశాల్యం.

= $a^2 + ab + ba + b^2$

= $a^2 + 2ab + b^2$

కావున, $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

ఉదాహరణ 17: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ సర్వ సమీకరణంను జ్యామితీయంగా $a = 3, b = 2$ విలువలకు సరిచూడండి.



సాధన: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

$a + b$ భుజం పొడవు అంటే $3 + 2$ ఉండేట్లు ఒక చతురస్రాన్ని గీయండి.

$= (3 + 2)^2 = 5^2 = 25$

R.H.S. = 3 యూనిట్లు భుజంగా గల చతురస్ర వైశాల్యం +
2 యూనిట్లు భుజంగా గల చతురస్ర వైశాల్యం +
3 యూనిట్లు పొడవు 2 యూనిట్లు వెడల్పు గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం +
2 యూనిట్లు పొడవు 3 యూనిట్లు వెడల్పు గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం +

= $3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$

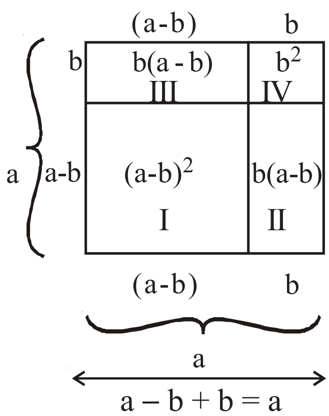
= $9 + 4 + 6 + 6 = 25$

L.H.S. = R.H.S.

$\therefore$ కావున సర్వసమానత సరిచూడబడినది.

11.10.2 $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ సర్వసమానతను జ్యామితీయంగా సరిచూచుట

'a' భుజము కొలతగా కల ఒక చతురస్రము తీసుకొనుము.



- చతురస్ర వైశాల్యం = భు × భు = a^2
- ఈ చతురస్రం నాలుగు భాగాలుగా చేయబడింది.
- ఇది $(a - b)$, b భుజాలుగా కల రెండు చతురస్రాలు

 '$a - b$', 'b' భుజాలుగాగల రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు వరుసగా కలవు.

Now Area of figure I = Area of whole square with side 'a' –

Area of figure II – Area of figure III – Area of figure IV

$(a-b)^2 = a^2 - b\,(a-b) - b\,(a-b) - b^2$

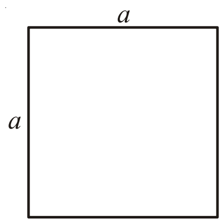
$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

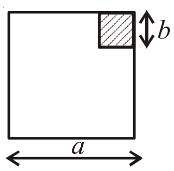
11.10.3 Geometrical Verification of the identity $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$

$a^2 - b^2$ = (Area of square where the side is 'a') – (Area of square where the side is 'b')

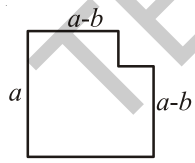
Observe the following square:



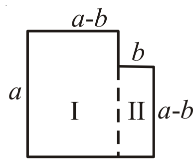
Remove suqare with a length of 'b' units from one corner of this square, where $b < a$



We get



It consist of two parts



So $a^2 - b^2$ = Area of figure I + area of figure II

$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$

$= (a - b)\,(a + b)$

Thus $a^2 - b^2 \equiv (a - b)\,(a + b)$

Exercise - 11.5

1. Verify the identity $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ geometrically by taking

   (i) $a = 2$ units, $b = 4$ units

   (ii) $a = 3$ units, $b = 1$ unit

   (iii) $a = 5$ units, $b = 2$ unit

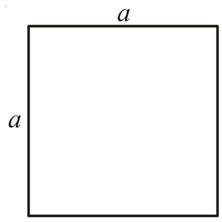
ఇప్పుడు Iవ పట వైశాల్యం = సంపూర్ణ చతురస్ర వైశాల్యం (భుజం పొడవు ‘a’) –
IIవ పట వైశాల్యం – IIIవ పట వైశాల్యం – IVవ పట వైశాల్యం

$$(a-b)^2 = a^2 - b\,(a-b) - b\,(a-b) - b^2$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

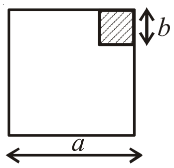
11.10.3 $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ సర్వసమానతను జ్యామితీయంగా సరిచూడడం

$a^2 - b^2$ = భుజం పొడవు ‘a’గా గల చతురస్ర వైశాల్యం – భుజం పొడవు ‘b’గాగల చతురస్ర వైశాల్యం

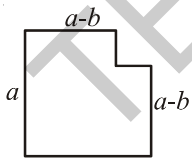
క్రింది చతురస్రాన్ని పరిశీలించండి.



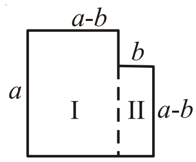
b యూనిట్ల భుజము పొడవు గల చతురస్రాన్ని ఒక మూల నుండి తొలగించండి. ఇచ్చట $(b < a)$



తొలగిస్తే



దీనిలో రెండు భాగాలు కలవు.



కావున $a^2 - b^2$ = Iవ పట వైశాల్యం + IIవ పట వైశాల్యం

$$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$$
$$= (a - b)\,(a + b)$$

అందుచే $a^2 - b^2 \equiv (a - b)\,(a + b)$ అయినది.

అభ్యాసం - 11.5

1. $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ ను జ్యామితీయంగా a, b ల క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

   (i) $a = 2$ యూనిట్లు, $b = 4$ యూనిట్లు

   (ii) $a = 3$ యూనిట్లు, $b = 1$ యూనిట్లు

   (iii) $a = 5$ యూనిట్లు, $b = 2$ యూనిట్లు

2. Verify the identity $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ geometrically by taking

(i) $a = 3$ units, $b = 1$ unit

(ii) $a = 5$ units, $b = 2$ units

3. Verify the identity $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ geometrically by taking

(i) $a = 3$ units, $b = 2$ units

(ii) $a = 2$ units, $b = 1$ unit

What we have discussed

1. There are number of situations in which we need to multiply algebraic expressions.
2. A monomial multiplied by a monomial always gives a monomial.
3. In carrying out the multiplication of an algebraic expression with another algebraic expression (monomial / binomial / trianomial etc.) we multiply term by term i.e. every term of the expression is multiplied by every term in the other expression.
4. An **identity** is an equation, which is true for all values of the variables in the equation. On the other hand, an equation is true only for certain values of its variables. An equation is not an identity.
5. The following are identities:

   I. $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

   II. $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

   III. $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

   IV. $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

6. The above four identities are useful in carrying out squares and products of algebraic expressions. They also allow easy alternative methods to calculate products of numbers and so on.

Z6V3L6

2. $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ ను జ్యామితీయంగా a, b ల క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

   (i) $a = 3$ యూనిట్లు, $b = 1$ యూనిట్లు

   (ii) $a = 5$ యూనిట్లు, $b = 2$ యూనిట్లు

3. $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ ను జ్యామితీయంగా a, b ల క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

   (i) $a = 3$యూనిట్లు, $b = 2$ యూనిట్లు

   (ii) $a = 2$ యూనిట్లు, $b = 1$ యూనిట్లు

మనం ఏమి చర్చించాం

1. బీజీయ సమాసాలను గుణించడం ఎన్నో గణనీయమైన సందర్భాల్లో అవసరమవుతాయి.

2. ఏకపదిని మరొక ఏకపదిచే గుణించగా లబ్ధం ఏకపది వచ్చును.

3. ద్విపది లేదా త్రిపదిచే బహుపదిని గుణించేటప్పుడు పదం వెంబడి పదం (అనగా ద్వి లేదా త్రిపదిలోని ప్రతీపదంతో బహుపదిలోని ప్రతీ పదాన్ని గుణించాలి). లబ్ధంలోని పదాల్లో కొన్ని సజాతి పదాలు ఉండచ్చు. వాటిని కూడాలి.

4. సర్వసమానత్వం అనునది ఒక సమానత. సమీకరణంలోని సమానత్వం, చరరాశిలోని అన్ని విలువలకు సత్యమైనపుడు సర్వసమానత్వం అవుతుంది. ఇంకోవైపు సమీకరణం కొన్ని విలువలకే సత్యం అయితే సర్వసమానత్వంలో అన్ని విలువలకు సత్యం అవుతాయి. అన్ని సమీకరణాలు, సర్వసమీకరణాలు కాదు.

5. సర్వసమీకరణములు :

   I. $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

   II. $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

   III. $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

   IV. $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

E6X2B6

6. సర్వసమీకరణాల బీజీయ సమస్యల గుణకారముల యందు ఉపయోగపడను. సంఖ్యల లబ్ధములు కనుగొనుటకు సులభమైన పద్ధతుల ద్వారా తగ్గించటకు ఉపయోగపడును.

CHAPTER 12

Factorisation

A9G9F2

12.0 Introduction

Let us consider the number 42 . Try to write '42' as product of any two numbers.

$$
\begin{aligned}
42 &= 1 \times 42\\
&= 2 \times 21\\
&= 3 \times 14\\
&= 6 \times 7
\end{aligned}
$$

Thus 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 and 42 are the factors of 42. Among the above factors, which are prime numbers?

Do you express 42 as product of prime numbers? Try.

Rafi did like this	Sirisha did like this	Akbar did like this
$42 = 2 \times 21$	$42 = 3 \times 14$	$42 = 6 \times 7$
$= 2 \times 3 \times 7$	$= 2 \times 3 \times 7$	$= 2 \times 3 \times 7$

What do you observe? We observe that $2 \times 3 \times 7$ is the product of prime factors in every case.

Now consider another number say '70'

The factors of 70 are 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 and 70

70 can be written as $2 \times 5 \times 7$ as the product of prime factors.

Expressing as a product of prime factors is called the prime factorisation method.

$$
\begin{aligned}
70 &= 1 \times 70\\
&= 2 \times 35\\
&= 5 \times 14\\
&= 7 \times 10
\end{aligned}
$$

Do This

Express the given numbers in the form of product of primes

(i) 48 (ii) 72 (ii) 96

As we did for numbers we can also express algebraic expressions as the product of their factors. We shall learn about factorisation of various algebraic expressions in this chapter.

అధ్యాయం

12

కారణాంక విభజన

F3A6M2

12.0 పరిచయం

42 సంఖ్యను తీసుకోండి. '42' ను ఏవేని రెండు సంఖ్యల లబ్ధముగా రాయడానికి ప్రయత్నించండి.

$$\begin{aligned} 42 &= 1 \times 42 \\ &= 2 \times 21 \\ &= 3 \times 14 \\ &= 6 \times 7 \end{aligned}$$

అందుచే 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 మరియు 42 లు, 42 యొక్క కారణాంకములు, పై కారణాంకములలో ఏ సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు?

42 ను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధముగా వ్యక్తపరచగలమా? ప్రయత్నించండి.

రఫి ఈవిధంగా చేశాడు	శిరీష ఈవిధంగా చేసింది	అక్బరు ఈవిధంగా చేశాడు
$42 = 2 \times 21$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 3 \times 14$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 6 \times 7$ $= 2 \times 3 \times 7$

మీరు ఏమి గమనించారు? మూడు పద్ధతులలోను $2 \times 3 \times 7$ గా కారణాంకాల లబ్ధముగా వచ్చినది.

ఇప్పుడు మరో సంఖ్య '70'ని తీసుకుందాం.

$$\begin{aligned} 70 &= 1 \times 70 \\ &= 2 \times 35 \\ &= 5 \times 14 \\ &= 7 \times 10 \end{aligned}$$

1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 మరియు 70 లు 70 యొక్క కారణాంకములు

70 ని $2 \times 5 \times 7$ గా ప్రధానసంఖ్యల లబ్ధముగా వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఒక సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్యక్తపరిచే పద్ధతి 'ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి' అంటారు.

ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది వాటిని ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్యక్తపరుచుము.

(i) 48 (ii) 72 (ii) 96

సంఖ్యలను వాటి కారణాంకము లబ్ధముగా రాసిన విధంగానే బీజీయ సమాసాలను కూడా వాటి కారణాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో వివిధ రకాల బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన గూర్చి నేర్చుకుంటాము.

12.1 Factors of algebraic expressions

Consider the following example :

$$7yz = 7(yz) \quad (7 \text{ and } yz \text{ are the factors})$$
$$= 7y(z) \quad (7y \text{ and } z \text{ are the factors})$$
$$= 7z(y) \quad (7z \text{ and } y \text{ are the factors})$$
$$= 7 \times y \times z \quad (7, y \text{ and } z \text{ are the factors})$$

Among the above factors 7, y, z are irreducible factors. The phrase '*irreducible*' is used in the place of '*prime*' in algebraic expressions. Thus we say that $7\times y\times z$ is the irreducible form of $7yz$. Note that $7\times(yz)$ or $7y(z)$ or $7z(y)$ are not an irreducible form.

'1' is the factor of $7yz$, since $7yz = 1\times7\times y\times z$. In fact '1' is the factor of every term. But unless required, '1' need not be shown separately.

Let us now consider the expression $7y(z+3)$.

It can be written as $7y\,(z+3) = 7\times y\times(z+3)$. Here $7, y, (z+3)$ are the irreducible factors.

Similarly $5x\,(y+2)\,(z+3) = 5\times x\times(y+2)\times(z+3)$ Here 5 , x , $(y+2)$, $(z+3)$ are irreducible factors.

Do This

1. Find the factors of following algebraic expressions:

   (i) $8x^2yz$ (ii) $2xy\,(x+y)$ (iii) $3x+y^3z$

12.2 Need of factorisation

When an algebraic expression is factorised, it is written as the product of its factors. These factors may be numerals, algebraic variables or terms of algebraic expressions.

Consider the algebraic expression $23a+23b+23c$.

This can be written as $23(a+b+c)$,

here the irreducible factors are 23 and $(a+b+c)$. 23 is a numerical factor and $(a+b+c)$ is algebraic factor.

Let us, discuss about the methods to find factors of an algebraic expression.

Consider the algebraic expressions (i) x^2y+y^2x+xy (ii) $(4x^2-1)\div(2x-1)$.

The first expression $x^2y+y^2x+xy = xy(x+y+1)$ thus the above algebraic expression is written in simpler form.

12.1 బీజీయ సమసాల కారణాంక విభజన

ఈ ఉదాహరణను పరిశీలింపుము.

$7yz = 7(yz)$ (7 మరియు yz కారణాంకములు)

$= 7y(z)$ ($7y$ మరియు z కారణాంకములు)

$= 7z(y)$ ($7z$ మరియు y కారణాంకములు)

$= 7 \times y \times z$ ($7, y$ మరియు z కారణాంకములు)

బీజీయ సమాసాలను కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయవచ్చునని మనకు తెలుసు. $7, y, z$ లు $7yz$ యొక్క అవిభాజ్య కారణాంకములు. ఇందులో "అవిభాజ్య కారణాంకములు" అను పదము ప్రధాన కారణాంకాలు "అనుదానికి బదులుగా ఉపయోగించబడినది. అందుచే $7 \times y \times z$ అనేది $7yz$ యొక్క అవిభాజ్య కారణాంక రూపమని చెప్పవచ్చు. $7 \times (yz)$ లేదా $7y(z)$ లేదా $7z(y)$ లు అవిభాజ్య రూపములు కావు.

> $7yz = 1 \times 7 \times y \times z$ కనుక 1, $7yz$ నకు ఒక కారణాంకము. 1, ప్రతి సంఖ్యకు కారణాంకం కాని అవసరమైనపుడు మాత్రమే '1' ని ఒక కారణాంకముగా చూపాలి.

$7y(z+3)$ బీజీయ సమాసమును తీసుకొందాం.

$7y\,(z + 3) = 7 \times y \times (z+3)$ అని రాయగలము. ఇక్కడ $7, y, (z + 3)$ లు అవిభాజ్య కారణాంకములు.

అదేవిధముగా $5x\,(y+2)\,(z+3) = 5 \times x \times (y + 2) \times (z + 3)$ ఇచ్చట $5\,, x\,, (y + 2)\,, (z + 3)$ లు అవిభాజ్య కారణాంకములు.

ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది బీజీయ సమాసము యొక్క కారణాంకములు కనుక్కోండి.

   (i) $8x^2yz$ (ii) $2xy\,(x + y)$ (iii) $3x + y^3z$

12.2 కారణాంక విభజన ఆవశ్యకత

ఒక బీజీయ సమాసము యొక్క కారణాంక విభజన జరిగితే దానిని కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయవచ్చు. కారణాంకములు సంఖ్యలు, బీజీయ చరరాశులు లేదా బీజీయ సమాసాలు కావచ్చు.

బీజీయ సమాసము $23a + 23b + 23c$ ను తీసుకొందాం.

$23a + 23b + 23c$ ను $23(a + b + c)$ గా రాయవచ్చు.

అనగా 23 మరియు $a + b + c$ లు కారణాంకములు. ఇందులో 23 సంఖ్యాకారణాంకము మరియు $(a + b + c)$ బీజీయ కారణాంకము.

ఇప్పుడు బీజయ సమాస కారణాంక విభజన పద్ధతులను గూర్చి చర్చిద్దాం.

క్రింది బీజీయ సమాసములు తీసుకొనుము. (i) $x^2y + y^2x + xy$ (ii) $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$.

మొదటి సమాసమును $x^2y + y^2x + xy = xy(x + y + 1)$ అనే సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయవచ్చును.

The second expression $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{(2x)^2 - (1)^2}{2x - 1}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)}$$

$$= (2x + 1)$$

From above illustrations it is noticed that the factorisation has helped to write the algebraic expression in simpler form and it also helps in simplifying the algebraic expression

Let us now discuss of factorisation of some algebraic expressions.

12.3 Method of common factors

Let us factorise $3x + 12$

On writing each term as the product of irreducible factors we get :

$3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3)$

What are the common factors of both the terms ?

By taking the common factor 3, we get

$3 \times [x + (2 \times 2)] = 3 \times (x + 4) = 3\ (x + 4)$

Thus the expression $3x + 12$ is the same as $3\ (x + 4)$.

Now we say that 3 *and* $(x + 4)$ are the factors of $3x + 12$ .Also note that these factors are irreducible.

Now let us factorise another expression $6ab+12b$

$6ab+12b = (\underline{2 \times 3} \times a \times \underline{b}) + (2 \times \underline{2 \times 3 \times b})$

$= \underline{2 \times 3 \times b} \times (a + 2) \quad = 6b\ (a + 2)$

> $6b$ is the HCF of $6ab$ and $12b$

$\therefore\ 6ab + 12b = 6b\ (a + 2)$

Example 1: Factorize (i) $6xy + 9y^2$ (ii) $25\ a^2b + 35ab^2$

Solution: (i) $6xy + 9y^2$

We have $6\,x\,y = 2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}$ and $9y^2 = 3 \times \underline{3 \times y} \times y$

3 and 'y' are the common factors of the two terms

రెండవ సమాసము $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{(2x)^2-(1)^2}{2x-1}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)}$$

$$= (2x+1)$$

పై ఉదాహరణల నుండి బీజీయ సమాసములను సూక్ష్మీకరించుటకు, సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుటకు కారణాకం విభజన సహాయపడునని తెలియుచున్నది.

ఇప్పుడు కొన్ని బీజీయ సమాసములను కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయుట చర్చిద్దాము.

12.3 సామాన్య కారణాంకముల పద్ధతి

$3x + 12$ను కారణాంక విభజన చేద్దాం

ప్రతీ పదమును అవిభాజ్య కారణాంకముల లబ్ధముగా రాస్తే

$3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3)$గా వస్తుంది.

రెండింటి యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకము ఏమిటి?

3 ను ఉమ్మడి లేదా సామాన్య కారణాంకముగా తీసుకొంటే

$3 \times [x + (2\times2)] = 3 \times (x + 4) = 3\,(x + 4)$

$3x + 12$ మరియు $3\,(x + 4)$ ఒకే సమాసమును సూచిస్తాయి.

3, $(x + 4)$ లు $3x + 12$ యొక్క కారణాంకములు. మీరు గమనిస్తే అన్ని కారణాంకముల అవిభాజ్య కారణాంకములు.

$6ab+12b$ ను కారణాంక విభజన చేద్దాం.

$6ab$, $12b$ ల గ.సా.భా $6b$

$6ab+12b = (\underline{2 \times 3} \times a \times \underline{b}) + (2 \times \underline{2 \times 3 \times b})$

$= \underline{2 \times 3 \times b} \times (a + 2) \quad = 6b\,(a + 2)$

$\therefore 6ab + 12b = 6b\,(a + 2)$

ఉదాహరణ 1: కారణాంక విభజన చేయండి. (i) $6xy + 9y^2$ (ii) $25\,a^2b + 35ab^2$

సాధన: (i) $6xy + 9y^2$

$6xy = 2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}$ మరియు $9y^2 = 3 \times \underline{3 \times y} \times y$

3 మరియు 'y' లు రెండు పదముల యొక్క సామాన్య కారణాంకములు.

Hence, $6xy + 9y^2$

$$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y)$$

$$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$$

$$\therefore\ 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$$

(ii) $25a^2b + 35ab^2 = (5 \times \underline{5} \times a \times \underline{a \times b}) + (\underline{5} \times 7 \times \underline{a \times b} \times b)$

$$= \underline{5 \times a \times b} \times [(5 \times a) + (7 \times b)]$$

$$= 5ab\,(5a + 7b)$$

$$\therefore\ 25a^2b + 35ab^2 = 5ab\,(5a + 7b)$$

Example 2: Factorise $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$

Solution: $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times x} \times x) + (2 \times \underline{3 \times x} \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times x} \times y \times y)$

$$= \underline{3 \times x}\,[x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$$

$$= 3x\,(x + 2xy + 3y^2) \quad \text{(taking } 3 \times x \text{ as common factor)}$$

$$\therefore\ 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$$

Do This

Factorise (i) $9a^2 - 6a$ (ii) $15a^3b - 35ab^3$ (iii) $7lm - 21lmn$

12.4 Factorisation by grouping the terms

Observe the expression ***ax + bx + ay + by.*** You will find that there is no single common factor to all the terms. But the first two terms have the common factor 'x' and the last two terms have the common factor 'y'. Let us see how we can factorise such an expression.

On grouping the terms we get $(ax + bx) + (ay + by)$ (By taking out common factors from the groups)

$(ax + bx) + (ay + by) = x\,(a+b) + y(a+b)$ (By taking out common factors from each group)

$$= (a+b)(x + y)$$

The expression ***ax + bx + ay + by*** is now expressed as the product of its factors .The factors are $(a+b)$ and $(x + y)$, which are irreducible.

The above expression can be factorised by another way of grouping, as follows :

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$$

$$= a\,(x + y) + b\,(x + y)$$

$$= (x + y)\,(a + b)$$

అందుచే, $6xy + 9y^2$

$$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y)$$

$$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$$

$$\therefore\ 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$$

(ii) $25a^2b + 35ab^2 = (5 \times \underline{5} \times a \times \underline{a \times b}) + (\underline{5} \times 7 \times \underline{a \times b} \times b)$

$$= \underline{5 \times a \times b} \times [(5 \times a) + (7 \times b)]$$

$$= 5ab\,(5a + 7b)$$

$$\therefore\ 25a^2b + 35ab^2 = 5ab\,(5a + 7b)$$

ఉదాహరణ 2: $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$ కారణాంకములుగా విభజింపుము.

$$3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times x} \times x) + (2 \times \underline{3 \times x} \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times x} \times y \times y)$$

$$= \underline{3 \times x}\,[x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$$

$$= 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$$ ($3 \times x$ ను ఉమ్మడి కారణాంకరాశిగా తీసుకొనగా)

$$\therefore\ 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$$

ఇవి చేయండి

కారణాంక విభజన చేయండి. (i) $9a^2 - 6a$ (ii) $15a^3b - 35ab^3$ (iii) $7lm - 21lmn$

12.4 పదాలను అనువైన సమూహాలను చేయము ద్వారా కారణాంక విభజన చేయుట

$\boldsymbol{ax + bx + ay + by}$ సమాసమును పరిశీలించండి. మొదటి రెండు పదాలు 'x'ను సామాన్య కారణాంకముగా, చివరి రెండు పదాలు 'y'ను సామాన్య కారణాంకముగా కల్గియున్నాయి. నాల్గు పదాలు ఒకే సామాన్య కారణాంకము కల్గిలేవు.

అందుచే $(ax + bx) + (ay + by)$ అను రెండు గ్రూపులుగా చేస్తే

(ప్రతి పదములోని ఉమ్మడి కారణ రాశులను తీసుకొనగా)

$(ax + bx) + (ay + by) = x\,(a+b) + y(a+b)$ గా రాయుము.

(ప్రతి పదములోని ఉమ్మడి కారణాంక రాశులను తీసుకొనగా)

$= (a+b)(x + y)$ గా రాయుము.

$\boldsymbol{ax + bx + ay + by}$ ని $(a+b), (x + y)$ ల లబ్ధముగా రాయవచ్చు.

అనగా $(a+b), (x + y)$ లు కారణాంకములుగా చెప్పవచ్చు.

దీనిని, పదాలను అనువైన సమూహాలుగా చేయడం ద్వారా క్రింది విధంగా కారణాంక విభజన చేయగలము.

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$$

$$= a\,(x + y) + b\,(x + y)$$

$$= (x + y)\,(a + b)$$

Do This

Factorise (i) $5xy + 5x + 4y + 4$ (ii) $3ab + 3a + 2b + 2$

Example 3: Factorise $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$

Solution: Step 1: Check whether there are any common factors for all terms.

Step 2: On regrouping the first two terms we have

$6ab - b^2 = b(6a - b)$ ——— I

Note that you need to change order of the last two terms in the expression as $12ac - 2bc$.

Thus $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ——— II

Step 3: Combining I and II together

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$

$= (6a - b)(b + 2c)$

By taking out common factor $(6a - b)$

Hence the factors of $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ are $(6a - b)$ and $(b + 2c)$

Exercise - 12.1

1. Find the common factors of the given terms in each.

(i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

(v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2. Factorise the following expressions

(i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

(iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

(vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3. Factorise the following :

(i) $3ax - 6xy + 8by - 4ab$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

(iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

ఇవి చేయండి

కారణాంక విభజన చేయండి. (i) $5xy + 5x + 4y + 4$ (ii) $3ab + 3a + 2b + 2$

ఉదాహరణ 3: $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ ను కారణాంక విభజన చేయాలి.

సాధన: సోపానము 1: అన్ని పదాలకు సామాన్య కారణాంకము కలిగియున్నదా సరిచూడండి.

సోపానము 2: మొదటి రెండు పదాలను సమూహాముగా చేస్తే,

$6ab - b^2 = b(6a - b)$ ——— I

చివరి రెండు పదాలను సమూహాముగా చేస్తే $12ac - 2bc$.

కావున $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ——— II

సోపానము 3: I, II సోపానములు కలుపగా

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$

$= (6a - b)(b + 2c)$

$(6a - b)$ ను ఉమ్మడి కారణ రాశిగా తీసుకొనగా

కావున $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ యొక్క కారణాంకములు $(6a - b)$ మరియు $(b + 2c)$

అభ్యాసము - 12.1

1. ఈ క్రింద ఇచ్చిన పదముల యొక్క సామాన్య కారణాంకములు కనుక్కోండి.

   (i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

   (v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2. ఈ క్రింది బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయండి.

   (i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

   (iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

   (vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3. ఈ క్రింది వాటికి కారణాంక విభజన చేయండి.

   (i) $3ax - 6xy + 8by - 4ab$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

   (iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

12.5 Factorisation using identities

We know that $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ are some algebraic identities.

We can use these identities for factorisation, if the given expression is in the form of RHS (Right Hand Side) of the particular identity. Let us see some examples.

Example 4: Factorise $x^2 + 10x + 25$

Solution: The given expression contains three terms and the first and third terms are perfect squares. That is x^2 and 25 (5^2). Also the middle term contains the positive sign. This suggests that it can be written in the form of $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$,

so $x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$

We can compare it with $a^2 + 2ab + b^2$ which in turn is equal to the LHS of the identity i.e. $(a + b)^2$. Here $a = x$ and $b = 5$

We have $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

Example 5: Factorise $16z^2 - 48z + 36$

Solution: Taking common numerical factor from the given expression we get

$16z^2 - 48z + 36 = (4 \times 4z^2) - (4 \times 12z) + (4 \times 9) = 4(4z^2 - 12z + 9)$

Note that $4z^2 = (2z)^2$; $9 = (3)^2$ and $12z = 2(2z)(3)$

$4z^2 - 12z + 9 = (2z)^2 - 2(2z)(3) + (3)^2$ since $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$= (2z - 3)^2$

By comparison , $16z^2 - 48z + 36 = 4(4z^2 - 12z + 9) = 4(2z - 3)^2$

$= 4(2z - 3)(2z - 3)$

Example 6: Factorise $25p^2 - 49q^2$

Solution: We notice that the expression is a difference of two perfect squares.

i.e., the expression is of the form $a^2 - b^2$.

Hence Identity $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ can be applied

$25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$

$= (5p + 7q)(5p - 7q)$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

Therefore, $25p^2 - 49q^2 = (5p + 7q)(5p - 7q)$

12.5 సర్వసమానత్వములను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయుట

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$
$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ లు కొన్ని సర్వసమానత్వములు.

ఇచ్చిన బీజీయ సమాసములు పై సర్వసమానత్వములలోని కుడివైపున గల పదముల రూపంలో ఉన్నప్పుడు, పై సర్వసమానత్వములు ఉపయోగించవచ్చు. అటువంటి ఉదాహరణలు కొన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 4: $x^2 + 10x + 25$ కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమాసంలో మొదటి, మూడవ పదాలు పరిపూర్ణ వర్గములు, అనగా x^2 మరియు 25 $(5)^2$ లు మధ్యపదము ధన సంజ్ఞను కల్గియుంది. అందుచే ఈ సమాసమును $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$ సర్వసమానత్వమునుపయోగించి సాధన చేయవచ్చు. ఆ సమాసమును $a^2 + 2ab + b^2$ రూపంలో వ్రాయవచ్చును.

$$x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$$

$a^2 + 2ab + b^2$ ను $(a+b)^2$ తో పోల్చిచూస్తే ఇచ్చట $a = x$ మరియు $b = 5$

$$\therefore\ x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 = (x+5)(x+5)$$

ఉదాహరణ 5: $16z^2 - 48z + 36$ ను కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమాసము నుండి ఉమ్మడి సంఖ్యాత్మక కారణాంకము తీసుకొనగా

$$16z^2 - 48z + 36 = (4 \times 4z^2) - (4 \times 12z) + (4 \times 9) = 4(4z^2 - 12z + 9)$$

$4z^2 = (2z)^2$; $9 = (3)^2$ అని గమనించండి. మరియు $12z = 2(2z)(3)$

$$4z^2 - 12z + 9 = (2z)^2 - 2(2z)(3) + (3)^2 \qquad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2]$$
$$= (2z-3)^2$$

పోల్చిచూస్తే, $16z^2 - 48z + 36 = 4(4z^2 - 12z + 9) = 4(2z-3)^2$
$$= 4(2z-3)(2z-3)$$

ఉదాహరణ 6: $25p^2 - 49q^2$ ను కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన: ఈ సమాసంలో రెండు పదాల పరిపూర్ణ వర్గముల మరియు రెండవ పదము ఋణసంజ్ఞను కల్గియుంది అని గమనించవచ్చు. అనగా $a^2 - b^2$ రూపంలో ఉన్నది.

కనుక $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ను ఉపయోగించవచ్చును.

$$25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$$
$$= (5p+7q)(5p-7q) \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$\therefore\ 25p^2 - 49q^2 = (5p+7q)(5p-7q)$$

Example 7: Factorise $48a^2 - 243b^2$

Solution: We see that the two terms are not perfect squares. But both have '3' as common factor.

That is $48a^2 - 243b^2 = 3\,[16a^2 - 81b^2]$

$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2]$ Again $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= 3\,[\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)]$

$= 3\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)$

Example 8: Factorise $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$

Solution: The first three terms of the expression are in the form $(x+y)^2$ and the fourth term is a perfect square.

Hence $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2$

$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$

$= (x + y + 2z)\,(x + y - 2z)$

$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)}$

Example 9: Factorise $p^4 - 256$

Solution: $p^4 = (p^2)^2$ and $256 = (16)^2$

Thus $p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$

$= (p^2 - 16)\,(p^2 + 16)$

$= (p+4)\,(p-4)\,(p^2 + 16)$

$\boxed{\because\ p^2 - 16 = (p+4)\,(p-4)}$

12.6 Factors of the expression in the form of $(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Observe the expressions $x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 6x - 27$, $a^2 - 6a + 8$, $3y^2 + 9y + 6$.... etc. These expressions can not be factorised by using earlier identities, as the constant terms are not perfect squares.

Consider $x^2 + 12x + 35$.

All these terms cannot be grouped for factorisation. Let us look for two factors of 35 whose sum is 12 so that it is in the form of identity $x^2 + (a + b)x + ab$

Consider all the possible ways of writing the constant as a product of two factors.

$35 =$	1×35	$1 + 35 = 36$
	$(-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
	5×7	$5 + 7 = 12$
	$(-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

Sum of which pair is equal to the coefficient of the middle terms ? Obviously it is $5 + 7 = 12$

ఉదాహరణ 7: $48a^2 - 243b^2$ కారణాంకములుగా విభజించండి.

సాధన: రెండు పదముల ఖచ్చితమైన పరిపూర్ణ వర్గములు కావు. కాని రెండు పదములకు '3' ఒక ఉమ్మడి కారణరాశి.

$$48a^2 - 243b^2 = 3\,[16a^2 - 81b^2]$$
$$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2] \quad [a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ కావున}]$$
$$= 3\,[\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)]$$
$$= 3\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)$$

ఉదాహరణ 8: $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$ కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన: ఇందు మొదటి మూడు పదములు $(x + y)^2$ రూపంలో కలవు. నాలుగవ పదము పరిపూర్ణవర్గము.

కావున $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2$

$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$

$= (x + y + 2z)\,(\,x + y - 2z)$

$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)}$

ఉదాహరణ 9: $p^4 - 256$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: $p^4 = (p^2)^2$ మరియు $256 = (16)^2$

$$p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$$
$$= (p^2 - 16)\,(\,p^2 + 16\,)$$
$$= (p+4)\,(p-4)\,(\,p^2 + 16\,)$$

$\boxed{\because\ p^2 - 16 = (p+4)\,(p-4)}$

12.6 (x + a) (x + b) = x² + (a + b)x + ab రూపంలో ఉన్న సమాస కారణాంక విభజన

$x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 6x - 27$, $a^2 - 6a + 8$, $3y^2 + 9y + 6$.... మొదలగు సమాసములను ముందు ఉపయోగించిన మూడు సర్వసమానత్వములనుపయోగించి కారణాంక విభజన చేయలేము. దీనికి గల కారణము స్థిరపదములు పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యలు కావు.

$x^2 + 12x + 35$ ను తీసుకొనిన

$x^2 + (a + b)x + ab$తో పోల్చిన

35 ను రెండు కారణాంకాల లబ్దంగా విభజిస్తూ ఆ రెండు కారణాంకాలను కలిపితే 12 వచ్చేటట్లు ఉండాలి. స్థిరరాశిని రెండు కారణరాశుల లబ్ధముగా సాధ్యమైన అన్ని విధాలుగా తీసుకొనుము.

35	$= 1 \times 35$	$1 + 35 = 36$
	$= (-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
	$= 5 \times 7$	$5 + 7 = 12$
	$= (-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

ఏ రెండు కారణాంకాల (జంట) మొత్తం మధ్యపదం యొక్క గుణకము అగుచున్నది? అది ఖచ్చితంగా 5 + 7= 12.

$\therefore\ x^2 + 12x + 35 \ = \ x^2 + (5+7)x + 35$

$= x^2 + 5x + 7x + 35$ $(\because\ 12x = 5x + 7x)$

$= x(x+5) + 7(x+5)$ (By taking out common factors)

$= (x+5)(x+7)$ (By taking out $(x+5)$ as common factor)

From the above discussion we may conclude that the expression which can be written in the form of $x^2 + (a+b)x + ab$ can be factorised as $(x+a)(x+b)$

Example 10: Factorise $m^2 - 4m - 21$

Solution: Comparing $m^2 - 4m - 21$ with the identity $x^2 + (a+b)x + ab$ we note that

$ab = -21$, and $a+b = -4$. So, $(-7) + 3 = -4$ and $(-7)(3) = -21$

Hence $m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$

$= m(m-7) + 3(m-7)$

$= (m-7)(m+3)$

$\therefore\ m^2 - 4m - 21 = (m-7)(m+3)$

Factors of –21	and their sum
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$\boxed{-7 \times 3 = -21}$	$\boxed{-7 + 3 = -4}$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

Example 11: Factorise $4x^2 + 20x - 96$

Solution: We notice that 4 is the common factor of all the terms.

Thus $4x^2 + 20x - 96 = 4[x^2 + 5x - 24]$

$x^2 + 5x - 24$

$= x^2 + 8x - 3x - 24$

$= x(x+8) - 3(x+8)$

$= (x+8)(x-3)$

$\therefore\ 4x^2 + 20x - 96 = 4(x+8)(x-3)$

Factors of –24	and their sum
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$\boxed{-3 \times 8 = -24}$	$\boxed{-3 + 8 = 5}$

Exercise - 12.2

1. Factorise the following expressions-

(i) $a^2 + 10a + 25$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198xy + 121y^2$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ (Hint : first expand $(x+y)^2$)

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

$$\therefore\ x^2 + 12x + 35 = x^2 + (5+7)\,x + 35$$

$= x^2 + 5x + 7x + 35$ $\quad (\because\ 12x = 5x + 7x)$

$= x\,(x+5) + 7\,(x+5)$ $\quad$ (ఉమ్మడి కారణరాశులు తీసుకొనగా)

$= (x+5)\,(x+7)$ $\quad$ [$(x+5)$ ఉమ్మడి కారణరాశిగా తీసుకొనగా)]

పై ఉదాహరణననుసరించి $x^2 + (a+b)\,x + ab$ ను $(x+a)\,(x+b)$ గా రాయవచ్చునని గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 10: $m^2 - 4m - 21$ కారణాంక విభజన చేయాలి.

సాధన: $m^2 - 4m - 21$ ను $x^2 + (a+b)\,x + ab$ సర్వసమానత్వముతో పోల్చగా

$ab = -21$, మరియు $a+b = -4$. కావున $(-7)+3 = -4$ మరియు $(-7)(3) = -21$ అని గమనించవచ్చు.

-21 యొక్క కారణాంకముల	మరియు వాటి మొత్తం
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$\boxed{-7 \times 3 = -21}$	$\boxed{-7 + 3 = -4}$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

కావున $m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$

$= m\,(m-7) + 3\,(m-7)$

$= (m-7)\,(m+3)$

$\therefore\ m^2 - 4m - 21 = (m-7)\,(m+3)$

ఉదాహరణ 11: $4x^2 + 20x - 96$ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: మనం 4 సామాన్యకారణాంకముగా గుర్తించవచ్చు.

అందువల్ల $4x^2 + 20x - 96 = 4\,[x^2 + 5x - 24]$

-24 యొక్క కారణాంకముల	మరియు వాటి మొత్తం
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$\boxed{-3 \times 8 = -24}$	$\boxed{-3 + 8 = 5}$

$x^2 + 5x - 24$

$= x^2 + 8x - 3x - 24$

$= x\,(x+8) - 3\,(x+8)$

$= (x+8)\,(x-3)$

$\therefore\ 4x^2 + 20x - 96 = 4\,(x+8)\,(x-3)$

అభ్యాసము - 12.2

1. ఈ క్రింది సమాసాలను కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $a^2 + 10a + 25$ $\quad$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ $\quad$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ $\quad$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198\,xy + 121y^2$ $\quad$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ $\quad$ (సూచన: మొదట $(x+y)^2$ ను విస్తరించండి.)

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

2. Factorise the following

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$

(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$

(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$

(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x+y)^2 - (x-y)^2$

3. Factorise the expressions-

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$

(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$

(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4. Factorise the following

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m-n)^2$

(iv) $49x^2 - \frac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$

5. Factorise the following expressions

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10p + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

12.7 Division of algebraic expressions

We know that division is the inverse operation of multiplication.

Let us consider $3x \times 5x^3 = 15x^4$

Then $15x^4 \div 5x^3 = 3x$ and $15x^4 \div 3x = 5x^3$

Similarly consider $6a(a+5) = 6a^2 + 30a$

Therefore $(6a^2 + 30a) \div 6a = a + 5$

and also $(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a$.

12.8 Division of a monomial by another monomial

Consider $24x^3 \div 3x$

$\therefore\ 24x^3 \div 3x$

$$= \frac{2\times2\times2\times3\times x\times x\times x}{3\times x}$$

$$= \frac{(3\times x)(2\times2\times2\times x\times x)}{(3\times x)} = 8x^2$$

2. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$

(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$

(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$

(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

3. ఈ క్రింది సమాసాలను కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$

(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$

(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m - n)^2$

(iv) $49x^2 - \frac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a - b)^2$

5. ఈ క్రింది సమాసాలను కారణాంకములుగా విభజించండి.

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10p + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

12.7 బీజీయ సమాసాల భాగాహారం

భాగహారము, గుణకారము యొక్క విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు.

$3x \times 5x^3 = 15x^4$ ను తీసుకొందాం

అందుచే $15x^4 \div 5x^3 = 3x$ మరియు $15x^4 \div 3x = 5x^3$

$$6a(a + 5) = (6a^2 + 30a)$$

అందుచే $(6a^2 + 30a) \div 6a = a + 5$

మరియు $(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a$.

12.8 ఒక ఏకపదిని మరొక ఏకపదిచే భాగాహారం

$24x^3 \div 3x$ ను తీసుకొందాం.

$$\therefore\ 24x^3 \div 3x$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x}{3 \times x}$$

$$= \frac{(3 \times x)(2 \times 2 \times 2 \times x \times x)}{(3 \times x)} = 8x^2$$

Example 12: Do the following Division

(i) $70x^4 \div 14x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

Solution: (i) $70x^4 \div 14x^2$ $= \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$ $= \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 Division of an expression by a monomial

Let us consider the division of the trinomial

$6x^4+10x^3+8x^2$ by a monomial $2x^2$

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2 \times 3 \times x \times x \times x \times x] + [2 \times 5 \times x \times x \times x] + [2 \times 2 \times 2 \times x \times x]$

$= \underline{(2x^2)}(3x^2) + \underline{(2x^2)}(5x) + \underline{2x^2}(4)$

$= 2x^2 [3x^2 + 5x + 4]$

$\because 2x^2$ is common factor

Thus $(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2 + 5x + 4)$

Alternatively each term in the expression could be divided by the monomial (using the cancellation method)

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2}+\dfrac{10x^3}{2x^2}+\dfrac{8x^2}{2x^2}$

Here we divide each term of the expression in the numerator by the monomial in the denominator

$= 3x^2 + 5x + 4$

ఉదాహరణ 12: ఈ క్రింది భాగాహారమును చేయండి.

(i) $70x^4 \div 14x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

సాధన: (i) $70x^4 \div 14x^2$ $= \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$ $= \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 ఒక సమాసమును ఏకపదితో భాగహారము చేయుట

త్రిపది యొక్క భాగాహారమును తీసుకొందాం.

$6x^4+10x^3+8x^2$ ను ఏకపదిని $2x^2$ చే భాగిద్దాం.

$6x^4+10x^3+8x^2 = [2\times3\times x\times x\times x\times x] + [2\times5\times x\times x\times x] + [2\times2\times2\times x\times x]$

$= \underline{(2x^2)}(3x^2) + \underline{(2x^2)}(5x) + \underline{2x^2}(4)$

$\because 2x^2$ సామాన్య కారణాంకము

$= 2x^2[3x^2+5x+4]$

అందుచే $(6x^4+10x^3+8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2+5x+4)$

ప్రత్యామ్నాయముగా సమాసములోని ప్రతీపదమును ఏకపదిచే భాగించి సామాన్య కారణాంకములను కొట్టివేద్దాం.

$(6x^4+10x^3+8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2}+\dfrac{10x^3}{2x^2}+\dfrac{8x^2}{2x^2}$

ఇచ్చట సమాసములోని ప్రతిపదమును హారంలోని ఏకపదిచే భాగిద్దాం.

$= 3x^2+5x+4$

Example 13: Divide $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ *by* $6abc$

Solution : $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$= 2 \times 3 \times 5\,[(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$

$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c\ \ (a + b + c)$

Thus $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times abc(a+b+c)}{2 \times 3 \times abc}$$

$= 5\,(a + b + c)$

Alternatively $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$= 5a + 5b + 5c$

$= 5\,(a + b + c)$

12.10 Division of Expression by Expression:

Consider $(3a^2 + 21a) \div (a+7)$

Let us first factorize $3a^2 + 21a$ to check and match factors with the denominator

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2 + 21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a(a+7)}{a+7} = 3a$$

$= 3a$

Example 14: Divide $39y^3(50y^2 - 98)$ by $26y^2(5y+7)$

Solution : $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2\,(25y^2 - 49)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2]$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)\ (5y - 7)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)\,(5y - 7)$

Also $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

ఉదాహరణ 13: $30(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ ను $6abc$ చే భాగింపుము.

సాధన: $30(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$= 2 \times 3 \times 5 [(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$

$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c \ (a + b + c)$

అందుచే $30(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times abc(a+b+c)}{2 \times 3 \times abc}$$

$= 5(a + b + c)$

ప్రత్యామ్నాయంగా $30(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$= 5a + 5b + 5c$

$= 5(a + b + c)$

12.10 ఒక సమాసమును మరో సమాసముచే భాగించుట

$(3a^2 + 21a) \div (a+7)$ను తీసుకొందాం.

ముందుగా $3a^2 + 21a$ ను కారణాంక విభజన చేద్దాం.

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2 + 21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a(a+7)}{a+7} = 3a$$

$= 3a$

ఉదాహరణ 14: $39y^3(50y^2 - 98)$ ను $26y^2(5y+7)$ చే భాగింపుము.

సాధన: $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2(25y^2 - 49)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2]$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)(5y - 7)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)(5y - 7)$

అదేవిధంగా $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

$\therefore \quad [\,39y^3(50y^2 - 98)\,] \div [\,26y^2(5y + 7)\,]$

$$= \frac{[2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y(5y+7)(5y-7)]}{[2 \times 13 \times y \times y \times (5y+7)]}$$

$= 3y\,(5y - 7)$

Example 15: Divide $m^2 - 14m - 32$ by $m+2$

Solution : Here $m^2 - 14m - 32 \quad = m^2 - 16m + 2m - 32$

$= m(m - 16) + 2(m - 16)$

$= (m - 16)(m+2)$

$(m^2 - 14m - 32) \div (m+2) \quad = (m - 16)(m+2) \div (m+2)$

$= (m - 16)$

Example 16: Divide $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$ by $7a(a - 4)$

Solution : $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \;= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a\,(a - 9) - 4(a - 9)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)\,(a - 4)$

$42\,(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a\,(a - 4) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4)$

$= 6a\,(a - 9)$

Example 17: Divide $x(3x^2 - 108)$ by $3x(x - 6)$

Solution : $x(3x^2 - 108) \;= x \times [\,3(x^2 - 36)]$

$= x \times [\,3(x^2 - 6^2)]$

$= x \times [3(x + 6)(x - 6)]$

$= 3 \times x \times [\,(x + 6)(x - 6)]$

$x(3x^2 - 108) \div 3x\,(x - 6) \;= 3 \times x \times [\,(x + 6)\,(x - 6)] \div 3x\,(x - 6)$

$= (x + 6)$

$\therefore \quad [\,39y^3(50y^2 - 98)\,] \div [\,26y^2(5y + 7)\,]$

$$= \frac{[2\times3\times13\times y\times y\times y(5y+7)(5y-7)]}{[2\times13\times y\times y\times(5y+7)]}$$

$= 3y\,(5y - 7)$

ఉదాహరణ 15: $m^2 - 14m - 32$ ను $m+2$ చే భాగింపుము

సాధన: ఇచ్చట $m^2 - 14m - 32 = m^2 - 16m + 2m - 32$

$= m(m - 16) + 2(m - 16)$

$= (m - 16)(m+2)$

$(m^2 - 14m - 32) \div (m+2) = (m - 16)(m+2) \div (m+2)$

$= (m - 16)$

ఉదాహరణ 16: $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$ ను $7a(a - 4)$ చే భాగింపుము

సాధన: $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a\,(a - 9) - 4(a - 9)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)\,(a - 4)$

$42\,(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a\,(a - 4) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4)$

$= 6a\,(a - 9)$

ఉదాహరణ 17: $x(3x^2 - 108)$ ను $3x(x - 6)$ చే భాగింపుము.

సాధన: $x(3x^2 - 108) = x \times [\,3(x^2 - 36)]$

$= x \times [\,3(x^2 - 6^2)]$

$= x \times [3(x + 6)(x - 6)]$

$= 3 \times x \times [\,(x + 6)(x - 6)]$

$x(3x^2 - 108) \div 3x\,(x - 6) = 3 \times x \times [\,(x + 6)\,(x - 6)] \div 3x\,(x - 6)$

$= (x + 6)$

Exercise - 12.3

1. Carry out the following divisions

   (i) $48a^3$ by $6a$ (ii) $14x^3$ by $42x^2$

   (iii) $72a^3b^4c^5$ by $8ab^2c^3$ (iv) $11xy^2z^3$ by $55xyz$ (v) $-54l^4m^3n^2$ by $9l^2m^2n^2$

2. Divide the given polynomial by the given monomial

   (i) $(3x^2 - 2x) \div x$ (ii) $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$

   (iii) $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$ (iv) $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$

   (v) $15\,(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$ (vi) $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$

   (vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$

3. Workout the following divisions :

   (i) $(49x - 63) \div 7$ (ii) $12x\,(8x - 20) \div 4(2x - 5)$

   (iii) $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$

   (iv) $54lmn\,(l + m)\,(m + n)\,(n + l) \div 81mn\,(l + m)\,(n + l)$

   (v) $36\,(x + 4)\,(x^2 + 7x + 10) \div 9\,(x + 4)$ (vi) $a\,(a + 1)\,(a + 2)\,(a + 3) \div a\,(a + 3)$

4. Factorize the expressions and divide them as directed :

   (i) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$ (ii) $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$

   (iii) $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$ (iv) $15ab\,(a^2 - 7a + 10) \div 3b\,(a - 2)$

   (v) $15lm\,(2p^2 - 2q^2) \div 3l\,(p + q)$ (vi) $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

Think Discuss and Write

While solving some problems containing algebraic expressions in different operations, some students solved as given below. Identity the errors made by them. Write correct answers.

1. Srilekha solved the given equation as shown below-

$$3x + 4x + x + 2x = 90$$

$$9x = 90 \quad \therefore\ x = 10$$

What could you say about the correctness of the solution?

Can you identify where Srilekha has gone wrong?

అభ్యాసము - 12.3

1. ఈ క్రింది భాగహారములను చేయండి.

(i) $48a^3$ ను $6a$ చే (ii) $14x^3$ ను $42x^2$ చే (iii) $72a^3b^4c^5$ ను $8ab^2c^3$ చే

(iv) $11xy^2z^3$ ను $55xyz$ చే (v) $-54l^4m^3n^2$ ను $9l^2m^2n^2$ చే

2. ఈ క్రింది బహుపదులను ఇచ్చిన ఏకపదిచే భాగింపుము.

(i) $(3x^2 - 2x) \div x$ (ii) $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$

(iii) $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$ (iv) $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$

(v) $15(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$ (vi) $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$

(vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$

3. ఈ క్రింది భాగహారములను చేయండి.

(i) $(49x - 63) \div 7$ (ii) $12x(8x - 20) \div 4(2x - 5)$

(iii) $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$

(iv) $54lmn(l + m)(m + n)(n + l) \div 8lmn(l + m)(n + l)$

(v) $36(x + 4)(x^2 + 7x + 10) \div 9(x + 4)$ (vi) $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) \div a(a + 3)$

4. సూచించిన విధముగా భాగహారమును చేయండి.

(i) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$ (ii) $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$

(iii) $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$ (iv) $15ab(a^2 - 7a + 10) \div 3b(a - 2)$

(v) $15lm(2p^2 - 2q^2) \div 3l(p + q)$ (vi) $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

బీజీయసమాసములలో విభిన్న ప్రక్రియలతో కల కొన్ని సమస్యలను కొందరు విద్యార్థులు క్రింది విధంగా చేసిరి. వారు చేసిన తప్పులను గమనించి, సరియగు జవాబులు వ్రాయండి.

1. శ్రీలేఖ ఒక సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా చేసింది.

$3x + 4x + x + 2x = 90$

$9x = 90 \quad \therefore \quad x = 10$

ఈ సాధన ఇచ్చిన సమాధానము సరియైనదా?

శ్రీలేఖ ఎచ్చట తప్పుచేసింది గుర్తించగలరా?

2. Abraham did the following

For $x = -4,\ 7x = 7 - 4 = -3$

3. John and Reshma have done the multiplication of an algebraic expression by the following methods : verify whose multiplication is correct.

John	Reshma
(i) $3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

4. Harmeet does the division as $(a+5) \div 5 = a+1$

His friend Srikar done the same $(a+5) \div 5 = a/5 + 1$

and his friend Rosy did it this way $(a+5) \div 5 = a$

Can you guess who has done it correctly? Justify your answer

Exercise - 12.4

Find the errors and correct the following mathematical sentences

(i) $3(x-9) = 3x - 9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii) $2x + 3x = 5x^2$

(iv) $2x + x + 3x = sx$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi) $3x + 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) Substitute $x = -3$ *in*

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

2. అబ్రహామ్ ఈ క్రింది విధముగా చేశాడు.

$x = -4$, కావున $7x = 7(-4) = -3$

3. జాన్ మరియు రేష్మా బీజసమాసాల గుణకారమును ఈ క్రింది విధంగా చేసారు.

జాన్	రేష్మా
(i) $3(x-4) = 3x-4$	$3(x-4) = 3x-12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2-6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2+a-6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2-64$	$(x+8)^2 = x^2+16x+64$

4. హరమీత్ ఒక భాగహారమును ఈ క్రింది విధముగా చేసాడు. $(a+5) \div 5 = a+1$

శ్రీకర్ పై భాగహారమును ఈ క్రింది విధముగా చేసాడు. $(a+5) \div 5 = a/5 + 1$

అతని స్నేహితురాలు రోసీ మరోవిధంగా చేసింది. $(a+5) \div 5 = a$

పై అందరిలో ఎవరు సరియైన సమాధానము ఇచ్చారో తెలుపగలరా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

అభ్యాసము - 12.4

క్రింది గణిత వాక్యాలలో గల తప్పులను గుర్తించి, వాటిని సరిచేయండి.

(i) $3(x-9) = 3x-9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2+2$

(iii) $2x+3x = 5x^2$

(iv) $2x+x+3x = sx$

(v) $4p+3p+2p+p-9p = 0$

(vi) $3x+2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) $x = -3$ ప్రతిక్షేపించుము.

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) = -9 - 15 = -24$

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$

(xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

(xiii) $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 - 4a^2$

(xiv) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 8$

(xv) $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 8$

(xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$

(xviii) $3x + 2 \div 3x = \dfrac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$

(xx) $\dfrac{4x+3}{3} = x+1$

What we have discussed

1. Factorisation is a process of writing the given expression as a product of its factors.
2. A factor which cannot be further expressed as product of factors is an irreducible factor.
3. Expressions which can be transformed into the form: $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$ and $x^2 + (a + b)\,x + ab$ can be factorised by using identities.
4. If the given expression is of the form $x^2 + (a + b)\ x + ab$, then its factorisation is $(x + a)(x + b)$
5. Division is the inverse of multiplication. This concept is also applicable to the division of algebraic expressions.

W1T6Z8

Gold Bach Conjecture

Gold Bach found from observation that every odd number seems to be either a prime or the sum of a prime and twice a square.

Thus 21 = 19 + 2 or 13 + 8 or 3 + 18.

It is stated that up to 9000, the only exceptions to his statement are

$5777 = 53 \times 109$ and $5993 = 13 \times 641$,

which are neither prime nor the sum of a prime and twice a square.

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$

(xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

(xiii) $(3a+4b)(a-b) = 3a^2 - 4a^2$

(xiv) $(x+4)(x+2) = x^2 + 8$

(xv) $(x-4)(x-2) = x^2 - 8$

(xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$

(xviii) $3x + 2 \div 3x = \frac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$

(xx) $\frac{4x+3}{3} = x+1$

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఇచ్చిన సమాసమును దాని కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్రాయటాన్ని కారణాంక విభజన అందురు.
2. సూక్ష్మీకరణ సాధ్యము కాని కారణాంకమును అవిభాజ్య కారణాంకము అందురు.
3. $a^2+2ab+b^2$; $a^2-2ab+b^2$; a^2-b^2 మరియు $x^2+(a+b)x+ab$ రూపంలో రాయగలిగే సమాసాల కారణాంక విభజనను సర్వసమానత్వములు ఉపయోగించి చేయవచ్చు.
4. $x^2+(a+b)\ x+ab$ రూపములో యున్న సమాసమును $(x+a)(x+b)$ రూపములో రాయవచ్చు.
5. భాగహారము, గుణకారము యొక్క వ్యుత్క్రమప్రక్రియ ఈ విధానమును బీజీయ సమాసాలకు కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

G2I1H2

గోల్డ్ బాక్ ఊహ

గోల్డ్‌బాక్ తన పరిశీలనల నుండి, “ప్రతి బేసి సంఖ్య, ప్రధాన సంఖ్య గానో లేదా కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తంగా లేదా ప్రధాన సంఖ్య మరియు వర్గ సంఖ్యకు రెట్టింపుల మొత్తంగా ఉంటుంది” అని కనుగొన్నాడు.

ఉదాహరణకు ఒక బేసి సంఖ్య 21 తీసుకుంటే

$21 = 19 + 2$ లేదా $13 + 2(4)$ లేదా $3 + 2(9)$ గా చూపవచ్చు.

అతడు పై విధముగా 9000 సంఖ్య వరకు పరిశీలించాడు. వాటిలో కేవలం రెండు సంఖ్యలు

$5777 = 53 \times 109$ మరియు $5993 = 13 \times 641$ లకు మాత్రమే మినహాయింపు కలదు. ఎందుకనగా అవి ప్రధాన సంఖ్యలు కావు మరియు ప్రదాన సంఖ్యల మొత్తం కాదు మరియు ప్రదానసంఖ్య మరియు వర్గ సంఖ్యకు రెట్టింపుల మొత్తము కాదు.

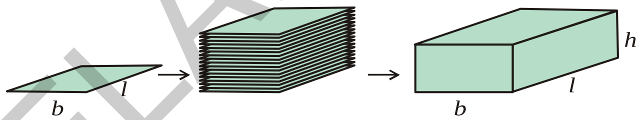
CHAPTER 13

Visualising 3-D in 2-D

Y2I7G5

13.0 Introduction

We are living in a 3-dimensional space. Some of the objects around us are in 3 dimensional shape. We can differntiate 2-D shapes from 3-D shapes by observing them.Look at a poster on the wall. The surface is of rectangular shape . How many measurements does it have ? It has 2 mesurements.i.e length and breadth. Look at the book. What is the shape of the book ? It is in cuboid shape. It has 3 measurements. Along with length and breadth it has one more measurement i.e. height. A triangle, square, rectangle are plane figures of 2-dimensions. While a cube, cuboid are solid objects with 3 dimensions.



By arranging 2-D objects one above another it occupies some space and become a 3-D object as in adjacent fig.

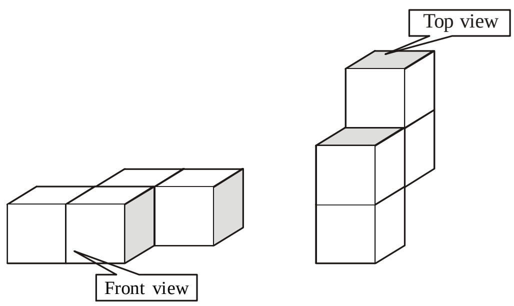
Do This

1. Name some 3-Dimensional, objects.
2. Give some examples of 2-Dimensional figures.
3. Draw a kite in your note book . Is it 2-D figure or 3-D object?
4. Identify some objects which are in cube or cuboid shape.
5. How many dimensions that a circle and sphere have?

13.1 3-D Objects made with cubes

Observe the following solid shapes. Both are formed by arranging four unit cubes.

If we observe them from different positions, it seems to be different. But the object is same.



అధ్యాయం

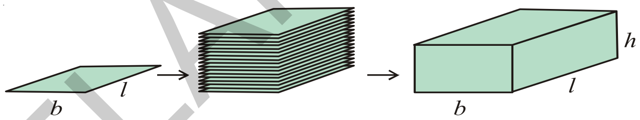
13

త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట

G4L3V8

13.0 పరిచయం

మనము త్రిమితీయ ఆకారము కలిగిన వస్తువులున్న ప్రపంచంలో నివసిస్తున్నాము. మన చుట్టూ అనేక వస్తువుల ఆకారములు ద్విమితీయ కొలతలు కలిగి ఉంటాయి. మనము వీటిని ద్విమితీయ, త్రిమితీయ వస్తువులుగా వర్గీకరించగలము. ఒక గోడకు అతికించిన పోస్టర్‌ని గమనించినట్లయితే, అది దీర్ఘ చతురస్రాకారములో ఉన్నట్లు చెప్పగలము. దానికి ఎన్ని కొలతలు కలవు ? దానికి పొడవు, వెడల్పు రెండు కొలతలు కలవు. ఒక పుస్తకమును గమనించండి. అది ఏ ఆకారములో ఉంటుంది? అది ఒక దీర్ఘఘనాకారముగా ఉంటుంది. దానికి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు అను మూడు కొలతలు కలవు. ఒక త్రిభుజము, చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము మొ॥నవి ఒక తలముపై గీయబడిన పటములు. ఘనము, దీర్ఘ ఘనము మొదలగు ఘనాకారపు వస్తువులు త్రిమితీయ కొలతలు కలిగిన వస్తువులు. సర్వసమాన ద్విమితీయ ఆకారము కలిగిన పటములను వరుసగా ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చుట వలన అది కొంత అంతరాళమును ఆక్రమించును. అది త్రిమితీయ వస్తువుగా ప్రక్క పటములో చూపినట్లుగా మారును..

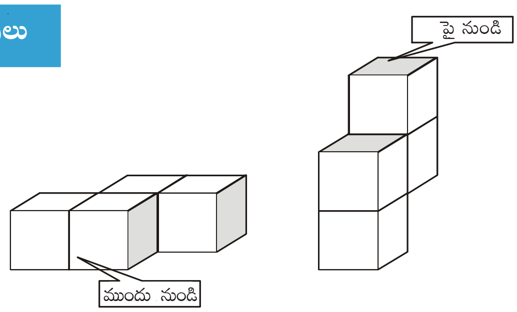


ఇవి చేయండి

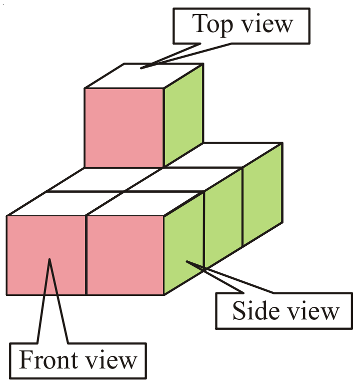
1. త్రిమితీయాలు కల కొన్ని వస్తువుల పేర్లు వ్రాయండి.
2. ద్విమితీయ ఆకారాలు కల కొన్ని పటముల పేర్లు వ్రాయండి.
3. గాలి పటము చిత్రము గీయండి. అది ద్విమితీయ పటమా లేక త్రిమితీయ వస్తువా గుర్తించండి.
4. ఘనము, దీర్ఘఘనాకారము కల కొన్ని వస్తువులను గుర్తించండి.
5. వృత్తము, గోళములు ఎన్ని కొలతలు కల్గియుంటాయి?

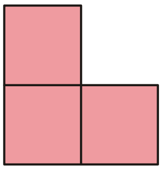
13.1 ఘనములతో రూపొందించబడిన త్రిమితీయ వస్తువులు

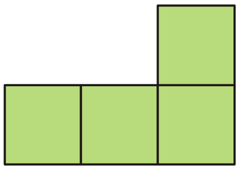
ప్రక్క ఘనాకారపు వస్తువుల పటం పరిశీలించండి. ఈ రెండు వస్తువులు 1 యూనిట్ కొలత కల 4 ఘనములతో రూపొందించ బడినవి. వాటిని పరిశీలిస్తే, రెండు వస్తువులు ఒకే విధముగా ఉన్నవి. కాని చూచుటకు వేర్వేరు వస్తువులుగా కనిపించును. దీనికి కారణము మనము వాటిని వివిధ స్థానముల నుండి చూస్తున్నాము.

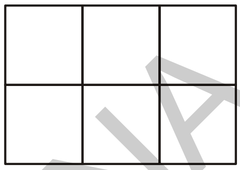


Similarly if a solid is viewed from different directions it appears in different shapes. For example-




Front view

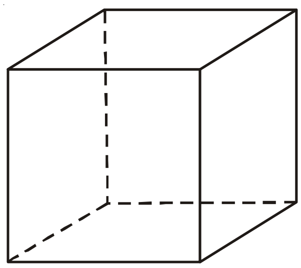

Side view


Top view

Do This

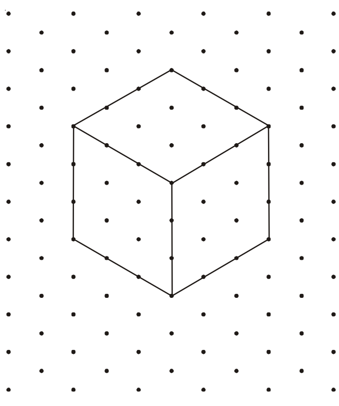
Arrange 6 unit cubes in different shapes and draw their shapes from different directions.

13.2 Representation of 3-D figures on 2-D

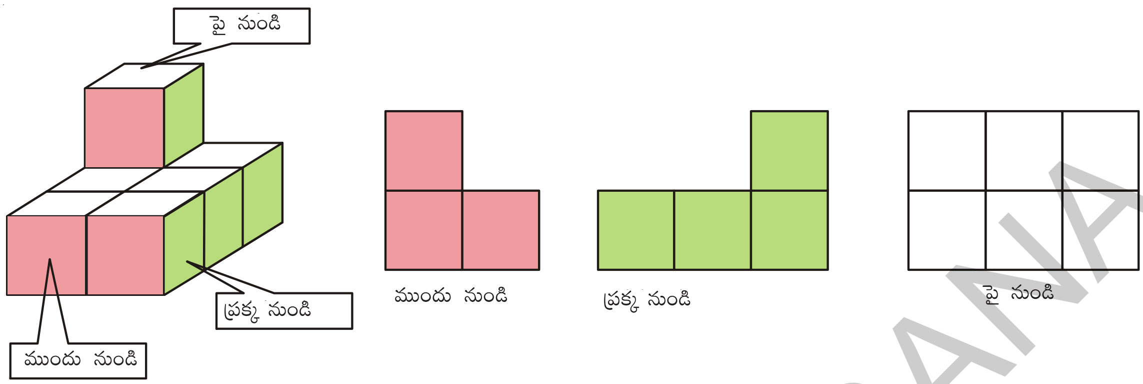


We used to draw 3-D figures on the paper, which is a 2-D. Actually we are able to represent only two dimensions on the plane paper, third dimension is only our imagination. We have practiced showing 3-D cube object as in adjacent figure. All edges of the cube are equal in length. But in the adjacent figure they are not equal. It has been drawn according to our view.

In order to over come this problem we use isometric dots paper, in which we can represent length, bredth and height with exact measurment of 3-D solid objects.



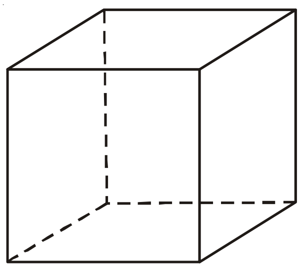
ఇదేవిధముగా ఒక వస్తువును వివిధ స్థానాల నుండి వివిధ ఆకారాలలో కన్పిస్తుంది. ఉదాహరణకు



ఇది చేయండి

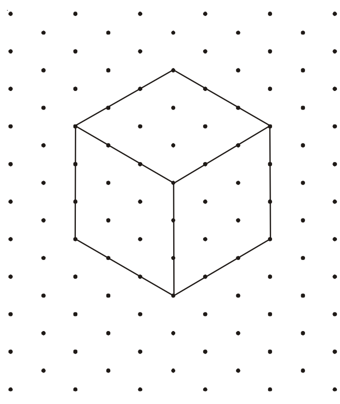
వేర్వేరు ఆకారం గల యూనిట్ కొలతగల 6 ఘనములను తయారుచేయండి. వివిధ స్థానాల నుండి వివిధ ఆకారాలు గీయండి.

13.2 త్రిమితీయ పటములను ద్విమితీయంగా చూపుట

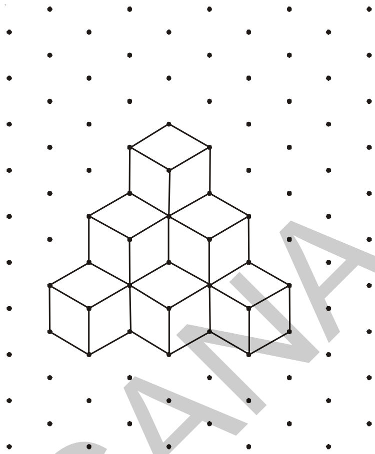


మనం సాధారణంగా త్రిమితీయ వస్తువుల ఆకారములను కాగితంపై గీస్తాము. కాని అవి గీయునపుడు కేవలం రెండు కొలతలను మాత్రమే చూపగలము. మూడవ కొలత మన యొక్క ఊహాత్మకముగా ఉంటుంది. మనము ఒక ఘనమును ప్రక్క పటములో చూపినట్లుగా గీస్తాము. ఈ పటములో పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుగా గీచిన మూడు కొలతలు సమానముగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తాయి. కాని కొలచిన అవి సమానముగా ఉండకపోవచ్చు.

ఈ రకమైన ఇబ్బంది అధిగమించుటకు మనము సమాన మాపనం కల చుక్కల పటమును ఉపయోగిస్తాము. ఈ పటం ద్వారా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను సరియగు కొలతల ద్వారా మనము గీయగలము.



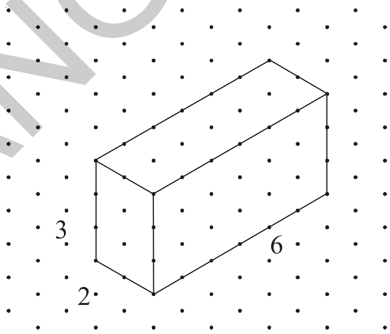
Example 1 : Identify the number of cubes in the adjacent figure.



Solution : There are three layers of cubes.

In the top layer, there is only one cube. In the second layer, there are 3 cubes (1 is hidden). In the lower layer, there are 6 cubes (3 are hidden). So total number of cubes = 1 + 3 + 6 = 10 cubes.

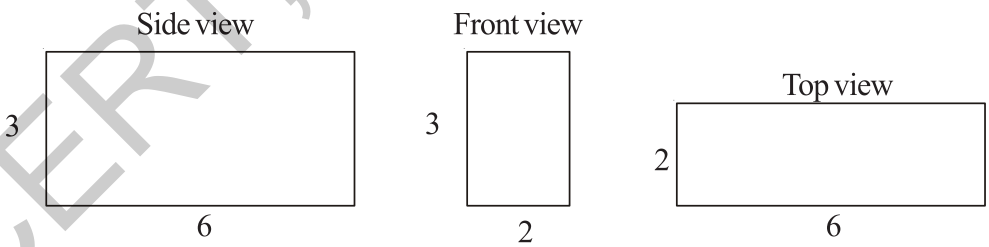
Example 2 : Find the the measurements of cuboid in the adjacent figure. (Considering the distance between every two consecutive dots to be 1 unit.) Also draw a side view, front view and top view with proportional measurements.



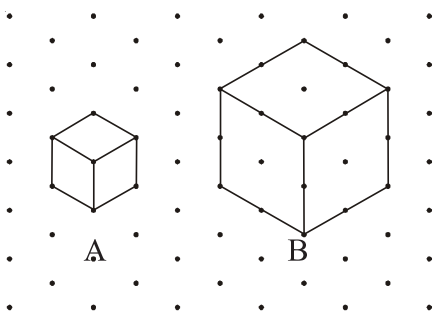
Solution : Length of the cuboid $l = 6$ units

Breadth of the cuboid $b = 2$ units

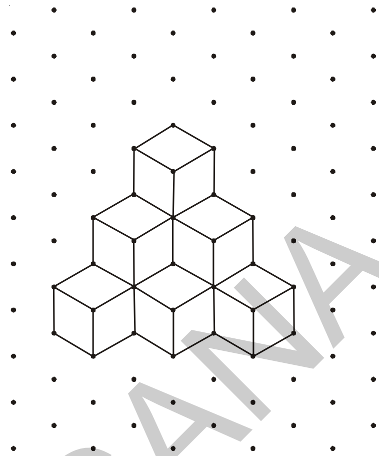
Height of the cuboid $h = 3$ units.



Example 3 : Look at the adjacent figure. Find the number of unit cubes in cube A and cube B and find the ratio.



ఉదాహరణ 1: ప్రక్క పటములో కల ఘనముల సంఖ్యను గుర్తించండి.

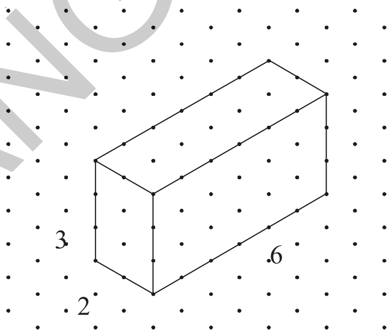


సాధన: ఈ పటములో మూడు వరుసలలో ఘనములు కలవు.

పై వరుస నందు ఒక ఘనము కలదు. రెండవ వరుస నందు 3 ఘనములు కలవు. మూడవ వరుస నందు 6 ఘనములు కలవు.

మొత్తం ఘనముల సంఖ్య $= 1 + 3 + 6 = 10$.

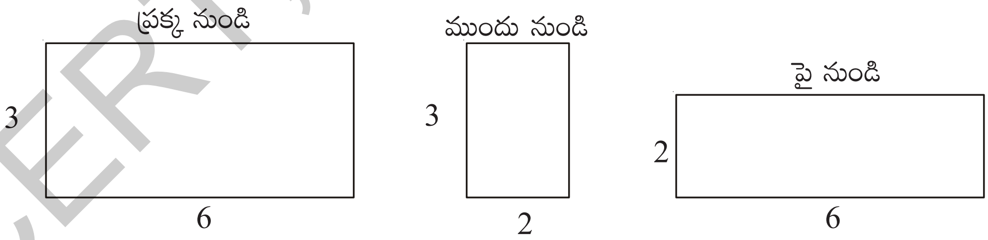
ఉదాహరణ 2 : ప్రక్క పటములో కల దీర్ఘఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు ఎత్తులను కనుగొనండి. (ఏ రెండు వరుస ప్రక్కప్రక్కన కల బిందువుల మధ్య దూరం 1 యూనిట్). మరియు పై నుండి, ప్రక్క నుండి, ఎదుటి నుండి చూచునపుడు వచ్చు ఆకారముల పటములను సరియగు కొలతల ఆధారంగా గీయండి..



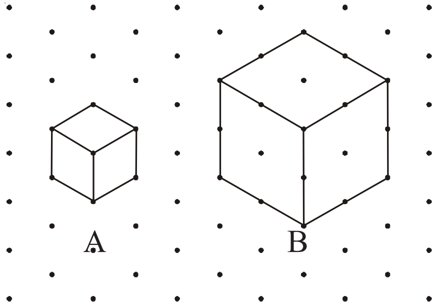
సాధన: దీర్ఘఘనము పొడవు $l = 6$ యూనిట్లు

వెడల్పు $b = 2$ యూనిట్లు

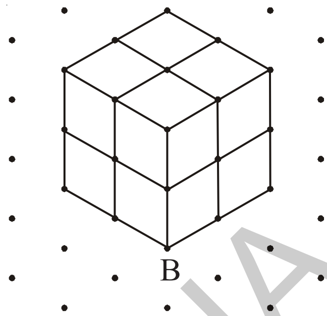
ఎత్తు $h = 3$ యూనిట్లు



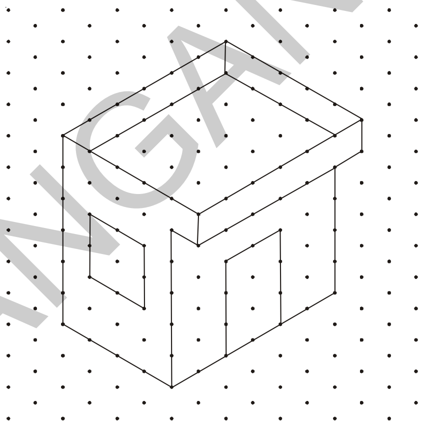
ఉదాహరణ 3 : ప్రక్క పటములో రెండు సమ ఘనములు A మరియు B ఇవ్వబడినవి. వాటియందు కల 1 యూనిట్ కొలత కల సమఘనములు ఎన్ని ఉన్నాయో? తెలుపుతూ వాటి నిష్పత్తి వ్రాయండి



Solution : There is only one unit cube in A. In figure B, by drawing parallel lines to all side, let us divide it into unit cubes and count. There are two layers, and each layer has 4 unit cubes. So number of unit cubes in B is 8; $\therefore$ ratio of unit cubes in A to that of B = 1 : 8.



Example 4 : A house design given on isometric dot sheet in adjacent figure. Measure length, breadth and height of the house. Slab is projected forward. Find the area of the slab.



Solution : Length of the house = 6 units

Breadth of the house = 4 units

Height of the house = 5 units

Slab is projected forward for 1 unit

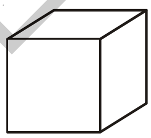
Dimensions of slab = 5 $\times$ 6 unit

Area of the slab = 5 $\times$ 6 = 30 sq. units.

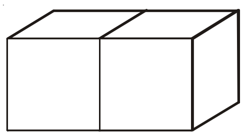
Exercise - 13.1

1. Draw the following 3-D figures on isometric dot sheet.

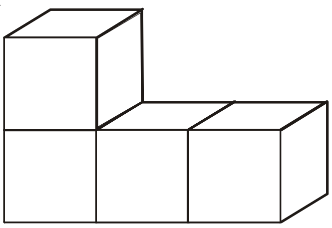
(i)



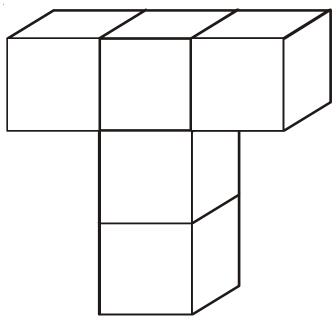
(ii)



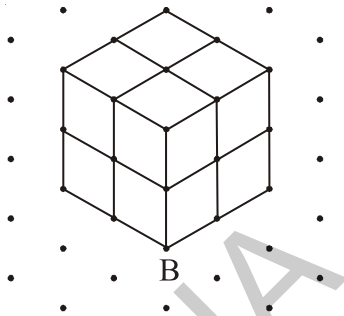
(iii)



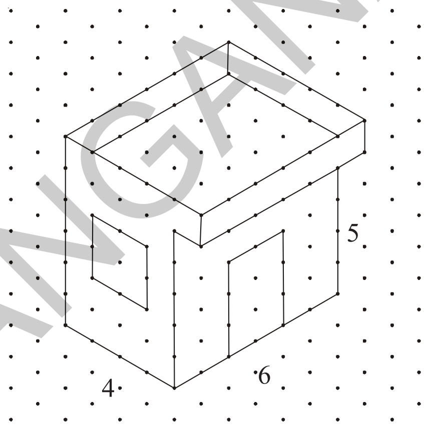
(iv)



సాధన: పటములో గల ఘనము A నందు ఒకే ఒక యూనిట్ ఘనము కలదు. ఘనము B యొక్క భుజములకు సమాంతరముగా రేఖలు గీచిన అవి ఆ ఘనమును 1 యూనిట్ భుజముకల సమఘనములుగా విభజిస్తుంది. పై వరుస నందు 4, క్రింది వరుస నందు 4 మొత్తం '8' సమఘనములు కలవు. వాటి నిష్పత్తి 1 : 8.



ఉదాహరణ 4 : సమాన మాపము కల చుక్కల పటము నందు ఒక ఇంటి యొక్క ప్లాన్ గీయబడింది. దాని యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులను కనుక్కోండి. ముందుకు పొడిగించ బడిన స్లాబ్ యొక్క వైశాల్యము కనుక్కోండి.



సాధన:

ఇంటి యొక్క పొడవు = 6 యూనిట్లు

ఇంటి యొక్క వెడల్పు = 4 యూనిట్లు

ఇంటి యొక్క ఎత్తు = 5 యూనిట్లు

ముందు పొడిగించబడిన స్లాబ్ కొలత 1 యూనిట్

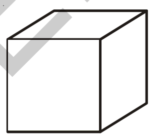
స్లాబ్ యొక్క కొలతలు = 5 × 6 యూనిట్లు

స్లాబ్ యొక్క వైశాల్యము = 5 × 6 = 30 చ.యూనిట్లు

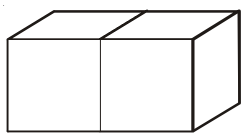
అభ్యాసము - 13.1

1. క్రింది చిత్రాలను సమాన మాపము కల చుక్కల పటము పై గీయండి.

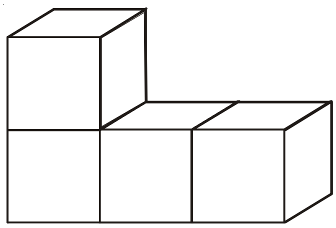
(i)



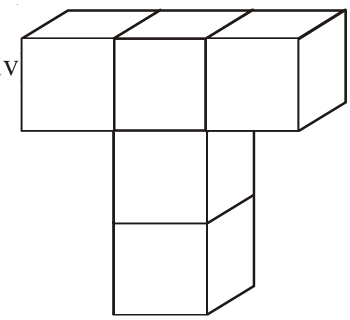
(ii)



(iii)

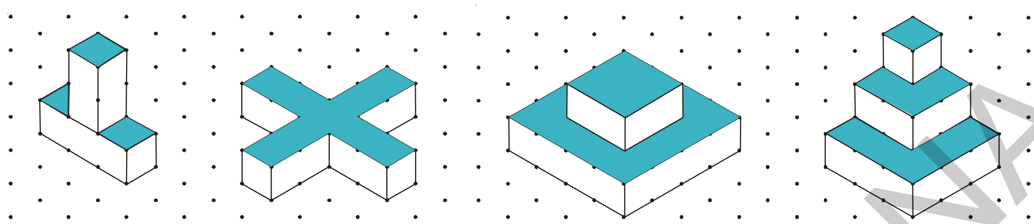


(iv)



2. Draw a cuboid on the isometric dot sheet with the measurements 5 units × 3 units × 2 units.

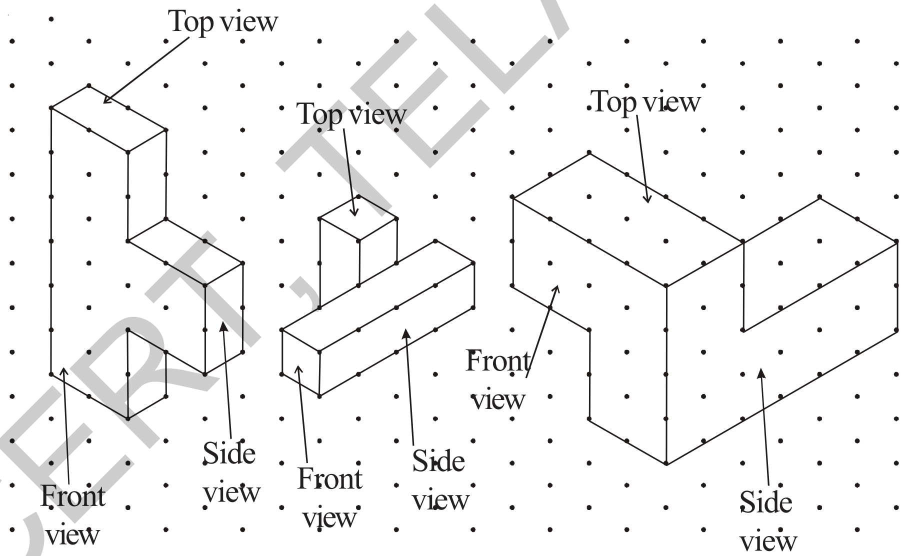
3. Find the number of unit cubes in the following 3-D figures.



(i) (ii) (iii) (iv)

4. Find the areas of the shaded regions of the 3-D figures given in question number 3.

5. Consider the distance between two consecutive dots to be 1 cm and draw the front view, side view and top view of the following 3-D figures.

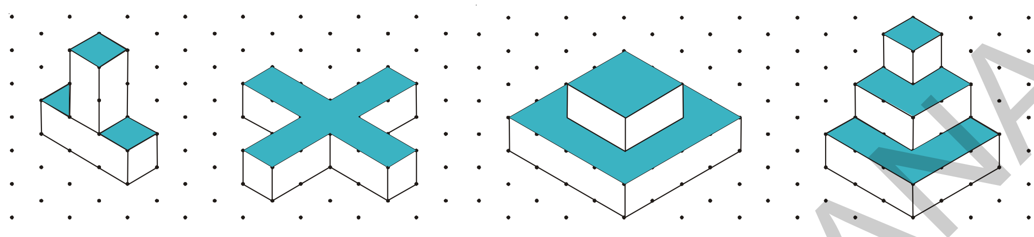


13.3 Various Geometrical Solids

In our surroundings we see various solid objects . Among them some solid objects have curved faces and some solid objects have flat faces. The 3-D objects like box , book, dice , have flat faces. The 3-D objects like ball , pipe etc have curved surfaces. Based on this property we can classify 3-D shapes as polyhedra and non-polyhedra. Observe the following.

2. 5 యూనిట్లు × 3 యూనిట్లు × 2 యూనిట్లు కొలతలు కల దీర్ఘ ఘనమును సమాన మాపము గల చుక్కల పటము పై గీయండి.

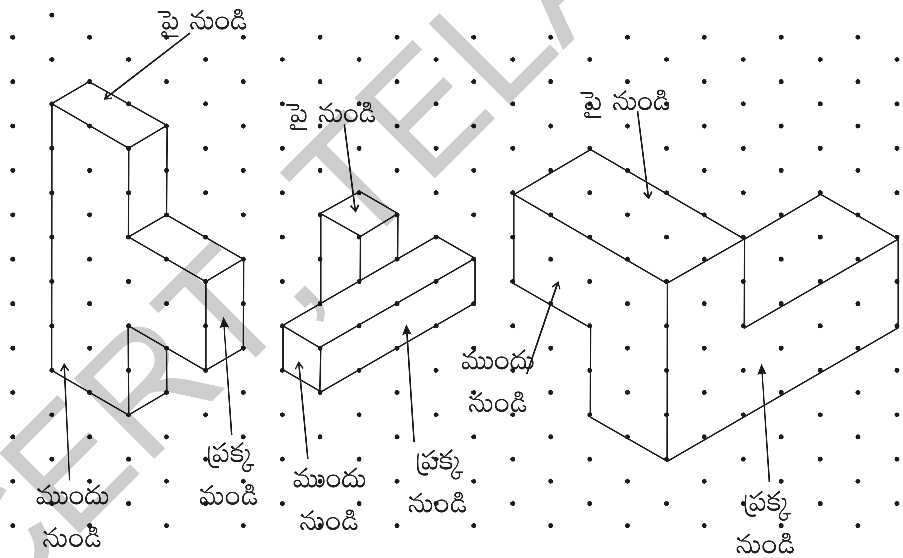
3. క్రింద ఇవ్వబడిన చిత్రముల యందు కల 1 యూననిట్ కొలతల గల సమఘనముల సంఖ్యను తెల్పండి.



(i) (ii) (iii) (iv)

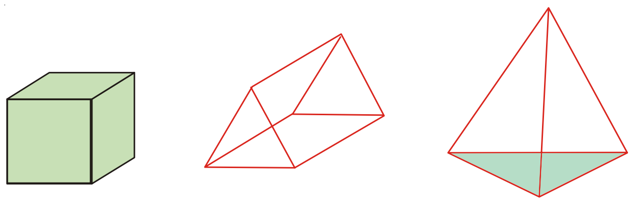
4. 3 వ ప్రశ్న యందు ఇవ్వబడిన పటములో షేడ్ (shade) చేయబడిన ప్రదేశాల వైశాల్యములు కనుక్కోండి.

5. క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో, వాటి యొక్క పై నుండి, ప్రక్క నుండి, ముందు నుండి చూచినపుడు కనబడు ఆకారముల పటములు గీయండి. (సమాన మాపము కల చుక్కల పటము నందు ఏ రెండు వరుస చుక్కల మధ్య దూరము 1 సెం.మీ).



13.3 వివిధ రకాల జ్యామితీయ ఘనములు

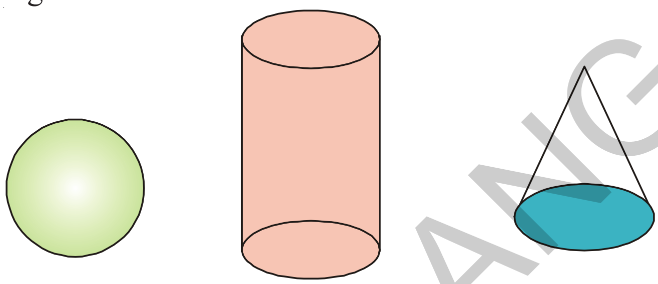
మనము, మనచుట్టుప్రక్కల అనేక ఘనాకారము కల వస్తువులను గమనిస్తుంటాము. అందు కొన్ని వక్రతలము కలవి, మరికొన్ని సమతలము కలవి. కొన్ని వస్తువుల తలములు (ఉదా:- బాక్స్, పుస్తకము, పాచికలు మొ॥వి) సమతలము కలిగి ఉంటాయి. మరి కొన్ని (ఉదా: బాల్, పైపులు మొ॥వి) వక్రతలము కలిగి ఉంటాయి. ఈ ధర్మము ఆధారముగా చేసుకొని వాటిని బహుముఖి ఫలకములుగా, బహుముఖి ఫలకములు కాని వస్తువులుగా విభజిస్తాము. ఈ క్రింది వాటిని గమనించండి.



Are there any curved faces for above solids?

No, all these have only flat surfaces. This type of solid objects with all polygonal faces are called polyhedra (singular is polyhedron)

Now observe these figures.



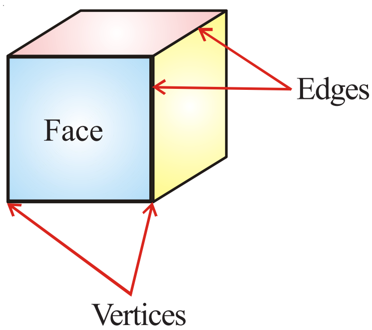
These objects have curved faces. This type of solid objects are called non-polyhedra.

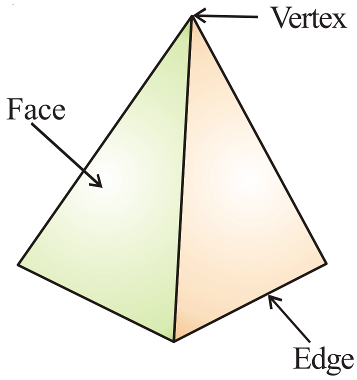
Try This

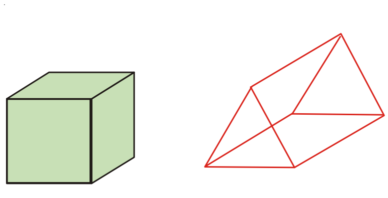
1. Name three things which are the examples of polyhedron.
2. Name three things which are the examples of non-polyhedron.

13.4 Faces, Edges and Vertices of 3D-Objects

Observe the walls, windows, doors, floor, top, corners etc of our living room and tables, boxes etc. Their faces are flat faces. The flat faces meet at its edges. Two or more edges meet at corners. Each of the corner is called vertex. Take a cube and pyramid, observe them where the faces meet? Where the edges meet?



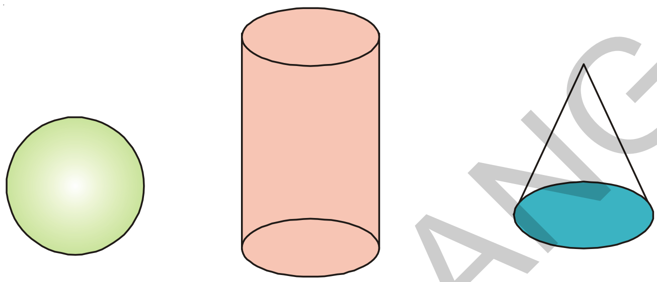




పై పటములో కల వస్తువుల యందు వక్ర తలములు కలిగినవి కలవా?

లేదు. అందుకు వస్తువులన్నియు సమతలము కలిగి ఉన్నవి. సమతలములు కలిగి యున్న వస్తువులను 'బహుముఖి ఫలకము' అంటారు.

ఇప్పుడు క్రింది పటములో కల వస్తువులను పరిశీలించండి..



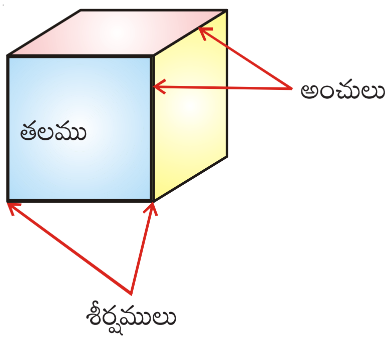
పై పటము నందలి వస్తువులు వక్రతలములు కలిగి ఉన్నవి. ఈ రకమైన వస్తువులను 'బహుముఖేతర ఫలకము' అంటారు.

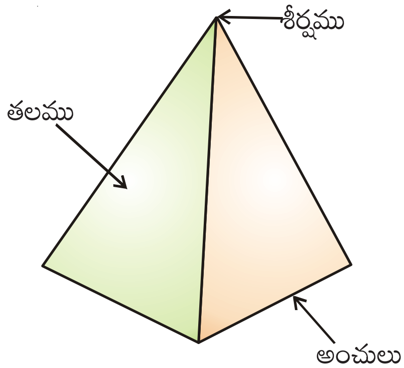
ప్రయత్నించండి

1. బహుముఖి ఫలకముగా కల వస్తువులకు 3 ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. బహుముఖేతర ఫలకముగా కల వస్తువులకు 3 ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

13.4 త్రిపరిమాణ వస్తువుల యొక్క తలములు, అంచులు, శీర్షములు

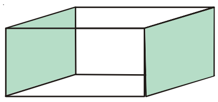
మనం నివసించే గది యొక్క గోడలు, కిటికీలు, తలుపులు, గది యొక్క పై భాగము, అడుగు తలము, మూలలు మొదలైనవి మరియు మనచుట్టూ కల వస్తువులు టేబుల్స్, బాక్స్‌లు మొ॥నవి గమనించండి. వాటి యొక్క తలములు సమతలములు. వాటి తలములు అంచుల వద్ద కలియుచున్నవి. రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ అంచులు మూలాల వద్ద కలియుచున్నవి. ఈ మూలలను శీర్షము అంటారు. ఒక సమఘనము మరియు పిరమిడ్‌ను తీసుకొని, వాటిలో ముఖాలు మరియు అంచులు ఎక్కడ కలుసుకుంటాయో గమనించండి.

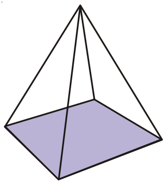


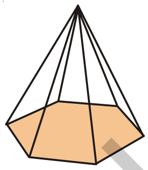


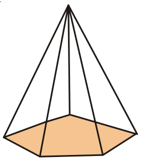
Do These

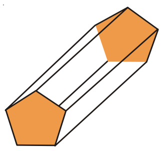
Identify the faces , edges and vertices of following figures.

1. 

2. 

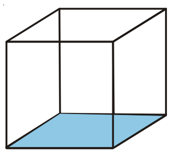
3. 

4. 

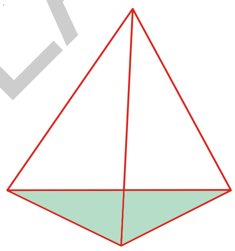
5. 

13.5 Regular Polyhedron

Observe the faces, edges and vertices in the following shapes.

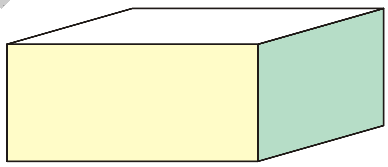


Cube

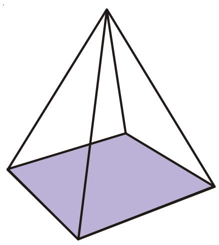


Triangular Pyramid (Tetrahedron)

In each of the above two objects, all their faces are congruent. All their edges are equal and vertices are formed by equal number of edges. Such type of solid objects are called regular polyhedra. Now observe these figures.



Cubiod

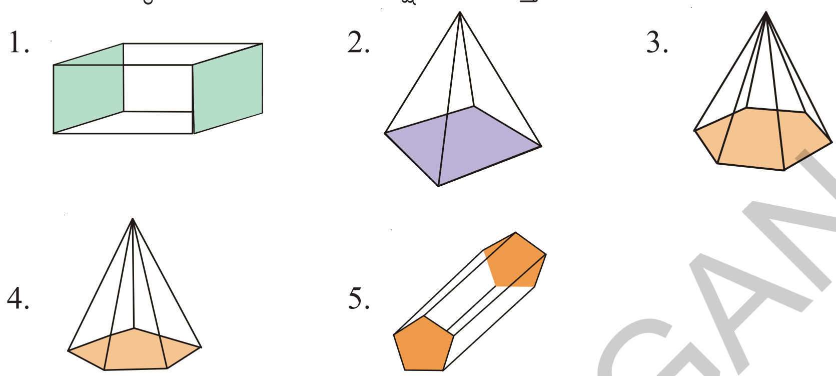


Square Pyramid

Cuboid is a non -regular polyhedra because all its faces are not congruent and in the square pyramid the one vertex formed by 4 edges and other vertices formed by 3 edges. More over all the faces in pyramid or not congruent. It is also not a regular polyhedra. These type of objects are non- regular polyhedra. Thus polyhedra can be classified into regular polyhedra and non-regular polyhedra.

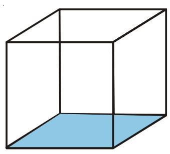
ఇవి చేయండి

క్రింది పటముల యొక్క తలములు, అంచులు, శీర్షములను గుర్తించండి.

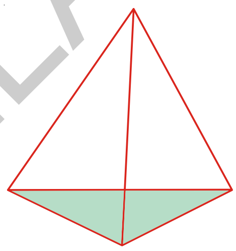


13.5 క్రమ బహుముఖి ఫలకములు

క్రింది పటముల యొక్క తలములు, అంచులు, శీర్షములను పరిశీలించండి.

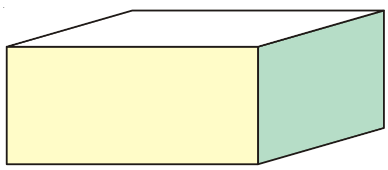


సమ ఘనము

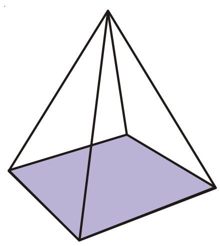


త్రిభుజాకార పిరమిడ్ (చతుర్ముఖీయ పిరమిడ్)

పై వస్తువులను గమనించినట్లయితే, వాటి యొక్క తలములు సర్వ సమానములు. వాటి అంచులు అన్నియు సమానమైన పొడవు కలిగి ఉన్నవి. వాటి శీర్షములు అన్నియు సమాన సంఖ్యలో గల తలములచే ఏర్పడుచున్నవి. ఈ విధమైన ధర్మము కల వస్తువులను "సమబహుముఖి ఫలకము" అంటారు. ఇప్పుడు క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



దీర్ఘఘనము

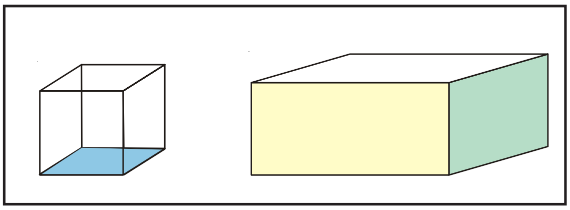


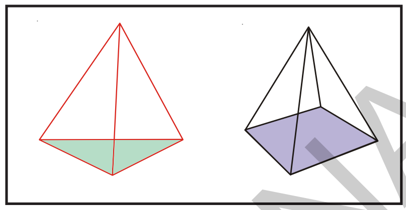
చతురస్రాకార పిరమిడ్

దీర్ఘఘనము ఒక అసమ బహుముఖి. ఇందలి తలములు అన్నియు సర్వ సమానములు కావు. పిరమిడ్ నందు పైశీర్షము 4 తలముల చేత, మిగిలిన శీర్షములు 3-తలములచే ఏర్పడినవి. ఇటువంటి వస్తువులను అసమ బహుముఖిగా పేర్కొంటారు. కావున బహుముఖి ఫలకములను సమబహుముఖి ఫలకములుగాను, అసమ బహుముఖి ఫలకములుగాను విభజించగలము.

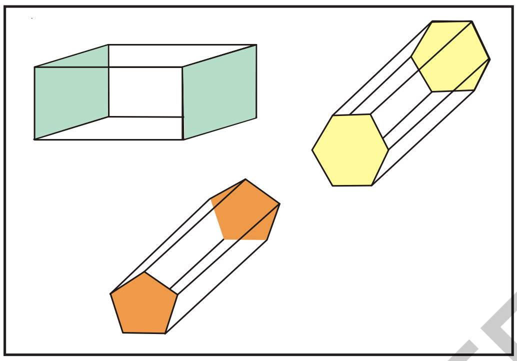
13.5.1 Prism and Pyramid

Now observe the following objects

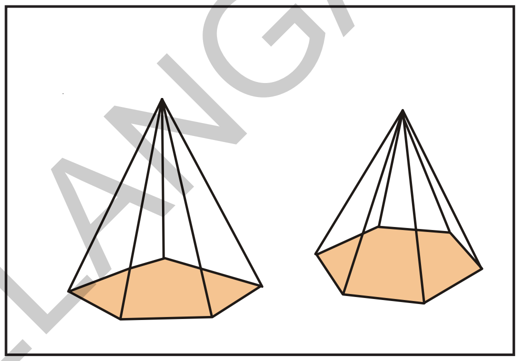




The objects in first box have same faces at top and bottom. The objects in the second box have base but the top is a common vertex. Let us observe some more objects like this.



(a)



(b)

In fig (a) each object has two parallel and congruent polygonal faces, and the lateral faces are rectangles (or Parallelograms). In fig (b) The base is a polygon and lateral faces are triangles ,they meet at a common vertex. The solid object with two parallel and congruent polygonal faces and lateral faces as rectangles or parallelograms is called a **prism**.

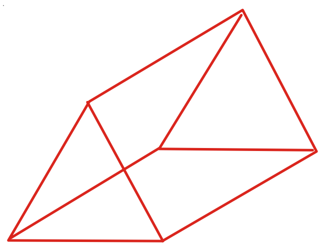
A solid object whose base is a polygon and its lateral faces are triangular faces is called **pyramid**".

A prism or pyramid is named after its shape of parallel and congruent polygonal faces or the base.

A. Triangular Prism

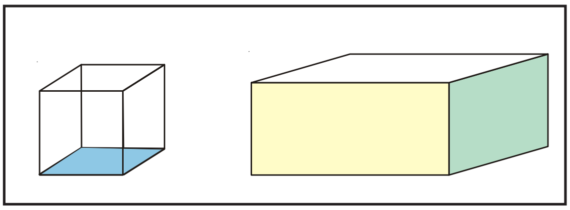
What is the shape of two congruent and parallel faces in the adjacent figure? And what is the shape of its lateral faces ?

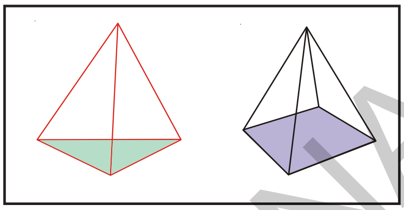
Its two congruent and parallel faces are triangular and its lateral faces are parallelograms. This is known as triangular prism.



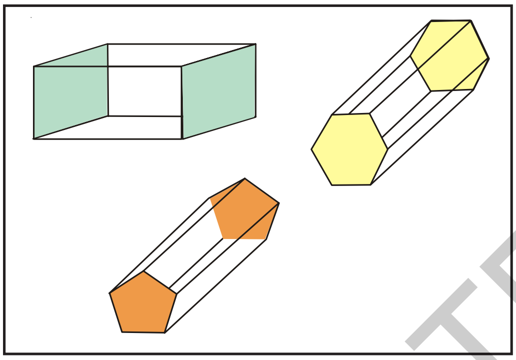
13.5.1 పట్టకము మరియు పిరమిడ్

ఈ క్రింది పటములు పరిశీలించండి.

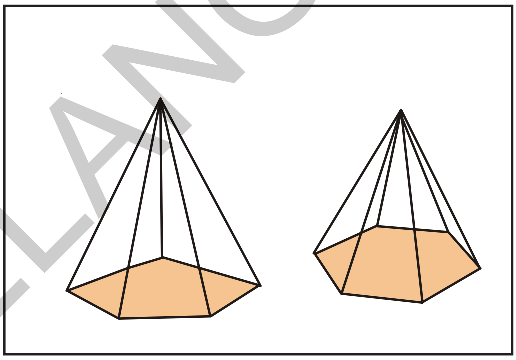




మొదటి బాక్స్ నందలి వస్తువులపై తలము, క్రింది తలము ఒకే విధముగా కలవు. రెండవ బాక్స్ నందలి వస్తువులలో పై తలమునకు బదులుగా అన్ని తలములు ఒక బిందువు వద్ద కలుపబడిన శీర్షము కలదు. ఇటువంటి మరికొన్ని వస్తువులను పరిశీలిద్దాము.



(a)



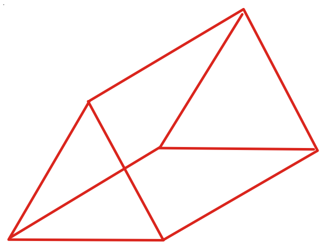
(b)

పటము (a) నందు కల వస్తువులలో ఎదురెదురుగా సమాంతరముగా కల రెండు తలములు సర్వసమానముగా కలవు. ప్రక్క తలములు దీర్ఘచతురస్రములు (సమాంతర చతుర్భుజములు). పటము (b) నందు కల వస్తువుల యందు భూమి బహు భుజి, ప్రక్క తలములు త్రిభుజములు. అవి ఒక ఉమ్మడి బిందువు వద్ద కలియుచున్నవి. ఒక బహుముఖితో ఎదురెదురుగా సమాంతరముగా కల రెండు తలములు సర్వసమానములై, మిగిలిన తలములు సమాంతరచతుర్భుజము (దీర్ఘచతురస్రము) లైన ఆ వస్తువును పట్టకము అంటారు.

ఒక బహుముఖి యొక్క అడుగు భాగము బహుభుజిగాను మిగిలిన ప్రక్క తలములు త్రిభుజములుగా ఉంటే ఆ బహుముఖిని పిరమిడ్ అంటారు.

పట్టకము లేక పిరమిడ్ యొక్క పేరు వాటి యొక్క అడుగు తలము లేక సమాంతరముగా ఎదురెదురుగా గల తలముల ఆధారంగా పేర్కొంటారు.

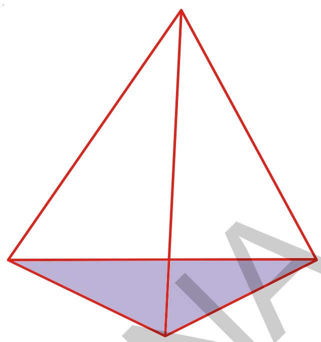
A. త్రిభుజాకార పట్టకము



ప్రక్క పటమును పరిశీలించండి. దాని యొక్క ఎదురెదురుగా గల సమాంతర తలములు ఏ ఆకారములో కలవు? వాటి ప్రక్క తలములు (మిగిలిన తలములు) ఏ ఆకారముతో కలవు?

వాటి యొక్క ఎదురెదురుగా కల సమాంతర తలములు త్రిభుజాకారముగా కలవు. వాటి యొక్క ప్రక్క తలములు సమాంతర చతుర్భుజములు. ఇటువంటి పట్టకమును త్రిభుజాకార పట్టకము అంటారు.

If the base is a square , it is called square prism. If the base is a pentagon , it is called pentagonal prism.



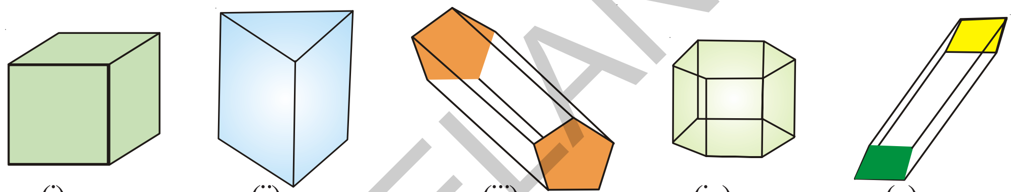
B. Triangular Pyramid

A pyramid whose base is a triangle is called triangular pyramid. It is known as tetrahedron. (Tetra-means having four faces) If the base of a pyramid is square , it is called as square pyramid.

If the base of a pyramid is a pentagon , it is called as pentagonal pyramid.

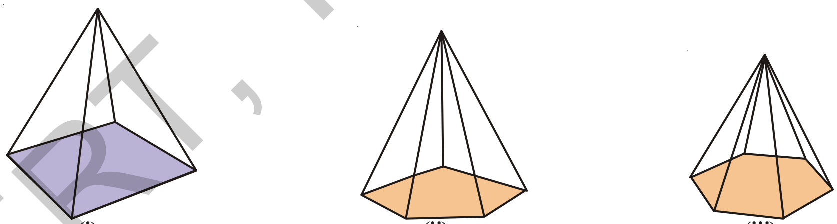
Do This

1. Write the names of the prisms given below:



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. Write the names of the pyramids given below:



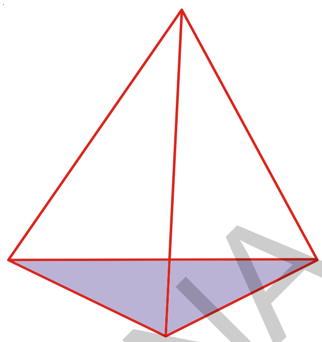
(i) (ii) (iii)

3. Fill the table.

Number of sides of prism/ pyramid	Name of the prism	Name of the pyramid
3 sides		
4 sides		
5 sides		
6 sides		
8 sides		

4. Explain the difference between prism and pyramid.

ఒక పట్టకము యొక్క అడుగు భాగము చతురస్రము అయిన అది చతురస్రాకార పట్టకము (సమఘనము) అంటారు. ఒక పట్టకము యొక్క అడుగు భాగము పంచభుజి అయిన అది పంచభుజాకార పట్టకము.



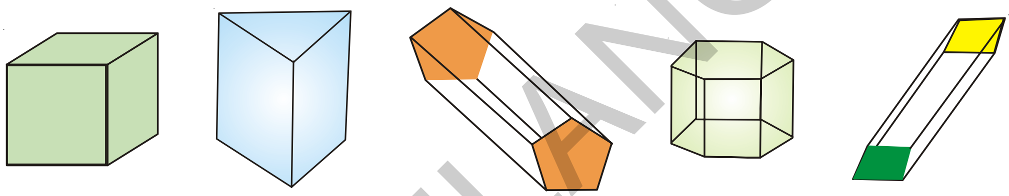
B. త్రిభుజాకార పిరమడ్

ఒక పిరమిడ్ నందు దాని అడుగు భాగమున గల తలము త్రిభుజము అయిన అది త్రిభుజాకార పిరమిడ్ (చతుర్ముఖీయ పిరమిడ్) అంటారు. ఒక పిరమిడ్ యొక్క అడుగుభాగము చతురస్రము అయిన దానిని చతురస్రాకార పిరమిడ్ అంటారు.

ఒక పిరమిడ్ యొక్క అడుగుభాగము పంచభుజి అయిన దానిని పంచభుజాకార పిరమిడ్ అంటారు.

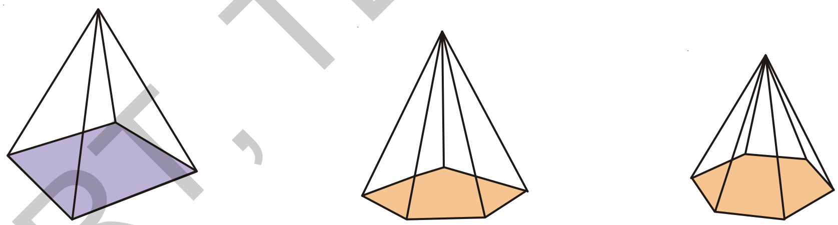
ఇవి చేయండి

1. క్రింద ఇచ్చిన పట్టకముల పేర్లు రాయండి.



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. క్రింద ఇచ్చిన పిరమిడ్‌ల పేర్లను రాయండి.



(i) (ii) (iii)

3. క్రింద పట్టికను పూరించండి.

పట్టకము / పిరమిడ్ యొక్క భుజాల సంఖ్య	పట్టకము పేరు	పిరమిడ్ పేరు
3 భుజములు		
4 భుజములు		
5 భుజములు		
6 భుజములు		
8 భుజములు		

4. పట్టకము, పిరమిడ్‌ల మధ్య తేడాలను వివరించండి.

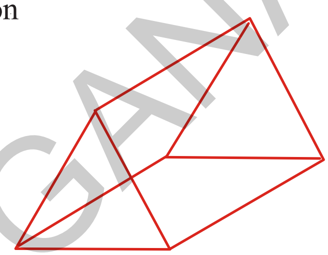
Think Discuss and write

If the number of sides of a polygonal base of a regular pyramid are infinitely increased what would be the shape of the pyramid?

13.6 Number of Edges , Faces and Vertices of polyhedrons

Let us count the number of faces, edges and vertices of a polyhedon

.

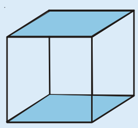
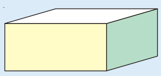
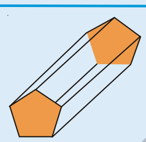
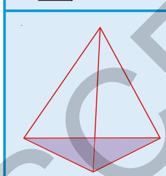
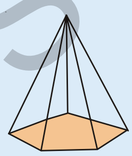


Number of faces = (5) faces

Number of edges = (9) edges

Number of vertices = (6) vertices

Observe and complete the table.

Diagram of object	Name of the object	Number of Faces (F)	Number of Vertices (V)	Number of Edges (E)	F+V	E+2
	Cube	6	8	12	6 + 8 = 14	12 + 2 = 14
	Cuboid					
	Pentagonal Prism					
	Tetra hedron					
	Pentagonal Pyramid					

By observing the last two columns of the above table. We can conclude that

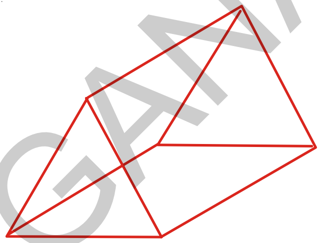
F + V = E + 2 for all polyhedra.

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

ఒక క్రమ పిరమిడ్ నందు అడుగు తలము యొక్క భుజముల సంఖ్య అనంతముగా పెంచినచో, ఆ పిరమిడ్ మార్పు చెందు ఆకారమును, గమనించండి.

13.6 బహుముఖి యొక్క అంచులు, తలములు, శీర్షముల సంఖ్య

ప్రక్క పటంలో బహుముఖి యొక్క అంచులు, తలములు, శీర్షములను లెక్కించెదము.

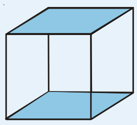
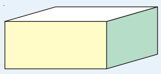
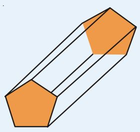
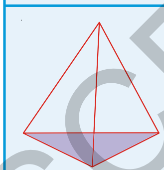
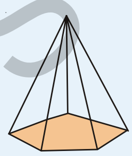


తలముల సంఖ్య = (5) తలములు

అంచుల సంఖ్య = (9) అంచులు

శీర్షముల సంఖ్య = (6) శీర్షములు

క్రింది పట్టికను గమనించి, పూరించండి.

వస్తువు	వస్తువు యొక్క పేరు	తలముల సంఖ్య (F)	శీర్షముల సంఖ్య (V)	అంచుల సంఖ్య(E)	F+V	E+2
	సమఘనము	6	8	12	$6 + 8 = 14$	$12 + 2 = 14$
	దీర్ఘఘనము					
	పంచభుజాకార ఘనము					
	చతుర్ముఖి					
	పంచభుజాకార పిరమిడ్					

పై పట్టిక యొక్క చివరి రెండు నిలువు వరుసల పరిశీలిస్తే అన్ని బహుముఖిలకు

మనము $F + V = E + 2$ అని గమనించగలము.

The relation was first observed by the mathematician Leonhard Euler (pronounced as Oiler).

He stated that **F + V = E + 2** . This relation ship is called " **Euler's relation**" for polyhedra.

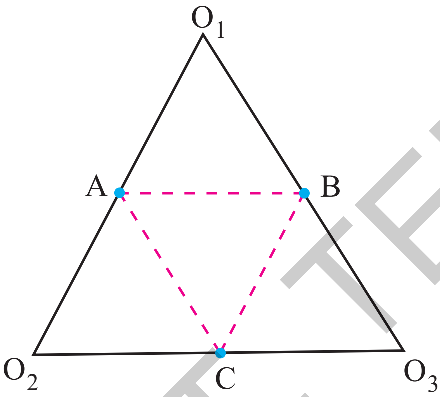
Leonhard Euler
(1707-1783)

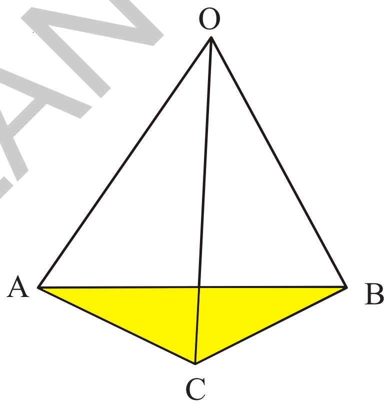
13.7 Net Diagrams

A net is a sort of skeleton - outline in 2-D, which, when folded gives a 3-D shape.

We can make prisms, pyramids by using net diagrams. Observe the activity given below to make a triangular pyramid.

Take a piece of paper and cut into a triangle. Mark the vertices as O_1, O_2, O_3 and identify the mid points of sides as A, B, C.



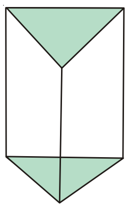


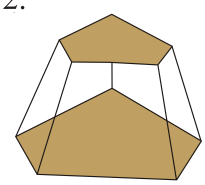
Fold the paper along dotted lines AB, BC, CA and raise the folds till the points O_1, O_2, O_3 meet at 'O'. By this AO_1 coincides with AO_2, BO_1 with BO_3 and CO_2 with CO_3.

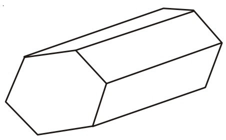
The object so formed is a pyramid. The diagram O_1, O_2, O_3 is a net diagram of the pyramid.

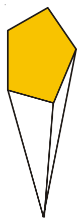
Exercise - 13.2

1. Count the number of faces , vertices , and edges of given polyhedra and verify Euler's formula.

1. 

2. 

3. 

4. 

లియోనార్డ్ ఆయిలర్ అను గణిత శాస్త్రవేత్త మొదటిసారిగ వీటి మధ్యగల సంబంధమును కనుగొనెను. అందుకే

$\mathbf{F+V=E+2}$. ను బహుముఖిలో ఆయిలర్ సంబంధముగా పేర్కొంటారు.

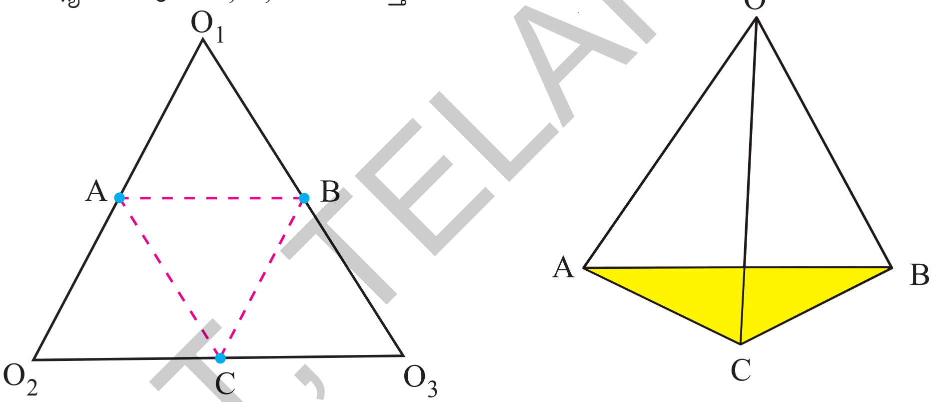
లియోనార్డ్ అయిలర్
(1707-1783)

13.7 త్రిమితీయ ఆకారాల వల రూపాలు

ఒక వల అనేది ఎముకల గూడును పోలియుండే ఒక ద్విమితీయ ఆకారము. ఈ వల అంచుల వెంబడి మడిస్తే అది త్రిమితీయ ఆకారముగా మారుతుంది. త్రిమితీయాలు గల వస్తువును తయారు చేయుటకు కాగితం లేక అట్టను ఉపయోగిస్తాం.

వల రూపములు ఉపయోగించి మనము పట్టకములు, పిరమిడ్‌లను తయారుచేయగలము. చతుర్ముఖి యొక్క వలరూపము గీయు విధము పరిశీలిద్దాము.

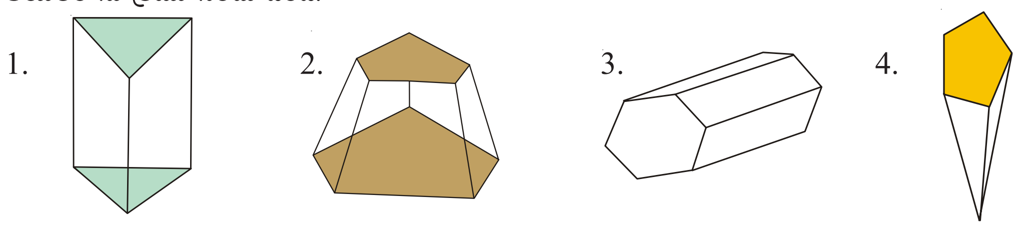
ఒక కాగితాన్ని తీసుకొని దాన్ని త్రిభుజాకారములో కత్తిరించుము. దాని శీర్షాలను O_1, O_2, O_3 గా గుర్తించండి మరియు వాటి భుజముల మధ్య బిందువులు A, B, C లుగా గుర్తించండి.

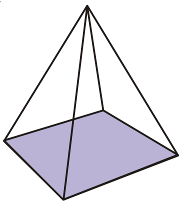


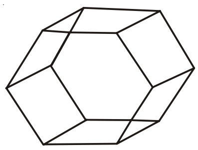
కాగితమును AB, BC, CA ల వద్ద గీయబడిన చుక్కల రేఖకు వెంబడి మడిచి పెట్టండి. ఆ మడిచిన భాగాలను O_1, O_2, O_3 లు ఒకే బిందువు 'O' వద్ద కలియునట్లుగా పైకి మడిచి పెట్టండి. AO_1 ను AO_2 తోను, BO_1 ను BO_3 తోను, CO_2 ను CO_3 తో కలియునట్లుగా మడిచి పెట్టండి. ఇపుడు మనకు ఏర్పడిన ఆకారము చతుర్ముఖి (త్రిభుజాకార పిరమిడ్) O_1, O_2, O_3 తో కల పటము చతుర్ముఖి యొక్క వల రూపము.

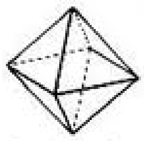
అభ్యాసము - 13.2

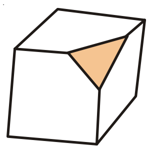
1. క్రింది పటములలో కల బహుముఖి యొక్క తలములు, శీర్షములు, అంచుల యొక్క సంఖ్యను లెక్కించండి. వాటికి ఆయిలర్ సూత్రము సరిచూడండి.



5. 

6. 

7. 

8. 

2. Is a square prism and cube are same? explain.

3. Can a polyhedra have 3 triangular faces only? explain.

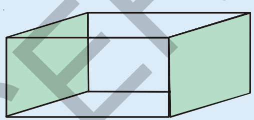
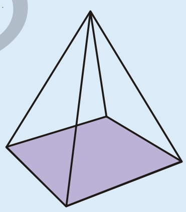
4. Can a polyhedra have 4 triangular faces only? explain.

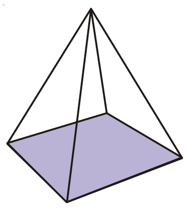
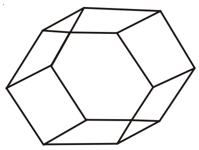
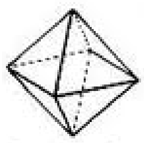
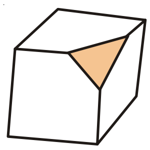
5. Complete the table by using Euler's formula.

F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

6. Can a polyhedra have 10 faces , 20 edges and 15 vertices ?

7. Complete the following table

Object	No. of vertices	No. of edges
		
		
		

5.  6.  7.  8. 

2. చతురస్రాకార పట్టకము, సమఘనము ఒకటేనా? వివరించండి.

3. ఏదైనా బహుముఖి 3 త్రిభుజ తలములు కలిగి ఉంటుందా? వివరించండి.

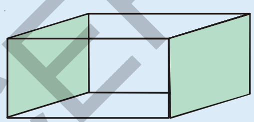
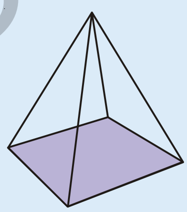
4. ఏదైనా బహుముఖి 4 త్రిభుజ తలములు కలిగి ఉంటుందా? వివరించండి.

5. క్రింది టేబుల్ నందలి ఖాళీలను ఆయిలర్ సూత్రము ఆధారముగా పూరించండి.

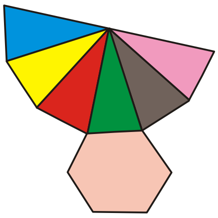
F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

6. ఏదైనా ఒక బహుముఖి 10 తలములు, 20 అంచులు, 15 శీర్షములు కలిగి ఉంటుందా? వివరించండి.

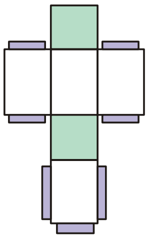
7. క్రింది పట్టికను పూరించండి.

వస్తువు	శీర్షముల సంఖ్య	అంచుల సంఖ్య
		
		
		

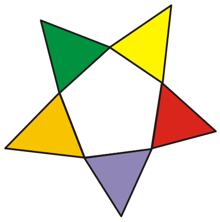
8. Name the 3-D objects or shapes that can be formed from the following nets.



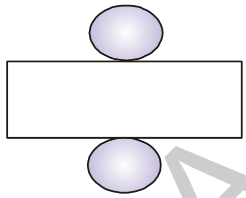
(i)



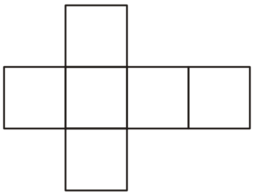
(ii)



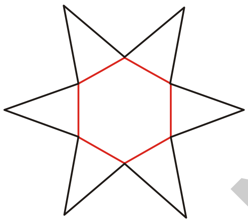
(iii)



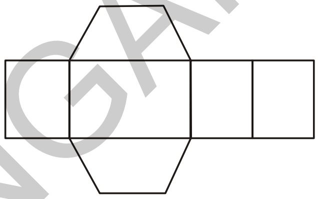
(iv)



(v)



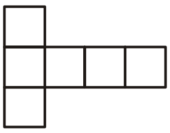
(vi)



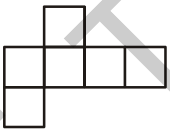
(vii)

9. Draw the following diagram on the check ruled book and find out which of the following diagrams makes cube ?

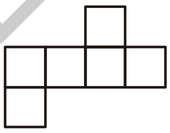
(i)



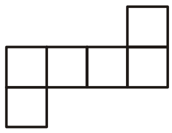
(a)



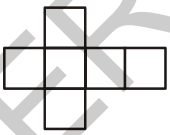
(b)



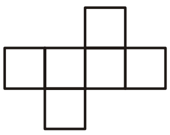
(c)



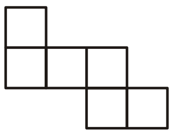
(d)



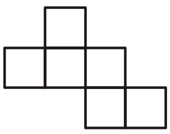
(e)



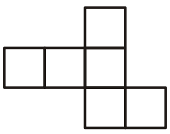
(f)



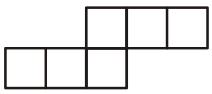
(g)



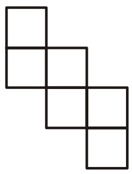
(h)



(i)

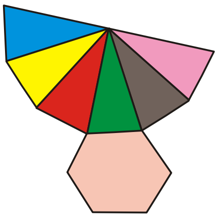


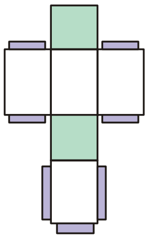
(j)

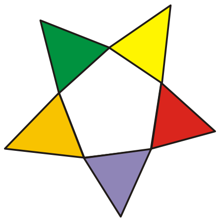


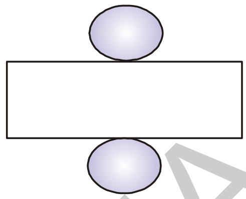
(k)

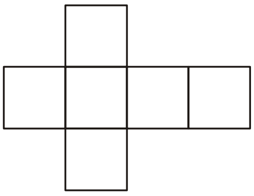
8. క్రిందనీయబడిన వలరూపాలు ద్వారా ఏర్పడు 3-D వస్తువులు లేక ఆకారాలను గుర్తించి వ్రాయండి.

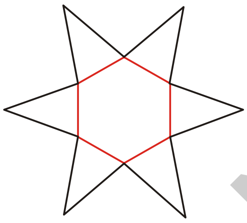

(i)

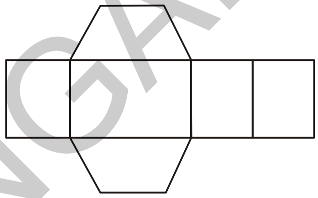

(ii)


(iii)


(iv)

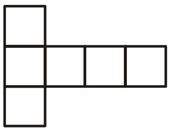

(v)

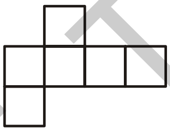

(vi)

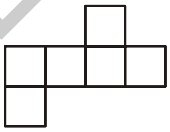

(vii)

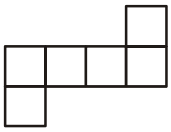
9. క్రింది వల రూపములను చెక్‌రూల్ బుక్ నందు గీయండి. మరియు క్రింద నీయబడిన వలరూపములతో సమఘనము తయారుచేయగల వలరూపములను కనుగొనండి.

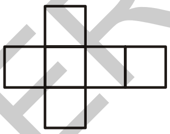
(i)

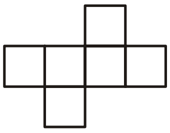

(a)

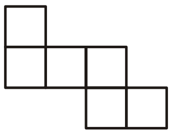

(b)

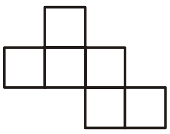

(c)

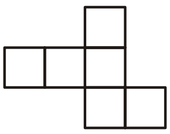

(d)

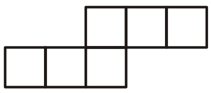

(e)

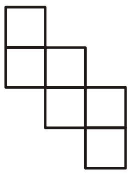

(f)


(g)


(h)


(i)


(j)


(k)

(ii). Answer the following questions.

(a) Name the polyhedron which has four vertices, four faces?

(b) Name the solid object which has no vertex?

(c) Name the polyhedron which has 12 edges?

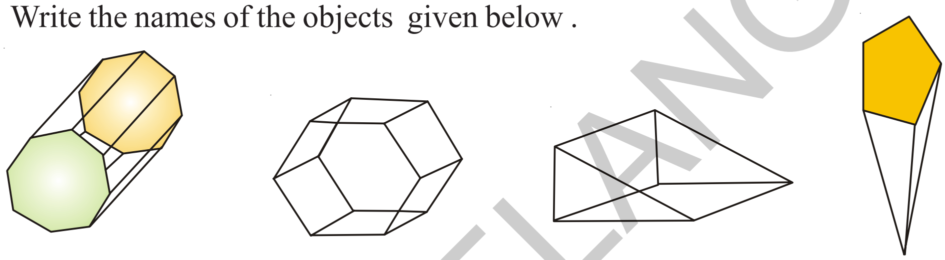
(d) Name the solid object which has one surface?

(e) How a cube is different from cuboid?

(f) Name the two shapes which have the same number of edges , vertices and faces.

(g) Name the polyhedron which has 5 vertices and 5 faces?

(iii). Write the names of the objects given below .



(a) (b) (c) (d)

What we have discussed

1. How to draw 3-D objects on 2-D isometric dot paper.
2. Three different views of 3-D shapes are top view, side view and front view.
3. Polyhedron : Solid objects having flat surfaces.
4. Prism : The polyhedra that have top and base as the same polygon and other faces that are rectangular.
5. Pyramids : Polyhedron that have a polygon as the base and a vertex with all other faces as triangles.
6. 3-D objects can be made by using 2-D nets.
7. Euler's formula for polyhedra : $E + 2 = F + V$.

K5D3N1

(ii) క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి.

(a) నాలుగు శీర్షములు, 4 తలములు కల బహుముఖిని పేర్కొనండి.

(b) ఒక శీర్షము కూడా లేని ఘనాకారపు వస్తువును పేర్కొనండి.

(c) 12 అంచులు గల బహుముఖిని పేర్కొనండి.

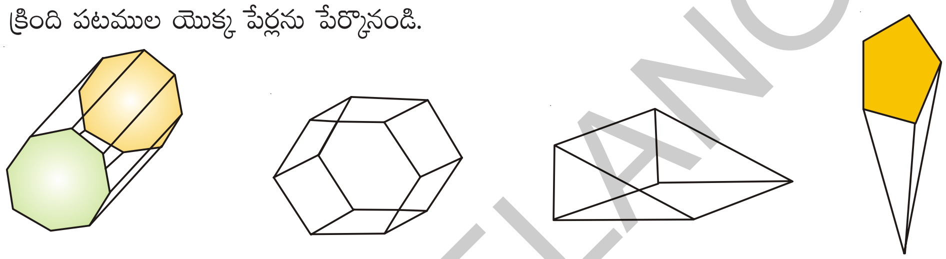
(d) ఒకే ఒక తలము గల ఘనాకారపు వస్తువును పేర్కొనండి.

(e) సమఘనము, దీర్ఘఘనమునకు గల బేధములు వివరించండి.

(f) అంచుల సంఖ్య, శీర్షముల సంఖ్య, తలముల సంఖ్య సమానముగా గల రెండు బహుముఖిలను పేర్కొనండి

(g) 5 శీర్షములు, 5 తలములు గల బహుముఖినని పేర్కొనండి.

(iii). క్రింది పటముల యొక్క పేర్లను పేర్కొనండి.



(a) (b) (c) (d)

మనం ఏమి చర్చించాం

1. త్రిపరిమాణ వస్తువుల ఆకారములు సమాన మాపము గల చుక్కలు కాగితముపై గీయువిధానము.

2. త్రిపరిమాణ వస్తువులను పై నుండి, ప్రక్క నుండి, ఎదుటి నుండి చూసినప్పుడు కనబడు వివిధ మూడు రకాల ఆకారములు

3. **బహుముఖి :** సమతలములు కలిగిన వస్తువులు.

4. **పట్టకము :**బహుముఖి నందు సమాంతరంగా ఎదురెదురుగా కల రెండు తలము సర్వసమానముగాను, మిగిలిన తలములు దీర్ఘచతురస్రములు (సమాంతర చతుర్భుజము)గా కలిగిన వస్తువులను పట్టకము అంటారు.

5. **పిరమిడ్ :** బహుముఖి నందు అడుగు భాగము యొక్క తలము బహుభుజిగాను, మిగిలిన ప్రక్క తలములు త్రిభుజములుగా కలిగిన వస్తువులను పిరమిడ్ అంటారు.

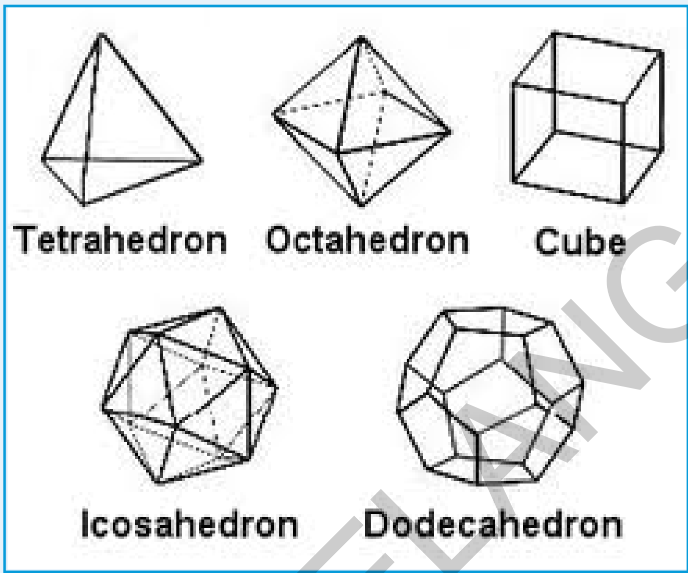
6. త్రిపరిమాణ వస్తువులు తయారుచేయుటకు ద్విమితీయ వల రూపములు ఉపయోగించుట.

7. బహుముఖిల కోసం ఆయిలర్ సూత్రము $E + 2 = F + V$.

K5C4C1

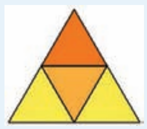
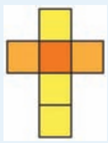
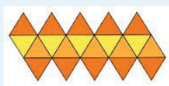
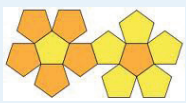
Do you Know?

There are only five regular polyhedra, all of them are complex, often referred as **Platonic solids** as a tribute to Plato



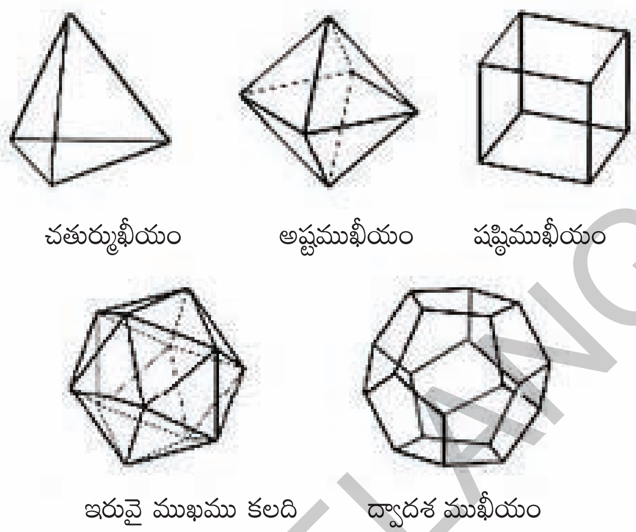
Cube is the only polyhedron to completely fill the space.

Net diagrams of Platonic Solids

Polyhedron Name	Face of polygons	Net diagram
Tetrahedron	4 Triangles	
Octahedron	8 Triangles	
Cube	6 Squares	
Icosahedron	20 Triangles	
Dodecahedron	12 Pentagons	

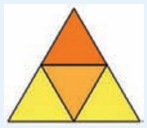
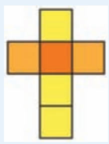
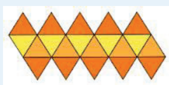
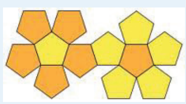
మీకు తెలుసా?

కేవలం ఐదు క్రమ బహుముఖీయాలు ఉన్నాయి. ఇవి సంక్లిష్టమైనవి. ప్లేటోకి నివాళిగా వీటిని ప్లేటో ఘనాలు అంటారు.



సమఘనము కేవలం బహుముఖి. ఇది పూర్తిగా అంతరాళంతూ నిండి ఉంటుంది.

ప్లేటోనిక్ వస్తువుల వలరూపాలు

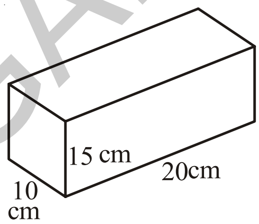
బహుముఖిపేరు	బహుభుజి తలాలు	వలరూపము
చతుర్ముఖీయం	4 త్రిభుజాలు	
అష్టముఖీయం	8 త్రిభుజాలు	
షష్ఠిముఖీయం	6 చతురస్రాలు	
ఇరవై ముఖాలు కలది	20 త్రిభుజాలు	
ద్వాదశముఖీయం	12 పంచభుజిలు	

CHAPTER 14

Surface Areas And Volume (Cube and Cuboid)

X1Q2B9

14.0 Introduction



Suresh wants to wrap up his gift box. One of his friends suggested to buy 100 cm^2 paper another friend suggested to buy 200 cm^2. Whose suggestion is correct? How would he know that how much paper he has to buy?

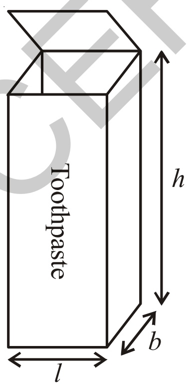
It is obvious that size of the paper required depends on the surface area of the gift box .

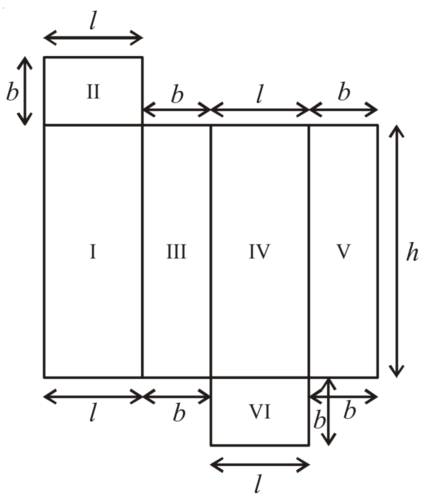
In order to help ourselves in such situations, let us find the ways of calculating the surface areas of different solid objects.

14.1 Cuboid

Take a cuboid shaped box made up of thick paper or cardboard for example toothpaste box.

Cut and open it as shown in figure. Observe its shape of the faces. How many sets of identical faces are found?





Look at the figure, if length '*l*', breadth '*b*', height '*h*' are its dimensions, then you can find three pairs of identical faces.

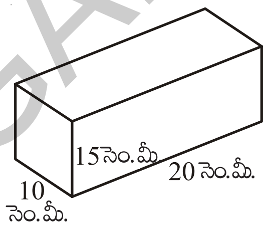
అధ్యాయం

14 ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం (ఘనం మరియు దీర్ఘఘనం)

Q8R2Z2

14.0 పరిచయం

సురేష్ తన బహుమతి పెట్టెను రంగు కాగితముతో అలంకరించాలని అనుకొన్నాడు. స్నేహితులలో ఒకరు 100 చదరపు సెంటీమీటర్లు కాగితమును మరొక స్నేహితుడు 200 చదరపు సెంటీమీటర్లు కాగితమును కొనాలని సూచించారు. ఎవరి సూచన సరైనది? అయితే పెట్టెను చుట్టుట కొరకు సురేష్ ఎంత పరిమాణము కల్గిన రంగు కాగితమును కొనవలెనో? ఏ విధముగా గుర్తిసాడు?



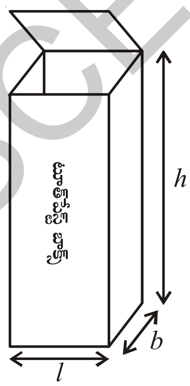
కావలసిన కాగితపు పరిమాణం, బహుమతి పెట్టె యొక్క ఉపరితల వైశాల్యంపై ఆధారపడి యుంటుందని మనము గుర్తించవచ్చు.

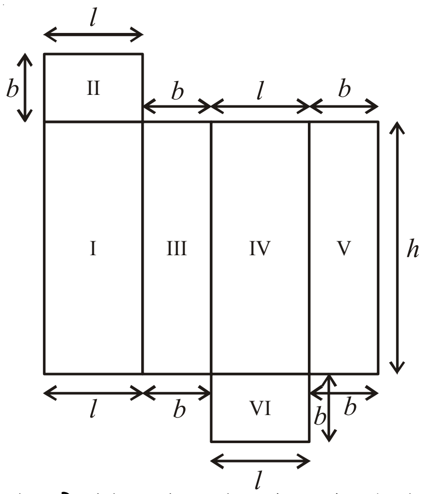
ఇటువంటి సందర్భములలో వివిధ ఘనాకార వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములను కనుగొను పద్ధతులు నేర్చుకొనుట అవసరము.

14.1 దీర్ఘ ఘనము

దళసరి కాగితం లేదా కార్డ్‌బోర్డుతో తయారు చేయబడిన దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న ఒక పెట్టెను. (ఉదాహరణకు టూత్ పేస్ట్‌డబ్బా) తీసుకొందాము.

దానిని పటంలో చూపిన విధంగా కత్తిరించి తిరిగి తెరచిన వచ్చు ఆకారమును పరిశీలిద్దాం. ఎన్ని జతల సర్వసమానములు అయిన దీర్ఘచతురస్రపు మడతలను గుర్తించారు?





పటాన్ని పరిశీలిస్తే ఇచ్చుట 'l', 'b' మరియు 'h' లు వరుసగా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను సూచిస్తున్నాయి. ఇక్కడ మనము మూడు జతల సర్వసమానం అయిన దీర్ఘచతురస్రాకారములను గుర్తించవచ్చు.

Now we can see that the total surface area of a cuboid is

Area I + Area II + Area III + Area IV + Area V + Area VI

$$= h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$$

So total surface area $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l)$

$$= 2\,(lb + bh + hl)$$

The height, length and the breadth of the gift box are 20cm, 10cm and 15cm respectively.

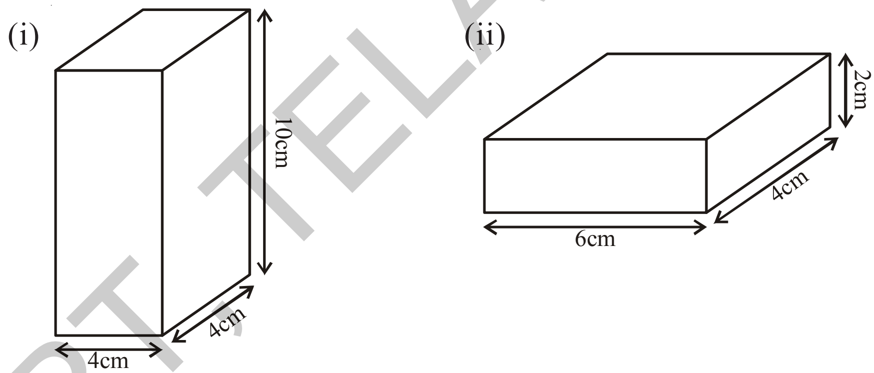
Then the Total Surface Area(T.S.A) of the box $= 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20)$

$$= 2\,(200 + 150 + 300)$$

$$= 2\,(650) = 1300 \text{ cm}^2$$

Do This

1. Find the total surface area of the following cuboid.



14.1.2 Lateral Surface Area

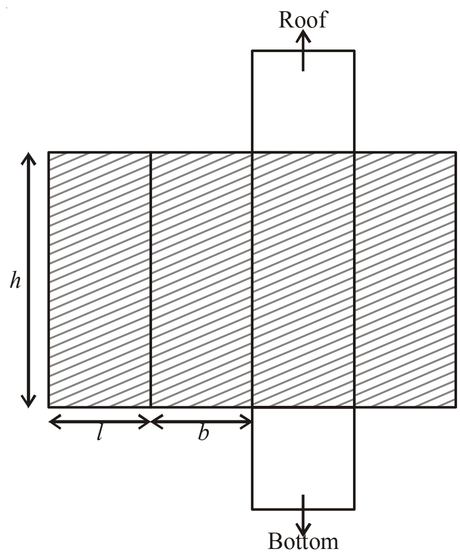
- The lateral faces (the faces excluding the top and bottom) make the lateral surface area of the cuboid. For example, the total area of all the four walls of the cuboidal room in which you are sitting is the lateral surface area of the room.

  Hence, the Lateral Surface Area of a cuboid

  (L.S.A.) $= (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$

  $$= 2lh + 2bh$$

  $$= 2h\,(l + b)$$



కావున దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

I వైశాల్యము + II వైశాల్యము+ III వైశాల్యము + IV వైశాల్యము + V వైశాల్యము + VI వైశాల్యము

$= h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

అందుచే దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l)$

$= 2\,(lb + bh + hl)$

బహుమతి పెట్టె కొలతలు 20 సెం.మీ. పొడవు, 10 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 15 సెం.మీ. ఎత్తు కొలతలు కావున దాని

సంపూర్ణ తల వైశాల్యము $= 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20)$

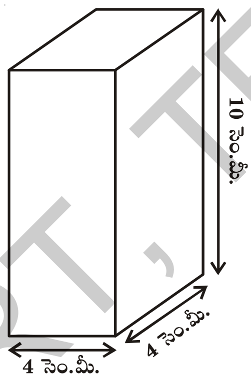
$= 2\,(200 + 150 + 300)$

$= 2\,(650) = 1300$ చ.సెం.మీ.

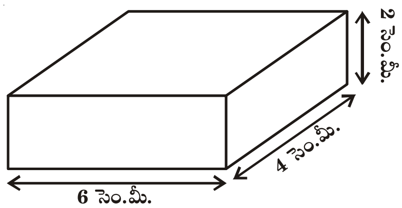
ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది దీర్ఘ ఘనముల యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(i)



(ii)



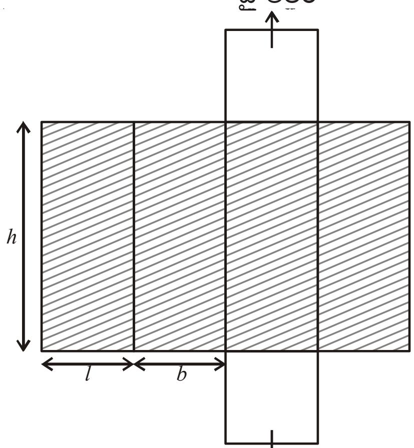
14.1.2 ప్రక్కతల వైశాల్యము

- ప్రక్కతలములు (పైతలము, క్రింద తలములను మినహా యించి) దీర్ఘఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యమును ఇస్తాయి. ఉదాహరణకు మనము కూర్చునే దీర్ఘఘనాకృతి గది యొక్క నాలుగు గోడల వైశాల్యము, ఆ గది యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము నిస్తుంది. కావున దీర్ఘ ఘన ప్రక్కతల వైశాల్యము (L.S.A)

$= (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$



Try These

(i) Take cuboid shaped duster (which your teacher uses in the class room). Measure its sides with scale and find out its surface area.

(ii) Cover this duster with a graph paper, such that it just fits around the surface. Count the squares and verify the area you have calculated.

(ii) Measure length,width and height of your classroom and find

(a) The total surface area of the room, ignoring the area of windows and doors

(b) The lateral surface area of the room

(c) The total area of the room which is to be white washed.

Think, Discuss and Write

1. Can we say that the total surface area of cuboid

   = lateral surface area + 2 × area of base.

2. If we change the position of cuboid from (Fig. (i) to Fig. (ii) do the lateral surface areas become equal?

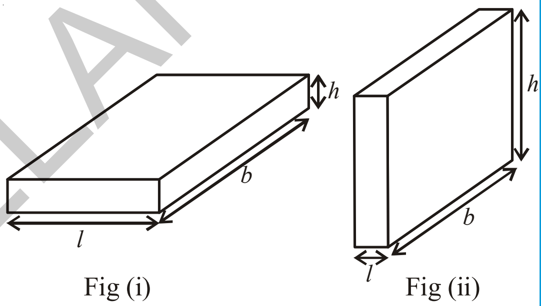


Fig (i) Fig (ii)

3. Draw a figure of cuboid whose dimensions are l, b, h are equal. Derive the formula for LSA and TSA.

14.2 Cube

Draw the net Fig. (i) given below, on a graph paper and cut it out. Fold it along the lines as shown in Fig. (i) and join the edges as shown in Fig(ii) and Fig. (iii). What is the shape of it? Examine its faces and its dimensions.

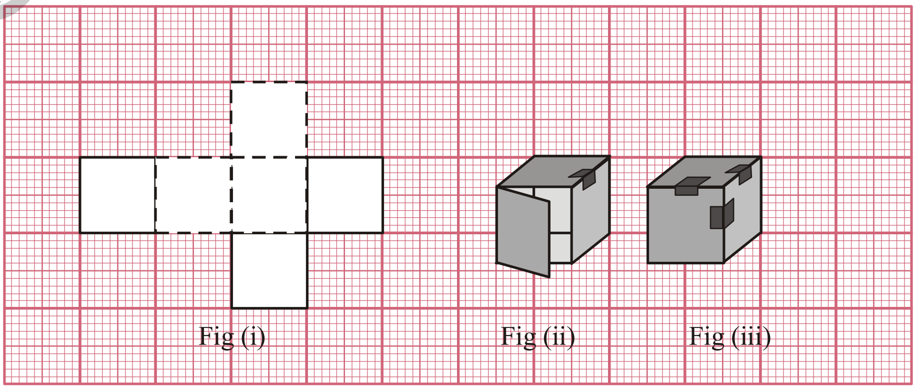


Fig (i) Fig (ii) Fig (iii)

ప్రయత్నించండి

(i) మీరు, మీతరగతిలో ఉపాధ్యాయుడు ఉపయోగించే దీర్ఘఘనాకృతి డస్టర్ యొక్క అంచుల కొలతలను స్కేలుతో కొలచి దానియొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(ii) డస్టర్‌ను గ్రాఫు కాగితములో అంచులన్నీ పూర్తిగా కప్పియుండేటట్లు చేసి, యూనిట్ చతురస్రములను లెక్కించి సంపూర్ణతల వైశాల్యమును గణించండి.

(iii) మీ తరగతి గది యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కొలిచి

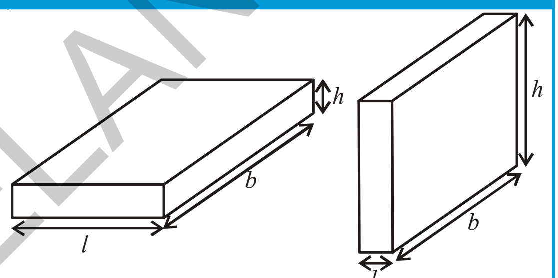
(a) గది యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుక్కోండి. (తలుపులు, కిటికీల యొక్క వైశాల్యములను పరిగణించవద్దు)

(b) గది యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము కనుక్కోండి.

(c) గదిలో సున్నము వేయవలసిన ప్రాంతపు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

ఆలోచించు, చర్చించి, రాయండి

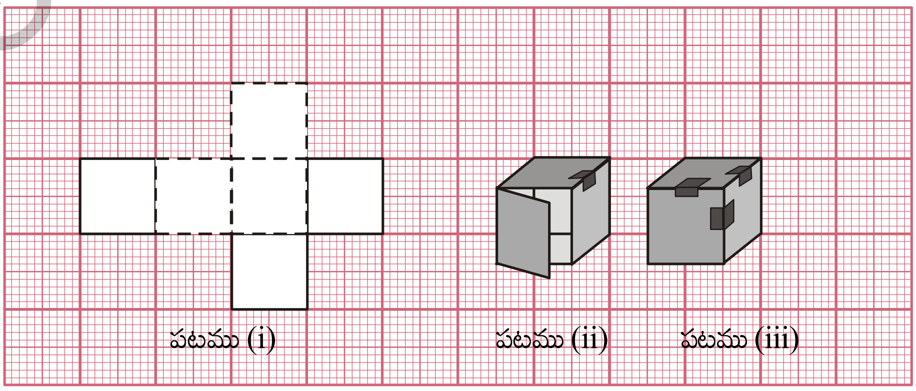
1. దీర్ఘ ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యము
= ప్రక్కతల వైశాల్యము + 2 × భూవైశాల్యము
అని మీరు చెప్పగలరా?
2. పటము (i) లో చూపిన దీర్ఘఘనము స్థానమును పటము (ii) లో లాగ మార్చిన వాటి ప్రక్కతల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయా?
3. పొడవు (l), వెడల్పు (b) ఎత్తు (h) కొలతలు సమానముగా గల దీర్ఘఘనపు పటమును గీచి దాని ప్ర.త.వై మరియు సం.త.వై. లకు సూత్రము రాబట్టుము.



పటం (i) పటం (ii)

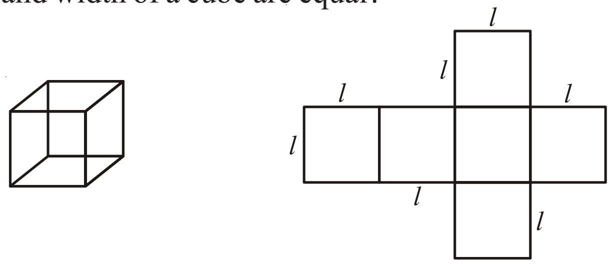
14.2 సమ ఘనము

పటము (i) లో చూపిన విధముగా వల(జాలము) ను గళ్ళ కాగితముపై గీచి కత్తిరింపుము. పటము (ii) మరియు (iii) లో సూచించిన విధముగా మడిచి అంచులు కలిపేటట్లు చేస్తే ఏర్పడే పట ఆకృతి ఏమిటి? దాని తలములను మరియు అంచులను పరిశీలింపుము.


పటము (i) పటము (ii) పటము (iii)

Observe the cube and its net diagram

In the figures (i) and (ii). Do all the faces of a cube are square in shape? Do the length, height and width of a cube are equal?



(i) (ii)

(a) How many faces does a cube have? Are all faces equal?

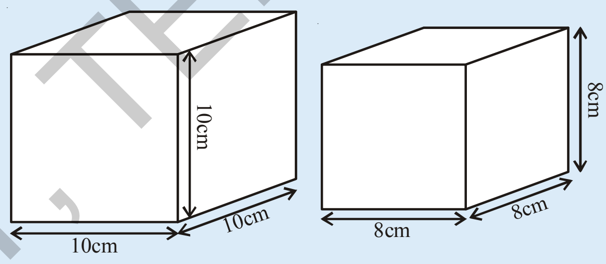
(b) If each side of the cube is l, what will be the area of each face?

(c) What is the total surface area of the cube?

(d) What is the lateral surface area of cube?

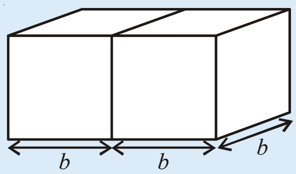
Try These

(i) Find the surface area of cube 'A' and lateral surface area of cube 'B'

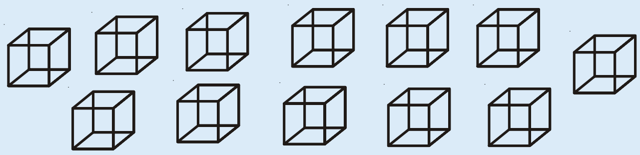


A B

(ii) Two cubes each with side 'b' are joined to form a cuboid as shown in the adjacent fig. What is the total surface area of this cuboid?



(iii) How will you arrange 12 cubes of equal lengths to form a cuboid of smallest surface area?

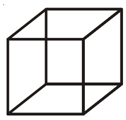


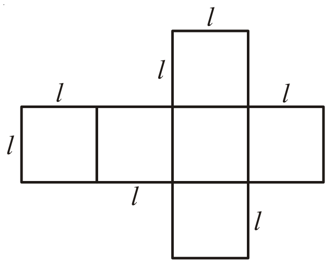
(iv) The surface area of a cube of $4 \times 4 \times 4$ dimensions is painted. The cube is cut into 64 equal cubes. How many cubes have

(a) 1 face painted?

దీర్ఘఘనము మరియు దాని వల చిత్రము గమనించండి.

పటము (i) మరియు (ii)లోని ఘనము యొక్క అన్ని ముఖాలు చతురస్ర ఆకారాలా? ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సమానమా?





(a) సమ ఘనముకుండే ముఖాలెన్ని? అన్ని ముఖాలు సర్వ సమానమేనా?

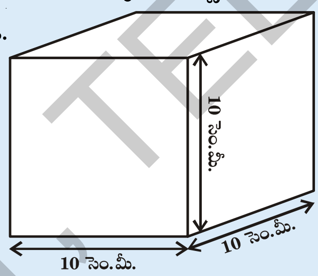
(b) సమ ఘనము యొక్క ప్రతి భుజము పొడవు l, అయితే ప్రతి ముఖము యొక్క వైశాల్యము ఎంత?

(c) సమ ఘనము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము ఎంత?

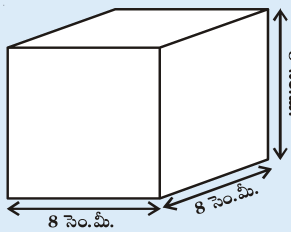
(d) సమ ఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము ఎంత?

ప్రయత్నించండి

(i) సమ ఘనము 'A' యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం మరియు 'B' యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము కనుగొనండి.

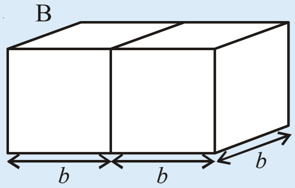


A

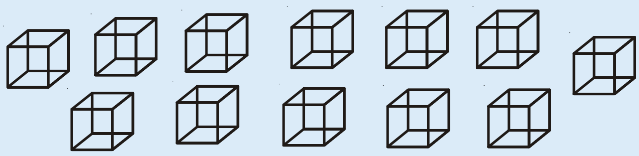


B

(ii) 'b' భుజముగా గల రెండు సమఘనములు పటములో చూపిన విధముగా జతచేయబడి దీర్ఘఘనమును ఏర్పరిస్తే, ఆ దీర్ఘఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎంత?



(iii)సమాన భుజము పొడవు గల 12 సమఘనములు ఏ విధముగా జత చేయడము వలన అత్యల్ప సంపూర్ణ తల వైశాల్యము కలిగిన దీర్ఘ ఘనము ఏర్పడుతుందో వివరింపుము.



(iv) $4 \times 4 \times 4$ కొలతలు గల ఒక సమఘనము రంగు వేయబడినది. ఆ ఘనము 64 సమ ఘనములుగా విభజింపబడినది. అయితే

(a) ఒక ముఖము మాత్రమే రంగు వేయబడినది. ఘనములు ఎన్ని?

(b) 2 faces painted?

(c) 3 faces painted?

(d) no face painted ?

Example 1: Find the surface area of a cuboid whose length, breadth and height are 15cm, 12cm and 10cm respectively.

Solution: Length of the cuboid (l) = 15cm

Breadth of the cuboid (b) = 12cm

Height of the cuboid (h) = 10cm

Surface area of a cuboid $= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(15 \times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15)\text{ cm}^2$

$= 2\,(180 + 120 + 150)\text{ cm}^2$

$= 2\,(450)\text{ cm}^2$

$= 900\text{ cm}^2$

Example 2 : If each edge of a cube is doubled. How many times will its surface area increase?

Solution: Let the edge of the cube be 'x'

Then edge of the new cube formed $= 2\,x$

Surface area of the original cube $= 6x^2$

Surface area of the new cube $= 6(2x)^2$

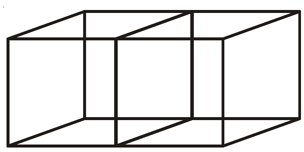
$= 6(4x^2) = 4(6x^2)$

when edge is doubled

Surface area of the new cube = 4 × Surface area of the original cube

Hence, the surface area of the new cube becomes 4 times that of the original cube.

Example 3: Two cubes each of edge 6 cm are joined face to face. Find the surface area of the cuboid thus formed.



Solution: Look at the adjacent figure. Cube has six faces normally when two equal cubes are placed together, two side faces are not visible (Why?).

We are left with $12 - 2 = 10$ squared faces $= 10 \times l^2\text{ cm}^2$

So, the total surface area of the cuboid $= 10 \times (6)^2\text{ cm}^2$

$= 10 \times 36\text{ cm}^2 = 360\text{ cm}^2$

(b) రెండు ముఖముల రంగు వేయబడిన ఘనములు ఎన్ని?

(c) మూడు ముఖములు రంగు వేయబడిన ఘనములు ఎన్ని?

(d) ఏ ముఖము కూడ రంగు వేయబడని ఘనములెన్ని?

ఉదాహరణ 1: పొడవు 15 సెం.మీ, వెడల్పు 12 సెం.మీ, మరియు ఎత్తు 10 సెం.మీ. కొలతలుగాగల దీర్ఘఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎంత?

సాధన: దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు (l) = 15 సెం.మీ.

వెడల్పు (b) = 12 సెం.మీ.

ఎత్తు (h) = 10 సెం.మీ.

దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\ (lb + bh + hl)$

$= 2(15 \times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15)$ చ.సెం.మీ.

$= 2(180 + 120 + 150)$ చ.సెం.మీ.

$= 2(450)$ చ.సెం.మీ.

$= 900$ చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 2: సమ ఘనము యొక్క ప్రతి భుజము రెట్టింపు చేయబడింది. అయితే దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎన్ని రెట్లు పెరుగుతుంది?

సాధన: సమ ఘనము యొక్క భుజము 'x' అనుకొందాం.

క్రొత్తగా ఏర్పడిన సమ ఘనము యొక్క భుజము $= 2\ x$

ఇచ్చిన సమ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 6\ x^2$

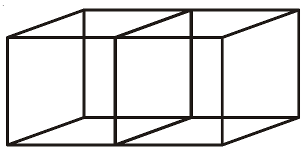
కొత్తగా ఏర్పడిన సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 6(2x)^2$

$= 6(4x^2) = 4(6x^2)$

$= 4 \times$ ఇచ్చిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం

కొత్తగా ఏర్పడిన సమ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఇచ్చిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమునకు 4 రెట్లు ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 3: ప్రతి భుజము 6 సెం.మీ.గా గల రెండు ఘనములు పటములో చూపిన విధంగా జతచేయబడినవి. కొత్తగా ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఎంత?



సాధన: సమ ఘనము 6 ముఖాలను కలిగి ఉంటుంది. రెండు సమ ఘనములను కలిపి దీర్ఘ ఘనమును ఏర్పరిస్తే రెండు ముఖాలను మనం చూడలేము (ఎందుకు?) అనగా కొత్తగా ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క సం.త.వై ముఖాలు $12 - 2 = 10$ చదరపు ముఖాలు

అందుచే దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 10 \times l^2$ చ.సెం.మీ

$= 10 \times (6)^2$ చ.సెం.మీ

$= 10 \times 36$ చ.సెం.మీ $= 360$ చ.సెం.మీ

Alternate Method:

If two cubes of edges 6cm are joined face to face it will take the shape of a cuboid whose length, breadth and height are (6 + 6) cm, 6cm and 6cm i.e. 12 cm, 6cm and 6cm respectively. Thus, total surface area of the cuboid

$= 2\,(lb + bh + lh)$

$= 2\,(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6)$

$= 2\,(72 + 36 + 72)$

$= 2 \times 180$

$= 360\ \text{cm}^2$

Example 4: Find the cost of painting of the outer surface of a closed box which is 60 cm long, 40 cm broad and 30 cm high at the rate of 50 paise per 20cm^2

Solution: Length of the box (l) = 60 cm

Breadth of the box (b) = 40 cm

Hieght of the box (h) = 30 cm

Total surface area of the box $= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30)$

$= 2(2400 + 1200 + 1800)$

$= 2 \times 5400$

$= 10800\ \text{cm}^2$

Cost of painting $20\ \text{cm}^2$ = 50 paise = ₹ $\frac{50}{100}$

$\therefore$ Cost of painting $1\ \text{cm}^2$ = ₹ $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$

$\therefore$ Cost of painting $10800\ \text{cm}^2$ = ₹ $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10{,}800$

= ₹ 270

ప్రత్యమ్నాయ పద్ధతి:

6 సెం.మీ. భుజముగా గల రెండు సమఘనములు ఒకదాని ముఖము మరోదానితో ఏకీభవించేట్లు జతచేయగా ఏర్పడిన దీర్ఘనము యొక్క పొడవు (6 + 6) సెం.మీ., వెడల్పు 6 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 6 సెం.మీ.గా మారుతుంది. అనగా దాని కొలతలు 12 సెంమీ, 6 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ.

$\therefore$ దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

$= 2\,(lb + bh + lh)$

$= 2\,(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6)$

$= 2\,(72 + 36 + 72)$

$= 2 \times 180$

$=$ 360 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 4: 60 సెం.మీ. పొడవు, 40 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 30 సెం.మీ. ఎత్తు కగిలిన పూర్తిగా మూత కలిగిన పెట్టె యొక్క బాహ్య తలము రంగు వేయుటకు 20 చ.సెం.మీ. అయ్యే ఖర్చు 50 పైసలు అయిన మొత్తము ఖర్చు ఎంత?

సాధన: పెట్టె యొక్క పొడవు (l) = 60 సెం.మీ

పెట్టె యొక్క వెడల్పు (b) = 40 సెం.మీ

పెట్టె యొక్క ఎత్తు (h) = 30 సెం.మీ

పెట్టె యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30)$

$= 2(2400 + 1200 + 1800)$

$= 2 \times 5400$

$=$ 10800 చ.సెం.మీ.

20 చ.సెం.మీ. ప్రాంతమునకు రంగు వేయుటకు ఖర్చు = 50 పైసలు $= ₹\ \frac{50}{100}$

$\therefore$ 1 చ.సెం.మీ. ప్రాంతమునకు రంగు వేయటకు ఖర్చు $= ₹\ \frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$

$\therefore$ 10800 చ.సెం.మీ. ప్రాంతము రంగు వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు $= ₹\ \frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10,800$

$= ₹\ 270$

Exercise -14.1

1. There are two cuboidal boxes as shown in the given figure. Which box requires the less amount of material to make?

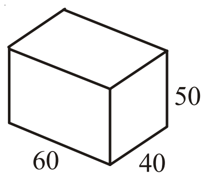


Fig. A

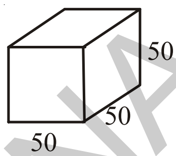


Fig. B

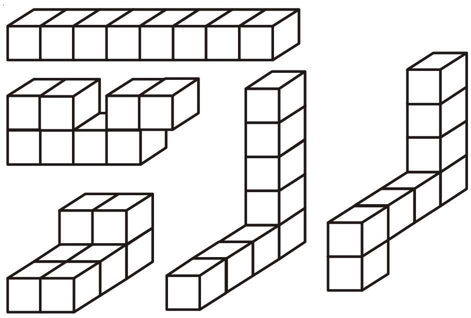
2. Find the side of a cube whose surface area is 600 cm^2.

3. Prameela painted the outer surface of a cabinet of measures 1m × 2m × 1.5m. Find the surface area she covered if she painted all surfaces except the top and bottom of the cabinet?

4. Find the cost of painting a cuboid of dimensions 20cm × 15 cm × 12 cm at the rate of 5 paisa per square centimeter.

14.3 Volume of Cube and Cuboid

Amount of space occupied by a three dimensional object is called its volume. Try to compare the volume of objects around you. For example, volume of a room is greater than the volume of an almirah kept in the room. Similarly, volume of your pencil box is greater than the volume of the pen and the eraser kept inside it. Do you measure volume of either of these objects?



Remember, we use square units to find the area of a region. How will we find the volume. Here we will use cubic units to find the volume of a solid, as cube is the most convenient solid shape (just as square is the most convenient shape to measure this area).

To measure the area we divide the area into square units, similarly, to find the volume of a solid we need to divide the space into cubical units. Unit cube is a cube of unit length . Observe that the volume of each of the solids which are arranged in different forms are of 8 cubic units (as in Fig above). We can say that the volume of a solid is measured by counting the number of unit cubes it contains. Cubic units which we generally use to measure the volume are

1 cubic cm = 1 cm × 1 cm × 1 cm = 1 cm^3

= 10 mm × 10 mm × 10 mm = ... mm^3

1 cubic m = 1 m × 1 m × 1 m = 1 m^3

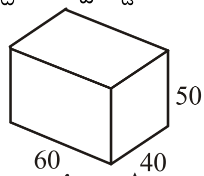
= 100 cm × 100cm × 100cm = ... cm^3

1 cubic mm = 1 mm × 1 mm × 1 mm = 1 mm^3

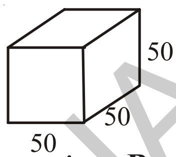
= 0.1 cm × 0.1 cm × 0.1 cm = ... cm^3

అభ్యాసం - 14.1

1. పటములో చూపిన విధముగా రెండు దీర్ఘ ఘనాకృతి పెట్టెలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఏ పెట్టెను తయారు చేయడానికి తక్కువ పరిమాణపు సామాగ్రి అవసరమవుతుంది?



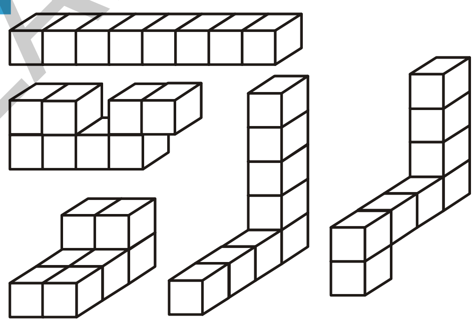
పటం-A



పటం-B

2. 600 చ.సెం.మీ. సంపూర్ణతల వైశాల్యము గల సమఘనము యొక్క భుజము పొడవును కనుక్కోండి.
3. ప్రమీల 1 మీ × 2 మీ × 1.5 మీ కొలతలు గల ఒక పెట్టెకు రంగు వేసింది. పెట్టె యొక్క పై ముఖము అడుగు ముఖమును మినహాయించి మిగిలిన ముఖముల వైశాల్యముల మొత్తము ఎంత?
4. 20 సెం.మీ × 15 సెం.మీ. × 12 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనమునకు రంగు వేయుటకు చదరపు సెంటీమీటరునకు 5 పైసలు చొప్పున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

14.3 దీర్ఘ ఘనము మరియు సమ ఘనము ఘనపరిమాణం



అంతరాళంలో త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువు ఆక్రమించు పరిమాణమును 'ఘన పరిమాణము' అందురు. మీ చుట్టూ యున్న వస్తువుల యొక్క ఘన పరిమాణములను అంచనా వేయండి. ఉదాహరణకు మీ గది యొక్క ఘనపరిమాణం, గదిలో యున్న బీరువా ఘనపరిమాణం కంటే ఎక్కువ యుంటుంది. అదే విధంగా పెన్సిల్ డబ్బా యొక్క ఘనపరిమాణము దానిలో గల పెన్సిల్ మరియు తుడిచే రబ్బరు కంటే ఎక్కువ యుంటుంది. ఈ వస్తువుల యొక్క ఘన పరిమాణములను కనుగొనగలరా?

మనకు ఒక ప్రాంతపు వైశాల్యమును కనుగొనుటకు చదరపు యూనిట్లను ఉపయోగిస్తామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అయితే ఘనపరిమాణం ఎలా కనుగొంటాము? ఇక్కడ మనము ఘనపు యూనిట్లలో ఘనపరిమాణాన్ని కొలుస్తాము. దాని ప్రమాణమునకు సమఘనమే తగినది. (వైశాల్యానికి చతురస్ర ప్రమాణం లాగా)

వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు వైశాల్యాన్ని యూనిట్లుగా విభజిస్తాము అదే విధముగా ఘనపరిమాణమును కనుగొనేందుకు అంతరాళాన్ని ఘనపు యూనిట్లుగా విభజించాలి. 1 యూనిట్ భుజముగా గల సమఘనమును ఒక ప్రమాణ ఘనముగా పరిగణిస్తారు. ప్రక్క పటములో ప్రతి వస్తువు 8 ఘనపు యూనిట్లు ఘనపరిమాణమును కలిగియుంటుంది. ఘనకార వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును ప్రమాణ ఘనములను లెక్కించి గణిస్తారు.

1 ఘనపు సెం.మీ = 1 సెం.మీ × 1 సెం.మీ × 1 సెం.మీ = 1 ఘ.సెం.మీ

= 10 మి.మీ × 10 మి.మీ × 10 మి.మీ = ... ఘ.సెం.మీ

1 ఘనపు మీటరు = 1 మీ × 1 మీ × 1 మీ = 1 ఘ.మీ

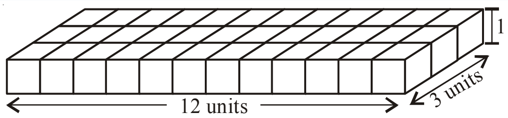
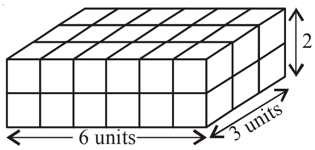
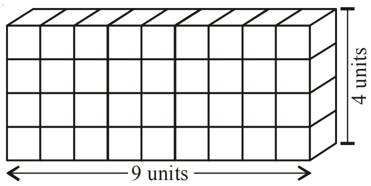
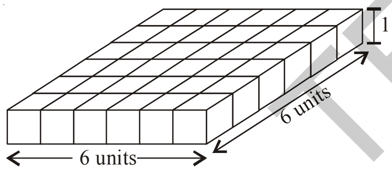
= 100 సెం.మీ × 100 సెం.మీ × 100 సెం.మీ = ... ఘ.సెం.మీ

1 ఘనపు మి.మీ. = 1 మి.మీ × 1 మి.మీ × 1 మి.మీ = 1 ఘ.మి.మీ

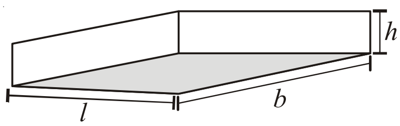
= 0.1 సెం.మీ × 0.1 సెం.మీ × 0.1 సెం.మీ = ... ఘ.సెం.మీ

14.3.1 Volume of a Cuboid

Take 36 cubes of equal size (i.e.,side of each cube is same). Arrange them to form a cuboid. You can arrange them in many ways. Observe the following table and fill in the blanks.

	Cuboid	length (l)	breadth (b)	height (h)	Total no. of unit cubes $l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

What do you observe? Do you find any relation between the dimensions of the cuboid and its volume?

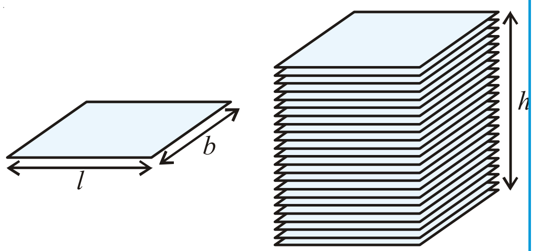


Since we have used 36 cubes to form these cuboids, thus volume of each cuboid is 36 cubic units. This is equal to the product of length, breadth and height of the cuboid. From the above example we can say volume of cuboid = $l \times b \times h$. Since $l \times b$ is the area of its base we can also say that,

Volume of cuboid = Area of the base × height

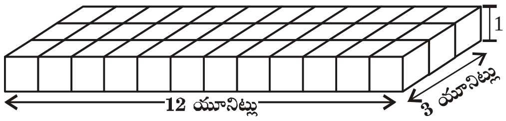
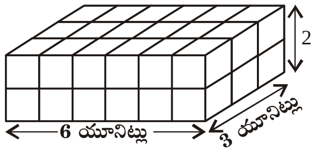
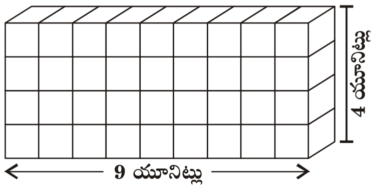
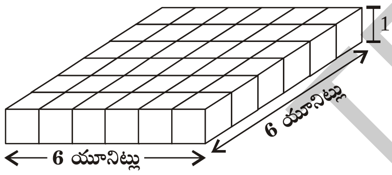
Activity

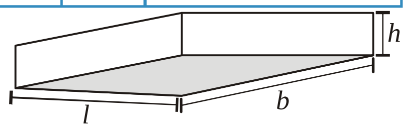
Take a sheet of paper. Measure its area. Pile up such sheets of paper of same size to make a cuboid (as in adjacent figure). Measure the height of this pile. Find the volume of the cuboid by finding the product of the area of the sheet and the height of this pile of sheets. Can you find the volume of paper sheet?



14.3.1 దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము

36 ప్రమాణ ఘనములను తీసుకొని దీర్ఘ ఘనమును తయారు చేయండి. మీరు అనేక విధములుగా అమర్చండి. క్రింది పట్టికను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

	దీర్ఘ ఘనము	పొడవు (l)	వెడల్పు (b)	ఎత్తు (h)	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...



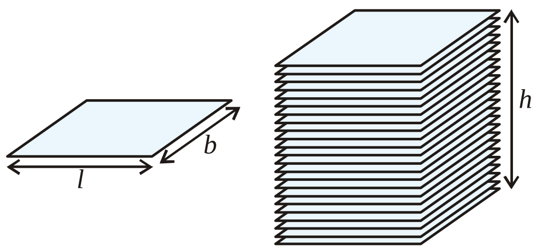
మీరు ఏమి గమనించారు? ఘనము యొక్క కొలతలకు, ఘనపరిమాణంనకు మధ్య గల సంబంధమును కనుగొంటారా? మనం 36 ప్రమాణ ఘనములనుపయోగించుట వలన దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘన పరిమాణము 36 ఘనపు యూనిట్లు. ఈ విలువ దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును తెలుపుతుంది. దీని విలువ దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల లబ్ధమునకు సమానముగా గమనించవచ్చు. అందుచే దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘన పరిమాణము. ఈ క్రింది విధముగా సూత్రీకరించవచ్చు. $= l \times b \times h$

భూమి వైశాల్యము $= l \times b$

కావున దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం = భూవైశాల్యము $\times$ ఎత్తు

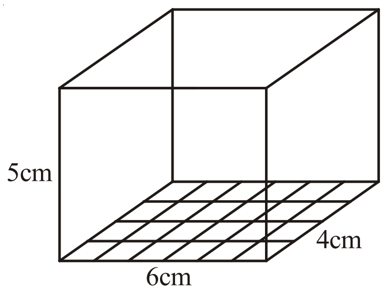
కృత్యము

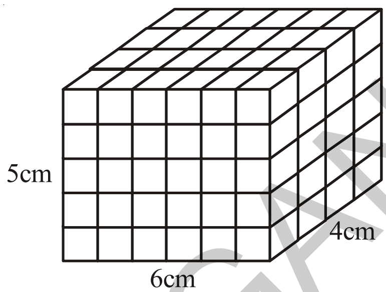
ఒక దళసరి కాగితమును తీసుకోండి. అదే సైజు గల కొన్ని దళసరి కాగితములు పటములో చూపిన విధముగా ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చి చూస్తే దీర్ఘ ఘనము ఏర్పడుతుంది. దళసరి కాగితం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొని ఆ విలువను కాగితపు పేర్పు యొక్క ఎత్తుతో గుణించి ఆ పేర్పు ఘనపరిమాణము కనుగొనండి. ఇలా ఒక కాగితపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనగలవా?



Do This

Let us find the volume of a cuboid whose length, breadth and height are 6cm., 4cm and 5cm respectively.





Let place 1 cubic centimeter blocks along the length of the cuboid . How many blocks can we place along the length? 6 blocks, as the length of the cuboid is 6 cm.

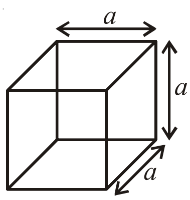
How many blocks can we place along its breadth? 4 blocks, as the breadth of the cuboid is 4cm. So there are 6×4 blocks can be placed in a layer.

How many layers of blocks can be placed in the cuboid? 5 layers, as the height of the cuboid is 5 cm. Each layer has 6×4 blocks. So, all the 5 layers will have $6 \times 4 \times 5$ blocks i.e. length $\times$ breadth $\times$ height.

This discussion leads us to the formula for the volume of a cuboid:

Volume of a Cuboid = length $\times$ breadth $\times$ height

14.3.2 Vollume of a Cube



A Cube is a cuboid whose length, breadth and height are same,

So Volume of a cube $=$ side $\times$ side $\times$ side

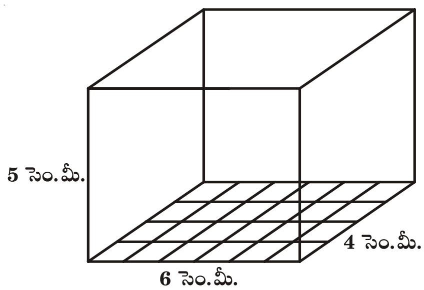
$= (\text{side})^3 = a^3$ where 'a' is the side of the cube.

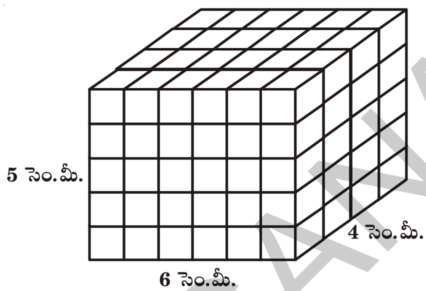
Length of Cube	Volume of the Cube
10mm = 1cm	1000 mm^3 = 1cm^3
10cm = 1dm	1000 c m^3 = 1dm^3
10dm = 1m	1000 d m^3 = 1 m^3
100cm = 1m	1000000 c m^3 = 1m^3
1000m = 1km	1000000000 m^3 = 1km^3

Generally, we measure the volumes of liquids in millilitres (ml) or litres (l)

ఇవి చేయండి

6 సెం.మీ., 4 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘన పరిమాణమును కనుక్కోండి.





ఒక ఘనపు సెం.మీ. భుజముగా గల ప్రమాణ ఘనములను దీర్ఘ ఘనము పొడవు వెంబడి పేర్చుము. దీని కొరకు మనకు ఎన్ని ఘనములు అవసరము? 6 ప్రమాణ ఘనములు అవసరము.

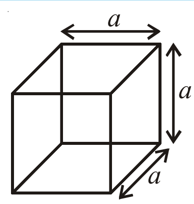
వెడల్పు వెంబడి ఎన్ని ప్రమాణ ఘనములు పేర్చవచ్చు? 4 ప్రమాణ ఘనములు దీనికి గల కారణము దీర్ఘ ఘనము యొక్క వెడల్పు 4 సెం.మీ. అనగా ఒక పొరలో 6×4 ప్రమాణ ఘనములు ఉంటాయి.

దీర్ఘ ఘనములో ప్రమాణ ఘనములు అమర్చే పొరలు ఎన్ని? 5 పొరలు అనగా దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఎత్తు 5 సెం.మీ. ప్రతి పొర 6×4 ఘనములు కలవు. కావున 5 పొరలలో $6 \times 4 \times 5$ ప్రమాణ సమఘనాల దిమ్మలు ఉంటాయి. అనగా $= l \times b \times h$ కు సమానం.

పై చర్చ దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సూత్రము నిచ్చును.

దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము = పొడవు $\times$ వెడల్పు $\times$ ఎత్తు

14.3.2 సమ ఘన ఘనపరిమాణము



పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు కొలతలు సమానముగా గల దీర్ఘ ఘనమును సమఘనము అందురు.

అందుచే సమ ఘనం ఘనపరిమాణము = భుజం $\times$ భుజం $\times$ భుజం

= $(\text{భుజం})^3 = a^3$ ఇచ్చుట, సమ ఘనము యొక్క భుజం 'a'

సమఘనం పొడవు			సమఘనం ఘనపరిమాణం		
10 మి.మీ	=	1సెం.మీ	1000 మి.మీ^{3}	=	1 సెం.మీ^{3}
10 సెం.మీ	=	1డెకా మీ	1000 సెం.మీ^{3}	=	1 డెకామీ^{3}
10 డెకా మీ	=	1 మీ	1000 డెకా మీ^{3}	=	1 మీ^{3}
100 సెం.మీ	=	1 మీ	1000000 సెం.మీ^{3}	=	1 మీ^{3}
1000 మీ	=	1 కి.మీ	1000000000 మీ^{3}	=	1 కి.మీ^{3}

సాధారణంగా, ద్రవ పదార్థముల యొక్క ఘన పరిమాణములను మిల్లీ లీటర్లు (మి.లీ) లేదా లీటర్లలో (లీ) కొలుస్తారు.

Further $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ m}l$

$1000 \text{ cm}^3 = 1\ l$

$1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3 = 1000\ l$

$= 1 \text{ k}l$ (kilolitre)

Example 5: Find the volume of a block of wood whose length is 20cm, breadth is 10 cm and height is 8 cm.

Solution: The block of wood is a cuboid and the volume of a cuboid $= l \times b \times h$

Here, length (l) = 20 cm, breath (b) = 10 cm, and height (h) = 8 cm

Volume of the block = 20 cm × 10 cm × 8 cm = 1600 cm^3

Example 6: A water tank is 1.4 m long, 1m wide and 0.7m deep. Find the volume of the tank in litres.

Solution: Length of the tank (l) = 1.4 m = 140 cm

Breadth of the tank (b) = 1 m = 100 cm

Depth of the tank (h) = 0.7 = 70 cm

Volume of the tank $= l \times b \times h$

$= (140 \times 100 \times 70) \text{ cm}^3$

$= \dfrac{140 \times 100 \times 70}{1000}$ litres.

$=$ 980 litres

Do This

Arrange 64 unit cubes in as many ways as you can to form a cuboid. Find the surface area of each arrangement. Can solid cuboid of same volume have same surface area?

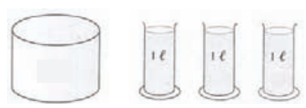
Do you know?

Capacity

There is not much difference between the two words.i.e volume and capacity

(a) Volume refers to the amount of space occupied by an object.

(b) Capacity refers to the quantity that a container holds.



volume Capacity

If a water tin holds 100 cm^3 of water then the capacity of the water tin is 100cm^3. Capacity can also measure in terms of litres.

1 సెం.మీ^{3} $=$ 1 మిల్లీ లీటరు

1000 సెం.మీ^{3} $=$ 1 లీటరు

1 మీ^{3} $=$ 1000000 సెం.మీ^{3} $= 1000$ లీటర్లు

$=$ 1 కిలో లీటరు(కి.లీ).

ఉదాహరణ 5: 20 సెం.మీ. పొడవు, 10 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 8 సెం.మీ. ఎత్తు కొలతలు కలిగిన దీర్ఘ ఘనాకృతి కర్ర దుంగ యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.

సాధన: దీర్ఘ ఘనాకృతి ఘనపరిమాణము $= l \times b \times h$

ఇక్కడ పొడవు (l)=20 సెం.మీ వెడల్పు $(b) = 10$ సెం.మీ మరియు ఎత్తు $(h) = 8$ సెం.మీ కావున

కర్ర దుంగ యొక్క ఘనపరిమాణము $= 20$ సెం.మీ $\times$ 10 సెం.మీ $\times 8$ సెం.మీ $= 1600$ ఘ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 5: ఒక నీళ్ళ ట్యాంకు 1.4 మీ. పొడవు, 1 మీ. వెడల్పు మరియు 0.7 మీ. లోతు కలిగి యున్నది. ట్యాంకు యొక్క ఘనపరిమాణమును లీటర్లలో కనుగొనుము.

సాధన: ట్యాంకు యొక్క పొడవు $(l) = 1.4$ మీ. $= 140$ సెం.మీ.

ట్యాంకు యొక్క వెడల్పు $(b) = 1$ మీ. $= 100$ సెం.మీ.

ట్యాంకు యొక్క ఎత్తు $(h) = 0.7$ మీ. $= 70$ సెం.మీ.

ట్యాంకు యొక్క ఘనపరిమాణము $= l \times b \times h$

$= (140 \times 100 \times 70)$ ఘ.సెం.మీ

$$= \frac{140 \times 100 \times 70}{1000} \text{ లీటర్లు}$$

$= 980$ లీటర్లు.

ఇవి చేయండి

64 ప్రమాణ ఘనములనుపయోగించి మీరు ఏర్పరచ గల దీర్ఘ ఘనములు ఎన్ని? ప్రతీ అమరిక యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుక్కోండి. సమాన ఘన పరిమాణము కలిగిన ఘనముల యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యములు సమానమేనా?

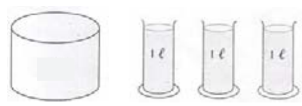
మీకు తెలుసా?

సామర్థ్యము

ఘనపరిమాణము, సామర్థ్యముల మధ్య తేడా బహు స్వల్పం.

(a) ఒక వస్తువు ఆక్రమించే అంతరాళపు పరిమాణమును ఘనపరిమాణము అంటారు.

(b) డబ్బా యొక్క సామర్థ్యము అది నిల్వ ఉంచుకోగల పదార్థ ఘనపరిమాణము.



ఘనపరిమాణం సామర్థ్యము

ఒక నీళ్ళ ట్యాంకులో నింపగల నీటి పరిమాణము 100 సెం.మీ^{3} అయితే ఆ ట్యాంకు సామర్థ్యము 100 సెం.మీ^{3}. సామర్థ్యమును లీటర్లలో కూడా కొలుస్తారు.

Example 7: Find the volume of a cuboid whose breadth is half of its length and height is double the length.

Solution: Let the length of the cuboid be x units

Then breadth of the cuboid = $\frac{x}{2}$ units

And height of the cuboid = $2x$ units

Volume of the cuboid = length × breadth × height

$= x \times \frac{x}{2} \times 2x$

$= x^3$ cubic units.

Example 8: A box is 1.8 m long, 90 cm wide, 60 cm height. Soap cakes of measurements 6 cm × 4.5 cm × 40 mm are to be packed in the box, so that no space is left. Find how many cakes can be packed in each box?

Solution: Length of the box (l) = 1.8 m = 180 cm

Breadth of the box (b) = 90 cm

Height of the box (h) = 60 cm

Volume of the box = $l \times b \times h$

$= 180 \times 90 \times 60$

$= 972000 \text{ cm}^3$

Length of a soap cake = 6 cm

Breadth of a soap cake = 4.5 cm

Height of a soap cake = 40 mm = 4 cm

Volume of one soap cake = $6 \times 4.5 \times 4$

$= 108.0 \text{ cm}^3$

∴ Required number of soap cakes

$= \frac{\text{Volume of the box}}{\text{volume of one soapcake}}$

$= \frac{972000}{108}$

$= 9000$

Hence, the number of soap cakes can be packed in the box = 9000

ఉదాహరణ 7: దీర్ఘ ఘనము యొక్క వెడల్పు, పొడవులో సగం, ఎత్తు దాని పొడవునకు రెట్టింపు అయితే దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు $= x$ యూనిట్లు

దీర్ఘ ఘనము యొక్క వెడల్పు $= \frac{x}{2}$ యూనిట్లు

దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఎత్తు $= 2\,x$ యూనిట్లు

దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము = పొడవు $\times$ వెడల్పు $\times$ ఎత్తు

$$= x \times \frac{x}{2} \times 2x$$

$= x^3$ ఘనపు యూనిట్లు

ఉదాహరణ 8: ఒక పెట్టె యొక్క పొడవు 1.8 మీ., వెడల్పు 90 సెం.మీ., ఎత్తు 60 సెం.మీ. పెట్టెలో అమర్చే సబ్బు యొక్క కొలతలు 6 సెం.మీ $\times$ 4.5 సెం.మీ $\times$ 40 మి.మీ. సబ్బులు అమర్చిన తరువాత పెట్టెలో ఏ విధమైన ఖాళీ స్థలం మిగలలేదు. ఒక పెట్టెలో అమర్చగలిగే సబ్బులు ఎన్ని?

సాధన: పెట్టె యొక్క పొడవు (l) = 1.8 మీ = 180 సెం.మీ.

వెడల్పు (b) = 90 సెం.మీ.

ఎత్తు (h) = 60 సెం.మీ.

పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము $= l \times b \times h$

$= 180 \times 90 \times 60$

= 972000 సెం.మీ^{3}

సబ్బు యొక్క పొడవు = 6 సెం.మీ.

వెడల్పు = 4.5 సెం.మీ.

ఎత్తు = 40 మి.మీ = 4 సెం.మీ.

సబ్బు యొక్క ఘనపరిమాణము $= 6 \times 4.5 \times 4$

= 108.0 ఘ.సెం.మీ

$\therefore$ కావలసిన సబ్బుల సంఖ్య $= \dfrac{\text{పెట్టె ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి సబ్బు యొక్క ఘనపరిమాణం}}$

$$= \frac{972000}{108}$$

$= 9000$

అనగా, పెట్టెలో నింప గలిగే సబ్బుల సంఖ్య = 9000.

Example 9: How many cubes of side 3 cms each can be cut from wooden block in the form of a cuboid whose length, breadth and height are 21 cm, 9 cm and 8cm respectively. How much volume of wood is wasted?

Solution: Length of the cuboid (l) = 21 cm

$\because$ The shape of a wooden block is a cuboid

Breadth of the cuboid (b) = 9 cm

Height of the cuboid (h) = 8 cm

Volume of cuboid = $21 \times 9 \times 8 = 1512$ cu cm.

No. of cubes that can be cut along the length $= \frac{21}{3} = 7$

No. of cubes that can be cut along the breadth $= \frac{9}{3} = 3$

No. of cubes that can be cut along the height $= \frac{8}{3} = 2.6$

Along the height we can cut only 2 pieces and remaining is waste.

$\therefore$ Total number of cubes cut $= 7 \times 3 \times 2$

$= 42$

Volume of each cube $= 3 \times 3 \times 3 = 27\ \text{cm}^3$

Volume of all cubes $= 27 \times 42$

$= 1134\ \text{cm}^3$

$\therefore$ Volume of the waste wood $= 1512 - 1134 = 378\ \text{cm}^3$

Example 10: Water is poured into a cuboidal reservoir at the rate of 60 litres per minute. If the volume of reservoir is 108 m^3. Find the number of hours it will take to fill the reservoir.

Solution: Volume of the reservoir $= 108\ \text{m}^3 = 108 \times 1000$ litres

($\because$ $1\text{m}^3 = 1000$ litres)

The reservoir is filling at the rate of 60 litres per minute.

$$\therefore \text{Required time} = \frac{108 \times 1000}{60} \text{ min.}$$

$$= \frac{108 \times 1000}{60 \times 60} \text{ hours} = 30 \text{ hours.}$$

ఉదాహరణ 9: 21 సెం.మీ., 9 సెం.మీ. మరియు 8 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనాకార కర్ర దుంగను 3 సెం.మీ భుజముగా గల సమ ఘనముగా కత్తిరిస్తే ఎన్ని సమ ఘనములు వస్తాయి? ఎంత ఘనపరిమాణము గల కర్ర దుంగ వృథా అవుతుంది?

సాధన: కర్ర దుంగ పొడవు (l) = 21 సెం.మీ.

దీర్ఘఘనం వెడల్పు (b) = 9 సెం.మీ.

దీర్ఘఘనం ఎత్తు (h) = 8 సెం.మీ.

∵ కర్ర దుంగ దీర్ఘఘనాకారంలో ఉన్నది.

కర్ర దుంగ ఘనపరిమాణము = $21 \times 9 \times 8 = 1512$ ఘ.సెం.మీ

పొడవు వెంబడి కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య $= \frac{21}{3} = 7$

వెడల్పు వెంబడి కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య $= \frac{9}{3} = 3$

ఎత్తు వెంబడి కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య $= \frac{8}{3} = 2.6 = 2$

ఎత్తు వెంబడి మనము కత్తిరించగల సమ ఘనముల సంఖ్య 2 మాత్రమే మిగిలిన భాగము వృథా అవుతుంది.

∴ మొత్తము సమ ఘనముల సంఖ్య $= 7 \times 3 \times 2$

$= 42$

ప్రతి సమ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము $= 3 \times 3 \times 3 = 27$ ఘ.సెం.మీ

అన్ని ఘనముల ఘనపరిమాణము $= 27 \times 42$

$= 1134$ ఘ.సెం.మీ

∴ వృథా అయిన కర్ర దుంగ ఘనపరిమాణము $= 1512 - 1134 = 378$ ఘ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 10: ఒక రిజర్వాయరులోనికి నిమిషమునకు 60 లీటర్లు నీరు పంపు చేయబడుచున్నది. ఆ రిజర్వాయరు ఘనపరిమాణము 108 ఘ.మీ.లు అయిన ఆ రిజర్వాయరును నింపుటకు ఎన్ని గంటల సమయం పడుతుంది?

సాధన: రిజర్వాయరు యొక్క ఘనపరిమాణం = 108 ఘ.మీ = 108×1000 లీటర్లు

(∴ 1 ఘ.మీ. = 1000 లీటర్లు)

రిజర్వాయరును నిమిషానికి 60 లీటర్లు చొప్పున నింపుతూ ఉంటే

రిజర్వాయరును నింపడానికి పట్టే కాలం $= \frac{108 \times 1000}{60}$ నిమిషాలు

$= \frac{108 \times 1000}{60 \times 60}$ గంటలు = 30 గంటలు

Example 11 : A village has a population of 4000, requires 150 litres water per head per day. It has a tank measuring 20 m , 15 m , 6 m. How many days for the water is sufficient enough once the tank is made full?

Solution: Volume of the tank $= 20 \text{ m} \times 15 \text{ m} \times 6 \text{ m}$

$= 1800 \text{ m}^3 = 1800000\ l$

Volume of water consumed by 1 person in 1 day = 150 l.

Total volume of water consumed in a day by total population = 150×4000

$$\text{Required number of days} = \frac{\text{Volume of the tank}}{\text{volume of water consumed in 1 day}}$$

$$= \frac{1800000}{150 \times 4000} = 3 \text{ days}$$

Exercise - 14.2

1. Find the volume of the cuboid whose dimensions are given below.

	Length	Breadth	Height
(i)	8.2 m	5.3 m	2.6 m
(ii)	5.0 m	4.0 m	3.5 m
(iii)	4.5 m	2.0 m	2.5 m

2. Find the capacity of the tanks with the following internal dimensions. Express the capacity in cubic meters and litres for each tank.

	Length	Breadth	Depth
(i)	3 m 20 cm	2 m 90 cm	1 m 50 cm
(ii)	2 m 50 cm	1 m 60 cm	1 m 30 cm
(iii)	7 m 30 cm	3 m 60 cm	1 m 40 cm

3. What will happen to the volume of a cube if the length of its edge is reduced to half? Is the volume get reduced? If yes, how much?

ఉదాహరణ 11: ఒక గ్రామము యొక్క జనాభా 4000, ప్రతి రోజు ఆ గ్రామములోని ప్రతీ ఒక వ్యక్తికి రోజుకి 150 లీటర్ల నీరు అవసరము. నీటి ట్యాంకు యొక్క కొలతలు 20 మీ., 15 మీ., 6 మీ. ఒక ట్యాంకు నీళ్ళు ఎన్ని రోజులుకు సరిపడుతుందో లెక్కకట్టుము?

సాధన: ట్యాంకు యొక్క ఘనపరిమాణము $= 20$ మీ. $\times$ 15 మీ. $\times$ 6 మీ.

$= 1800$ ఘ.మీ. $= 1800000$ లీ.

ఒక వ్యక్తికి ఒకరోజుకు అవసరమయ్యే నీటి పరిమాణము = 150 లీటర్లు.

గ్రామము మొత్తం జనాభాకి ఒక రోజులో అవసరమయ్యే నీటి పరిమాణం $= 150 \times 4000$ లీ.

నీరు సరిపోవు రోజుల సంఖ్య $= \dfrac{\text{ట్యాంకు ఘనపరిమాణం}}{\text{ఒక రోజులో అవసరమయ్యే ఘనపరిమాణం}}$

$$= \frac{1800000}{150 \times 4000} = 3 \text{ రోజులు}$$

అభ్యాసం - 14.2

1. ఈ క్రింది కొలతలు కలిగిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు
(i)	8.2 మీ	5.3 మీ	2.6 మీ
(ii)	5.0 మీ	4.0 మీ	3.5 మీ
(iii)	4.5 మీ	2.0 మీ	2.5 మీ

2. ఈ క్రింది కొలతలు కలిగిన ట్యాంకు యొక్క సామర్థ్యమును ఘనపు మీటర్లు మరియు లీటర్లులో కనుగొనుము.

	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు
(i)	3 మీ 20 సెం.మీ	2 మీ 90 సెం.మీ	1 మీ 50 సెం.మీ
(ii)	2 మీ 50 సెం.మీ	1 మీ 60 సెం.మీ	1 మీ 30 సెం.మీ
(iii)	7 మీ 30 సెం.మీ	3 మీ 60 సెం.మీ	1 మీ 40 సెం.మీ

3. ఒక సమ ఘనము యొక్క భుజమును సగము చేస్తే దాని ఘన పరిమాణము తగ్గుతుందా? మారినచో ఎంత తగ్గును?

4. Find the volume of each of the cube whose sides are.

   (i) 6.4 cm (ii) 1.3 m (iii) 1.6 m.

5. How many bricks will be required to build a wall of 8 m long, 6m height and 22.5 cm thick, if each brick measures 25 cm by 11.25 cm by 6 cm?

6. A cuboid is 25 cm long , 15 cm broad, and 8 cm high . How much of its volume will differ from that of a cube with the edge of 16 cm?

7. A closed box is made up of wood which is 1cm thick .The outer dimensions of the box is 5 cm × 4 cm × 7 cm. Find the volume of the wood used.

8. How many cubes of edge 4cm, each can be cut out from cuboid whose length, breadth and height are 20 cm, 18 cm and 16 cm respectively

9. How many cuboids of size 4 cm × 3 cm × 2 cm can be made from a cuboid of size 12 cm × 9 cm × 6 cm?

10. A vessel in the shape of a cuboid is 30 cm long and 25 cm wide. What should be its height to hold 4.5 litres of water?

What we have discussed

1. If l, b, h are the dimensions of cuboid, then:

   (i) its lateral surface area is $2h\,(l + b)$

   (ii) its total surface area is $2\,(lb + bh + hl)$

   (iii) its volume is $l \times b \times h$

2. If 'a' is the length of the side of a cube, then :

   (i) Lateral surface area = $4a^2$

   (ii) Total surface area = $6a^2$

   (iii) Volume = $side \times side \times side = a^3$

3. $1\ cm^3 = 1\ ml$

   $1\ l = 1000\ cm^3$

   $1\ m^3 = 1000000\ cm^3 = 1000\ l$

   $= 1\ kl$ (kilolitre)

G3Y2Q7

4. ఈ కింది కొలతలు భుజంగా కలిగిన సమ ఘనముల యొక్క ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.

(i) 6.4 సెం.మీ. (ii) 1.3 మీ. (iii) 1.6 మీ.

5. 8 మీ × 22.5 సెం.మీ × 6 మీ కొలతలు గాగల ఒక గోడను నిర్మించుటకు 25 సెం.మీ × 11.25 సెం.మీ × 6 సెం.మీ కొలతలుగా గల ఇటుకలెన్ని అవసరము?

6. 25 సెం.మీ. పొడవు, 15 సెం.మీ. వెడల్పు మరియు 8 సెం.మీ ఎత్తు కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము, ప్రతీ భుజము 16 సెం.మీ గాగల సమ ఘనము ఘన పరిమాణముతో ఎంత తేడా కలదు?

7. 1 సెం.మీ. మందము కలిగిన చెక్కతో 5 సెం.మీ. × 4 సెం.మీ × 7 సెం.మీ. వెలుపలి కొలతలు కలిగిన మూతగల పెట్టెను తయారు చేయడానికి ఎంత ఘనపరిమాణము గల చెక్క అవసరము?

8. 20 సెం.మీ × 18 సెం.మీ × 16 సెం.మీ. కొలతలు గాగల దీర్ఘ ఘనము నుండి 4 సెం.మీ. భుజముగాగల ఎన్ని సమ ఘనములను ఏర్పరచవచ్చు?

9. 12 సెం.మీ.×9 సెం.మీ.×6 సెం.మీ. కొలతలుగా గల దీర్ఘ ఘనము నుండి 4 సెం.మీ.×3 సెం.మీ.×2 సెం.మీ. కొలతలుగాగల దీర్ఘ ఘనములను ఎన్నింటిని తయారు చేయవచ్చు?

10. దీర్ఘ ఘనాకృతిలో ఉన్న ఒక పాత్ర 30 సెం.మీ. పొడవు, 25 సెం.మీ. వెడల్పు కలిగి వున్నది. దానిలో 4.5 లీటర్ల నీటిని నింపుటకు ఎంత ఎత్తును కలిగి వుండాలి?

మనం ఏమి చర్చించాం

1. పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు l, b మరియు h లు అయితే దీర్ఘ ఘనము యొక్క కొలతలు అయితే

(i) దాని ప్రక్కతల వైశాల్యం $2h\,(l + b)$

(ii) దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం $2\,(lb + bh + hl)$

(iii) దాని ఘనపరిపామణం $l \times b \times h$

2. a భుజముగాగల సమఘనము

(i) ప్రక్కతల వైశాల్యం $4a^2$

(ii) సమఘనము సంపూర్ణతల వైశాల్యము $6a^2$

(iii) ఘనపరిమాణం = భుజం × భుజం × భుజం = a^3

3. 1 సెం.మీ^{3} = 1 మిల్లి లీటరు

1 లీటరు = 1000 ఘ.సెం.మీ

1మీ^{3} = 1000000 ఘ.సెం.మీ = 1000 లీటర్లు

= 1 కి.లీ (కిలో లీటరు).

P8U7N1

CHAPTER 15

Playing with Numbers

X1Q2B9

15.0 Introduction

Imagine ... a world without numbers, how would your day go ?

You will see no calendar to tell you which day of the month it is ...

You will not be able to call up your friends to say thanks, if there are no telephone numbers ! And yes! You will get tired of strangers knocking your door, since no house numbers !

These are just few examples ! Think of the other ways in which your life will go for a change in a world without numbers !

You are right . You will get late for your school and miss out yours favourite cartoons/ serials, if there would be no clocks. And yes, no cricket, no foot ball, without numbers .

So, it seems that it is not a good idea to be there without numbers. If we wish to find the cost of some article or if want to distribute something equally among your friends, how will you do?

Can you guess which of these are fundamental operations ? All these fundamental operations involve numbers, divisibility rules. The divisibility rules help us to find whether the given number is divisibile by another number or not without doing division. Let us play with numbers using some fundamental operations and divisibility rules.

15.1 Divisibility Rules

Take some numbers and check them which are divisible by 2, which are divisible by 3 and so on till 7.

When a number ‘a’ divides a number ‘b’completely, we say ‘b’ is divisible by ‘a’.

In this chapter we will learn about divisibility of numbers and logic behind them. First recall about place value and factors.

15.1.1 Place value of a digit

Let us take a number 645 and expand it.

$645 = 600 + 40 + 5 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

In the given number, the place value of 6 is 600 and the place value of 4 is 40. There are 6 hundreds, 4 tens and 5 ones in 645.

అధ్యాయం

15

సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం

Q8R2Z2

15.0 పరిచయం

సంఖ్యలు లేనటువంటి ప్రపంచాన్ని ఊహించండి.

సంఖ్యలు లేకుండా మనకు రోజు ఏవిధంగా గడుస్తుంది?

మనకు కేలండర్ లేనిచో, ఆ రోజు ఏనెల? ఎన్నవ రోజు? మొదలగునవి మనకు తెలియదు. మీ స్నేహితులకు ఫోన్ చేసి వారితో మాట్లాడలేరు. ఇంటి నెంబరు లేనిచో అపరిచితులు వచ్చి మీ ఇంటి తలుపులు తడుతూ ఉంటారు. ఇవి కొన్ని ఉదాహరణలు మాత్రమే. ఇంకా ఏ విధంగా ఉంటుందో ఊహించండి. మీరు స్కూలుకు సకాలంలో వెళ్లలేరు. మీకు ఇష్టమైన కార్టూన్ సీరియల్స్ సరైన సమయానికి ప్రసారం కావు. ఆటలు ఆడుటకు సరైన సమయం మీకు ఉండదు. అందుకే సంఖ్యలు లేని ప్రపంచం మనం ఊహించలేము. వస్తువులు కొనాలన్నా, అమ్మాలన్నా, కావలసిన రీతిలో పంచుటకు సంఖ్యలు కావలెను. అంతేకాక, ఈ సంఖ్యలతో పాటు వాటిని ఉపయోగించే నాలుగు ప్రధాన పరిక్రియలు కావలెను. పరిక్రియలతో ముడిపడి ఉన్న భాజనీయతా సూత్రములు వాటి వెనుక దాగియున్న (హేతుబద్ధమైన కారణాలు) లాజిక్ తెలుసుకొందాము.

15.1 భాజనీయతా సూత్రములు

కొన్ని సంఖ్యలు తీసుకుని వాటిని 2, 3, 4, 5, 6, 7 లచే భాగించబడతాయో పరీక్షించుము.

ఒక సంఖ్య 'a' మరొక సంఖ్య 'b' ను భాగించడం అంటే నిశ్శేషంగా భాగించుట అని అర్థం. దీనినే b, a చే భాగించబడును అంటాం.

ఈ అధ్యాయంలో మనం సంఖ్యల భాజనీయత మరియు దాని వెనుక గల కారణములను నేర్చుకొంటాము.

15.1.1 అంకెల స్థాన విలువ

645 అనే సంఖ్యను తీసుకొని విస్తరణ రూపంలో వ్రాయండి.

$645 = 600 + 40 + 5 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

ఈ సంఖ్యలో 6 యొక్క స్థాన విలువ 600, 4 యొక్క స్థాన విలువ 40, 5 యొక్క స్థాన విలువ 5. ఇందు 6 వందలు, 4 పదులు, 5 ఒకట్లు కలవు.

Do this

Write the place value of numbers underlined.

(i) $\underline{2}9\underline{8}79$ (ii) $10\underline{3}4\underline{4}$ (iii) $9\underline{8}72\underline{5}$

15.1.2 Expanded form of numbers

We know how to write a number in expanded form .At the same time , we are familiar with how to express a number in expanded form by using powers of ten.

For example

Standard notation		Expanded form		
68 =60+8	=	$(10 \times 6) + 8$	=	$(10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$
72=70+2	=	$(10 \times 7) + 2$	=	$(10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$

We know that $10^0 = 1$

Let us consider a two digit number 10a + b having 'a' and 'b' respectively as tens and units digits using the above notations,

The number can be written as $(10 \times a) + b = (10^1 \times a) + (1 \times b)$. (Where $a \neq 0$)

Let us now consider a number 658 , a three digit number, it can be written as

Standard notation Expanded form

$$658 = 600 + 50 + 8 = 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8 = 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$$

Similarly $759 = 700 + 50 + 9 = 100 \times 7 + 10 \times 5 + 1 \times 9 = 10^2 \times 7 + 10^1 \times 5 + 1 \times 9$

In general a three digit number made up of digits a, b, and c is written as

$10^2a + 10^1b + c$

$= 100 \times a + 10 \times b + c = 100a + 10b + c$, (where $a \neq 0$).

We can write a number in such expanded form as

$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$

$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$

Similarly a four digit number made up of digits a, b, c and d can be written as

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \text{ (where } a \neq 0)$$

$$= 10^3a + 10^2b + 10^1 c + d.$$

ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది సంఖ్యలలో దిగువ గీత గీయబడిన అంకెల యొక్క స్థాన విలువలు రాయండి.

(i) $\underline{2}9\underline{8}79$ (ii) $10\underline{3}4\underline{4}$ (iii) $9\underline{8}72\underline{5}$

15.1.2 సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయుట

ఒక సంఖ్యను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయడం మనకు తెలియును. అంతే కాకుండా వాటి స్థాన విలువలను 10 యొక్క ఘాతాంక రూపంలో వ్రాయుట కూడా మనకు తెలుసు.

ఉదాహరణకు

	సాధారణ రూపం		విస్తరణ రూపం
$68 = 60+8$	$= (10 \times 6) + 8$		$= (10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$
$72 = 70+2$	$= (10 \times 7) + 2$		$= (10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$

$10^0 = 1$ అని మనకు తెలియును.

పదుల స్థానంలో 'a' ఒకట్ల స్థానంలో 'b' గల ఒక రెండంకెల సంఖ్య $(10a+b)$ తీసుకొనుము.

దీనిని $(10 \times a) + b = (10^1 \times a) + (1 \times b)$ $(a \neq 0)$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇదే విధంగా ఒక మూడంకెల సంఖ్యను 658 తీసుకొనుము. దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

సాధారణ రూపం విస్తరణ రూపం

$$658 = 600 + 50 + 8 = 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8 = 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$$

$$759 = 700 + 50 + 9 = 100 \times 7 + 10 \times 5 + 1 \times 9 = 10^2 \times 7 + 10^1 \times 5 + 1 \times 9$$

a, b, c అంకెలుగా గల మూడు అంకెల సంఖ్యను సాధారణంగా $10^2a + 10^1b + c$

$= 100 \times a + 10 \times b + c = 100a + 10b + c$, $(a \neq 0)$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇదే విధంగా 4 అంకెల సంఖ్యను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$$

$$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$$

a, b, c, d లు అంకెలుగా గల నాలుగు అంకెల సంఖ్యను సాధారణంగా

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \; (a \neq 0)$$

$= 10^3a + 10^2b + 10^1c + d$ గా వ్రాయవచ్చును.

Do These

1. Write the following numbers in expanded form

   (i) 65 (ii) 74 (iii) 153 (iv) 612

2. Convert the following expanded form into standard notation.

   (i) $10 \times 9 + 4$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$

3. Fill in the blanks

   (i) $100 \times 3 + 10 \times$ _____ $+ 7 = 357$

   (ii) $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 =$ ________

   (iii) $100 \times$ _____ $+ 10 \times 3 + 7 = 737$

   (iv) $100 \times$ ____ $+ 10 \times q + r = pqr$

   (v) $100 \times x + 10 \times y + z =$ ____________

15.1.3 Factors and Multiples of numbers

$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 12 = 36$	

Write the factors of 36.

The factors of 36 are 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
Which is the greatest factor of 36 ?

We say every factor is less than or equal to the given number . Greatest factor of a non-zero number is the number it self. Therefore, every number is a factor of itself. And '1' is a factor of all numbers.

$7 \times 1 = 7$, $9 \times 1 = 9$,

If a natural number other than '1' has no factors except 1 and itself , what do you say about such numbers? Those numbers are **prime numbers.**

Ex : 2, 3, 5, 7, 11, 13,….etc.

One interesting sets of numbers 23 , 4567 , 89 are primes and made with consecutive digits.

Do you know?
The number 82818079787776757473727170696867666564636261605958575655545 352 515049484746454443424140393837363534333231302928272625242322212 01918 1716151413121110987654321 is written by starting at 82 and writing backwards to 1. How many digits are there in this number? It is a such big number, which is a prime number.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయండి.

   (i) 65 (ii) 74 (iii) 153 (iv) 612

2. క్రింది సంఖ్యల విస్తరణ రూపాలను, సాధారణ రూపంలోకి మార్చండి.

   (i) $10 \times 9 + 4$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$

3. క్రింది ఖాళీలు పూరించండి.

   (i) $100 \times 3 + 10 \times$ _____ $+ 7 = 357$

   (ii) $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 =$ ________

   (iii) $100 \times$ _____ $+ 10 \times 3 + 7 = 737$

   (iv) $100 \times$ ____ $+ 10 \times q + r = \overline{pqr}$

   (v) $100 \times x + 10 \times y + z =$ ____________

15.1.3 సంఖ్యల కారణాంకాలు, గుణిజములు

$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 12 = 36$	

36 యొక్క కారణాంకాలు వ్రాయండి.

36 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

36 యొక్క గరిష్ఠ కారణాంకము ఏది?

ప్రతి కారణాంకం ఇచ్చిన సంఖ్య కంటే తక్కువ లేక సమానంగా ఉంటుంది. అంతేకాక ప్రతి సంఖ్యా దానికదే కారణాంకము అవుతుంది. '1' పతి సంఖ్యకు కారణాంకము అవుతుంది.

$7 \times 1 = 7$, $9 \times 1 = 9$,

1 తప్ప మిగిలిన సహజ సంఖ్యలలో 1 మరియు అదే సంఖ్య తప్ప వేరే ఇతర కారణాంకములు లేకుంటే ఆ సంఖ్యను ఏమంటారు? అటువంటి సంఖ్యలను **ప్రధాన సంఖ్యలు** అంటారు.

ఉదా: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... మొదలగునవి ప్రధాన సంఖ్యలు.

వరుస అంకెలతో ఏర్పడిన సంఖ్యలను పరిశీలించండి. 23, 4567, 89 అవి ప్రధాన సంఖ్యలు.
అదేవిధంగా మరికొన్ని సంఖ్యలు 191, 911, 199, 919, 991 లు ప్రధాన సంఖ్యలు అవునో కాదో పరిశీలించండి.

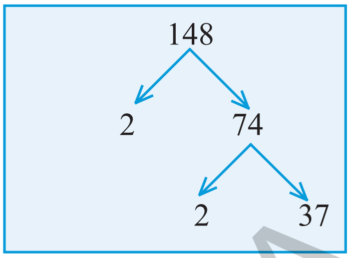
మీకు ఇది తెలుసా?

దిగువ 82తో ప్రారంభించి సహజ సంఖ్యలను వెనుకకు 1 వరకు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య ఇవ్వబడినది.

82818079787776757473727170696867666564636261605958575655545352
5150494847464544434241403938373635343332313029282726252423222120191 8
1716151413121110987654321

ఇందులో ఎన్ని అంకెలున్నాయి? ఇంత పెద్దదయిన ఇది ప్రధాన సంఖ్యయే.

Factorize 148 into prime factors.



$$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$$

We observe the number of factors of 148 is product of (Exponents of factors + 1) of prime factors

$\therefore$ No of factors $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

The factors of 148 are 1, 2, 4, 37, 74, 148.

If a number can be written as product of primes i.e. $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ...

Number of factors of N is $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ...

Write the first 5 multiples of 6.

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$

6, 12, 18, 24, 30 are first five multiples of 6.

How many multiples can we write? Infinite multiples. We say number of multiples of a given number is infinite.

Do These

1. Write all the factors of the following numbers :

   (a) 24 (b) 15 (c) 21 (d) 27

   (e) 12 (f) 20 (g) 18 (h) 23 (i) 36

2. Write first five multiples of given numbers

   (a) 5 (b) 8 (c) 9

3. Factorize the following numbers into prime factors.

   (a) 72 (b) 158 (c) 243

15.1.4 Divisibility by 10

Take the multiples of 10 : 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...etc

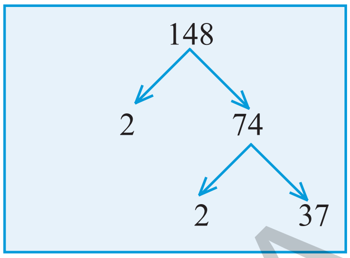
In all these numbers the unit's digit is '0'

Do you say any multiple of 10 will have unit digit as zero? Therefore if the unit digit of a number is '0',then it is divisible by 10.

Let us explore the logic behind this rule.

148 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయండి.

$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$



148 కారణాంకాల సంఖ్య. ప్రతి ప్రధాన కారణాంకముల ఘాతాంకములకు 1 కలపగా వచ్చు సంఖ్యల లబ్ధం అని గమనించవచ్చు

కారణాంక సంఖ్య $= (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

148 కారణాంకములు 1, 2, 4, 37, 74, 148.

ఒక సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా $N=2^a \times 3^b \times 5^c$

N యొక్క కారణాంకముల సంఖ్య $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ...

6 యొక్క మొదటి 5 గుణిజములు వ్రాయండి.

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$

6, 12, 18, 24, 30, ... 6 యొక్క మొదటి 5 గుణిజములు

ఒక ఒక సంఖ్యకు ఎన్ని గుణిజములు మనం వ్రాయవచ్చును? అనంతమైన గుణిజములు వ్రాయగలము. ఒక సంఖ్యకు అనంతమైన గుణిజములు ఉంటాయి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యల యొక్క కారణాంకములన్నింటిని వ్రాయండి.
   (a) 24 (b) 15 (c) 21 (d) 27
   (e) 12 (f) 20 (g) 18 (h) 23 (i) 36
2. క్రింది సంఖ్యల యొక్క మొదటి 5 గుణిజములు వ్రాయండి.
   (a) 5 (b) 8 (c) 9
3. క్రింది సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధంగా వ్రాయండి.
   (a) 72 (b) 158 (c) 243

15.1.4 '10' యొక్క భాజనీయతా నియమం

10 యొక్క గుణిజములను గమనించండి. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... మొదలగునవి.

ఈ సంఖ్యల యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె '0'.

10 యొక్క అన్ని గుణిజముల యందు ఒకట్ల స్థానములు '0' అయిన అది 10 తో నిశ్శేషంగా భాగింపబడును.

దీనికి గల తార్కికతను గూర్చి మనం అన్వేషిద్దాం

If we take a three digit number where 'a' is in hundred's place, 'b' is in ten's place and 'c' is in unit's place can be written as $100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$

$10(10a + b)$ is multiple of 10. If 'c' is a multiple of 10 then the given number will be divisible by 10. It is possible only if $c = 0$.

Do These

1. Check whether the following given numbers are divisible by 10 or not ?

   (a) 3860 (b) 234 (c) 1200 (d) 10^3 (e) $10 + 280 + 20$

2. Check whether the given numbers are divisible by 10 or not ?

   (a) 10^{10} (b) 2^{10} (c) $10^3 + 10^1$

Try This

1. In the division $56Z \div 10$ leaves remainder 6, what might be the value of Z.

15.1.5 Divisibility by 5

Take the multiples of 5. Those are 5,10,15, 20,25,30,35 ,40,45,50,............etc

In these numbers the unit's digit is '0' or '5'

If the units digit of a number is '0' or '5' then it is divisible by 5.

Let us see the logic behind this rule .

If we take a three digit number $100a + 10b + c$ where 'a' is in hundred's place, b is in ten's place and c is in unit's place,

It can be written as $100a + 10b + c = 5(20a + 2b) + c$

$5(20a + 2b)$ is multiple of 5.

The given number is divisible by 5, only if the unit's digit $c = 0$ or 5

1. Check whether the given numbers are divisible by 5 or not ?

   (a) 205 (b) 4560 (c) 402 (d) 105 (e) 235785

ఒకట్ల స్థానంలో 'c' పదుల స్థానంలో 'b' వందల స్థానములో 'a' కలిగిన ఒక మూడంకెల సంఖ్యను తీసుకుందాము. దానిని $100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$ గా వ్రాయవచ్చును.

$10(10+a)$, 10 చే భాగింపబడుతుంది. c, 10 యొక్క గుణిజము అయిన ఇచ్చిన సంఖ్య 10 చే భాగింపబడుతుంది. ఇది $c=0$ అయినపుడు మాత్రమే సాధ్యము.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలు 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) 3860 (b) 234 (c) 1200 (d) 10^3 (e) $10 + 280 + 20$

2. క్రింది సంఖ్యలు 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) 10^{10} (b) 2^{10} (c) $10^3 + 10^1$

ప్రయత్నించండి

1. 56Z అను సంఖ్య 10 తో భాగించిన వచ్చు శేషము 6.

   అయితే Z యొక్క విలువ ఏమై ఉండవచ్చు.

15.1.5 '5' యొక్క భాజనీయతా నియమం

5 యొక్క గుణిజములను గమనించండి. అవి 5,10,15, 20,25,30,35 ,40,45,50,................. మొదలగునవి

ఈ సంఖ్యల యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకెలు '0' లేదా '5'.

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకె '0' లేదా '5' అయిన ఆ సంఖ్య '5'తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

దీనికి గల కారణమును పరిశీలిద్దాము.

ఒకట్ల స్థానములో 'c' పదుల స్థానములో 'b', వందల స్థానములో 'a' కలిగిన ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను తీసుకొందాము. దానిని

$100a + 10b + c = 5(20a + 2b)$గా వ్రాయవచ్చు.

$5(20a + 2b)$, 5చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య

5 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న ఒకట్ల స్థానములోని అంకె $c = 0$ లేదా 5 కావలెను.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలు 5 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) 205 (b) 4560 (c) 402 (d) 105 (e) 235785

If 34A is divisible by 5, what might be the value of A?

In the given number the unit digit A is, either 0 or 5 then only it is divisible by 5. Hence A = 0 or 5.

Try These

1. If $4B \div 5$ leaves remainder 1 , what might be the value of B
2. If $76C \div 5$ leaves remainder 2 , what might be the value of C
3. "If a number is divisible by 10, it is also divisible by 5." Is the statement true? Give reasons.
4. "If a number is divisible by 5, it is also divisible by 10." Is the statement is true or false? Give reasons.

15.1.6 Divisibility by 2

Take the multiples of 2 : i.e. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...etc

In these numbers the unit's digit ends with 0,2,4,6, 8 .

If the unit digit is 0 or 2 or 4 or 6 or 8 (even number) then it is divisible by 2. Otherwise it will not divisible by 2.

Let us see the logic behind this rule.

If we take a three digit number $100 \times a + 10 \times b + c$ where a in hundred's place, b is in ten's place and c is in unit's place , then it can be written as $100a + 10b + c = 2(50a + 5b) + c$

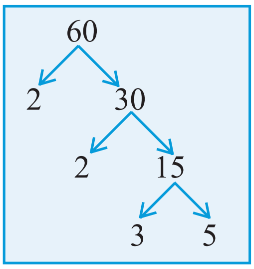
$2(50a + 5b)$ is multiple of 2. If the given number is divisible by 2, it is possible only if the unit's digit c = 0 or 2 or 4 or 6 or 8 (even number)

Think, Discuss and Write

1 . Find the digit in the units place of a number if it is divided by 5 and 2 leaves the remainders 3 and 1 respectively.

Example 1: Write the number of factors of 60 and verify by listing the factors

Solution: 60 can be written as product of prime factors as $2^2 \times 3^1 \times 5^1$



$\therefore$ Number of factors are $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

The factors are 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

34A అను సంఖ్య 5తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన E కు ఏయే విలువలు ఉండవచ్చు?

ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో A కలదు. ఇచ్చిన సంఖ్య '5' తో భాగింపబడవలెనన్న ఒకట్ల స్థానములో '0' లేదా '5' ఉండవలెను. కావున A = 0 లేదా 5.

ప్రయత్నించండి

1. 4B ను 5 తో భాగించిన '1' శేషము వచ్చును. అయిన B కు ఏయే విలువలు ఉండవచ్చును?
2. 76C ను 5 తో భాగించిన '2' శేషము వచ్చును. అయిన Cకు ఏయే విలువలు ఉండవచ్చును?
3. "ఒక సంఖ్య 10తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, 5తో కూడా నిశ్శేషముగా భాగింపబడుతుంది." ఈ వాక్యము సత్యమా లేదా అసత్యమా తెల్పండి. దానికి తగు కారణము తెల్పండి.
4. ¼ఒక సంఖ్య 5తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, 10తో కూడా నిశ్శేషముగా భాగింపబడుతుంది." ఈ వాక్యము సత్యమా లేదా అసత్యమా తెల్పండి. తగు కారణము తెల్పండి.

15.1.6 '2' యొక్క భాజనీయతా నియమము

2 యొక్క గుణిజములు పరిశీలించండి: అవి 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ... మొదలగునవి.

ఈ సంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానమునందలి అంకెను గమనించండి. అవి 0,2,4,6, 8 (సరి సంఖ్యలు) అగుచున్నవి.

ఒక సంఖ్య 2 చే భాగింపబడవలెనన్న, ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానము నందు (సరిసంఖ్య) 0 లేదా 2 లేదా 4 లేదా 8 ఉండవలెను. లేనిచో అది భాగించబడదు.

దీనికి గల కారణము పరిశీలిద్దాము.

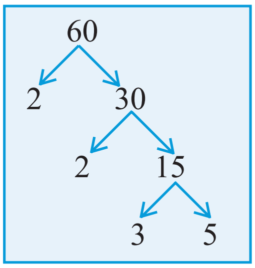
వందల స్థానంలో a పదుల స్థానంలో b మరియు ఒకట్ల స్థానంలో c గల మూడంకెల సంఖ్య 100a+10b+c ను తీసుకొనుము. దీనినే $100\,a + 10\,b + c = 2(50a + 5b) + c$ గా వ్రాయవచ్చును.

$2(50a + 5b) + c$, 2 యొక్క గుణిజము. ఇచ్చిన సంఖ్య 2 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్నా ఒకట్ల స్థానములో గల అంకె 'c' 0 లేక 2 లేక 4 లేక 6 లేక 8 (సరిసంఖ్య) కావలెను.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. ఒక సంఖ్య 5 మరియు 2 చే భాగింపబడునపుడు వచ్చు శేషములు వరుసగా 3 మరియు 1 అయిన ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములోని అంకెను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 1: 60 కు గల కారణాంకముల సంఖ్యను కనుగొనుము. మరియు అన్ని కారాణాంకాలను వ్రాసి సరిచూడండి.



సాధన: 60 ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధముగా వ్రాసిన $2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$\therefore$ కారణాంకముల సంఖ్య $(2 + 1)\,(1 + 1)\,(1 + 1)$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

$\therefore$ ఆ కారణాంకములు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Exercise - 15.1

1. Using divisibility rules , find which of the following numbers are divisible by 2,5,10 (say yes or no) in the given table . What do you observe ?

Number	Divisible by 2	Divisible by 5	Divisible by 10
524	YES	NO	NO
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2. Using divisibility tests, determine which of the following numbers are divisible by 2?

   (a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352

3. Using divisibility tests , determine which of the following numbers are divisible by 5?

   (a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852

4. Using divisibility tests, determine which of the following numbers are divisible by 10?

   (a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010

5. Write the number of factors for the following.

   (a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105

6. Write any 5 numbers which are divisible by 2, 5 and 10.

7. A number 34A is exactly divisible by 2 and leaves a remainder 1, when divided by 5, find A.

15.1.7 Divisibility by 3 and 9

Consider the number 378 , it can be written as 378 $= 300 + 70 + 8$

$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$

Here '3' can't be taken out as a common factor $= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$

అభ్యాసం - 15.1

1. భాజనీయతా సూత్రములుపయోగించి, క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన అంకెలు, 2,5,10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన అవును అని, భాగింపబడనిచో కాదు అని వ్రాయండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

సంఖ్య	2తో భాగించబడును	5తో భాగించబడును	10తో భాగించబడును
524	అవును	కాదు	కాదు
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2. భాజనీయతా నియమము ద్వారా క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి '5' తో భాగింపబడునో తెల్పండి?

   (a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352

3. భాజనీయతా నియమము ద్వారా క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి '5' తో భాగింపబడునో తెల్పండి?

   (a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852

4. భాజనీయతా నియమము ద్వారా క్రింది సంఖ్యలలో ఏవి 10 తో భాగింపబడునో తెల్పండి?

   (a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010

5. క్రింది సంఖ్యలకు కారణాంకాల సంఖ్యను కనుగొనండి.

   (a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105

6. 2, 5 మరియు 10తో భాగింపబడే ఏవైనా 5 సంఖ్యలను తెల్పండి.

7. 34A అను సంఖ్య '2' తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. 5తో భాగింపబడిన శేషము '1' అయిన 'A' విలువ కనుగొనుము.

15.1.7 '3' మరియు 9 యొక్క భాజనీయతా నియమం

ఏదైనా ఒక సంఖ్య 378 తీసుకోండి. 378 ను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$378 = 300 + 70 + 8$$

$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$

ఇక్కడ 3 ను కారణాంకంగా తీసుకొనలేము $= (99 + 1)\, 3 + (9 + 1)7 + 8$

So let us reorganise the sequence as 378 $= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$

$$= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$

$$= 3\,(99 + 21) + (3 + 7 + 8)$$

$3(99 + 21)$ is a multiple of 3. Therefore the given number is divisible by 3 only when $(3 + 7 + 8)$ sum of digits is a multiple of 3 .

For divisibility of 9:

378 can be written as $378 = 300 + 70 + 8$

$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$

$$= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$$

$$= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$

$$= 9\,(11 \times 3 + 1 \times 7) + (3 + 7 + 8)$$

$$= 9\,(33 + 7) + (3 + 7 + 8)$$

$9(33 + 7)$ is multiple of 9. if the given number is divisible by 9, then $(3 + 7 + 8)$,sum of digits is a multiple of 9.

Let us explain this rule :

If we take a three digit number $100a+10b+c$ where 'a' is in hundred's place , 'b' is in ten's place and 'c' is in unit's place.

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1) + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$

$$= 9(11a + b) + (a + b + c) \rightarrow \text{sum of given digits}$$

$9(11a + b)$ multiple of 3 and 9 .The given number is divisible by 3 or 9 , only if the sum of the digits $(a + b + c)$ is multiple of 3 or 9 respectively or $(a+b+c)$ is divisibly by 3 or 9.

Is this divisibility rule applicable for the numbers having more than 3-digits? Check by taking 5-digits and 6-digits numbers.

You have noticed that divisibility of a number by 2,5 and 10 is decided by the nature of the digit in unit place, but divisibility by 3 and 9 depends upon other digits also.

Do This

1. Check whether the given numbers which are divisible by 3 or 9 or by both?

(a) 3663 (b) 186 (c) 342 (d) 18871

(e) 120 (f) 3789 (g) 4542 (h) 5779782

ఈ సంఖ్యలను తిరిగి అమర్చి వ్రాయగా

$$378 = 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 3\,(99 + 21) + (3 + 7 + 8)$$

$3(99 + 21)$, 3 చే భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 3చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న $(3 + 7 + 8)$, 3చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెను. అనగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం, 3 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడాలి.

9 యొక్క భాజనీయత:

378 ను క్రింది విధంగా వ్రాసిన

$$378 = 300 + 70 + 8$$
$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$
$$= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$$
$$= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(11 \times 3 + 1 \times 7\,) + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(33 + 7) + (3 + 7 + 8)$$

$9(33 + 7)$, 9 చే భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య '9' చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న $3 + 7 + 8$ (అనగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తము) 9 చే భాగింపబడవలెను.

దీనికి గల కారణమును పరిశీలిద్దాం.

ఒకట్ల స్థానములో 'c', పదుల స్థానములో 'b' వందల స్థానములో 'a' కలిగిన 3-అంకెల సంఖ్యను 100a+10b+c తీసుకోండి. దానిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1) + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$
$$= 9(11a + b) + (a + b + c)$$

$9(11a + b)$, 3 మరియు 9తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య 3 లేక 9 తో భాగింపబడవలెనన్న $a + b + c$ (ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము) 3 లేక 9 తో భాగింపబడవలెను.

ఈ నియమము 5 లేక 6 అంకెలు కల సంఖ్యలకు కూడా వర్తిస్తుందా? సరిచూడండి.

పై చర్చ నుండి 2, 5 మరియు 10 యొక్క భాజనీయతా నియమములు కేవలం ఒకట్ల స్థానముతో గల అంకె ఆధారంగా నిర్ణయిస్తాము. కాని 3 మరియు 9 యొక్క భాజనీయతా నియమములు, అన్ని అంకెలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అని తెలియుచున్నది.

ఇది చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలు 3 లేక 9 లేక రెండింటితోను నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో భాజనీయతా నియమములు ఆధారంగా తెల్పండి.

(a) 3663	(b) 186	(c) 342	(d) 18871
(e) 120	(f) 3789	(g) 4542	(h) 5779782

Example 2: 24 P leaves remainder 1 if it is divided by 3 and leaves remainder 2 if it is divided by 5. Find the value of P.

Solution : If 24 P is divided by 5 and leaves remainder 2, then P is either 2 or 7.

If P = 2 the given number when divided by 3 leaves remainder 2. If P = 7, the given number when divided by 3, leaves remainder 1. Hence P = 7.

Exercise -15.2

1. If 345 A 7 is divisible by 3,supply the missing digit in place of 'A'.
2. If 2791 A , is divisible by 9, supply the missing digit in place of 'A'.
3. Write some numbers which are divisible by 2,3,5,9 and 10 also.
4. 2A8 is a number divisible by 2 , what might be the value of A?
5. 50B is a number divisible by 5, what might be the value of B ?
6. 2P is a number which is divisible by 2 and 3, what is the value of P
7. 54Z leaves remainder 2 when divided by 5 , and leaves remainder 1 when divided by 3, what is the value of Z ?
8. 27Q leaves remainder 3 when divided by 5 and leaves remainder 1 when divided by 2, what is the remainder when it is divided by 3 ?

15.1.8 Divisibility by 6

Consider a multiple of 6, say 24.

Obviously it is divisible by 6.

Is 24 divisible by the factors of 6 , i.e 2 and 3 ?

Units place of 24 is 4, so it is divisible by 2.

Sum of digits of 24 is 2 + 4 = 6 which is divisible by 3 also.

Now check this with some other multiple of 6.

Now we can conclude that any number divisible by 6 is also divisible by the factors of 6. i.e 2 and 3.

ఉదాహరణ 2: 24 P అను సంఖ్యను 3తో భాగించిన శేషము 1 మరియు 5 తో భాగించిన శేషము 2. అయిన 'P' విలువ కనుగొనుము.

సాధన: 24 P ను 5 తో భాగించినపుడు శేషము 2, కావున P=2 లేదా 7 కావలెను.

P=2 అయినపుడు ఆ సంఖ్యను 3తో భాగించగా వచ్చు శేషము 2 అగును. కాని 3తో భాగించినపుడు వచ్చు శేషము 1 కావున P=7 కావలెను.

అభ్యాసం - 15.2

1. 345A7, 3 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన 'A' యొక్క విలువ కనుగొనుము.
2. 2791A , 9తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన 'A' యొక్క విలువ కనుగొనుము.
3. 2,3,5,9 మరియు 10 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడు కొన్ని సంఖ్యలు పేర్కొనండి.
4. 2A8 అనే సంఖ్య 2తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, Aకు ఎన్ని విలువలు ఉండవచ్చు? ఏమి గమనించారు?
5. 50B, 5తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, Bకు కల విలువలు కనుక్కోండి.
6. 2P అనే సంఖ్య 2 తో 3తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన, P విలువ కనుక్కోండి.
7. 54Z, 5తో భాగించిన 2 శేషము వచ్చును మరియు 3తో భాగించినపుడు 1 శేషము వచ్చును. అయిన Z విలువ కనుక్కోండి.
8. 27Q, 5 తో భాగించినపుడు 3 శేషము, 2తో భాగించినపుడు 1 శేషము వచ్చును. అయిన 3 తో భాగించినపుడు వచ్చు శేషము కనుగొనుము.

15.1.8 '6' యొక్క భాజనీయత

6 యొక్క ఒక గుణిజము 24.

ఇది 6 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

24, 6 యొక్క కారణాంకములైన 2 మరియు 3 లచే భాగింపబడునా?

24 యొక్క ఒకట్ల స్థానములో గల సంఖ్య 4 (సరిసంఖ్య) కావున 2 చే భాగింపబడును.

24 యొక్క అంకెల మొత్తము 2 + 4 = 6 కావున 24 ను 3 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

ఇప్పుడు 6 యొక్క మరికొన్ని గుణిజాలు తీసుకుని పరిశీలించండి.

'6' తో భాగింపబడే సంఖ్యలు అన్ని, 6 యొక్క కారణాంకాలు అయిన 2 మరియు 3తో భాగింపబడతాయి.

అనగా 2 మరియు 3తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడే సంఖ్యలు అన్నీ '6' చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడతాయి.

So if the number is divisible by 2 and 3 , then 2 and 3 become its prime factors, then their product $2 \times 3 = 6$ is also a factor of that number.

In other words if a number is divisible by 6, it has to be divisible by 2 and 3.

Do These

1. Check whether the given numbers are divisible by 6 or not ?

   (a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258

2. Check whether the given numbers are divisible by 6 or not ?

   (a) $458 + 676$ (b) 6^3 (c) $6^2 + 6^3$ (d) $2^2 \times 3^2$

15.1.9 Divisibility by 4 and 8

(a) Take a four digit number say $1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + (10c + d)$. $4(250a + 25b)$ is a multiple of 4. The given number is divisible by 4, only if $10c+d$ is divisible by 4.

In a given number if the number formed by last two digits is divisible by 4 or last two digits are '0' then that number is divisible by 4.

Take a number having more than 4 digits and write in expanded form. Can we write the number other than unit digit and ten's digit as multiple of 4? Check for a number having more than 4 digits, divisibility of 4 depends upon its last two digits or not.

(b) Take a four digit number $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$

$= 1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + (100b + 10c + d)$

$8(125a)$ is always divisible by 8. So the given number is divisible by 8 only when $(100b+10c+d)$ is divisibly by 8.

In a given number if the number formed with its last 3 digits are divisible by 8 or last 3 digits are '0's then that number is divisible by 8.

Take a number having more than 4 digits and write the number in expanded form. Can we write the number other than unit's digit ten's digit and hundred's digit as multiple of 8. Check for a number having more than 4 digits, divisibility of 8 is depends upon its last three digits or not.

Puzzle: Can you arrange the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in an order so that the number formed by first two digits is divisible by 2, the number formed by first three digits is divisible by 3, the number formed by first four digits is divisible by 4 and so on upto nine digits?

Solution : The order 123654987 looks promising check and verify.

ఒక సంఖ్య 2 మరియు 3లచే భాగించబడినచో, 2 మరియు 3లు ఆ సంఖ్యకు ప్రధాన కారణాంకాలగును. కావున వాటి లబ్దము $2 \times 3 = 6$ కావున 6 ఆ సంఖ్యకు కారణాంకమగును.

6 చే భాగించబడు సంఖ్య మరో మాటగా చెప్పాలంటే 2 మరియు 3 లచే తప్పక భాగింపబడాలి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలు '6' తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258258
2. క్రింది సంఖ్యలు '6 'చే నిశ్శేషమగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
   (a) $458 + 676$ (b) 6^3 (c) $6^2 + 6^3$ (d) $2^2 \times 3^2$

15.1.9 '4' మరియు '8' యొక్క భాజనీయతా నియమం

(a) ఒక నాలుగు అంకెల సంఖ్య $1000a + 100b + 10c + d$ తీసుకొనుము. $1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + (10c + d)$ గా వ్రాయవచ్చును. $4(250a + 25b)$, 4 చే నిశ్శేషముగా భాగించబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న (10c+d), 4 చే భాగింపబడవలెను. అనగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క చివరి రెండు అంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్య 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెను.

ఒక సంఖ్య నాలుగుచే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానము, పదుల స్థానములలోని అంకెలతో ఏర్పడు చివరి రెండంకెల సంఖ్య 4 యొక్క గుణిజము లేక '0' లు కావలెను.

4 అంకెల కంటే ఎక్కువ అంకెలు కల సంఖ్యను తీసుకుని విస్తరణ రూపంలో వ్రాయండి. వాటి యొక్క చివరి రెండు అంకెలు తప్ప మిగిలిన అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 4 యొక్క గుణిజము అవునో కాదో, పరిశీలించండి. వాటికి 4 యొక్క భాజనీయతా నియమం చివరి రెండంకెల సంఖ్యపై ఆధారపడి ఉందో లేదో గమనించండి.

(b) ఒక నాలుగు అంకెల సంఖ్య $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$ తీసుకొనుము.
$= 1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + (100b + 10c + d)$
8(125a), 8 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడవలెనన్న (100b+10c+d), 8 చే భాగింపబడవలెను. అనగా చివరి మూడు అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 8 తో భాగింపబడవలెను.

ఒక సంఖ్య 8 తో భాగింపబడవలెనన్న, ఆ సంఖ్య చివరి మూడు అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 8 తో భాగింపబడవలెను. లేదా మూడు అంకెలు '0' కావలెను.

4 అంకెలు లేదా అంత కన్న ఎక్కువ అంకెలు గల సంఖ్యకు 8 యొక్క గుణిజముగా వ్రాయగలమా? పరిశీలించండి.

వాటికి 8 యొక్క భాజనీయతా నియమం చివరి 3 అంకెలపై ఆధారపడి ఉందో లేదో గమనించండి.

పజిల్: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అంకెలతో, మొదటి రెండంకెలతో ఏర్పడే సంఖ్య 2 చే భాగించబడునట్లు, మొదటి మూడంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్య 3 చే భాగించబడునట్లు, మొదటి నాల్గంకెలచే ఏర్పడే సంఖ్య 4 చే భాగించబడునట్లు మరియు ఇదే క్రమం 9 అంకెల వరకు కొనసాగించగలిగే సంఖ్యను తయారు చేయగలదా?

సాధన : 123654987 క్రమపు సంఖ్య సమస్యకు సాధనగా కనిపిస్తుంది. పరీక్షించి సరిచూడండి.

Example 3: Check whether 6582 is divisible by 4 ?

Solution: The number formed by last two digits is 82, is not divisible by 4. Hence the given number is not divisible by 4.

Example 4: Check whether 28765432 is divisible by 8 ?

Solution : The number formed by last three digits is 432 is divisible by 8, hence it is divisible by 8.

If a number is divisible by 8, then it is divisible by 4 also. Can you say if a number divisible by 4 is it divisible by 8? All multiples of 8 are divisible by 4, but all multiples of 4 may not be divisible by 8.

Do This

1. Check whether the given numbers are divisible by 4 or 8 or by both 4 and 8?

(a) 464 (b) 782 (c) 3688 (d) 100

(e) 1000 (f) 387856 (g) 4^4 (h) 8^3

Try This

1. Check whether the given numbers are divisible by 4 or 8 or by both 4 and 8?

(a) $4^2 \times 8^2$ (b) 10^3 (c) $10^5 + 10^4 + 10^3$ (d) $4^3 + 4^2 + 4^1 - 2^2$

15.1.10 Divisibility by 7

Take a three digit number $100 \times a + 10 \times b + c$ can be written as

$$100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$$

Here 7 is not a common factor , let us rewrite it in a way that 7 becomes a common factor.

$$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

$7(14a + b)$ is multiple of '7'.The given number is divisible by 7 only when $(2a + 3b + c)$ is divisible by 7.

Example 5: Check whether 364 is divisible by 7 or not ?

Solution : Here $a = 3, b = 6, c = 4, (2a + 3b + c) = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4$

$= 6 + 18 + 4 = 28$ (is divisible by 7)

Hence, the given number is divisible by '7'

ఉదాహరణ 3: 6582, 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క చివరి రెండు అంకెల సంఖ్యలు 82. 82, 4 చే భాగింపబడదు. కావున 6582, 4చే భాగింపబడదు. కావున 6582, 4 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడదు.

ఉదాహరణ 4: 28765432, 8 చే భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క చివరి మూడు అంకెలు 4, 3, 2. ఈ అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 432, 8తో భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 తో భాగింపబడును.

8తో భాగింపబడు అన్ని సంఖ్యలు 4తో భాగింపబడును. 4తో భాగింపబడు అన్ని సంఖ్యలు, 8తో భాగింపబడతాయా? పరిశీలించండి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలు 4 లేక 8 లేక రెండింటితోను భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) 464 (b) 782 (c) 3688 (d) 100

   (e) 1000 (f) 387856 (g) 4^4 (h) 8^3

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సంఖ్యలు 4 లేక 8 లేక రెండింటితోను భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) $4^2 \times 8^2$ (b) 10^3 (c) $10^5 + 10^4 + 10^3$ (d) $4^3+4^2+4^1-2^2$

15.1.10 '7' యొక్క భాజనీయతా నియమం

ఒక మూడు అంకెల సంఖ్య $100 \times a + 10 \times b + c$ తీసుకొనుము.

$$100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$$

ఇందులో మొదటి రెండు పదముల నుండి 7 ఉమ్మడి కారణాంకంగా వ్రాసి

$$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

$7(14a + b)$, 7 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడును. ఇచ్చిన సంఖ్య 7 తో భాగింప బడవలెనన్న, $(2a+3b+c)$ 7తో భాగింపబడవలెను.

ఉదాహరణ 5: 364, 7 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

సాధన: ఇచ్చట $a = 3, b = 6, c = 4, (2a + 3b + c) = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4$

$= 6 + 18 + 4 = 28$ (7 తో భాగింపబడును.)

కావున 364, '7' తో భాగింపబడును.

Do This

1. Check whether the given numbers are divisible by 7?

   (a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 553 (e) 448

Try These

1. Take a four digit general number , make the divisibility rule for '7'
2. Check your rule with the number 3192 which is a mulltiple of 7 .

15.1.11 Divisibility by 11

Take a 5 digit number $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$

Here 11 can't be taken out as a common factor. So let us reorganise the expansion as

$$= (9999 + 1)\,a + (1001-1)\,b + (99 + 1)\,c + (11-1)\,d + e$$

$$= 9999a + 1001\,b + 99c + 11d + a - b + c - d + e$$

$$= 11\,(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d)$$

$11\,(909a + 91b + 9c + d)$ is always divisible by 11.

So the given number is divisible by 11 only if $(a + c + e) - (b + d)$ is divisible by 11.

i.e $(a + c + e) - (b + d)$ is a multiple of 11 or equal to zero.

If the difference between the sum of digits in odd places $(a + c + e)$ and sum of digits in even places $(b + d)$ of a number is a multiple of 11 or equal to zero, then the given number is divisible by 11.

Observe the following table

Number	Sum of the digits at odd places (from the left)	Sum of the digits at even places (from the left)	Difference
308	$3 + 8 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$6 + 8 + 9 = 23$	$1 + 0 = 1$	$23 - 1 = 22$

We observe that in each case the difference is either 0 or divisible by 11. Hence all these numbers are divisible by 11.

ఇవి చేయండి

1. కింది సంఖ్యలు 7 చే భాగించబడుతాయా ? పరీక్షించండి.

   (a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 553 (e) 448

ప్రయత్నించండి

1. నాలుగంకెల సంఖ్యను సాధారణ రూపంలో తీసుకొని '7' తో భాజనీయతా నియమాన్ని తయారు చేయండి.
2. 3192, 7 యొక్క గుణిజము "నీ నియమంతో" సరిచూడండి.

15.1.11 '11'యొక్క భాజనీయతా నియమం

ఒక 5 అంకెల సంఖ్య $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ తీసుకొనుము.

దీనిని 11 యొక్క గుణిజముగా వ్రాయుటకు, పై సంఖ్యను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$= (9999 + 1)\,a + (1001 - 1)\,b + (99 + 1)\,c + (11 - 1)\,d + e$$

$$= 9999a + 1001\,b + 99c + 11d + a - b + c - d + e$$

$$= 11\,(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d)$$

$11\,(909a + 91b + 9c + d)$, 11 భాగింపబడును.

కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 11 చే భాగింపబడవలెనన్న $(a + c + e) - (b + d)$, 11 చే భాగింపబడవలెను.

అనగా $(a + c + e) - (b + d)$, 11 యొక్క గుణిజము లేక '0' కావలెను.

ఒక సంఖ్యలోని సరి స్థానములలోని అంకెల మొత్తం మరియు బేసి స్థానములలోని అంకెల మొత్తముల భేదం 11 యొక్క గుణిజము లేక '0' అయిన ఆ సంఖ్య 11 చే భాగించబడును.

కింది పట్టిక గమనించండి.

సంఖ్య	ఎడమ వైపు నుండి బేసి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తం	ఎడమవైపు నుండి సరి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తం	వాటి భేదము
308	$3 + 8 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$6 + 8 + 9 = 23$	$1 + 0 = 1$	$23 - 1 = 22$

పై పట్టికలో ప్రతి సందర్భంలో భేదం 0 లేదా 11 యొక్క గుణిజం కావున పై సంఖ్యలు 11చే భాగింపబడును.

For the number 5081, the difference of the digits of odd places and even places is (5+8)–(0 +1)=12 which is not divisible by 11. Therefore the number 5081 is not divisible by 11.

Do This

1. Check whether the given numbers are divisible by 11.

   (i) 4867216 (ii) 12221 (iii) 100001

Consider a 3 digit number 123.

Write it two times to make a number as 123123.

Now what is the sum of digits in odd places from left? 1 + 3 + 2 = 6

What is the sum of digits in even places from the right? 2 + 1 + 3 = 6

what is the difference between these sums? Zero.

Hence 123123 is divisible by 11.

Take any 3 digits number and make a number by writing it two times. It is exactly divisible by 11.

Try These

1. Verify whether 789789 is divisible by 11 or not.
2. Verify whether 348348348348 is divisible by 11 or not?
3. Take an even palindrome i.e. 135531 check whether this number is divisible by 11 or not?
4. Verify whether 1234321 is divisible by 11 or not?

Exercise - 15.3

1. Check whether the given numbers are divisible by '6' or not ?

   (a) 273432 (b) 100533 (c) 784076 (d) 24684

2. Check whether the given numbers are divisible by '4' or not ?

   (a) 3024 (b) 1000 (c) 412 (d) 56240

3. Check whether the given numbers are divisible by '8' or not ?

   (a) 4808 (b) 1324 (c) 1000 (d) 76728

5081 అను సంఖ్యను తీసుకొనుము. ఇందులో బేసి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తం, సరి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తముల యొక్క భేదం $(5+8)-(0+1)=12$, ఇది 11 చే భాగింపబడదు. కావున 5081 అనే సంఖ్య 11 చే భాగింపబడదు.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సంఖ్యలు, 11చే భాగింపబడునో లేదో భాజనీయతా నియమము ద్వారా కనుక్కోండి..

   (i) 4867216 (ii) 12221 (iii) 100001

ఏదైనా ఒక 3 అంకెల సంఖ్య 123 తీసుకొనుము.

123123 అగునట్లు, రెండు సార్లు వ్రాయండి.

బేసి స్థానములోని అంకెల మొత్తం ఎంత? $1+3+2=6$

సరి స్థానములోని అంకెల మొత్తం ఎంత? $2+1+3=6$

వీటి భేదము ఎంత? '0'

కావున 123123, 11 చే భాగింపబడును.

ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను రెండుసార్లు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య, 11 నిశ్శేషముగా భాగించబడును.

ప్రయత్నించండి

1. 789789, 11 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
2. 348348348348, 11 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
3. 135531 ఒక సరి పాలిండ్రోమ్ సంఖ్య. ఈ సంఖ్య 11 చే భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
4. 1234321, 11 చే భాగింపబడుతుందో లేదో సరిచూడండి.

అభ్యాసం - 15.3

1. క్రింది సంఖ్యలు '6' తో భాగింపబడునో, లేదో భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా తెల్పండి.

   (a) 273432 (b) 100533 (c) 784076 (d) 24684

2. క్రింది సంఖ్యలు '4' తో భాగింపబడునో, లేదో భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా తెల్పండి.

   (a) 3024 (b) 1000 (c) 412 (d) 56240

3. భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా క్రింది సంఖ్యలు, '8' తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

   (a) 4808 (b) 1324 (c) 1000 (d) 76728

4. Check whether the given numbers are divisible by '7' or not ?

(a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676

5. Check whether the given numbers are divisible by '11' or not using divisability sules

(a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121

(e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (h) 13431

(i) 423423 (j) 168861

6. If a number is divisible by '8', then it also divisible by '4' also . Explain ?

7. A 3-digit number 4A3 is added to another 3-digit number 984 to give four digit number 13B7, which is divisible by 11, then find (A + B).

15.2 Some More Divisibility Rules

(a) Let us observe a few more rules about the divisibility of numbers.

Consider a factor of 24 , say 12.

Factors of 12 are 1,2,3,4,6,12

Let us check whether 24 is divisible by 2,3,4,6 we can say that 24 is divisible by all factors of 12.

So, if a number 'a' is divisible by another number 'b', then it is divisible by each of the factors of that number 'b'.

(b) Consider the number 80. It is divisible by 4 and 5. It is also divisible by $4 \times 5 = 20$, where 4 and 5 are co primes to each other. (have no common factors for 4 and 5)

Similarly, 60 is divisible by 3 and 5 which have no common factors each other 60 is also divisible by $3 \times 5 = 15$.

If 'a' and 'b' have no common factors (other than unity), the number divisible by 'a' and 'b' is also divisible by $a \times b$

(Check the property if 'a' and 'b' are not co-primes).

(c) Take two numbers 16 and 20. These numbers are both divisible by 4. The number $16 + 20 = 36$ is also divisible by 4.

Try this for other common divisors of 16 and 20.

Check this for any other pairs of numbers.

4. భాజనీయతా నియమముల ఆధారంగా క్రింది సంఖ్యలు, '7' తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.

(a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676

5. క్రింది సంఖ్యలు '11' తో భాగింపబడునో, లేదో భాజనీయతా నియమాల ఆధారంగా చెప్పండి.

(a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121

(e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (h) 13431

(i) 423423 (j) 168861

6. ఒక సంఖ్య '8' తో భాగింపబడిన, '4' తో కూడా భాగింపబడును. వివరించండి.

7. ఒక మూడు అంకెల సంఖ్య 4A3, మరొక మూడు అంకెల సంఖ్య 984 కు కలుపగా ఏర్పడు సంఖ్య 13B7. ఈ సంఖ్య 11చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడుతుంది, అయిన (A+B) కనుక్కోండి.

15.2 మరికొన్ని భాజనీయతా నియమాలు

మనము మరికొన్ని భాజనీయతా నియమములను గమనిద్దాము.

(a) 24 యొక్క కారణాంకము 12.

12 యొక్క కారణాంకములు 1,2,3,4,6,12

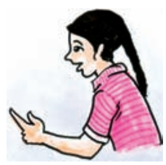
24, 2, 3, 4, 6 లచే భాగింపబడును. కావున 24, 12 యొక్క అన్ని కారణాంకములచే భాగింపబడును.

'a' అను సంఖ్య 'b' చే భాగించబడిన అది 'b' యొక్క అన్ని కారణాంకాలచే భాగించబడును.

(b) ఏదైనా ఒక సంఖ్య 80 తీసుకొనుము. ఇది 4 తోను 5తోను భాగింపబడును. ఈ సంఖ్య 4, 5ల యొక్క లబ్ధము $4 \times 5 = 20$ తోను భాగింపబడును. (4, 5లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు)

ఇదే విధముగా 60, 3 మరియు 5 లచే భాగింపబడును మరియు 60, 3, 5 ల లబ్ధము $(3 \times 5 = 15)$తో కూడా భాగింపబడును.

'a', 'b' లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలైనపుడు a మరియు b చే భాగించబడు సంఖ్య. $a \times b$తో కూడా భాగింపబడును."



('a', 'b' లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు కానప్పుడు ఈ నియమము పరిశీలించండి).

(c) ఏవైనా రెండు సంఖ్యలు 16, 20 తీసుకొనుము. అవి 4 తో భాగింపబడును. వాటి మొత్తము $16 + 20 = 36$ కూడా 4తో భాగింపబడును.

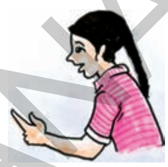
16, 20ల యొక్క వేరొక ఉమ్మడి కారణాంకములకు సరిచూడండి.

వేరొక రెండు సంఖ్యలకు పై నియమము సరిచూడండి.

If two given numbers are divisible by a number, then their sum is also divisible by that number.

(d) Take two numbers 35 and 20. These numbers are both divisible by 5. Is their difference $35 - 20 = 15$ also divisible by 5? Try this for other pairs of numbers also.

If two given numbers are divisible by a number, then their difference is also divisible by that number.



Do These

1. Take different pairs of numbers and check the above four rules for given number
2. 144 is divisible by 12. Is it divisible by the factors of 12 ? verify .
3. Check whether $2^3 + 2^4 + 2^5$ is divisible by 2 ? Explain
4. Check whether $3^3 - 3^2$ is divisible by 3 ? Explain

Consider a number, product of three consecutive numbers i.e. $4\times5\times6 = 120$. This is divisible by 3. Because in these consecutive numbers one number is multiple of 3. Similarly if we take product of any three consecutive numbers among those one number is multiple of 3. Hence product of three consecutive is always divisible by 3.

Try This

1. Check whether $1576 \times 1577 \times 1578$ is divisible by 3 or not.

Divisibility Rule of 7 for larger numbers

We discussed the divisibility of 7 for 3-digit numbers. If the number of digits of a number are more than 3 we make it simple to find divisibility of 7.

Check a number 7538876849 is divisible by 7 or not.

Step 1 : Make the number into groups of 3-digits each from right to left. If the left most group is less than 3 digits take it as group.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}7 & 538 & 876 & 849 \\ \text{D} & \text{C} & \text{B} & \text{A}\end{array}$$

"రెండు సంఖ్యలు, వేరువేరుగా మూడవ సంఖ్యతో భాగింపబడుచున్నచో, వాటి మొత్తం కూడా మూడవ సంఖ్యతో భాగింపబడును.

(d) ఏవైనా రెండు సంఖ్యలు 35, 20 తీసుకొనుము. అవి 5చే భాగింపబడుచున్నవి. వాటి భేదము $35 - 20 = 15$ కూడా 5చే భాగింపబడునా? వేరే రెండు సంఖ్యలను తీసుకుని, పై నియమమును సరిచూడండి.

"రెండు సంఖ్యలు, వేరువేరుగా మూడవ సంఖ్యతో భాగింపబడినట్లయితే, వాటి భేదం కూడా మూడవ సంఖ్యచే భాగింపబడును".

ఇవి చేయండి

1. వివిధ సంఖ్యల జతలు తీసుకుని వాటికి పై నాలుగు నియమములు సరిచూడండి.
2. 144, 12చే భాగించబడును. 144, 12 యొక్క అన్ని కారణాంకములచే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
3. $2^3 + 2^4 + 2^5$, 2 తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి. వివరించండి.
4. $3^3 - 3^2$, 3 తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి. వివరించండి.

మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్ధముగా గల ఒక సంఖ్యను తీసుకొనుము. ఉదా: $4 \times 5 \times 6 = 120$. ఈ సంఖ్య 3చే భాగింపబడును. ఎందుకనగా, మూడు వరుస సంఖ్యలలో, ఒక సంఖ్య 3 యొక్క గుణిజము. కావున మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్ధముతో ఏర్పడిన సంఖ్య, 3చే భాగింపబడును. ఏవైనా మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్ధమును తీసుకొని, పరిశీలించండి.

ప్రయత్నించండి

1. 1576 1577 1578 తో ఏర్పడు సంఖ్య 3 తో భాగింపబడునో లేదో కారణముతో తెల్పండి.

పెద్ద సంఖ్యలకు 7 యొక్క భాజనీయతా నియమము

ఇప్పటి వరకు మనము 3- అంకెలు, 4- అంకెల సంఖ్యలకు 7 యొక్క భాజనీయతా నియమం చర్చించాం. ఇప్పుడు అంతకంటే ఎక్కువ అంకెలు గల సంఖ్యలకు 7 యొక్క భాజనీయతా నియమం పరిశీలిద్దాం.

7538876849 అను సంఖ్య 7 తో భాగింపబడునో లేదో పరిశీలిద్దాం.

సోపానం 1 : ఇచ్చిన సంఖ్యను కుడివైపు నుండి మూడేసి అంకెలు ఒక గ్రూపుగా విభజించండి. చివరి గ్రూపు నందు మూడు కంటే తక్కువ అంకెలున్న వాటినే ఒక గ్రూపుగా తీసుకోండి.

7 | 538 | 876 | 849 |
D C B A

Step 2 : Add the groups in alternate places i.e. A + C and B + D.

$$\begin{array}{r} 849 \\ +\ 538 \\ \hline 1387 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876 \\ +\ 7 \\ \hline 883 \\ \hline \end{array}$$

Step 3 : Subtract 883 from 1387 and check the divisibility rule of 7 for the resultant 3 digit number as previously learnt

$$\begin{array}{r} 1387 \\ -\ 883 \\ \hline 504 \end{array}$$

504 By divisibility rule of 7 we know that 504 is divisible by 7. Hence the given number is divisible by 7.

Try This

1. Check the above method applicable for the divisibility of 11 by taking 10-digit number.

By using the divisibility rules , we can guess the missing digit in the given number.

Suppose a number 84763A9 is divisible by 3, we can guess the value for sum of digits is

8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9 = 37 + A. To divisible by 3 , A has values either 2 or 5 or 8.

Exercise - 15.4

1. Check whether 25110 is divisible by 45.
2. Check whether 61479 is divisible by 81 .
3. Check whether 864 is divisible by 36? Verify whether 864 is divisible by all the factors of 36 ?
4. Check whether 756 is divisible by 42? Verify whether 756 is divisible by all the factors of 42?
5. Check whether 2156 is divisible by 11 and 7? Verify whether 2156 is divisible by product of 11 and 7 ?
6. Check whether 1435 is divisible by 5 and 7? Verify if 1435 is divisible by the product of 5 and 7?

సోపానం 2 : సరి స్థానములలో ఉన్న గ్రూపులచే ఏర్పడిన సంఖ్యల మొత్తంలను కనుగొనండి. బేసి స్థానములతో ఉన్న గ్రూపులచే ఏర్పడిన సంఖ్యల మొత్తములు. అనగా A + C, B + D.

$$\begin{array}{r} 849 \\ +\ 538 \\ \hline 1387 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876 \\ +\ \ \ 7 \\ \hline 883 \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 3 : 883, 1387 ల బేధము. ఆ సంఖ్య 7 చే భాగింపబడిన ఇచ్చిన సంఖ్య 7 తో భాగింపబడును.

$$\begin{array}{r} 1387 \\ -\ 883 \\ \hline 504 \end{array}$$

504, 7 చే భాగించబడును. కావున దత్త సంఖ్య 7 తో భాగింపబడును.

ప్రయత్నించండి

1. పై పద్ధతి ద్వారా, 10 అంకెలు గల పెద్ద సంఖ్యను వ్రాసి 11 యొక్క భాజనీయతా సూత్రము సరిచూడండి.

భాజనీయతా నియమముల ద్వారా, ఒక సంఖ్య నందు తెలియని అంకెలను మనం కనుగొనవచ్చును.

84763A9 అనే సంఖ్య, 3 చే భాగింపబడిన, a యొక్క విలువలు కనుగొనగలము.

3 యొక్క విభాజనీయతా ప్రకారం, ఇచ్చిన సంఖ్య నందలి, అంకెల మొత్తం 8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9=37+A. 3 చే భాగింపబడవలెనన్న, A = 2 లేదా 5 లేదా 8 కావలెను.

అభ్యాసం - 15.4

1. 25110, 45 చే భాగింపబడునో లేదో సరిచూడండి.
2. 61479, 81 చే భాగింపబడునో లేదో సరిచూడండి.
3. 864, 36 చే భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి. మరియు 36 యొక్క కారణాంకములన్నింటిచే 864 భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.
4. 756, 42 చే భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి. మరియు 42 యొక్క కారణాంకములన్నింటిచే 756 భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి.
5. 2156, 11 మరియు 7 లచే భాగింపబడునో లేదో చూడండి. మరియు 2156, 11 మరియు 7 ల యొక్క లబ్ధంతో భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.
6. 1435, 5 మరియు 7 లచే భాగింపబడునో లేదో చూడండి. మరియు 1435, 5 మరియు 7 ల యొక్క లబ్ధంతో భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.

7. Check whether 456 and 618 are divisible by 6? Also check whether 6 divides the sum of 456 and 618 ?

8. Check whether 876 and 345 are divisible by 3? Also check whether 3 divides the difference of 876 and 345 ?

9. Check whether $2^2+2^3+2^4$ is divisible by 2 or 4 or by both 2 and 4 ?

10. Check whether 32^2 is divisible by 4 or 8 or by both 4 and 8 ?

11. If A679B is a 5-digit number is divisible by 72 find 'A' and 'B'?

15.3 Puzzles based on divisibility rules

Raju and Sudha are playing with numbers . Their conversation is as follows :

Sudha said , let me ask you a question.

Sudha : Choose a 2- digit number

Raju : Ok . I choose. (He choose 75)

Sudha : Reverse the digits (to get a new number)

Raju : Ok .

Sudha : Add this to the number you choosen

Raju : Ok . (I did)

Sudha : Now divide your answer with 11, you will get the remainder zero.

Raju : Yes . but how do you know ? Can you think why this happens ?

Now let us understand the logic behind the Sudha's trick

Suppose Raju chooses the number 10a + b (such that "a" is a digit in tens place and "b" is a digit in units place and $a \neq 0$) can be written as $10 \times a + b = 10a + b$ and on reversing the digits he gets the number 10b + a. When he adds the two numbers he gets $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$

The sum is always multiple of 11. Observe that if she divides the sum by 11 , the quotient is (a + b), which is exactly the sum of digits a and b of chosen number.

You may check the puzzle by taking any other two digit number .

7. 456, 618 సంఖ్యలు 6 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి. మరియు వాటి మొత్తం కూడా 6 చే భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి.

8. 876, 345 లు 3తో భాగింపబడునో లేదో తెల్పండి. మరియు వాటి భేదము కూడా 3తో భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి.

9. $2^2+2^3+2^4$; 2 లేదా 4 లేదా రెండింటి తోను భాగింపబడుతుందో లేదో తెల్పండి.

10. 32^2, 4 లేదా 8 లేదా రెండింటితో భాగింపడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

11. A679B, 72 తో నిశ్శేషముగా భాగింపబడిన A, B విలువలు కనుక్కోండి.

15.3 భాజనీయతా నియమాలపై ఆధారపడిన పజిల్స్

రాజు, సుధ సరదాగా అంకెలతో పజిల్స్ ఆడుచున్నారు. వారి సంభాషణ ఇలా కలదు.

సుధ : ఒక రెండు అంకెల సంఖ్య తలచుకో.

రాజు : అలాగే, తలచుకున్నాను. (అతడు 75 తలచుకున్నాడు)

సుధ : వాటిలోని అంకెలు తారుమారు చేయి.

రాజు : అలాగే, చేశాను.

సుధ : వచ్చిన సంఖ్యను, మొదటి సంఖ్యకు కలుపు.

రాజు : అలాగే చేసాను.

సుధ : వచ్చిన ఫలితాన్ని 11తో భాగిస్తే '0' శేషం వస్తుంది.

రాజు : నిజమే నీకు ఎలా తెలిసింది?

సుధకు ఏ విధంగా తెలిసినది, పరిశీలిద్దాము.

రాజు తలచుకున్నా రెండంకెల సంఖ్య $10a + b$ ("a" పదుల స్థానముతోను, "b" ఒకట్ల స్థానములోను కలదు) $a \neq 0$ అనుకొనుము. దీనిని $10 \times a + b = 10a + b$ గా వ్రాయవచ్చును. వాటి యొక్క అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చు సంఖ్య $10b + a$. ఈ రెండు సంఖ్యలను కలుపగా $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$.

వీటి యొక్క మొత్తము ఎల్లప్పుడూ 11 యొక్క గుణిజము అగును. మరియు భాగఫలము $(a + b)$ (a, b అంకెల మొత్తము)

వేరే ఇతర 2-అంకెల సంఖ్యకు పజిల్‌ను సరిచూడండి.

Do These

1. Check the result for following the numbers instead of Raju was chosen.
   (i) 37 (ii) 60 (iii) 18 (iv) 89
2. In a cricket team there are 11 players. The selection board purchased $10x + y$ T-Shirts to players. They again purchased '$10y + x$ T-Shirts and total T-Shirts were distributed to players equally. How many T-Shirts will be left over after they distrubuted equally to 11 players? How many each one will get?

Think, Discuss and Write

Take a two digit number reverse the digits and get another number. Subtract smaller number from bigger number. Is the difference of those two numbers is always divisible by 9?

Do This

1. In a basket there are '$10a + b$ fruits. ($a \neq 0$ and $a > b$). Among them '$10b + a$ 'fruits are rotten. The remaining fruits distributed to 9 persons equally. How many fruits are left over after equal distribution? How many fruits would each child get ?

15.4 Fun with 3- Digit Numbers

Sudha : Now think of a 3- digit number.

Raju : Ok . (he chooses 157)

Sudha : Reverse the digits and subtract smaller number from the larger number

Raju : Ok.

Sudha : Divide your answer with 9 or 11. I am sure there will be no remainder .

Raju : Yes. How would you know ?

Right ! How does Sudha know ?

We can derive the logic the way we did for the 3-digit number chosen by Raju is $100a+10b+c$.

By reversing the digits she get $100c + 10b + a$.

If ($a > c$) difference between the numbers is $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$$= 99a - 99c = 99(a - c)$$

$$= 9 \times 11 \times (a - c)$$

ఇవి చేయండి

1. రాజు తలచుకున్న సంఖ్యకు బదులుగా క్రింది సంఖ్యలు తీసుకుని ఫలితమును సరి చూడండి.

   (i) 37 (ii) 60 (iii) 18 (iv) 89

2. ఒక క్రికెట్ టీమ్ నందు 11 మంది ఆటగాళ్లు కలరు. క్రికెట్ బోర్డ్ వారికి $10x + y$ టీ షర్ట్స్ కొనుగోలు చేసింది. తిరిగి బోర్డ్ $10y + x$ టీ షర్ట్స్ కొనుగోలు చేసింది. మొత్తం టీషర్ట్స్ అందరికి సమంగా పంచితే, ఎన్ని టీషర్ట్స్ మిగులుతాయి? ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని టీషర్ట్స్ వస్తాయి?

ఆలోచించి, చర్చించి, వ్రాయండి

ఒక రెండంకెల సంఖ్యను తీసుకుని వాటి అంకెలను తారుమారు చేసి వ్రాయండి. వచ్చిన సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసి వేయండి. వచ్చిన ఫలితము ఎల్లప్పుడూ 9తో భాగింపబడునా?

ఇవి చేయండి

1. ఒక బుట్టలో $10a + b$ ($a \neq 0$ మరియు $a > b$) పండ్లు కలవు. అందు $10b + a$ పండ్లు కుళ్లినవి. మిగిలిన పండ్లను 9 మందికి సమానంగా పంచగలమా? ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని పండ్లు వస్తాయి?

15.4 3-అంకెల సంఖ్యతో ఆటతో తమాషా!

సుధ : ఒక మూడు అంకెల సంఖ్య తలచుకో.

రాజు : అలాగే. (అతడు తలచిన సంఖ్య 157)

సుధ : వాటిని అంకెలు తారుమారు చేసి పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్య తీసివేయండి.

రాజు : అలాగే

సుధ : ఈ సంఖ్యను 9 లేక 11తో భాగించినను శేషము '0' వచ్చును.

రాజు : నిజమే. నీకు ఎలా తెలుసు?

సుధకు ఏవిధంగా తెలిసిందో గమనిద్దాము.

రాజు తలచుకున్న 3-అంకెల సంఖ్య $100a + 10b + c$; అనుకుందాం. వాటి అంకెలు తారుమారు చేయగా వచ్చు సంఖ్య $100c + 10b + a$.

($a > c$) అయితే వాటి భేదము $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$$= 99a - 99c = 99(a - c)$$

$$= 9 \times 11 \times (a - c)$$

If (c > a) difference between the numbers is $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)$

$= 99c - 99a = 99(c - a) = 9 \times 11 \times (c - a)$

And if $a = c$, then the difference is '0'

In each case the result is a multiple of 99. Therefore, it is divisible by both 9 and 11, and the quotient is $(a - c)$ or $(c - a)$.

Do This

1. Check in the above activity with the following numbers ?

   (i) 657 (ii) 473 (iii) 167 (iv) 135

Try This

Take a three digit number and make the new numbers by replacing its digits as (ABC, BCA, CAB). Now add these three numbers. For what numbers the sum of these three numbers is divisible?

15.5 Puzzles with missing digits

We can also have some puzzles in which we have alphabet in place of digits in an arithmetic sum and the task is to find out which alphabet represents which digit . let us do some problems of addition and multiplication.

The three conditions for the puzzles.

1. Each letter of the puzzle must stand for just one digit . Each digit must be represented by just one letter.
2. The digit with highest place value of the number can not be zero.
3. The puzzle must have only one answer.

Example 6: Find A in the addition

$$\begin{array}{r} 17A \\ +\ 2A4 \\ \hline 407 \\ \hline \end{array}$$

$(c > a)$ అయితే వాటి భేదము $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)$

$$= 99c - 99a$$

$$= 99(c - a)$$

$$= 9 \times 11 \times (c - a)$$

మరియు $a = c$ అయితే వాటి భేదము '0'

ఇవి 9 మరియు 11 యొక్క గుణిజములు మరియు భాగఫలము $(a - c)$, $(c - a)$.

ఇది చేయండి

1. పై పజిల్ నందు క్రింది అంకెలు తీసుకుని పరిశీలించండి?

   (i) 657 (ii) 473 (iii) 167 (iv) 135

ప్రయత్నించండి

ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను తీసుకుని, వాటి యొక్క అంకెల అమరిక మార్చుతూ (ABC, BCA, CAB అగునట్లు). మూడు సంఖ్యలను తయారు చేయండి. ఆ మూడు సంఖ్యలను కలిపి, వచ్చు ఫలితము ఏయే సంఖ్యలతో భాగింపబడునో పరిశీలించండి.

15.5 లోపించిన అంకెలను కనుగొనుట

కొన్ని పజిల్స్ నందు అంకెలకు బదులుగా అక్షరములు ఇవ్వబడును. ప్రాథమిక పరిక్రియలు, భాజనీయతా నియమాలు, స్థాన విలువలు ఆధారంగా లోపించిన అంకెలను కనుగొనవలెను.

దీనికి మనకు 3 నియమములు కలవు.

1. ప్రతి అక్షరము కేవలం ఒకే ఒక అంకెను సూచిస్తుంది.
2. ఎక్కువ స్థాన విలువలో ఉన్న అంకె '0' కాదు.
3. పజిల్‌కు ఏకైక జవాబు మాత్రమే కలిగియుంటుంది.

ఉదాహరణ 6: క్రింది సంకలనం నుండి A కనుక్కోండి.

$$\begin{array}{r} 17A \\ +\ 2A4 \\ \hline 407 \\ \hline \end{array}$$

Solution : By observation $A + 4 = 7$. or

Hence $A = 3$

$173 + 234 = 407$

$$\begin{array}{r} 100 + 70 \quad + A \\ 200 + 10A + 4 \\ \hline 300 + 70 + 11A + 4 = 407 \\ 11A = 33 \\ A = 3 \end{array}$$

Example 7 : Find M and Y in the addition $Y + Y + Y = MY$

Solution : $Y + Y + Y = MY$

$3Y = 10M + Y$

$2Y = 10M$

$M = \frac{Y}{5}$ (i.e. Y is divisible by 5. Hence Y = 0 or 5)

From above, if $Y = 0$, $Y + Y + Y = 0 + 0 + 0 = 0$, $M = 0$

if $Y = 5$, $Y + Y + Y = 5 + 5 + 5 = 15$, $MY = 15$ Hence $M = 1$, $Y = 5$

Example 8: In A2 – 15 = 5A, A2 and 5A are two digit numbers, then find A

Solution : $2 - 5 = a$ is possible

when $12 - 5 = 7$,

There fore $A = 7$

$(10A + 2) - (10 + 5) = 50 + A$

$10A - 13 = 50 + A$

$9A = 63$

$A = 7$

Example 9: In 5A1 – 23 A = 325, 5A1 and 23A are three digit numbers, then find A

Solution : $1 - A = 5$? or

i.e. $11 - A = 5$,

There fore $A = 6$

$(500 + 10A + 1) - (200 + 30 + A) = 325$

$501 - 230 + 10A - A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 - 271 + 9A = 325 - 271$

$9A = 54$

$A = 6$

సాధన: పరిశీలించగా $A + 4 = 7.$ లేదా

కావున $A = 3$

$173 + 234 = 407$

$$\begin{array}{r} 100 + 70 + A \\ 200 + 10A + 4 \\ \hline 300 + 70 + 11A + 4 = 407 \\ 11A = 33 \\ A = 3 \end{array}$$

ఉదాహరణ 7: సంకలనములో గల M మరియు Y కనుగొనుము. $Y + Y + Y = MY$

సాధన: $Y + Y + Y = MY$

$3Y = 10M + Y$

$2Y = 10M$

$M = \frac{Y}{5}$ (Y, 5 చే భాగింపబడును. కావున $Y = 0$ లేదా 5)

పై వాటి నుండి, $Y = 0$ అయితే $Y + Y + Y = 0 + 0 + 0 = 0$, $M = 0$

$Y = 5$ అయితే $Y + Y + Y = 5 + 5 + 5 = 15$, $MY = 15$ కావున $M = 1$, $Y = 5$

ఉదాహరణ 8: $A2 - 15 = 5A$లో A2 మరియు 5A లు రెండంకెల సంఖ్యలు అయిన A విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $2 - 5 = A$ ఎప్పుడు సాధ్యమగుటకు $12 - 5 = 7$, కావలెను

కావున $A = 7$

$(10A + 2) - (10 + 5) = 50 + A$

$10A - 13 = 50 + A$

$9A = 63$

$A = 7$

ఉదాహరణ 8: $5A1 - 23A = 325$ లో 5A1 మరియు 23A లు మూడంకెల సంఖ్యలైన A విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $1 - A = 5$ అగుటకు (లేదా) $11 - A = 5$,

కావున $A = 6$

$(500 + 10A + 1) - (200 + 30 + A) = 325$

$501 - 230 + 10A - A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 - 271 + 9A = 325 - 271$

$9A = 54$

$A = 6$

Example 10: In 1A × A = 9A, 1A and 9A are two digit numbers. Find A

Solution : For A × A = A

From square tables 1, 5, 6

$1\times1=1$,

$5\times5=25$,

$6\times6=36$,

if $A=6$,

$16\times6=96$

or

$$(10+A)A = (90+A)$$

$$10A+A^2 = 90+A$$

$$A^2+9A-90 = 0$$

$$A^2+2.A\left(\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2-90 = 0$$

$$\left(A+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}-90 = 0$$

$$\left(A+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{441}{4}$$

$$A+\frac{9}{2}=\frac{21}{2}$$

$$A=\frac{12}{2}=6$$

Example 11 : In BA × B3 = 57A. BA, B3 are two digit numbers and 57A is a 3 digit number. Then find A and B.

Solution : In this example we estimate the value of digits from multiplication tables by trial and error method. In one's place A × 3 = A. For A = 0 or 5, the unit digit of product becomes same digit.

Hence A is either 0 or 5. If we take 1 at tens place then, to the utmost value of two digit number is 19. The product could be $19\times19=361$. Which is less than 57A. Further if we take 3 at tens place then the atleast value of both two digit number will be $30\times30=900$ which is greater than 57A. So, it will be 2 at tens place. Then $20\times23=460$ or $25\times23=575$.

Hence, the required answer is $25\times23=575$.

Do These

1. If 21358AB is divisible by 99, find the values of A and B
2. Find the value of A and B of the number 4AB8 (A , B are digits) which is divisible by 2,3,4,6,8 and 9.

Example 12: Find the value of the letters in the given multiplication

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 5 \\ \hline CAB \end{array}$$

Solution : If we take B = 0 or 1 or 5 then $0\times5=0$, $1\times5=5$, $5\times5=25$

If B = 0 , then A 0 × 5 = CA0

ఉదాహరణ 10: $1A \times A = 9A$ లో $1A$ మరియు $9A$ లు రెండంకెల సంఖ్యలైన A విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $A \times A = A$

1, 5, 6 వర్గ పట్టికల నుండి

$1 \times 1 = 1$,

$5 \times 5 = 25$,

$6 \times 6 = 36$,

$A = 6$, అయిన

$16 \times 6 = 96$

(లేదా)

$$(10 + A)A = (90 + A)$$

$$10A + A^2 = 90 + A$$

$$A^2 + 9A - 90 = 0$$

$$A^2 + 2.A\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 90 = 0$$

$$\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 90 = 0$$

$$\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$$

$$A + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

$$A = \frac{12}{2} = 6$$

ఉదాహరణ 11: $BA \times B3 = 57A$ లో BA, $B3$ లు రెండంకెల సంఖ్యలు మరియు $57A$ ఒక మూడంకెల సంఖ్య అయిన A, B ల విలువలను కనుగొనుము.

సాధన: ఇటువంటి సమస్యలయందు గుణన పట్టికల నుండి, యత్నదోష పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు.

$A \times 3 = A$ కావాలనంటే $A = 0$ లేదా 5 కావలెను. $(0\times3=0,\ 5\times3=15)$

కావున $A = 0$ లేదా 5 కావలెను. ఇపుడు పదుల స్థానంలో 1 తీసుకున్న, రెండంకెల మిక్కిలి పెద్ద విలువ 19. వాటి లబ్ధము $19\times19 = 361$, $57A$ కన్నా తక్కువ.

పదుల స్థానంలో 3 తీసుకున్న, రెండంకెల మిక్కిలి చిన్న విలువ 30.

వాటి లబ్ధము $30\times30 = 900$, $57A$ కన్నా ఎక్కువ. కావున పదుల స్థానంలో 2 ఉంటుంది.

$20\times23 = 460$ మరియు $25\times23 = 575$.

$\therefore$ కావలసిన సమాధానం $25\times23 = 575$.

ఇవి చేయండి

1. 21358AB, 99 తో భాగించబడిన A, B విలువలు కనుక్కోండి.
2. 4AB8, వరుసగా 2,3,4,6,8, 9 లచే భాగింపబడిన A , B విలువలు కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 12: క్రింది గుణకారంలోని A, B, C విలువలు కనుక్కోండి.

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 5 \\ \hline CAB \end{array}$$

సాధన: $B = 0$ లేదా 1 లేదా 5 తీసుకున్నచో, $0 \times 5 = 0$, $1 \times 5 = 5$, $5 \times 5 = 25$

$B = 0$, అయిన $A0 \times 5 = CA0$

then if we take A = 5 , then 50 × 5 = 250

$\therefore$ CAB = 250.

Try These

1. If YE × ME = TTT find the numerical value of Y + E + M + T

   [Hint : TTT = 100T + 10T + T = T(111) = T(37 × 3)]

2. If cost of 88 articles is A733B . find the value of A and B

Exercise -15. 5

1. Find the missing digits in the following additions.

(a) $\begin{array}{r} 111 \\ +\quad A \\ +\ 77 \\ \hline 197 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 222 \\ +\quad 8 \\ +\ BB \\ \hline 285 \\ \hline \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} AAA \\ +\quad 7 \\ +\ AA \\ \hline 373 \\ \hline \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 2222 \\ +\ 99 \\ +\quad 9 \\ AAA \\ \hline 299A \\ \hline \end{array}$ (e) $\begin{array}{r} BB \\ +\quad 6 \\ AAA \\ \hline 461 \\ \hline \end{array}$

2. Find the value of A in the following

(a) 7A – 16 = A9 (b) 107 – A9 = 1A (c) A36 – 1A4 = 742

3. Find the numerical value of the letters given below-

(a) $\begin{array}{r} \boxed{D}\boxed{E} \\ \times\ 3 \\ \hline \boxed{F}\boxed{D}\boxed{E} \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \boxed{G}\boxed{H} \\ \times\ 6 \\ \hline \boxed{C}\boxed{G}\boxed{H} \\ \hline \end{array}$

4. Replace the letters with appropriate digits

(a) 73K ÷ 8 = 9L (b) 1MN ÷ 3 = MN

5. If ABB × 999 = ABC123 (where A, B, C are digits) find the values of A, B, C.

15.6 Finding of divisibility by taking remainders of place values

In this method we take remainders by dividing the place values, with given number.

If we divide the place values of a number by 7, we get the remainders as

1000 ÷ 7 (Remainder 6. This can be taken as 6 – 7 = –1)

100 ÷ 7 (Remainder 2)

10 ÷ 7 (Remainder 3)

1 ÷ 7 (Remainder 1)

ఇప్పుడు $A = 5, \quad 50 \times 5 = 250$

$\therefore$ CAB = 250 .

ప్రయత్నించండి

1. YE × ME = TTT అయిన Y + E + M + T ల మొత్తం కనుగొనుము.

   [సూచన: TTT = 100T + 10T + T = T(111) = T(37 × 3)]

2. 88 వస్తువుల ఖరీదు A733B అయిన A, B విలువలు కనుక్కోండి.

అభ్యాసం - 15. 5

1. క్రింది సంకలనములో గల లోపించిన అంకెలు అక్షరాలలో ఇవ్వబడినవి. వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $\begin{array}{r} 111 \\ +\quad A \\ +\;77 \\ \hline 197 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 222 \\ +\quad 8 \\ +\;BB \\ \hline 285 \\ \hline \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} AAA \\ +\quad 7 \\ +\;AA \\ \hline 373 \\ \hline \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 2222 \\ +\;\;99 \\ +\quad 9 \\ AAA \\ \hline 299A \\ \hline \end{array}$ (e) $\begin{array}{r} BB \\ +\quad 6 \\ AAA \\ \hline 461 \\ \hline \end{array}$

2. క్రింది వ్యవకలనములలో గల 'A' విలువ కనుక్కోండి.

(a) 7A – 16 = A9   (b) 107 – A9 = 1A   (c) A36 – 1A4 = 742

3. క్రింది గుణకారములలోని అక్షరాల విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\begin{array}{r} \boxed{D}\boxed{E} \\ \times\;3 \\ \hline \boxed{F}\boxed{D}\boxed{E} \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \boxed{G}\boxed{H} \\ \times\;6 \\ \hline \boxed{C}\boxed{G}\boxed{H} \\ \hline \end{array}$

4. క్రింది భాగహారములలో లోపించిన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) 73K ÷ 8 = 9L   (b) 1MN ÷ 3 = MN

5. ABB × 999 = ABC123 (A, B, C లు అంకెలు) అయిన A, B, C ల విలువలు కనుక్కోండి.

15.6 స్థాన విలువల శేషముల ఆధారంగా భాజనీయతా నియమాలు

ఈ పద్ధతిలో స్థాన విలువలను, ఇచ్చిన అంకెతో భాగించుట ద్వారా వచ్చు శేషములను తీసుకొంటాము.

ఒక సంఖ్య యొక్క స్థాన విలువలను 7తో భాగించిన వచ్చు శేషములు

వేల స్థానము	1000 ÷ 7 (శేషము 6. దానిని 6 – 7 = –1గా తీసుకొనవచ్చు)
వందల స్థానము	100 ÷ 7 (శేషము 2)
పదుల స్థానము	10 ÷ 7 (శేషము 3)
ఒకట్ల స్థానము	1 ÷ 7 (శేషము 1)

Place value	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Remainders divide by 7	3	2	1	-2	-3	-1	2	3	1

Suppose to check whether 562499 is divisible by 7 or not.

Digits	5	6	2	4	9	9
Place values	5×10^5	6×10^4	2×10^3	4×10^2	9×10^1	9×10^0
Remainders divided by 7	$5\times(-2)$	$6\times(-3)$	$2\times(-1)$	4×2	9×3	9×1

Sum of product of face values and remainders of place values is

$-10 - 18 - 2 + 8 + 27 + 9 = -30 + 44 = 14$(divisible by 7)

14 is divisible by 7, hence 562499 is divisible by 7.

Do These

1. By using the above method check whether 7810364 is divisible by 4 or not.
2. By using the above method check whether 963451 is divisible by 6 or not.

15.7 Some more puzzles on divisibility rules

Example 13: Is every even number of palindrome is divisible by '11' ?

Solution: Let us take an even number of palindrome i.e. 12344321. The sum of digits in odd places is 1 + 3 + 4 + 2. Sum of digits in even places 2 + 4 + 3 + 1. Their difference is 0. Hence, it is divisible by 11.

Example 14: Is 10^{1000}-1 divisible by both 9 and 11?

Solution: Let us write 10^{1000}-1 as 999 .... 999 (1000 times). The digits in all places are 9. Hence, it is divisible by 9. And there are 1000 digits. Sum of digits in odd places and sum digits even places are same. Their difference is 0. Hence, it is divisible by 11.

Think, Discuss and Write

1. Can we conclude 10^{2n}-1 is divisible by both 9 and 11? Explain.
2. Is 10^{2n+1}-1 is divisible by 11 or not. Explain.

స్థాన విలువ	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
7 తో భాగించిన వచ్చు శేషము	3	2	1	-2	-3	-1	2	3	1

562499 అనే సంఖ్య 7 తో భాగింపబడునో లేదో తెలుసుకుందాం.

అంకెలు	5	6	2	4	9	9
స్థానవిలువల	5×10^5	6×10^4	2×10^3	4×10^2	9×10^1	9×10^0
7 తో భాగించగా వచ్చు శేషములు	$5\times(-2)$	$6\times(-3)$	$2\times(-1)$	4×2	9×3	9×1

స్థాన విలువల శేషములను, ఆ సంఖ్య అంకెలతో గుణించగా వచ్చు లబ్ధముల మొత్తము

$$-10-18-2+8+27+9=-30+44=14$$

14, 7 చే భాగింపబడును, కావున 562499 అను సంఖ్య 7చే భాగింపబడును.

ఇవి చేయండి

1. పై పద్ధతి ఉపయోగించి, 7810364 సంఖ్య, 4 చే భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.
2. పై పద్ధతి ఉపయోగించి 963451, 6 తో భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

15.7 భాజనీయతా సూత్రంపై మరికొన్ని సమస్యలు

ఉదాహరణ 13: సరి పాలిండ్రోమ్ సంఖ్యలు, 11 చే భాగింపబడునో లేదో సరిచూడండి.

సాధన: 12344321 వంటి సంఖ్యలను సరి పాలిండ్రోమ్ సంఖ్యలు అంటారు. ఈ సంఖ్యలో గల బేసి స్థానాలలోని అంకెల మొత్తం = 1 + 3 + 4 + 2. సరిస్థానాలలోని అంకెల మొత్తం = 2+4+3+1. వీటి భేదం 0 కావున సరి పాలిండ్రోమ్ సంఖ్యలు 11చే భాగింపబడును..

ఉదాహరణ 14: 10^{1000}-1 అను సంఖ్య 9 మరియు 11చే భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

సాధన: 10^{1000}-1 ను 999...... 999 (1000 సార్లు) గా వ్రాయవచ్చు. ఇందులో అంకెలన్నీ 9 కావున ఈ సంఖ్య '9'చే భాగింపబడును. మరియు ఇందు 1000 అంకెలు కలవు. కావున, దీనిలోని సరి స్థానములలోని అంకెల మొత్తం, బేసి స్థానములలోని అంకెల మొత్తం సమానం. కావున ఈ సంఖ్య 11 తో కూడా భాగింపబడును.

ఆలోచించి, చర్చించి వ్రాయండి

1. 10^{2n}-1, 9 మరియు 11 చే భాగింపబడునని చెప్పగలమా? వివరించండి.
2. 10^{2n+1}-1, 11 చే భాగింపబడునో లేదో పరిశీలించండి.

Example 15: Take any two digit number three times to make a 6-digit number. Is it divisible by 3 ?

Solution: Let us take a 2-digit number 47. Write three times to make 6-digit number i.e. 474747.

474747 can be written as 47(10101). 10101 is divisible by 3. Because sum of its digit is 1 + 1 + 1 = 3. Hence 474747 is divisible by 3.

Example 16: Take any three digit number and write it two times to make a 6-digit number. Verify whether it is divisible by both 7 and 11.

Solution: Let us take a 3-digit number 345. Write it two times to get 6-digit number i.e. 345345.

345345 can be written as $345345 = 345000 + 345 = 345\ (1000 + 1)$

$= 345\ (1001)$

$= 345\ (7 \times 11 \times 13)$

Hence 345345 is divisible by 7, 11 and 13 also.

Try This

1. Check whether 456456456456 is divisible by 7, 11 and 13?

Example 17: Take a three digit number in which all digits are same. Divide the number with reduced number. What do you notice?

Solution: Consider 444 as a 3-digit number. Reduced number of 444 is 4 + 4 + 4 = 12

Now divide 444 by 12, $444 \div 12 = 37$. Do the process with 333 , 666,etc.

You will be supposed the quotient is 37 for all the numbers .

Example 18: Is $2^3 + 3^3$ is divisible by (2 + 3) or not?

Solution: We know that $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$.

So $2^3 + 3^3 = (2 + 3)\ (2^2 - 2 \times 3 + 3^2)$. It is multiple of (2 + 3).

Hence $2^3 + 3^3$ is divisible by (2 + 3).

Think, Discuss and Write

1. Verify $a^5 + b^5$ is divisible by (a + b) by taking different natural numbers for ‘a’ and ‘b’?
2. Can we conclude $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$ is divisible by (a + b)?

ఉదాహరణ 15: ఏదైనా ఒక రెండంకెల సంఖ్యను 3 సార్లు వ్రాయగా వచ్చు 6 అంకెలు ఆ సంఖ్య 3 తో భాగింపబడునో లేదో చూడండి.

సాధన: ఒక రెండంకెల సంఖ్య 47 అనుకొనుము.

దానిని మూడు సార్లు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య 474747.

474747 ను 47(10101)గా వ్రాయవచ్చు. 10101, 3 చే భాగింపబడును. ఇందు గల అంకెల మొత్తం $1 + 1 + 1 = 3$. కావున 474747, 3 చే భాగింపబడును.

ఉదాహరణ 16: ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను 2 సార్లు వరుసగా వ్రాసి 6 అంకెల సంఖ్యను ఏర్పరచండి. ఆ సంఖ్య 7 మరియు 11తో భాగింపబడుతుందో లేదో సరిచూడండి.

సాధన: ఏదైనా ఒక 3-అంకెల సంఖ్య 345 తీసుకొనుము. దానిని రెండు సార్లు వ్రాయగా వచ్చు సంఖ్య 345345.

$345345 = 345000 + 345 \quad = 345\,(1000 + 1)$ >± çy•jáTe#áTÌ.

$= 345\,(1001)$

$= 345\,(7 \times 11 \times 13)$

కావున 345345 అను సంఖ్య 7, 11 మరియు 13 తో భాగింపబడును.

ప్రయత్నించండి

1. 456456456456 అనే సంఖ్య 7, 11 మరియు 13 తో కూడా భాగింపబడునో లేదో ప్రయత్నించి చూడండి.

ఉదాహరణ 17: ఒకే అంకె గల 3– అంకెల సంఖ్యను తీసుకొనుము. దానిని దానని యొక్క సంక్షిప్త సంఖ్య (reduced number) తో భాగించండి. ఏమి గమనించారు?

సాధన: ఒకే అంకె గల 3-అంకెల సంఖ్య 444 తీసుకొనుము.

దాని యొక్క సంక్షిప్త సంఖ్య $4 + 4 + 4 = 12$

$444 \div 12 = 37$. మరికొన్ని సంఖ్యలు 333, 666 ప్రయత్నించండి.

అన్ని సంఖ్యల యొక్క భాగఫలము 37 వచ్చును.

ఉదాహరణ 18: $2^3 + 3^3$ అనే సంఖ్య $(2 + 3)$ చే భాగింపబడుతుందో లేదో పరిశీలించండి.

సాధన: $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$ అని మనకు తెలియును.

కావున $2^3 + 3^3 = (2 + 3)\,(2^2 - 2 \times 3 + 3^2)$ గా వ్రాయవచ్చు

ఇది $(2 + 3)$ యొక్క గుణిజము.

$2^3 + 3^3$, $(2 + 3)$ చే భాగింపబడును.

ఆలోచించి, చర్చించి, వ్రాయండి

1. $a^5 + b^5$, $(a + b)$ తో భాగింపబడుతుందో లేదో a, b విలువలు ఏవైనా సహజ సంఖ్యలుగా తీసుకుని ప్రయత్నించండి.
2. $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$, $(a + b)$ తో భాగింపబడునని చెప్పగలమా?

15.8 Finding Sum of Consecutive numbers

We can find the sum of consecutive numbers from 1 to 100 without adding.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) \ldots\ldots (50 + 51)$

$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots$ 50 pairs are there. $= 50 \times 101 = 5050$

Sum of the first 100 natural numbers $= \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050.$

The sum of the first 'n' natural numbers $= \dfrac{n(n+1)}{2}$

Example 19: Find the sum of integers which are divisible by 5 from 50 to 85.

Solution: Sum of integers which are divisible by 5 from 50 to 85 = (Sum of integers which are divisble by 5 from 1 to 85) – (Sum of integers which are divisble by 5 from 1 to 49)

$$= (5 + 10 + \ldots + 85) - (5 + 10 + \ldots + 45)$$

$$= 5(1 + 2 + \ldots + 17) - 5(1 + 2 + \ldots + 9)$$

$$= 5 \times \left(\frac{17 \times \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}\right) - 5 \times \left(\frac{9 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 5 \times 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5$$

$$= 5 \times 9 \times (17 - 5)$$

$$= 5 \times 9 \times 12 = 540$$

Example 20: Find the sum of integers from 1 to 100 which are divisible by 2 or 3.

Solution: The numbers which are divisible by 2 from 1 to 100 are 2, 4, ... 98, 100.

The numbers which are divisible by 3 from 1 to 100 are 3, 6, ... 96, 99.

In the above series some numbers are repeated twice. Those are multiple of 6 i.e. LCM of 2 and 3.

Sum of integers which are divisible by 2 or 3 from 1 to 100 = (Sum of integers which are divisble by 2 from 1 to 100) + (Sum of integers which are divisble by 3 from 1 to 100) – (Sum of integers which are divisble by 6 from 1 to 100)

$$= (2 + 4 + \ldots + 100) + (3 + 6 + \ldots + 99) - (6 + 12 + \ldots 96)$$

$$= 2(1 + 2 + \ldots + 50) + 3(1 + 2 + \ldots + 33) - 6(1 + 2 + \ldots + 16)$$

$$= 2 \times \left(\frac{50 \times (50+1)}{2}\right) + 3 \times \left(\frac{33 \times (33+1)}{2}\right) - 6 \times \left(\frac{16 \times (16+1)}{2}\right)$$

15.8 వరుస సంఖ్యల మొత్తము

మనము 1 నుండి 100 వరకు గల వరుస సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కలుపకుండా కనుగొనగలము.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) \ldots\ldots\ldots(50 + 51)$

$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 50 గా వ్రాయవచ్చు $= 50 \times 101 = 5050$

100 సంఖ్యల మొత్తం కావలెనన్న $= \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050.$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం $= \dfrac{n(n+2)}{2}$

ఉదాహరణ 19: 50 నుండి 85 వరకు గల 5 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము.

సాధన: 50 నుండి 85 వరకు గల 5 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తము = (1 నుండి 85 వరకు గల 5చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తము) – (1 నుండి 49 వరకు కల 5 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తము)

$$= (5 + 10 + \ldots. + 85) - (5 + 10 + \ldots. + 45)$$
$$= 5(1 + 2 + \ldots. + 17) - 5(1 + 2 + \ldots. + 9)$$
$$= 5 \times \left(\frac{17 \times \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}} \right) - 5 \times \left(\frac{9 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}} \right)$$
$$= 5 \times 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5$$
$$= 5 \times 9 \times (17 - 5)$$
$$= 5 \times 9 \times 12 = 540$$

ఉదాహరణ 20: 1 నుండి 100 వరకు గల 2 లేక 3 చే భాగింపబడే సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము.

సాధన: 1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలతో 2 చే భాగింపబడే సంఖ్యలు 2, 4, ... 98, 100.

1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలలో 3 చే భాగింపబడే సంఖ్యలు 3, 6, ... 96, 99.

ఇందులో గల సంఖ్యలలో కొన్ని సంఖ్యలు రెండుసార్లు వచ్చినవి. అవి 2 మరియు 3 యొక్క క.సా.గు అయిన 6 యొక్క గుణిజాలు.

1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలలో 2 లేదా 3 చే భాగింపబడు సంఖ్యలు = (1 నుండి 100 వరకు గల 2చే భాగింపబడు సంఖ్యలు) + (1 నుండి 100 వరకు గల 3చే భాగింపబడు సంఖ్యలు) – (1 నుండి 100 వరకు గల 6 చే భాగింపబడు సంఖ్యలు).

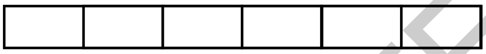
$$= (2 + 4 + \ldots. + 100) + (3 + 6 + \ldots. + 99) - (6 + 12 + \ldots 96)$$
$$= 2(1 + 2 + \ldots. + 50) + 3(1 + 2 + \ldots +33) - 6(1 + 2 + \ldots. + 16)$$
$$= 2 \times \left(\frac{50 \times (50+1)}{2} \right) + 3 \times \left(\frac{33 \times (33+1)}{2} \right) - 6 \times \left(\frac{16 \times (16+1)}{2} \right)$$

$$= \cancel{2} \times \left(\frac{50 \times 51}{\cancel{2}}\right) + 3 \times \left(\frac{33 \times \cancel{34}^{17}}{\cancel{2}}\right) - 6 \times \left(\frac{^{8}\cancel{16} \times 17}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2550 + 1683 - 816$$

$$= 4233 - 816 = 3417$$

Exercise – 15.6

1. Find the sum of integers which are divisible by 5 from 1 to 100.
2. Find the sum of integers which are divisible by 2 from 11 to 50.
3. Find the sum of integers which are divisible by 2 and 3 from 1 to 50.
4. $(n^3 - n)$ is divisible by 3. Explain the reason.
5. Sum of 'n' odd number of consecutive numbers is divisible by 'n'. Explain the reason.
6. Is $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$ divisible by 5? Explain.
7. 

   Find the number of rectangles of the given figure ?
8. Rahul's father wants to deposit some amount of money every year on the day of Rahul's birthday. On his 1st birth day ₹ 100, on his 2nd birth day ₹ 300, on his 3rd birth day ₹ 600, on his 4th birthday ₹ 1000 and so on. What is the amount deposited by his father on Rahul's 15th birthday.
9. Find the sum of integers from 1 to 100 which are divisible by 2 or 5.
10. Find the sum of integers from 11 to 1000 which are divisible by 3.

What we have discussed

1. Writing and understanding a 3-digit number in expanded form $100a + 10b + c$. Where a, b, c digits $a \neq 0$, b, c is from 0 to 9
2. Deducing the divisibility test rules of 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 for two or three digit number expressed in the general form.
3. Logic behind the divisibility laws of 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, 11.
4. Number puzzles and games.

$$= \cancel{2} \times \left(\frac{50 \times 51}{\cancel{2}}\right) + 3 \times \left(\frac{33 \times \cancel{34}^{17}}{\cancel{2}}\right) - 6 \times \left(\frac{{}^{8}\cancel{16} \times 17}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2550 + 1683 - 816$$

$$= 4233 - 816 = 3417$$

అభ్యాసం - 15.6

1. 1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలలో 5చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
2. 11 నుండి 50 వరకు గల సంఖ్యలలో 2 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
3. 1 నుండి 50 వరకు గల సంఖ్యలలో 2 మరియు 3 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
4. $(n^3 - n)$, 3 చే భాగింపబడును. వివరించండి.
5. 'n' వరుస సంఖ్యల మొత్తం (n బేసి సంఖ్య), n చే భాగింపబడును. కారణం వివరించండి.
6. $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$, 5 చే భాగింపబడుతుందా? వివరించండి.
7. 

   పై బొమ్మలో ఎన్ని దీర్ఘచతురస్రాలున్నాయి?
8. రాహుల్ తండ్రి, రాహుల్ పుట్టినరోజు నాడు ప్రతి సంవత్సరం కొంత సొమ్ము బ్యాంకులో జమ చేయుచున్నాడు. అతని మొదటి పుట్టిన రోజున రూ.100, రెండవ పుట్టిన రోజున రూ.300, మూడవ పుట్టిన రోజున రూ.600, నాల్గవ పుట్టిన రోజున రూ.1000. అయితే అతడి 15వ పుట్టిన రోజున ఎంత జమ చేసి ఉంటాడు?
9. 1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలలో 2 లేక 5 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము.
10. 11 నుండి 1000 వరకు గల సంఖ్యలలో 3 చే భాగింపబడు సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. అంకెలను విస్తరణ రూపంలో వ్రాయుట. ఒక 3- అంకెల సంఖ్య

   $100a + 10b + c$ లు అంకెలు $a \neq 0$ b, c లు 0 నుండి 9 వరకు గల అంకెలు.
2. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 యొక్క భాజనీయతా నియమములు.
3. 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, 11 భాజనీయతా నియమములకు కారణములు.
4. అంకెల ప్రహేళికలు మరియు ఆటలు.

J1N8N1

Answers

8. Exploring Geometrical Figures

Excercise - 8.1

2. (a) Yes; any two congruent figures are always similar.
   (b) Yes; the similarity remains.
3. AB = NM; $\angle A = \angle N$
   BC = MO; $\angle B = \angle M$
   CA = ON; $\angle C = \angle O$
4. (i) True (ii) False (iii) True (iv) False
   (v) True
7. 1.5 m, 3m, 4.5m, 6m, 7.5m, 9m
8. 9m

9. Area of Plane Figures

Exercise 9.1

2. (i) 20 sqcm (ii) 424 sqcm (iii) 384 sqcm
3. 55 sqcm. 4. 96 sqcm 5. (i) 10700 sqm (ii) 10650 sqm
6. (ii) x = 75 cm, 45 cm
7. ₹ 4050
8. 337.5 sqcm.

Exercise - 9.2

1. 361 sq cm 2. 616 sqcm.
3. (i) 693 sqcm. (ii) 259.87 cm^2
4. 1386 cm^2 5. 308 cm^2 6. 10.5 cm^2 7. 7.8729 cm^2
8. (i) $\frac{6}{7}a^2$ (ii) 123.42 cm^2 9. 6.125 cm^2 10. 346.5 m^2

జవాబులు

8. జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ

అభ్యాసం - 8.1

2. (a) అవును; రెండు సర్వసమాన పటములు ఎల్లప్పుడూ సరూపములు.

   (b) అవును; సరూపకత స్థిరము

3. AB = NM; $\angle A = \angle N$

   BC = MO; $\angle B = \angle M$

   CA = ON; $\angle C = \angle O$

4. (i) సత్యం (ii) అసత్యం (iii) సత్యం (iv) అసత్యం

   (v) అసత్యం

7. 1.5 మీ., 3 మీ., 4.5 మీ., 6 మీ., 7.5 మీ., 9 మీ.

8. 9 మీ.

9. సమతల పటముల వైశాల్యములు

అభ్యాసం - 9.1

2. (i) 20 చ.సెం.మీ. (ii) 424 చ.సెం.మీ. (iii) 384 చ.సెం.మీ.
3. 55 చ.సెం.మీ. 4. 96 చ.సెం.మీ. 5. (i) 10700 చ.మీ. (ii) 10650 చ.మీ.
6. (ii) x = 75 సెం.మీ., 45 సెం.మీ.
7. ₹ 4050
8. 337.5 చ.సెం.మీ.

అభ్యాసం - 9.2

1. 361 చ.సెం.మీ. 2. 616 చ.సెం.మీ.
3. (i) 693 చ.సెం.మీ. (ii) 259.87 సెం.మీ^{2}
4. 1386 సెం.మీ^{2} 5. 308 సెం.మీ^{2} 6. 10.5 సెం.మీ^{2} 7. 7.8729 సెం.మీ^{2}
8. (i) $\frac{6}{7}a^2$ (ii) 123.42 సెం.మీ^{2} 9. 6.125 సెం.మీ^{2} 10. 346.5 మీ^{2}

10. Direct and Inverse Proportion

Exercise 10.1

1. ₹ 84, ₹ 168, ₹ 420, ₹ 546
2. 32, 56, 96, 160
3. ₹ 12,600/-
4. ₹ 2,100/-
5. 21 cm
6. 6m, 8.75 m
7. 168 km
8. 5000
9. 25 km, $\frac{10}{3}$ hr.
10. $\frac{9}{20}$ cm.
11. 2 : 1

Exercise - 10.2

1. (ii)
2. 120, 60, 80, 80

Exercise - 10. 3

1. 4 kg
2. 50 days
3. 48
4. 50 minutes
5. 4
6. 15
7. 24
8. 60 min
9. 40%
10. $\frac{(x+1)^2}{(x+2)}$

Exercise - 10. 4

1. ₹540
2. 2 days
3. 16 days
4. 325 men
5. 36 days

11. Algebraic Expressions

Excercise - 11.1

1. (i) 42K (ii) $6lm$ (iii) $15t^4$ (iv) 18mn
   (v) $10p^3$
3. (ii) $60a^2c$ (iii) $24m^3n$ (iv) $36\,k^3l^3$ (v) $24p^2q^2r^2$
4. i) x^5y^3 ii) a^6b^6 iii) $k^3l^3m^3$ iv) $p^2q^2r^2$
   v) $72a^2bcd$
5. $x^2y^2z^2$
6. x^3y

Exercise - 11.2

1. (ii) $3k^2l + 3klm + 3kmn$ (iii) $a^2b^2 + ab^4 + ab^2c^3$
   (iv) $x^2yz - 2xy^2z + 3xyz^2$ (v) $a^4b^3c^3 + a^2b^4c^3d - a^3b^3c^2d^2$
2. $12y^2 + 16y$
3. i) -2 ii) 0
4. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
5. $x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - yz + zx - xr + yr$

10. అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు

అభ్యాసం - 10.1

1. ₹ 84, ₹ 168, ₹ 420, ₹ 546
2. 32, 56, 96, 160
3. ₹ 12,600/-
4. ₹ 2,100/-
5. 21 సెం.మీ.
6. 6మీ, 8.75 మీ
7. 168 కి.మీ.
8. 5000
9. 25 కి.మీ., $\frac{10}{3}$ గం.
10. $\frac{9}{20}$ సెం.మీ.
11. 2 : 1

అభ్యాసం - 10.2

1. (ii)
2. 120, 60, 80, 80

అభ్యాసం - 10. 3

1. 4 కిలోలు
2. 50 రోజులు
3. 48
4. 50 నిమిషాలు
5. 4
6. 15
7. 24
8. 60 ని.
9. 40%
10. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$ రోజులలో

అభ్యాసం - 10. 4

1. ₹ 540
2. 2 రోజులు
3. 16 రోజులు
4. 325 మంది
5. 36 రోజులు

11. బీజీయ సమాసాలు

అభ్యాసం - 11.1

1. (i) 42K (ii) $6lm$ (iii) $15t^4$ (iv) 18mn (v) $10p^3$

3. ii) $60a^2c$
   iii) $24m^3n$
   iv) $36k^3l^3$
   v) $24p^2q^2r^2$

4. i) x^5y^3 ii) a^6b^6 iii) $k^3l^3m^3$ iv) $p^2q^2r^2$
   v) $72a^2bcd$

5. $x^2y^2z^2$

6. x^3y

అభ్యాసం - 11.2

1. (ii) $3k^2l+3klm+3kmn$ (iii) $a^2b^2+ab^4+ab^2c^3$
   (iv) $x^2yz-2xy^2z+3xyz^2$ (v) $a^4b^3c^3+a^2b^4c^3d-a^3b^3c^2d^2$
2. $12y^2+16y$
3. i) -2 ii) 0
4. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
5. $x^2-y^2-z^2+2xy-yz+zx-xr+yr$

6. $-7x^2 + 8xy$

7. $-3k^2 + 21kl - 21km$

8. $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b + a^2c - c^2a$

Excercise - 11.3

1. (i) $6a^2 - 19a - 36$ (ii) $2x^2 - 5xy + 2y^2$ (iii) $k^2l - kl^2 - l^2m + klm$
   (iv) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$

2. (i) $2x^2 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2 - 5y^2$
   (ii) $3a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 - 3a^2bc + 3ab^2c$
   (iii) $klmn - lm^2n - k^2l^2 + kl^2m + k^2lm - klm^2$
   (iv) $p^4 - 5p^3q + 6p^3r + pq^3 + 6q^3r - 5q^4$

3. i) $10x^2 - 14xy$ ii) $m^3 + n^3$ iii) $-19a^2 - 3b^2 + 3c^2 - 34ab + 16ac$
   iv) $p^2q^2 - q^2r^2 + p^2qr + pqr^2 - p^2q - pq^2 - p^2r + pr^2$

4. 8

Exercise - 11.4

1. i) $9k^2 + 24kl + 16l^2$ ii) $a^2x^4 + 2abx^2y^2 + b^2y^4$
   iii) $49d^2 - 126de + 81e^2$ iv) $m^4 - n^4$
   v) $9t^2 - 81s^2$ vi) $k^2l^2 - m^2n^2$
   vii) $36x^2 + 66x + 30$ viii) $4b^2 - 2ab + 2bc - ca$

2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401
   v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024

12. Factorisation

Excercise - 12.1

1. (i) 1, 2, 4, 8 (ii) 1, 3, a, 3a (iii) 1, 7, x, y, $7x$, $7y$, xy, $7xy$ (iv) 1, 2, m, m^2, 2m, $2m^2$
   (v) 1, 5 (vi) 1, 2, x, $2x$ (vii) 1, 2, 3, 6, x, y, $2x$, $3x$, $2y$, $3y$, $6x$, 6y, xy, $2xy$, $3xy$, $6xy$

2. i) $5x(x - 5y)$ (ii) $3a(3a - 2x)$ (iii) $7p(p + 7q)$
   iv) $12a^2b(3 - 5c)$ (v) $3abc(a + 2b + 3c)$
   vi) $p(4p + 5q - 6q^2)$ (vii) $t(u + at)$

3. (i) $(3x - 4b)(a - 2y)$
   (ii) $(x^2 + 5)(x + 2)$ (iii) $(m + 4)(m - n)$
   (iv) $(a^2 - b)(a - b^2)$ (v) $(p - 1)(pq - r^2)$

6. $-7x^2 + 8xy$

7. $-3k^2 + 21kl - 21km$

8. $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b + a^2c - c^2a$

అభ్యాసం - 11.3

1. (i) $6a^2 - 19a - 36$ (ii) $2x^2 - 5xy + 2y^2$ (iii) $k^2l - kl^2 - l^2m + klm$
   (iv) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$

2. (i) $2x^2 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2 - 5y^2$
   (ii) $3a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 - 3a^2bc + 3ab^2c$
   (iii) $klmn - lm^2n - k^2l^2 + kl^2m + k^2lm - klm^2$
   (iv) $p^4 - 5p^3q + 6p^3r + pq^3 + 6q^3r - 5q^4$

3. i) $10x^2 - 14xy$ ii) $m^3 + n^3$ iii) $19a^2 - 34ab + 16ac - 3b^2 + 3c^2$
   iv) $p^2q^2 - q^2r^2 + p^2qr + pqr^2 - p^2q - pq^2 - p^2r + pr^2$ 4. $(k+1)^3$, $k \in N$

అభ్యాసం - 11.4

1. i) $9k^2 + 24kl + 16l^2$ ii) $a^2x^4 + 2abx^2y^2 + b^2y^4$
   iii) $49d^2 - 126de + 81e^2$ iv) $m^4 - n^4$
   v) $9t^2 - 81s^2$ vi) $k^2l^2 - m^2n^2$
   vii) $36x^2 + 66x + 30$ viii) $4b^2 - 2ab + 2bc - ca$

2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401
   v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024

12. కారణాంక విభజన

అభ్యాసం - 12.1

1. (i) 1, 2, 4, 8 (ii) 1, 3, a, 3a (iii) 1, 7, x, y, 7x, 7y, xy, 7xy
   (iv) 1, 2, m, m^2, 2m, $2m^2$ (v) 1, 5 (vi) 1, 2, x, 2x
   (vii) 1, 2, 3, 6, x, y, 2x, 3x, 2y, 3y, 6x, 6y, xy, 2xy, 3xy, 6xy

2. i) $5x(x - 5y)$ (ii) $3a(3a - 2x)$ (iii) $7p(p + 7q)$
   iv) $12a^2b(3 - 5c)$ (v) $3abc(a + 2b + 3c)$
   vi) $p(4p + 5q - 6q^2)$ (vii) $t(u + at)$

3. (i) $(3x - 4b)(a - 2y)$
   (ii) $(x^2 + 5)(x + 2)$ (iii) $(m + 4)(m - n)$
   (iv) $(a^2 - b)(a - b^2)$ (v) $(p - 1)(pq - r^2)$

Excercise - 12.2

1. (i) $(a+5)^2$ (ii) $(l-8)^2$ (iii) $(6x+8y)^2$ (iv) $(5x-3y)^2$
   (v) $(5m-4n)^2$ (vi) $(9x-11y)^2$ (vii) $(x-y)^2$ (viii) $(l^2+2m^2)^2$
2. (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(7x+5y)(7x-5y)$ (iii) $(m+11)(m-11)$
   (iv) $(9+8x)(9-8x)$ (v) $(xy+8)(xy-8)$ (vi) $6(x+3)(x-3)$
   (vii) $(x+9)(x-9)$ (viii) $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$
   (ix) $x^2(9x+11)(9x-11)$ (x) $(p-q+r)(p-q-r)$
   (xi) $4xy$
3. (i) $x(lx+m)$ (ii) $7(y^2+5z^2)$ (iii) $3x^2(x^2+2xy+3z)$
   (vi) $(x-a)(x-b)$ (v) $(3a+4b)(x-2y)$ (vi) $(m+1)(n+1)$
   (vii) $(b+2c)(6a-b)$ (viii) $(pq-r^2)(p-1)$ (ix) $(y+z)(x-5)$
4. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ (ii) $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$
   (iii) $(l+m-n)(l-m+n)$ (iv) $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$
   (v) $(x^2-y^2)^2$ (vi) $(5a-b)(5b-a)$
5. (i) $(a+6)(a+4)$ (ii) $(x+6)(x+3)$ (iii) $(p-7)(p-3)$
   (iv) $(x-8)(x+4)$

Exercise - 12.3

1. (i) $8a^2$ (ii) $\frac{1}{3}x$ (iii) $9a^2b^2c^2$ (iv) $\frac{1}{5}yz^2$
   (v) $-6l^2m$
2. (i) $3x-2$ (ii) $5a^2-7b^2$ (iii) $x(5x-3)$ (iv) $l(2l^2-3l+4)$
   (v) $5abc(a-b+c)$ (vi) $(2q^2+3pq-p^2)$ (vii) $\frac{4}{3}(abc+2bc)$
3. (i) $7x-9$ (ii) $12x$ (iii) $\frac{77}{3}ab$ (iv) $\frac{27}{4}(m+n)$
   (v) $4(x^2+7x+10)$ (vi) $(a+1)(a+2)$
4. (i) $x+4$ (ii) $x-2$ (iii) $p+4$ (iv) $5a(a-5)$
   (v) $10m(p-q)$ (vi) $4z(4z+3)$

అభ్యాసం - 12.2

1. (i) $(a+5)^2$ (ii) $(l-8)^2$ (iii) $(6x+8y)^2$ (iv) $(5x-3y)^2$
   (v) $(5m-4n)^2$ (vi) $(9x-11y)^2$ (vii) $(x-y)^2$ (viii) $(l^2+2m^2)^2$
2. (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(7x+5y)(7x-5y)$ (iii) $(m+11)(m-11)$
   (iv) $(9+8x)(9-8x)$ (v) $(xy+8)(xy-8)$ (vi) $6(x+3)(x-3)$
   (vii) $(x+9)(x-9)$ (viii) $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$
   (ix) $x^2(9x+11)(9x-11)$ (x) $(p-q+r)(p-q-r)$
   (xi) $4xy$
3. (i) $x(lx+m)$ (ii) $7(y^2+5z^2)$ (iii) $3x^2(x^2+2xy+3z)$
   (vi) $(x-a)(x-b)$ (v) $(3a+4b)(x-2y)$ (vi) $(m+1)(n+1)$
   (vii) $(b+2c)(6a-b)$ (viii) $(pq-r^2)(p-1)$ (ix) $(y+z)(x-5)$
4. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ (ii) $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$
   (iii) $(l+m-n)(l-m+n)$ (iv) $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$
   (v) $(x^2-y^2)^2$ (vi) $(5a-b)(5b-a)$
5. (i) $(a+6)(a+4)$ (ii) $(x+6)(x+3)$ (iii) $(p-7)(p-3)$
   (iv) $(x-8)(x+4)$
6. 0, 12

అభ్యాసం - 12.3

1. (i) $8a^2$ (ii) $\frac{1}{3}x$ (iii) $9a^2b^2c^2$ (iv) $\frac{1}{5}yz^2$
   (v) $-6l^2m$
2. (i) $3x-2$ (ii) $5a^2-7b^2$ (iii) $x(5x-3)$ (iv) $l(2l^2-3l+4)$
   (v) $5abc(a-b+c)$ (vi) $(2q^2+3pq-p^2)$ (vii) $\frac{4}{3}(abc+2bc)$
3. (i) $7x-9$ (ii) $12x$ (iii) $\frac{77}{3}ab$ (iv) $\frac{27}{4}(m+n)$
   (v) $4(x^2+7x+10)$ (vi) $(a+1)(a+2)$
4. (i) $x+4$ (ii) $x-2$ (iii) $p+4$ (iv) $5a(a-5)$
   (v) $10m(p-q)$ (vi) $4z(4z+3)$

Exercise - 12.4

(i) $3(x - 9) = 3x - 27$

(ii) $x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$

(iii) $2x + 3x = 5x$

(iv) $2x + x + 3x = 6x$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = p$

(vi) $3x \times 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 9x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

(ix) $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$

(x) (a) $9 - 21 + 12 = 0$ (b) $9 + 15 + 6 = 30$ (c) $9 - 15 = -6$

(xi) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

(xii) $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

(xiii) $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 + ab - 4b^2$

(xiv) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$

(xv) $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$

(xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 1$

(xvii) $(2x^3 + 1) \div 2x^3 = 1 + \frac{1}{2x^3}$

(xviii) $(3x + 2) \div 3x = 1 + \frac{2}{3x}$

(xix) $(3x + 5) \div 3 = x + \frac{5}{3}$

(xx) $\frac{4x+3}{3} = \frac{4}{3}x + 1$

13. Visualising 3 - D in 2 - D

Exercise - 13.1

3. (i) 5 (ii) 9 (iii) 20 (iv) 14

4. (i) 3 sq.units (ii) 9 sq.units (iii) 16 sq.units (iv) 14 sq.units

Exercise -13.2

1.

F	V	E	V + F = E + 2
5	6	9	Satisfied
7	10	15	Satisfied
8	12	18	,,
6	6	10	,,
5	5	8	,,
8	12	18	,,
8	6	12	,,
6	8	12	,,

అభ్యాసం - 12.4

(i) $3(x-9)=3x-27$

(ii) $x(3x+2)=3x^2+2x$

(iii) $2x+3x=5x$

(iv) $2x+x+3x=6x$

(v) $4p+3p+2p+p-9p=p$

(vi) $3x \times 2y=6xy$

(vii) $(3x)^2+4x+7=9x^2+4x+7$

(viii) $(2x)^2+5x=4x^2+5x$

(ix) $(2a+3)^2=4a^2+12a+9$

(x) (a) 9-21+12=0 (b) 9+15+6=30 (c) $9-15=-6$

(xi) $(x-4)^2=x^2-8x+16$

(xii) $(x+7)^2=x^2+14x+49$

(xiii) $(3a+4b)(a-b)=3a^2+ab-4b^2$

(xiv) $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$

(xv) $(x-4)(x-2)=x^2-6x+8$

(xvi) $5x^3 \div 5x^3=1$

(xvii) $(2x^3+1) \div 2x^3=1+\frac{1}{2x^3}$

(xviii) $(3x+2) \div 3x=1+\frac{2}{3x}$

(xix) $(3x+5) \div 3=x+\frac{5}{3}$

(xx) $\frac{4x+3}{3}=\frac{4}{3}x+1$

13. త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట

అభ్యాసం - 13.1

3. (i) 5 (ii) 9 (iii) 20 (iv) 14

4. (i) 3 చ.యూనిట్లు (ii) 9 చ.యూనిట్లు (iii) 16 చ.యూనిట్లు (iv) 14 చ.యూనిట్లు

అభ్యాసం - 13.2

1.

F	V	E	V + F = E + 2
5	6	9	సరియైనది
7	10	15	సరియైనది
8	12	18	,,
6	6	10	,,
5	5	8	,,
8	12	18	,,
8	6	12	,,
6	8	12	,,

2. All cubes are square prisms, but converse is not true 3. Does not exist 4. Yes

5. $F = 20, \; V = 6, \; E = 12, \; V + F - E = 2$ 6. No

7.

V	E
8	12
5	8
6	9

8. (i) Hexagonal pyramid (ii) Cuboid (iii) Pentagonal pyramid
(iv) Cylinder (v) Cube (vi) Hexagonal pyramid
(vii) Trapezoid

9. (i) a, b, c, d, e (ii) (a) Tetrahedran (b) sphere
(c) Cube/cuboid (d) sphere
(e) Cube is a regular polyhedron where cuboid is not.
(f) Cube, Cuboid (g) Square Pyramid
(iii) (a) Octogonal Prism (b) hexagonal prism
(c) triangular prism (d) Pentagonal pyramid

14. Surface Areas and Volumes

Exercise - 14.1

1. A 2. 10 cm 3. $9m^2$
4. ₹.72

Exercise - 14.2

1. (i) $112.996\ m^3$ (ii) $70m^3$ (iii) $22.5m^3$
2. (i) $13.92m^3$, 13920 liters. (ii) $5.2\ m^3$, 5200 liters
(iii) $36.792\ m^3$, 36792 liters.

3. Volume decreases by $\frac{7}{8}$ times.

4. (i) $262.144\ cm^3$ (ii) $2.197m^3$ (iii) $4.096m^3$
5. 6400 6. $1096\ cm^3$ 7. $110cm^3$
8. 90 9. 27 10. 6 cm.

2. అన్ని సమఘనాలు చతురస్రాకార పట్టకాలే, కానీ విపర్యయం సత్యం కాదు. 3. ఉండదు 4. అవును

5. F = 20, V = 6, E = 12, V + F – E = 2 6. కాదు

7.

V	E
8	12
5	8
6	9

8. (i) షడ్భుజి (ii) దీర్ఘఘనం (iii) పంచభుజి పిరమిడ్
(iv) స్థూపం (v) సమఘనం (vi) షడ్భుజి పిరమిడ్
(vii) ట్రెపీజాయిడ్

9. (i) a, b, c, d, e (ii) (a) చతుర్ముఖి (b) గోళము
(c) ఘనం/ దీర్ఘఘనం (d) గోళము
(e) ఘనము ఒక క్రమతల ఫలకము, కాని దీర్ఘఘనము క్రమ సమతల ఫలకము కాదు.
(f) ఘనము, దీర్ఘఘనము (g) చతుర్భుజి పట్టకము
(iii) (a) అష్టభుజి పట్టకము (b) షడ్భుజాకార పట్టకము
(c) త్రిభుజాకార పట్టకము (d) పంచ భుజాకార పట్టకము

14. ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణము

అభ్యాసం - 14.1

1. A 2. 10 సెం.మీ. 3. 9 చ.మీ.

4. ₹.72

అభ్యాసం - 14.2

1. (i) 112.996 ఘ.మీ. (ii) 70 ఘ.మీ. (iii) 22.5 ఘ.మీ.

2. (i) 13.92 ఘ.మీ, 13920 లీటర్లు (ii) 5.2 ఘ.మీ., 5200 లీటర్లు
(iii) 36.792 ఘ.మీ., 36792 లీటర్లు

3. దాని ఘనపరిమాణం $\frac{7}{8}$ వ వంతు తగ్గును

4. (i) 262.144 ఘ.సెం.మీ. (ii) 2.197 ఘ.మీ. (iii) 4.096 ఘ.మీ.

5. 6400 6. 1096 ఘ.సెం.మీ. 7. 110 ఘ.సెం.మీ.

8. 90 9. 27 10. 6 సెం.మీ.

15. Playing with Numbers

Exercise - 15.1

1. Divisible by 2 1200, 836, 780, 4820, 48630

   Divisible by 5 1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630

   Divisible by 10 1200, 780, 4820, 48630

   We observed that, if a number is divisible 10, is also divisible by 2 and 5 also.

2. (a), (b), (c), (e) are divisible by 2
3. (a), (b), (c) (d) are divisible by 5
4. (a), (b), (d), (e) are divisible by 10
5. (a) 6 (b) 8

   (c) 6 (d) 12 (e) 8

6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... 7. 6

Exercise - 15.2

1. A = 2 or 5 or 8 2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 etc.
4. 0 to 9. We observed that divisibility of 2 does not depends upon other than unit's digit.
5. 0 or 5 6. 4 7. 7 8. '0'

Exercise - 15.3

1. (a), (d) are divisible by 6
2. (a), (b), (c), (d) are divisible by 4
3. (a), (c), (d) are divisible by 8
4. (a), (b), (c), (d) are divisible by 7
5. (a), (b), (c), (d), (e), (h), (i), (j) are divisible by 11
6. All multiples of 8 are multiples of 4
7. A = 1, B = 9, A + B = 10

15. సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం

అభ్యాసం - 15.1

1. '2'; చే భాగింపబడునవి 1200, 836, 780, 4820, 48630

   '5' చే భాగింపబడునవి 1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630

   '10' చే భాగింపబడునవి 1200, 780, 4820, 48630

   ఒక సంఖ్య '10' తో భాగింపబడిన అది '2' తోను మరియు '5' తోను కూడా భాగింపబడునని గ్రహించాము.
2. (a), (b), (c), (e) లు 2 చే భాగించబడతాయి.
3. (a), (b), (c) (d) లు 5 చే భాగించబడతాయి.
4. (a), (b), (d), (e) లు 10 చే భాగించబడతాయి.
5. (a) 6 (b) 8

   (c) 6 (d) 12 (e) 8
6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... 7. 6

అభ్యాసం - 15.2

1. A = 2 లేదా 5 లేదా 8 2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 మొదలైనవి
4. 0 నుండి 9. 2 యొక్క భాజనీయతా నియమం ఒకట్ల స్థానంపై తప్ప మిగిలిన స్థానములపై ఆధారపడదు అని గ్రహించాము.
5. 0 లేదా 5 6. 4 7. 7 8. ‘0’

అభ్యాసం - 15.3

1. (a), (d) లు 6 చే భాగింపబడును
2. (a), (b), (c), (d) లు 4 చే భాగింపబడును
3. (a), (c), (d) లు 8 చే భాగింపబడును
4. (a), (b), (c), (d) లు 7 చే భాగింపబడును
5. (a), (b), (c), (d), (e), (h), (i), (j) లు 11 చే భాగింపబడును
6. 8 యొక్క గుణిజములన్ని 4 యొక్క గుణిజములు
7. A = 1, B = 9, A + B = 10

Exercise - 15.4

1. divisible by 45
2. divisible by 81
3. divisible by 36 and by all its factors
4. divisible by 42 and by all its factors
5. divisible by 11 and 7 and also divisible product of 11 and 7
6. divisible by 5 and 7 and also divisible by product of 5 and 7.
7. Both numbers and their sum also divisible by 6
8. Both the numbers and their difference also divisible by 3
9. Divisible by both 2 and 4
10. Divisible by both 4 and 8
11. A = 3, B = 2

Exercise - 15.5

1. (a) A = 9 (b) B = 5 (c) A = 3 (d) A = 6, sum = 2996
   (e) A = 4, B = 1
2. (a) A = 5 (b) A = 8 (c) A = 9
3. (a) D = 5, E = 0, F = 1
4. (a) K = 6, L = 2 (b) M = 5, N = 0
5. A = 8, B = 7, C = 6

Exercise - 15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ product of three consecutive numbers.
5. Sum of n consecutive odd number is $\frac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2x-1)$ multiple of 'n'.
6. $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ is divisible by 5.
7. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
8. ₹ 12000
9. 3050
10. 166833-18 = 166815.

అభ్యాసం - 15.4

1. 45 చే భాగించబడును
2. 81 చే భాగించబడును
3. 36 మరియు దాని కారణాంకముచే భాగింపబడును.
4. 42 మరియు దాని కారణాంకముచే భాగింపబడును.
5. 11, 7 లచే మరియు దాని లబ్దముచే భాగింపబడును.
6. 5, 7 లచే మరియు దాని లబ్దముచే భాగింపబడును.
7. రెండు సంఖ్యలు మరియు వాటి మొత్తం 6 చే భాగింపబడును.
8. రెండు సంఖ్యలు మరియు వాటి భేదం 3 చే భాగింపబడును.
9. 2, 4 రెండింటిచే భాగిపబడును.
10. 4, 8 రెండింటిచే భాగిపబడును.
11. $A = 3, B = 2$

అభ్యాసం - 15.5

1. (a) $A = 9$ (b) $B = 5$ (c) $A = 3$ (d) $A = 6$, మొత్తం $= 2996$
   (e) $A = 4, B = 1$
2. (a) $A = 5$ (b) $A = 8$ (c) $A = 9$
3. (a) $D = 5, E = 0, F = 1$
4. (a) $K = 6, L = 2$ (b) $M = 5, N = 0$
5. $A = 8, B = 7, C = 6$

అభ్యాసం - 15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ మూడు వరుస సంఖ్యల లబ్దం
5. 'n' వరుస బేసిసంఖ్యల మొత్తం $\dfrac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2n-1)$ 'n' యొక్క గుణిజము.
6. $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ 5 చే భాగించబడును.
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8. ₹ 12,000
9. 3050
10. 166833-18 = 166815.

SYLLABUS

Number System (50 hrs)	
(i) **Rational Numbers** (ii) **Square numbers, cube numbers, Square roots, Cubes, Cube roots.** (iii) **Playing with numbers**	**(i) Rational Numbers** • Properties of rational numbers. (including identities). • Using general form of expression to describe properties. Appreciation of properties. • Representation of rational numbers on the number line • Between any two rational numbers there lies another rational number (Making children see that if we take two rational numbers then unlike for whole numbers, in this case you can keep finding more and more numbers that lie between them.) • Representation of rational numbers as decimal and vice versa (denominators other than 10, 100, ...) • Consolidation of operations on rational numbers. • Word problems on rational numbers (all operations)
	(ii) Square numbers, cube numbers, Square roots, Cubes, Cube roots. • Square numbers and square roots. • Square roots using factor method and division method for numbers containing. no more than 4 digits and b) no more than 2 decimal places. • Pythagorean triplets and verification of Pythagoras theorem • Cube numbers and cube roots (only factor method for numbers containing at most 3 digits). • Estimating square roots and cube roots. Learning the process of moving nearer to the required number. • Uses of brackets • Simplification of brackets using BODMAS rule.
	(iii) Playing with numbers • Writing and understanding a 2 and 3 digit number in generalized form (100a + 10b + c) where a, b, c can be only digits (0-9) and engaging with various puzzles concerning this. (Like finding the missing numerals represented by alphabets in problems involving any of the four operations)

పాఠ్య ప్రణాళిక

సంఖ్యా వ్యవస్థ (50 గంటలు) (i) అకరణీయ సంఖ్యలు (ii) వర్గ సంఖ్యలు, ఘన సంఖ్యలు మరియు వర్గమూలాలు, ఘన మూలాలు (iii) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	**(i) అకరణీయ సంఖ్యలు** • అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలు (సర్వ సమీకరణములు). • ధర్మాలను వర్ణించడానికి వీలుగా సాధారణ రూపము. ధర్మాలను ప్రశంసించటం. • సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించటం. • పూర్ణాంకాలలో మాదిరిగా కాకుండా అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మరిచిన అకరణీయ సంఖ్య వుంటుందని, ఇంకా ఇవే రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య చాలా చాలా అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని గుర్తింపజేయటం. • అకరణీయ సంఖ్యలను, దశాంశ సంఖ్యలుగా సూచించటం, అదేవిధంగా దశాంశ సంఖ్యలకు అకరణీయ సంఖ్యలుగా సూచించండం (హారాలు 10, 100, ... కాకుండా) • అకరణీయ సంఖ్యలను వివిధ పరిక్రియల దృష్ట్యా ధర్మాలు. • అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ పరిక్రియలలో పద సమస్యలు.
	(ii) వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు • వర్గసంఖ్యలు, వర్గమూలాలు • కారణాంక పద్ధతిన, భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలాలను కనుగొనుట. • పైథగోరియక్ త్రికాలు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును సరిచూచుట. • ఘనసంఖ్యలు, ఘనమూలాలు (3 అంకెలు గల సంఖ్యలకు కారణాంక పద్ధతి మాత్రమే) • వర్గమూలాలను, ఘనమూలాలను అంచనా వేయటం. కావలసిన సంఖ్యకు అతి సమీపంగా అంచనావేసే విధానాన్ని నేర్పించడం • బ్రాకెట్ల వినియోగం • BODMAS నియమం అనుసరించి సంఖ్యా సమాసాలను సూక్ష్మీకరించుట
	(iii) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం! • రెండంకెలు, మూడు అంకెలు గల సంఖ్యలను వికృత రూపంలో అనగా $(100a + 10b + c)$ (a, b, c లు ఏవైనా అంకెలు) రూపంలో రాయడం, అర్థం చేసుకోవడం, వీనికి సంబంధించిన ప్రహేళికలు. (చతుర్విధ ప్రక్రియలలో, సంఖ్యలలో ఒకటి లేదా రెండంకెల బదులు అక్షరాలు ఇచ్చి వాని విలువను కనుగొనమని అడగటం) మొదలైనవి.

	• Number puzzles and games • Understanding the logic behind the divisibility tests of 2,3,4,5,6,7,8,9, 10 and 11 for a two or three digit number expressed in the general form.
Algebra (20 hrs) **(i) Linear Equations in one variable** **(ii) Exponents & Powers** **(iii) Algebraic Expressions** **(iv) Factorisation**	**(i) Linear Equations in one variable** • Solving linear equations in one variable in contextual problems involving multiplication and division • Word problems **(ii) Exponents and Powers** • Standard form of the numbers • Integers as exponents. • Laws of exponents with integral powers **(iii) Algebraic Expressions** • Multiplication algebraic exp. (Coefficient should be integers) • Some common errors (e.g. $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$) • Identities $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ • Geometric verification of identities **(iv) Factorisation** • Factorisation by taking out common factor. • Factorisation by grouping the terms. • Factorisation by using identities. • Factors of the form $(x + a)(x + a)$ • Division of algebraic expressions

	• సంఖ్యలలో ప్రహేళికలు మరియు ఆటలు – ప్రహేళికలను సాధించడం, వానిని తయారు చేయడం. • రెండు లేదా మూడు అంకెల సంఖ్యలకు సంబంధించి 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 మరియు 11 ల భాజనీయతా సూత్రాలు, వీనిలోని తర్కము మరియు శాస్త్రీయతను అర్థం చేసుకోవటము.
బీజగణితం (20 గంటలు) **(i) ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు** **(ii) ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు** **(iii) బీజీయ సమాసాలు** **(iv) కారణాంక విభజన**	**(i) ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు (సామాన్య సమీకరణాలు)** • గుణకార, భాగాహార పరిక్రియలో కూడిన సామాన్య సమీకరణాల సాధన – వివిధ సందర్భాలలో సామాన్య సమీకరణాల వినియోగము. • పద సమస్యలు **(ii) ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు** • ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు • ఘాతాంకాలుగా పూర్ణసంఖ్యలు • ఘాతాంకాల ధర్మాలు **(iii) బీజీయ సమాసాలు** • పూర్ణసంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బీజీయ సమాసాల గుణకారం • సాధారణంగా చేసే అప్పులు (ఉదా: $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$) • $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ సమీకరణాలు. • సర్వ సమీకరణాలకు జ్యామితీయ నిరూపణ. **(iv) కారణాంక విభజన** • సామాన్య సమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన • పదాలను సమూహాలుగా చేయుట ద్వారా కారణాంక విభజన • సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించుట ద్వారా కారణాంక విభజన • $(x + a)(x + a)$ రూపములోని సమాసాల కారణాంక విభజన • బీజీయ సమాసాల భాగాహారము

Arithmetic (20 hrs) (i) **Comparing Quantities using proportion** (ii) **Direct and Inverse proportion**	**(i) Comparing Quantities using proportion** • Compound ratio - Word problems. • Problems involving applications on percentages, profit & loss, overhead expenses, Discount, tax. (Multiple transactions) • Difference between simple and compound interest (compounded yearly up to 3 years or half-yearly up to 3 steps only), Arriving at the formula for compound interest through patterns and using it for simple problems. **(ii) Direct and Inverse proportion** • Direct variation - Simple and direct word problems. Inverse variation -Simple and direct word problems. Mixed problems on direct, inverse variation • Time & work problems- Simple and direct word problems • Time & distance: Simple and direct word problems
Geometry (40 hrs) (i) **Construction of Quadrilaterals** (ii) **Representing 3-D in 2D** (iii) **Exploring Geometrical Figures**	**(i) Construction of Quadrilaterals** • Review of quadrilaterals and their properties. • Construction of quadrilaterals, given with (i) Four sides and one angle (ii) Four sides and one diagonal (iii) Two adjacent sides, three angles (iv) Three sides and two diagonals. (v) Three sides and two angles in between them are given • Construction of special types of quadrilaterals with two diagonals. **(ii) Exploring Geometrical Figures** • Congruent figures • Similar figures • Symmetry in geometrical figures w.r.t. to triangles, quadrilaterals and circles. **(ii) Representing 3-D in 2D** • Identify and Match pictures with objects [more complicated e.g. nested, joint 2-D and 3-D shapes (not more than 2)]. • Drawing 2-D representation of 3-D objects (Continued and extended) with isometric sketches.

అంకగణితం (20 గంటలు) **(i) అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట** **(ii) అనులోమ, విలోమ నిష్పత్తులు**	**(i) అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట** • బహుళ నిష్పత్తి – పద సమస్యలు • శాతాలు, లాభ–నష్టాలు, ఇతర ఖర్చులు, డిస్కౌంట్, పన్నులు మొదలైన వానికి సంబంధించిన సమస్యలు • వడ్డీ, చక్రవడ్డీల మధ్య గల భేదాలు (చక్రవడ్డీ సమస్యలు 3 సోపానాలకు పరిమితము, అర్థ సంవత్సరానికి తిరగ గట్టే లెక్కలలో 3 సోపానాలకు మాత్రమే పరిమితి). అమరికల ద్వారా చక్రవడ్డీకి సూత్రమును రాబట్టుట. **(ii) అనులోమ, విలోమ నిష్పత్తులు** • సులభమైన పదసమస్యలు, విలోమానుపాతము – సులభమైన పద సమస్యలు, మిశ్రమానుపాతము – సులభ పద సమస్యలు • పని–కాలమునకు సంబంధించిన సులభ పద సమస్యలు • దూరము–కాలమునకు సంబంధించిన సులభ పద సమస్యలు
రేఖాగణితం (40 గంటలు) **(i) చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు** **(ii) జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ** **(iii) త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట**	**(i) చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు** • చతుర్భుజాల ధర్మాల పునరావలోకనము • చతుర్భుజములు నిర్మించుటలో (i) ఒక కోణము నాలుగు భుజాలు ఇచ్చినపుడు (ii) ఒక కర్ణము నాలుగు భుజాలు ఇచ్చినపుడు (iii) మూడు కోణాలు, రెండు ఆసన్న భుజాలు ఇచ్చినపుడు (iv) మూడు భుజాలు, రెండు కర్ణాలు ఇచ్చినపుడు (v) మూడు భుజాలు, వాని మధ్యలోని రెండు కోణాలు ఇచ్చినపుడు • ప్రత్యేక చతుర్భుజాల నిర్మాణము **(iii) త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట** • సర్వ సమాన పటాలు • సరూప పటాలు • త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాల పరంగా జ్యామితీయ పటాలలో సౌష్ఠవము **(ii) జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ** • పటాలను గుర్తించటం, పోల్చటం (2D మరియు 3D కలసివున్న పటాలు, వలలు) • త్రిమితీయ వస్తువుల ఆకారాలను తుల్యబిందు రేఖాపటాలుగా ద్విమితీయంలో సూచించుట.

	• Counting vertices, edges & faces & verifying Euler's relation for 3-D figures with flat faces (cubes, cuboids, tetrahedrons, prisms and pyramids)
Mensuration (15 hrs) **(i) Area of Plane Figures** **(ii) Surface areas and Volumes**	**(i) Area of Plane Figures** • Area of a triangle using Heron's formula (without proof) and its application in finding the area of a quadrilateral. • Area of a trapezium • Area of the quadrilateral and other polygons. • Area of the circle & circular paths. **(ii) Surface areas and Volumes** • Surface area of a cube, cuboid • Concept of volume, measurement of volume using a basic unit, volume of a cube, cuboid • Volume and capacity.
Data handling (15 hrs) **Frequency Distribution Tables and Graphs**	**Frequency Distribution Tables and Graphs** • Revision of Mean, Median and Mode of ungrouped data. • Determination of mean by deviation method. • Scope and necessity of grouped data. • Preparation of frequency distribution tables • Cumulative frequency distribution tables • Frequency graphs (histogram, frequency polygon, frequency curve, cumulative frequency curves)

	• ఘనము, దీర్ఘఘనం, చతుర్ముఖి, పట్టకాలు, పిరమిడ్లు మొదలైన వాటి యొక్క శీర్షాలు, అంచులు, ముఖాలను లెక్కించుట, యూలర్ ఫార్ములాను సరిచూచుట.
క్షేత్రమితి (15 గంటలు) **(i) సమతల పటాల వైశాల్యములు** **(ii) సమతల వైశాల్యములు మరియు ఘన పరిమాణములు (ఘనం-దీర్ఘఘనం)**	**(i) సమతల పటాల వైశాల్యములు** • త్రిభుజ వైశాల్యానికి హెరాన్ సూత్రము మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుట దీని అన్వయము. • ట్రెపీజియం వైశాల్యము • చతుర్భుజం మరియు దీర్ఘఘనాల ఉపరితల వైశాల్యాలు. • వృత్త వైశాల్యము, వృత్తాకార బాటల వైశాల్యము **(ii) సమతల వైశాల్యములు మరియు ఘన పరిమాణములు (ఘనం-దీర్ఘఘనం)** • సమఘనము మరియు దీర్ఘఘనముల ఉపరితల వైశాల్యములు • ఘనపరిమాణము – భావన, ప్రాథమిక పరిమాణములో ఘనపరిమాణాలను కొలుచుట • ఘనపరిమాణము మరియు సామర్థ్యము
దత్తాంశ నిర్వహణ (15 గంటలు) **పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు**	**పౌన్ణపున్య విభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు** • ముడి దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకముల పునర్విమర్శ • ఆవర్గీకృత దత్తాంశమునకు విచలన పద్ధతిలో అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనుట • వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క పరిధి, ఆవశ్యకతలను చర్చించుట. • పౌన్ణపున్య విభాజన పట్టికలను తయారుచేయుట. • పౌన్ణపున్య విభాజన పట్టికలకు సంచిత పౌన్ణపున్యాలను తయారు చేయుట • పౌన్ణపున్య వక్రాలు (సోపాన చిత్రము, పౌన్ణపున్య బహుభుజి, వక్రము, ఓజివ్ వక్రములు) గీయుట

Academic Standards

Academic standards are clear statements about what students must know and be able to do. The following are categories on the basis of which we lay down academic standards

Problem Solving

Using concepts and procedures to solve mathematical problems

(a) Kinds of problems: Problems can take various forms- puzzles, word problems, pictorial problems, procedural problems, reading data, tables, graphs etc.

(b) Problem Solving

- Reads problems
- Identifies all pieces of information/data
- Separates relevant pieces of information
- Understanding what concept is involved
- Recalling of (synthesis of) concerned procedures, formulae etc.
- Selection of procedure
- Solving the problem
- Verification of answers of raiders, problem based theorems.

(c) Complexity:

The complexity of a problem is dependent on

- Making connections(as defined in the connections section)
- Number of steps
- Number of operations
- Context unraveling
- Nature of procedures

Reasoning Proof

- Reasoning between various steps (involved invariably conjuncture).
- Understanding and making mathematical generalizations and conjectures
- Understands and justifies procedures
- Examining logical arguments.
- Understanding the notion of proof
- Uses inductive and deductive logic
- Testing mathematical conjectures

Communication

- Writing and reading, expressing mathematical notations (verbal and symbolic forms)
  Ex: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, Sum of angles in a triangle = 180^0
- Creating mathematical expressions
- Explaining mathematical ideas in her own words like- a square is closed figure having four equal sides and all equal angles
- Explaining mathematical procedures like adding two digit numbers involves first adding the digits in the units place and then adding the digits at the tens place/ keeping in mind carry over.
- Explaining mathematical logic

Connections

- Connecting concepts within a mathematical domain- for example relating adding to multiplication, parts of a whole to a ratio, to division. Patterns and symmetry, measurements and space
- Making connections with daily life
- Connecting mathematics to different subjects
- Connecting concepts of different mathematical domains like data handling and arithmetic or arithmetic and space
- Connecting concepts to multiple procedures

Visualization & Representation

- Interprets and reads data in a table, number line, pictograph, bar graph, 2-D figures, 3-D figures, pictures
- Making tables, number line, pictograph, bar graph, pictures.
- Mathematical symbols and figures.

విద్యా ప్రమాణాలు

విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసియుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది. గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.

సమస్యా సాధన

గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

అ) సమస్యలలో రకాలు: పజిల్స్, పద సమస్యలు, పట సమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ – పట్టికలు– గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

ఆ) సమస్యా సాధన

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం

ఇ) సంక్లిష్టత

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలో ఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం

కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణ చేయడం

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రతిపాదనలు అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.
- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్చలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం

వ్యక్తపరచడం

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం – రాయగలగడం.
  ఉదా: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, త్రిభుజంలోని మూడు కోణముల మొత్తం $= 180^0$
- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడం. ఉదా: చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా: రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదటి ఒకట్ల స్థానం అంకెలను కూడి తరువాత పదుల స్థానంలోని అంకెలను కూడడం / స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

అనుసంధానం

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను – భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి – నిష్పత్తికి – భాగహారానికి; అమరికలకు – సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/అంతరాళం
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: దత్తాంశ సేకరణ మరియు అంకగణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్యపరచడం

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం, 2D-పటాలు, 3D-పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.
- గణితపు గుర్తులు మరియు పటాలు

LEARNING OUTCOMES

MATHEMATICS

CLASS 8

The learner....

- Generalizes properties of addition, subtraction, multiplication and division of rational numbers through patterns.
- Finds desired number of rational numbers in between any two given rational numbers.
- Proves divisibility of 2,3,4,5,6,9 and 11 by using algebraic methods and solves puzzles/ daily life problems.
- Solves problems using exponential laws in daily life.
- Finds squares, cubes, square roots and cube roots using different methods.
- Applies concept of percent in profit-loss, discount, VAT, simple interest, compound interest. And also solves problems involving ratios, direct and indirect variation.
- Solves daily life problems using algebraic expressions and identities. Also solves problems involving linear equations in one variable.
- Identifies similar figures. Calculates the ratio of corresponding parts.
- Constructs the quadrilaterals with given measurements.
- Finds the areas of trapezium, rhombus by using formulae. and finds areas of polygons and scalene quadrilaterals by dividing the region into triangles.
- Finds areas of figures/ designs involving area of circle and area of sector.
- Calculates the surface areas and volumes of cubes and cuboids.
- Finds mean, median and mode a data given in a tabular form.
- Represents the data in bar graphs, frequency curves and pi charts.

ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాలు

గణితం

8వ తరగతి

విద్యార్థులు ఇవన్నీ నేర్చుకుంటారు.....

- అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ ప్రక్రియల ఆధారంగా సంఖ్యల క్రమాలను (patterns) పరిశీలించి ఆ సంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణీకరించగలరు. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య కోరినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను చెప్పగలరు.
- 2, 3, 4, 5, 6, 9 మరియు 11ల భాజనీయతా సూత్రాలను నిరూపించగలరు. నిజజీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో పజిల్స్‌ను సాధించగలరు.
- ఘాతాంకన్యాయాలను వినియోగించుకొని సమస్యలను పరిష్కరించగలరు. సంఖ్యల వర్గాలు, ఘనాలు, వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు వివిధ ప్రమాణ పద్ధతులనుపయోగించి కనుక్కోగలరు.
- లాభ-నష్టాలు, డిస్కౌంట్, సాధారణ వడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ లకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించుటలో శాతము, నిష్పత్తులను వినియోగించగలరు.
- అనులోమ, విలోమానుపాతములకు సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించగలరు.
- బీజీయ సమాసాలను, బీజీయ సర్వసమీకరణములు (Identities) మరియు ఒక చరరాశిలో బీజీయ సమీకరణములను వినియోగించుకొని నిజజీవితంలోని సమస్యలను సాధించగలరు.
- సరూప పటాలను గుర్తించగలరు. సరూప పటాలలోని భాగాలను సాదృశ్య నిష్పత్తుల ఆధారంగా కనుక్కోగలరు.
- ఇవ్వబడిన విలువల ఆధారంగా చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు చేయగలరు.
- సమలంబ చతుర్భుజం, రాంబస్, చతుర్భుజ వైశాల్యాలను సూత్రాల ఆధారంగా కనుక్కోగలరు. బహుభుజులు, విషమబాహు చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను త్రిభుజాలలో విభజించడం ద్వారా కనుక్కోగలరు.
- వృత్త వైశాల్యం, సెక్టారు వైశాల్యం లకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించగలరు.
- సమఘనం, దీర్ఘ ఘనం ల ఉపరితల వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములు కనుక్కోగలరు.
- పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలలో ఉన్న దత్తాంశానికి సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకంలను కనుక్కోగలరు.
- ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు, పౌనఃపున్య వక్రాలు, పై చిత్రాలు గీయగలరు.

విద్య మా హక్కు
సర్వశిక్షా అభియాన్
అందరూ చదవాలి - అందరూ ఎదగాలి

పాఠశాల విద్యా శాఖ,
తెలంగాణ ప్రభుత్వం

एन सी ई आर टी
NCERT

Textbook - Overview

The Government of Telangana has decided to revise the curriculum of all the subjects based on the State Curriculum Framework (SCF-2011) which recommends that life of children in schools must be linked to their life outside the school. Right to Education (RTE-2009) makes mandatory that every child entering school should acquire the necessary abilities prescribed at each level up to the age of 14 years. Therefore introduction of a syllabus based on National Curriculum Framework-2005 and SCF-2011 was necessary. The position paper on mathematics teaching brought out by the NCERT in 2006 and the position paper on the same subject by SCERT Telangana (and AP) 2011, pointed out that fear of mathematics makes many children drop out of school. It is because of this that it becomes important to make the school and classroom experience especially in mathematics more pertinent and comprehensible. The syllabus and material must be aligned to the national and state perspective on mathematics education and prepare our students with a strong base in mathematics and science without burdening them with too much information and/or memorization.

The strength of a nation lies in its commitment and capacity to prepare its people to meet the needs and aspirations of a progressive technological society. The syllabus in mathematics for three stages i.e. primary, upper primary and secondary is based on structured and spiral approaches. The teachers of secondary school mathematics have to look at the syllabus of classes 8 to 10 with this background. They must widen and deepen the understanding and application of concepts learnt by pupils in primary and upper primary stages. The syllabus of upper primary classes is based on the structural approach, laying emphasis on the discovery and understanding of basic mathematical concepts and generalizations. The text book has been written on the basis of curriculum. It has emerged after a thorough review of the previous books and books of equivalent states. The approach in curriculum, the syllabus, textbooks and hence in classroom processes is to encourage the pupils to participate, discuss and take an active part in the classroom processes.

Being the final stage of the elementary education, mathematics of class 8 is a bridge to mathematics of class 9 which deals with abstraction and more complex mathematical ideas and moving into beginning of formal mathematics.

The textbook attempts to give ample opportunities and space for children to engage in tasks and attempt problems based on the concepts included in the syllabus. For instance tasks like 'Do this' and 'Try this' have been included in between that involves thinking, reflecting and doing. The teacher and the students are supposed to pause and do these before moving forward and only give support, if needed.

The chapters are arranged in a spiral manner that children revisit each set of concepts of different areas at different times in the course of the year.

The syllabus has been divided broadly into six areas namely, (1) Number System (2) Algebra (3) Arithmetic (4) Geometry (5) Mensuration and (6) Data Handling.

Description of the chapters:

There are three chapters related to numbers and their properties. The chapter on rational numbers engages with problems dealing with multiplication and division operations on rational numbers. It also generalizes the properties of numbers to include rational numbers. There are four chapters focusing on operations and properties of algebraic expressions and equations to build a base for operations on linear equations with one or more variable. Children will learn to use graphs to analyze the nature of changes in quantities in linear relationships as well as solve contextualized problems represented in the form of tables and equations. In this way children would be able to identify quantitative relationships among variables and constants using mathematical models.

There are two chapters that relate to ratio and proportion and their application. In these the students engage with problems involving comparison of quantities using proportion like percentage, profit and loss, discount, tax, simple and compound interest. These chapters although distinct in the quantities that they use, are conceptually interrelated. They build on each other and hence can be used in a spiral manner to build an understanding of comparing quantities. Children learn about geometrical figures and patterns at an early stage. Now they have to learn to give a logical explanation for relationships in the frame of an argument. To understand the relationship between geometrical figures children have been introduced to the construction of geometrical figures with the help of some operations and their properties. In mensuration, two chapters deal with the areas of plane figures and the surface areas and volumes of 2-Dimensional and 3-Dimensional objects. Areas of some shapes have been calculated as sum of areas of basic shapes like rectangles and triangles. The syllabus discusses about different forms of representation of mathematical data in various ways such as graphs and frequency tables to signify the importance of organization and comprehension of data.

Therefore it is expected that the teachers will bring a paradigm shift in the classroom processes from routinely solving the problems in the exercises to build basic conceptual understanding and solving problems with ingenuity.

- Textbook Development Committee

పాఠ్యపుస్తకం - వివరణ

రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళిక చట్టం (ఎస్.సి.ఎఫ్. 2011) లో సూచించిన అనేక సిఫార్సుల్లో ప్రధానమైనది "పాఠశాలలో విద్యార్థుల అభ్యసనం, పాఠశాల బయట జీవితం (నిజ జీవితంతో) ముడిపడి ఉండాలి. దీనికనుగుణంగా మన రాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని పాఠ్యాంశాలలోనూ విద్యాప్రణాళిక సవరించుటకు నిర్ణయించినారు. విద్యాహక్కు చట్టం (ఆర్.టి.ఇ. 2009) ప్రకారం 14 సం॥ల వయస్సువరకు పాఠశాలలో చేరిన ప్రతి విద్యార్థి అన్ని స్థాయిలలో నిర్దేశించిన నైపుణ్యాలను, ప్రమాణాలను తప్పనిసరిగా పొందాలని సూచిస్తున్నది. అందువల్ల జాతీయ విద్యాప్రణాళిక చట్టం (2005) మరియు రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళిక చట్రం 2011 ఆధారంగా పాఠ్యాంశాలు ప్రవేశపెట్టడం అవసరం. 2006లో ఎన్.సి.ఇ.ఆర్.టి. తీసుకువచ్చిన పొజిషన్ పేపర్స్ మరియు ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ (మరియు ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం) 2011 పొజిషన్ పేపర్స్‌లో గణితం అంటే భయం అనేది చాలా మంది పిల్లలను పాఠశాల నుండి దూరం చేస్తుంది అనే అంశాన్ని ప్రస్తావించాయి. ఈ కారణంగానే పాఠశాల మరియు తరగతి గదుల అనుభవాన్ని ముఖ్యంగా గణితంలో సందర్భోచితంగా మరింత అర్థమయ్యేలా చేయడం చాలా ముఖ్యం. పాఠ్యాంశాలు (సిలబస్ & మెటీరియల్) గణిత విద్యపై జాతీయ మరియు రాష్ట్ర దృక్పథానికి అనుగుణంగా ఉండాలి మరియు విజ్ఞాన శాస్త్రంలో బలమైన పునాదితో సిద్ధం చేయాలి.

ఒక దేశం యొక్క బలం ప్రగతిశీల సాంకేతిక సమాజం యొక్క అవసరాలు మరియు ఆకాంక్షలను తీర్చడానికి తన ప్రజలను సిద్ధంచేసే నిబద్ధత మరియు సామర్థ్యంలో ఉంది. గణిత విద్యాప్రణాళిక ప్రధానంగా మూడు దశలు అంటే ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత మరియు సెకండరీ స్థాయిలో, శీర్షిక సర్పిల విధానాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. సెంకడరీ స్థాయిలో గణిత ఉపాధ్యాయులు ఉన్నత తరగతుల గణిత పాఠ్య ప్రణాళికను ఈ దృష్టిలో అధ్యయనం చేసి విద్యార్థులు ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత దశలలో నేర్చుకున్న గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృతపరచుకోడానికి తోడ్పడాలి. ప్రాథమికోన్నత తరగతుల సిలబస్ నిర్మాణాత్మకంపై ఆధారపడి, ప్రాథమిక గణిత అంశాలు మరియు సాధారణీకరణల యొక్క ఆవిష్కరణ మరియు అవగాహనకు ప్రాధాన్యత ఇస్తుంది. పాఠ్యపుస్తకం పాఠ్యప్రణాళిక ఆధారంగా వ్రాయబడింది. మునుపటి పుస్తకాలు మరియు ఇతర రాష్ట్రాలలోని సమానస్థాయి పుస్తకాలను క్షుణ్ణంగా సమీక్షించిన తరువాత ఇది రూపొందించబడింది. పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తకాలు తరగతి గది ప్రక్రియలలో పాల్గొనడానికి, చర్చించడానికి మరియు చురుకుగా పాల్గొనడానికి విద్యార్థులను ప్రోత్సహించే విధంగా ఉన్నాయి.

ప్రాథమిక విద్య యొక్క చివరి దశ అయిన 8వ తరగతి గణితం, సంగ్రహన మరియు సంక్లిష్టమైన గణిత ఆలోచనలతో కూడిన గణిత ప్రారంభంలోకి ప్రవేశించే 9వ తరగతి గణితానికి ఒక వారధి వంటిది.

పాఠ్యపుస్తకం పిల్లలకు పనులలో పాల్గొనడానికి తగినంత అవకాశాలను ఇవ్వడానికి ప్రయత్నిస్తుంది మరియు పాఠ్యాంశాలలో చేర్చబడిన అంశాల ఆధారంగా విద్యార్థులు సమస్యలను సాధించేటట్టు ప్రయత్నిస్తుంది. ఉదాహరణకు 'దీన్ని చేయండి' మరియు 'దీన్ని ప్రయత్నించండి' వంటి పనులను మధ్య మధ్యలో చేర్చబడ్డాయి. వీటిలో ఆలోచించడం, ప్రతిబింబించడం మరియు చేయడం ఉంటాయి. ఉపాధ్యాయుడు మరియు విద్యార్థులు వీటిని ముందు సాధించిన తరువాత ముందుకుసాగాలి. ఉపాధ్యాయులు అవసరమైనంతవరకు మాత్రమే సహాయపడాలి.

విద్యా సంవత్సరంలో అనేక మార్లు పిల్లలు అనేక విషయాల యొక్క భావనలను పున్ణసమీక్షించే విధంగా అధ్యాయాలు ఒక (స్పైరల్) పద్ధతిలో కూర్చబడి ఉంటాయి. ఈ తరగతికి పాఠ్య ప్రణాళిక ప్రధానంగా ఆరు ప్రధాన భాగాలుగా విభజించారు. అవి 1) సంఖ్యా వ్యవస్థ, 2) బీజగణితం, 3) అంకగణితం, 4) రేఖాగణితం, 5) క్షేత్రగణితం, 6) దత్తాంశ నిర్వహణ.

అధ్యాయాల వివరణ:

సంఖ్యలు మరియు వాటి లక్షణాలకు సంబంధించిన మూడు అధ్యాయాలున్నాయి. అకరణీయ సంఖ్యల అధ్యాయం, అకరణీయ సంఖ్యలపై గుణకారం మరియు భాగహార సమస్యలతో కూడి ఉంటుంది. ఇది అకరణీయ సంఖ్యలకు ఉండే లక్షణాలను సాధారణీకరిస్తుంది. ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చరరాశులుగల సమీకరణాల సమస్య సాధనకై బీజగణిత వ్యక్తీకరణలు మరియు సమీకరణాల యొక్క లక్షణాలపై దృష్టిసారించే నాలుగు అధ్యాయాలు ఉన్నాయి. విద్యార్థులు సరళ సంబంధాలతో పరిమాణాల మార్పుల స్వభావాన్ని విశ్లేషించడానికి గ్రాఫ్‌లు ఉపయోగించడం నేర్చుకుంటారు. అలాగే పట్టికలు మరియు సమీకరణ రూపంలో సందర్భోచిత సమస్యలను పరిష్కరించుకుంటారు. ఈ విధంగా పిల్లలు గణిత నమూనాలను ఉపయోగించి చరరాశులు మరియు స్థిరాంకాల మధ్య పరిమాణ సంబంధాలను గుర్తించగలుగుతారు.

నిష్పత్తి మరియు అనుపాతము మరియు వాటి అనువర్తనానికి సంబంధించిన రెండు అధ్యాయాలున్నాయి. వీటిలో విద్యార్థులు రుసుము శాతము, లాభ నష్టాలు, అమ్మకపుపన్ను, బారువడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ వంటి నిష్పత్తిని ఉపయోగించి, పరిమాణాలను పోల్చే సమస్యలను సాధిస్తారు. ఈ అధ్యాయాలు వారు ఉపయోగించే పరిమాణాలు విభిన్నమైనవి అయినప్పటికి, వాటి భావనలు పరస్పర సంబంధం కలిగి ఒకదానిపై ఒకటి ఆధారపడి ఉంటాయి. అందువల్ల పరిమాణాలను పోల్చడంపై అవగాహన పెంచుకోవడానికి సర్పిల పద్ధతిలో వాటిని ఉపయోగించవచ్చు. పిల్లలు ప్రారంభదశలో రేఖాగణిత బొమ్మలు మరియు నమూనాల గురించి తెలుసుకోవడం మరియు వాటిమధ్య సంబంధాలకు తార్కిక వివరణ ఇవ్వడం నేర్చుకోవాలి. రేఖాగణిత బొమ్మల మధ్య సంబంధాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి కొన్ని ప్రక్రియలు మరియు వాటి లక్షణాల సహాయంతో పిల్లలకు రేఖాగణిత నిర్మాణాలను పరిచయం చేశారు. క్షేత్ర గణిత విభాగంలో రెండు అధ్యాయాలు ఉన్నాయి. అవి సమతల పటాల వైశాల్యాలు మరియు 2D మరియు 3D జ్యామితీయ పటాల ఉపరితల వైశాల్యం అలాగే దీర్ఘ చతురస్రాల మరియు త్రిభుజాల వంటి ప్రాథమిక ఆకృతుల వైశాల్యాలు కూడా గణన చేయడమైనది. సేకరించిన సమాచారాన్ని పటాలలో సూచించడానికి గ్రాఫ్స్ మరియు పౌనఃపున్య పట్టికల వంటి వివిధ మార్గాల్లో గణిత సమాచారం యొక్క వివిధ రకాల ప్రాతినిధ్యాల గురించి పాఠ్యప్రణాళిక చర్చిస్తుంది.

కావున ఉపాధ్యాయులు ఒక దృక్పథ మార్పును తీసుకువచ్చి తరగతి గది ప్రక్రియలలో మామూలుగా అభ్యాసాలలోని సమస్యలను సాధించడమేకాక భావనల అవగాహనను పెంపొందిస్తారని మరియు స్వతహాగా సమస్యలను సాధింపచేస్తారని ఆశించడమైనది.

- పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

George Polya (1887 - 1985)

George Polya
(1887-1985)

Over the years, many have thought about the question whether the art of problem solving can be taught or is it a talent possessed by only a few? An effective and definite answer was given by the late George Polya. He maintained that the skill of problem solving can be taught.

Polya was born in Hungary in 1887 and received his Ph.D. in mathematics from the University of Budapest. He taught for many years at the Swiss Federal Institute of Technology in Zurich.

Among the numerous books that he wrote he seemed most proud of 'How to Solve It' (1945) which has sold nearly one million copies and has been translated into 17 languages.

Polya's Four principles of Problem solving

I. Understand the problem

This principle seems so obvious that it need not be mentioned. However students are often stymied in their efforts to solve a problem because they don't understand it fully or even in part. Teachers should ask students such questions as

• Do you understand all the words used in stating the problems? If not, look them up in the index, in a dictionary or wherever they can be found. • What are you asked to find or show can you restate the problem in your own words. • Is there yet another way to state the problem • What does (key word) really mean? • Could you workout some numerical examples that would help make the problem clear? • Could you think of a picture or diagram that might help you to understand the problem. • Is there enough information to enable you to find a solution. • Is there extraneous information? • What do you really need to know to find a solution.

II. Devise a plan

Devising a plan for solving a problem once it is fully understood may still required substantial effort. But don't be afraid to make start you may be on the right track. There are often many reasonable ways to try to solve a problem and the successful idea may emerge only gradually after several unsuccessful trials. A partial list of strategies include.

• guess and check • look for a pattern • make an orderly list • draw a picture
• think of the problem as particularly solved • think of a similar problem already solved
• eliminate possibilities • solve simpler problem • solve an equivalent problem
• solve an analogous problem • use symmetry • use a model • consider special cases
• work backward • use direct reasoning • use a formula • solve an equation • be ingenious

III. Carryout the plan

Carrying out the plan is usually easier than devising the plan. In general all you need is care and patience, given that you have the necessary skills. If a plan does not work immediately be persistent. If it still does n't work, discard it and try a new strategy. Don't be misled this is the way mathematics is done, even by professionals.

IV. Look back

Much can be gained by looking back a completed solution to analyze your thinking and ascertain just what was the key for solving the problem. This is how we gain "Mathematical power", the ability to come up with good ideas for solving problems never encountered before.

చరిత్రలో ముఖ్యాంశాలు

జార్జ్ పోల్యా (1887 - 1985)

జార్జ్ పోల్యా
(1887-1985)

'సమస్యాసాధన' అనేది నేర్చుకొనే అంశమా? లేదా ఇది కొంతమంది తెలివైన వారికి గల సహజ సిద్ధమైన సామర్థ్యమా? అనే ప్రశ్న అనేక సంవత్సరాలుగా ప్రపంచవ్యాప్తంగా అందరూ చర్చిస్తున్న ప్రశ్న. దీనికి ఖచ్చితమైన, ఆమోదింపదగిన సమాధానాన్ని ఇచ్చిన మొదటి వ్యక్తి కీ.శే. జార్జ్ పోల్యా. ఈయన దృష్టిలో సమస్యాసాధన నైపుణ్యం అనేది తప్పనిసరిగా నేర్చుకోవలసిన అంశం. దీనికి అనేక సిద్ధాంతాలు ఈయన ప్రతిపాదించాడు. 'పోల్యా' హంగేరీ దేశంలో 1887 సంవత్సరంలో జన్మించాడు. "యూనివర్శిటీ ఆఫ్ బుడాపెస్ట్" నుండి గణితంలో డాక్టరేట్ పట్టా పొందారు. జ్యూరిచ్‌లో గల "స్విస్ ఫెడరల్ ఇన్స్టిట్యూట్ ఆఫ్ టెక్నాలజీ"లో చాలా కాలం ఆచార్యునిగా పనిచేసారు. ఈయన రచించిన అనేక గ్రంథాలలో చెప్పదగినది. 'How to Solve It' (1945). సుమారు 17 భాషలలో తర్జుమా అయి సుమారు ఒక మిలియన్ కాపీలు అమ్మబడినవి.

పోల్యా చెప్పిన నాలుగు "సమస్యాసాధన" నియమాలు

I. సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం (Understand the problem)

• నియమం గురించి మనము ప్రత్యేంగా చెప్పవలసిన అవసరం లేదు. కాని విద్యార్థులు ఒక సమస్యను సాధించుటలో వారి నైపుణ్యాలను ఎక్కడ కేంద్రీకరించాలో తెలియక తికమక పడుతుంటారు. దీనికి కారణం సమస్యను పూర్తిగానూ, కొంతవరకైననూ సరిగా అవగాహన చేసుకొనకపోవడమే. దీనిని అధిగమించడానికి ఉపాధ్యాయులు క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలను వేయవచ్చు. • సమస్యలో ఇవ్వబడిన పదాలన్నీ అర్థమైనాయా? కాకపోతే తగిన నిఘంటువులో వెతికి తెలుసుకోవాలి. • సమస్యలో ఏమి కనుగొనాలి అని తెలుసుకోవడానికి సమస్యను సొంతమాటలలో వ్రాసుకోవాలి. ఇంకేవిధంగానైనా వ్రాయగలమో పరిశీలించాలి. • అసలు సమస్యలో ప్రధానమైన మాటలకు అర్థమేమిటి? • దీనికొరకు ఏవైనా సంఖ్యాసమాసాలను ఉదాహరణలుగా వ్రాసుకోవచ్చా? • లేదంటే పటంగాని, చిత్రంగాని దీని అవగాహనకొరకు గీయవచ్చా? • సమస్య సాధనకొరకు కావల్సిన సమాచారమంతా ఇవ్వబడినదా? • ఇది సరిపోతుందా? • అనవసర సమాచారం ఏమైనా ఉన్నదా? • అసలు సాధన కొరకు కావల్సిన సమాచారం ఏమిటి?

II. పథకం రూపొందించుకొనుట (Devise a plan)

సమస్యను అవగాహన చేసుకొన్న పిదప సమస్యను సాధించాలంటే మరింత శ్రద్ధతో ఒకపథకం రూపొందించుకోవాలి. దీనికొరకు భయపడవల్సిన అవసరంలేదు. మీరు సక్రమంగానే ఆలోచిస్తున్నారనుకోండి. సమస్య సాధనకొరకు హేతుబద్ధమైన అనేక కారణాలనుబట్టి పద్ధతులు నిర్ణయించుకోవాల్సిన అవసరం ఉన్నది. కొన్ని ప్రయత్నాల అనంతరం తప్పక మనకు సరియైన పద్ధతి ఖచ్చితంగా తెలుస్తుంది. వీటిలో కొన్ని పద్ధతులు ఏమనగా

• ఊహించడం మరియు సరిచూచుకొనుట • అమరిక కొరకు ప్రయత్నించడం • క్రమంలో అంశాలు వ్రాసుకోవడం • పటం వేయడం • కొంతవరకు సాధించిన సమస్యను పరిశీలించడం • కొన్ని సందర్భాలను తొలగించండి. • అదేవిధమైన సమస్యను సాధించడం • సాదృశ్యం గల మరిన్ని సమస్యలు సాధించడం • సౌష్టవాన్ని వినియోగించడం • ఉపకరణాన్ని ఉపయోగించడం • ప్రత్యేక సందర్భాలు పరిశీలించడం • సమస్యను వెనుకకు చూడడం • ప్రత్యక్ష కారణాలు వినియోగించడం

• సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం • సమీకరణాన్ని సాధించడం • చాతుర్యం ప్రదర్శించడం.

III పథకాలు అమలు చేయడం (Carryout the plan)

పథకాన్ని రూపొందించడం కన్నా పథకాన్ని అమలు చేయడం సులభతరమైన పని. దీనికొరకు జాగ్రత్తతో కూడిన శ్రద్ధ అవసరం. దీనికొరకు ప్రత్యేక నైపుణ్యాలు కలిగి వుండాలి. పథకం వెంటనే అమలు కానప్పటికీ ధృఢంగా ఉండాలి. ఇంకనూ పథకం నెరవేరకపోతే దానిని విడిచిపెట్టి కొత్త పథకానికి అమలు చేయడానికి ప్రయత్నించవలెను. ఇది మీరు తప్పుగా భావించనవసరం లేదు. ఎందుకంటే చాలా మంది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు, వృత్తినిపుణులు ఇదే తరహాలో పథకాలను అమలు చేస్తారు.

IV. తిరిగి చూడడం (Look Back)

ఒక సమస్యను సాధించిన పిదప సమస్యాసాధనను తిరిగి విశ్లేషిస్తే మనం చాలా విషయాలను గ్రహించవచ్చు. సమస్యకు మనం ఇచ్చిన సాధన ఏవిధంగా సత్యమైనదో సరిచూసుకోవచ్చు. ఇదే "గణిత శక్తి"ని పొందడానికి మూలాధారం. దీనినుండి మరిన్ని మంచి ఆలోచనలు రావడమే కాకుండా అపరిష్కృత సమస్యల సాధనకు దోహదపడుతుంది.

పిల్లలూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు...

- పాఠ్యపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉదాహరణలు లేదా సమస్యలు లేదా ఆటలు మొదలగునవి దానికి సంబంధించిన బొమ్మలు/పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బొమ్మతో పాటుచదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమానాలను వెంటనే మీ ఉపాధ్యాయులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- భావన అవగహన అయినది అని తెలుసుకొనుటకు "ఇవి చేయండి"లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేల సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా ఉపాధ్యాయున్ని అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- "ప్రయత్నించండి" శీర్షిక కింద ఉన్న సమస్యలు మీ ఆలోచనలను పదును పెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. అనగా మీకు ఆలోచన నైపుణ్యాలను పెంపొందిస్తాయి. వీటిని స్వయంగా సాధించలేనపుడు తోటివిద్యార్థులతో కలిసి జట్లలో సాధించడానికి ప్రయత్నించాలి. లేదా ఉపాధ్యాయులతో చర్చించి సాధనను తెలుసుకోవాలి.
- "ఆలోచించండి-చర్చించండి"లోని కృత్యాలు మీరు భావనను మరింత లోతుగా విస్తృతంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కావున వీటిని మీ మిత్రులతో కలిసి చర్చిస్తూ, ప్రశ్నిస్తూ అవగాహన పొందండి.
- అధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావనలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్ని ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా ఇంటిపనిగా గాని లేదా విరామ సమయంలో గాని సాధించవచ్చు.
- "ఇవి చేయండి" "ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యలు మాత్రం పాఠశాలలోనే ఉపాధ్యాయుల సమక్షంలో తప్పక సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ఎక్కడైతే ప్రాజెక్టులు ఇవ్వబడినవో వాటిని మీరు జట్లలో చేయవలసి ఉంటుంది. అయితే వీటి నివేదికలు మీరు వ్యక్తిగతంగా రాసివ్వవలసి ఉంటుంది.
- భావన అవగాహన కోసం నిర్వహించే కృత్యాలు, అభ్యాసాలలో ఉండే సమస్యలలో మీ ప్రతిస్పందనలను పాఠ్యపుస్తకంలోనే రాయవలసి ఉంటే వాటిని అక్కడే రాయాలి.
- మీరు ఏరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను మరికొన్నింటిని సేకరించి లేదా మీరు స్వయంగా తయారుచేసి గాని మీ ఉపాధ్యాయునికి, తోటి విద్యార్థులకు చూపించండి. అందరు కలిసి వాటిని సాధించండి.
- గణిత భావనలకు సంబంధించి పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చిన ఆటలు, పజిల్స్, ఆసక్తికరమైన విషయాలు అవగాహన చేసుకొని అలాంటివి మరికొన్ని సేకరించి సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికే పరిమితం చేయకుండా జీవితంలో (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం-నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగహనను వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసందానం చేయడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి.
- పై గణిత సామర్థ్యాలను సాధించడంలో భావనల అవగాహన పరంగా ఏవైనా ఇబ్బందులు ఎదురైతే ఎప్పటికప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహకారం తీసుకోవాలి.

Text Book Development Committee

Writers

Sri. Tata Venkata Rama Kumar
H.M., ZPPHS, Mulumudi, Nellore Dt.

Sri. Soma Prasad Babu
PGT. APTWRS, Chandrashekarapuram, Nellore

Sri. Komanduri Murali Srinivas
PGT.APTWR School of Excellence, Srisailam.

Sri. Padala Suresh Kumar
SA,GHS, Vijayanagar Colony, Hyderabad.

Sri. P.D.L. Ganapati Sharma
SA,GHS, Zamisthanpur, Manikeshwar Nagar, Hyd.

Sri. Duggaraju Venu
SA,UPS, Allawada, Chevella Mandal, R.R. Dt.

Sri. P. Anthony Reddy
H.M.,St. Peter's High School, R.N.Peta, Nellore.

Sri D. Manohar
SA, ZPHS, Brahmanpally, Tadwai (Mandal) Nizamabad Dt.

Sri. Gottumukkala V.B.S.N. Raju
SA, Mpl. High School, Kaspa, Vizianagaram.

Sri. K.Varada Sunder Reddy
SA, ZPHS,Thakkasila, Alampur Mandal Mahabubnagar Dt.

Sri. Abbaraju Kishore
SGT, MPUPS,Chamallamudi, Guntur Dt.

Sri. G. Anantha Reddy
Retd. Headmaster, Ranga Reddy Dt.

Sri. M. Ramanjaneyulu
Lecturer, Govt D.I.E.T., Vikarabad, R.R. Dt.

Sri. M. Rama Chary
Lecturer,Govt D.I.E.T., Vikarabad, R.R. Dt.

Dr. A. Rambabu
Lecturer, Government CTE, Warangal

Dr. Poondla Ramesh
Lecturer, Government IASE, Nellore

Editors

Prof. N.Ch.Pattabhi Ramacharyulu (Retd.)
National Institute of Technology,
Warangal.

Dr. S Suresh Babu
Professor, Dept. of Statistics,
SCERT, Hyderabad

Prof. V. Shiva Ramaprasad (Retd.)
Dept. of Mathematics,
Osmania University, Hyderabad

Dr. G.S.N. Murthy
(Retd.)
Reader in Mathematics
Rajah R.S.R.K.R.R College, Bobbili

Sri A. Padmanabham
(Retd.)
H.O.D of Mathematics
Maharani College, Peddapuram

Sri. K Brahmaiah
(Retd.)
Prof., SCERT,
Hyderabad

Co-ordinators

Sri Kakulavaram Rajender Reddy
SCERT, Hyderabad

Sri K.K.V Rayalu
Lecturer, IASE, Masab Tank, Hyderabad

Academic Support Group Members

Sri Inder Mohan **Sri Yashwanth Kumar Dave** **Sri Hanif Paliwal** **Sri Asish Chordia**
Vidyabhawan Society Resource Centre, Udaipur

Sri Sharan Gopal **Kum M. Archana** **Sri P. Chiranjeevi**
Department of mathematics and Statistics, University of Hyderabad

Illustrations and Design Team

Sri Prasanth Soni **Sri Sk. Shakeer Ahmad** **Sri S. M. Ikram**
Vidyabhawan Society Resource Centre, Udaipur

Cover Page Designing

Sri. K. Sudhakara Chary, HM, UPS Neelikurthy, Mdl.Maripeda, Dist. Warangal

TEXTBOOK DEVELOPMENT & PUBLISHING COMMITTEE

Chief Production Officer	:	**Sri A. Satyanarayana Reddy,** Director, SCERT, Hyderabad.
Executive Chief Organiser	:	**Sri B. Sudhakar,** Director, Govt. Text Book Press, Hyderabad.
Organising Incharge	:	**Dr. Nannuru Upender Reddy,** Prof. & Head, Curriculum & Text Book Department, SCERT, Hyderabad.

Chairperson for Position Paper and Mathematics Curriculum and Textbook Development

Prof. V.Kannan,
Department of Mathematics and Statistics,
Hyderabad Central University, Hyderabad

CHIEF ADVISORS

Sri Chukka Ramaiah
Eminent Scholar in Mathematics
Telangana, Hyderabad.

Dr. H.K.Dewan
Educational Advisor, Vidya Bhavan Society
Udaipur, Rajasthan

QR CODE TEAM

E8D8W4