*Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.*

***Shakuntala Devi***

Shakuntala Devi popularly known as the "Human Computer" due to her arithmetic abilities.

*The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers*

***Maryam Mirzakhani***

Maryam Mirzakhani was an Iranian mathematician and a professor of mathematics at Stanford University.

8

State Council of Educational Research and Training
Telangana, Hyderabad

MATHEMATICS

CLASS VIII

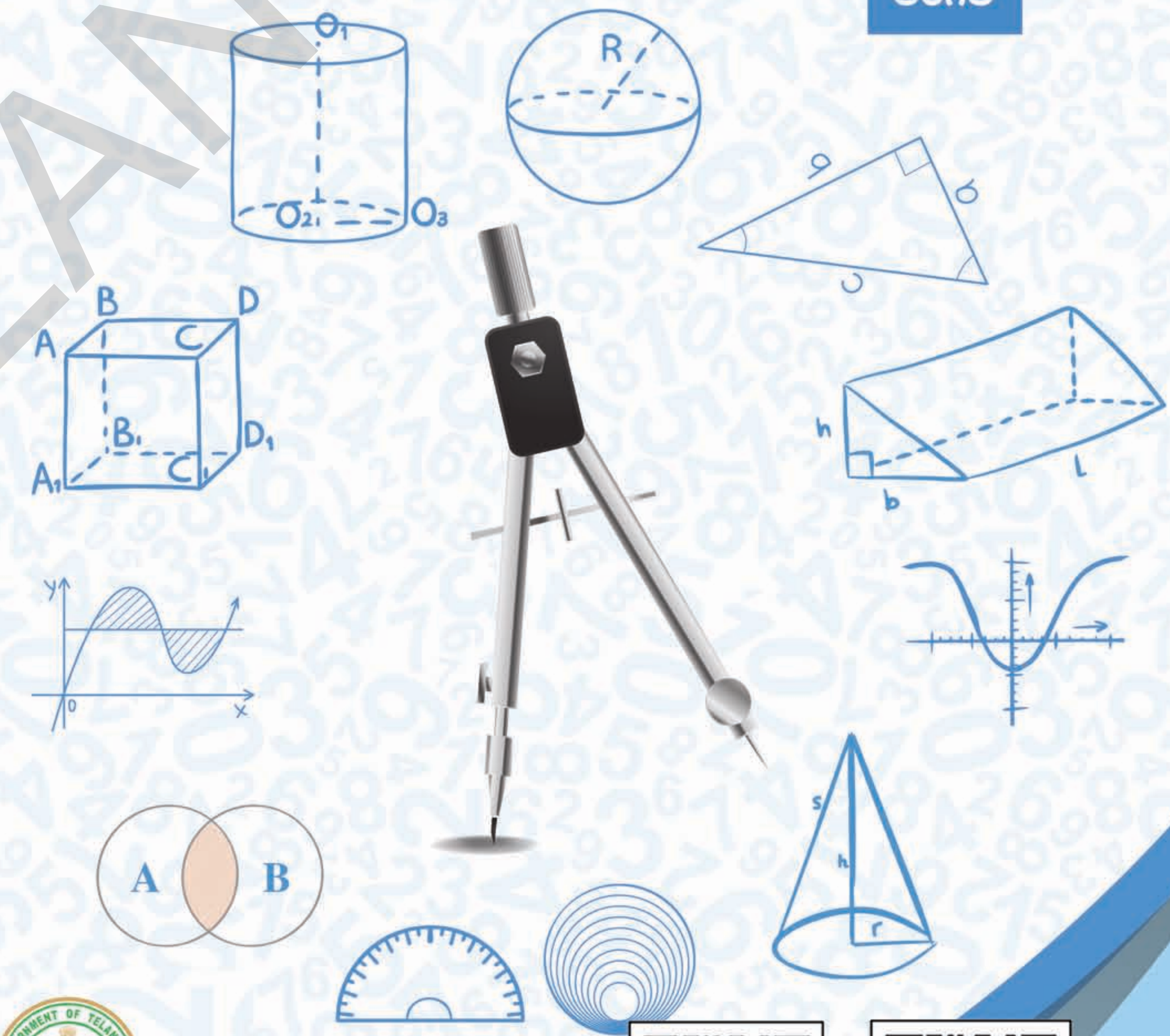
>DU+

# MATHEMATICS

# గణితం

Part U<>+ 1

CLASS 8 తరగతి



*Published by*
**The Government of Telangana**

**Government's Gift for Students' Progress**

B8P4A2

K2Z5W7

SCERT, TELANGANA

**Energized Text Books** facilitate the students in understanding the concepts clearly, accurately and effectively. Content in the QR Codes can be read with the help of any smart phone or can as well be presented on the Screen with LCD projector/K-Yan projector. The content in the QR Codes is mostly in the form of videos, animations and slides, and is an additional information to what is already there in the text books.

This additional content will help the students understand the concepts clearly and will also help the teachers in making their interaction with the students more meaningful.

At the end of each chapter, questions are provided in a separate QR Code which can assess the level of learning outcomes achieved by the students.

We expect the students and the teachers to use the content available in the QR Codes optimally and make their class room interaction more enjoyable and educative.

### Let us know how to use QR codes

In this textbook, you will see many printed QR (Quick Response) codes, such as

Use your mobile phone or tablet or computer to see interesting lessons, videos, documents, etc. linked to the QR code.

| Step | Description |
|---|---|
| **A.** | **Use Android mobile phone or tablet to view content linked to QR Code:** |
| 1. | Click on **Play Store** on your mobile/ tablet. |
| 2. | In the search bar type **DIKSHA.** |
| 3. | will appear on your screen. |
| 4. | Click **Install** |
| 5. | After successful download and installation, Click **Open** |
| 6. | Choose your prefered Language - Click **English** |
| 7. | Click **Continue** |
| 8. | Select **Student/ Teacher** (as the case may be) and Click on **Continue** |
| 9. | On the top right, click on the QR code scanner icon and scan a QR code printed in your book<br>OR<br>Click on the search icon and type the code printed below the QR code, in the search bar. ( ) |
| 10. | A list of linked topics is displayed |
| 11. | Click on any link to view the desired content |
| **B.** | **Use Computer to view content linked to QR code:** |
| 1. | Go to **https://diksha.gov.in/telangana** |
| 2. | Click on **Explore DIKSHA-TELANGANA** |
| 3. | Enter the code printed below the QR code in the browser search bar ( ) |
| 4. | A list of linked topics is displayed |
| 5. | Click on any link to view the desired content |

SCERT, TELANGANA

# MATHEMATICS

## Class VIII (Part-1)

SCERT, TELANGANA

Published by

**The Government of Telangana, Hyderabad**

**Respect the Law**
**Get the Rights**

**Grow by Education**
**Behave Humbly**

© Government of Telangana, Hyderabad.

*First Published 2013*
*New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023*

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana

SCERT, TELANGANA

This Book has been printed on 90 G.S.M. Maplitho
Title Page 250 G.S.M. White Art Card

**Government's Gift for Students' Progress 2023-24**

*Printed in India*
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

# Foreword

Education is a process of human enlightenment and empowerment. Recognizing the enormous potential of education, all progressive societies have committed to the Universalization of Elementary Education with an explicit aim of providing quality education to all. As the next step, universalization of Secondary Education has gained momentum.

The secondary stage marks the beginning of the transition from functional mathematics studied upto the upper primary stage to the study of mathematics as a discipline. The logical proofs of propositions, theorems etc. are introduced at this stage. Apart from being a specific subject, it is to be treated as a concomitant to every subject involving analysis as reasoning.

I am confident that the children in our state of Telangana learn to enjoy mathematics, make mathematics a part of their life experience, pose and solve meaningful problems, understand the basic structure of mathematics by reading this text book.

For teachers, to understand and absorb critical issues on curricular and pedagogic perspectives duly focusing on learning rather than of marks, is the need of the hour. Also coping with a mixed class room environment is essentially required for effective transaction of curriculum in teaching learning process. Nurturing class room culture to inculcate positive interest among children with difference in opinions and presumptions of life style, to infuse life in to knowledge is a thrust in the teaching job.

The afore said vision of mathematics teaching presented in State Curriculum Frame work (SCF -2011) has been elaborated in its mathematics position paper which also clearly lays down the academic standards of mathematics teaching in the state. The text books make an attempt to concretize all the sentiments. In the endeavor to continuously improve the quality of our work, we welcome comments and suggestions in this regard.

With an intention to help the students to improve their understanding skills in both the languages i.e. English and Telugu, the Government of Telangana has redesigned this book as bilingual textbook in two parts. Part-1 comprises 1 to 7 lessons/ chapters and Part-2 comprises 8 to 15 lessons/ chapters.

The State Council for Education Research and Training, Telangana appreciates the hard work of the text book development committee and several teachers from all over the state who have contributed to the development of this text book at different levels. I am thankful to the District Educational Officers, Mandal Educational Officers and Head teachers for making this mission possible. I also thank the institutions and organizations which have given their time in the development of this text book. I am grateful to the office of the Commissioner & Director of School Education, (T.S.) and Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan for extending cooperation in developing this text book. Our special thanks to Faculty of School of Education Tata Institute of Social Sciences (TISS), Hyderabad and Sri Ramesh Khade, Communication Officer, CETE, TISS-Mumbai and Designers identified by SCERT for their technical support in redesigning of the textbooks.

Place : Hyderabad
Date : 07 December 2022

**Director**
SCERT, Hyderabad

SCERT, TELANGANA

## NATIONAL ANTHEM

Jana-gana-mana-adhinayaka, jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Punjab-Sindh-Gujarat-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
Uchchhala-jaladhi-taranga.
Tava shubha name jage,
Tava shubha asisa mage,
Gahe tava jaya gatha,
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he! jaya he! jaya he!
Jaya jaya jaya, jaya he!!

**- Rabindranath Tagore**

## PLEDGE

"India is my country; all Indians are my brothers and sisters.
I love my country, and I am proud of its rich and varied heritage.

I shall always strive to be worthy of it.

I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.

To my country and my people, I pledge my devotion.

In their well-being and prosperity alone, lies my happiness."

**- Pydimarri Venkata Subba Rao**

SCERT, TELANGANA

# INDEX


| Sl. No. క్ర.సం. | Name of the Chapter అధ్యాయం పేరు | Month నెల | Page No. పేజి సంఖ్య |
|---|---|---|---|
| 1 | Rational Numbers<br>అకరణీయ సంఖ్యలు | June<br>జూన్ | 2<br>3 |
| 2 | Linear Equations in One Variable<br>ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు | June, July<br>జూన్, జులై | 74<br>75 |
| 3 | Construction of Quadrilaterals<br>చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు | July<br>జులై | 124<br>125 |
| 4 | Exponents and Powers<br>ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు | July<br>జులై | 168<br>169 |
| 5 | Comparing Quantities using Proportion<br>అనుపాతముతో రాశులను పోల్చుట | August<br>ఆగస్టు | 198<br>199 |
| 6 | Square Roots and Cube Roots<br>వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు | August<br>ఆగస్టు | 250<br>251 |
| 7 | Frequency Distribution Tables and Graphs<br>పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు | September<br>సెప్టెంబర్ | 302<br>303 |


SCERT, TELANGANA

CHAPTER 1

# Rational Numbers

## 1.0 Introduction

Salma wants to buy 3 pens at 5 rupees each. Her friend Satheesh wants to buy 2 similar pens. So they go to a wholesale shop. The shopkeeper says that a packet of five pens costs ₹ 22. How much does each pen cost?

We can easily calculate the cost of each pen to be ₹ $\frac{22}{5}$.

Is there any natural number to represent this cost? Is there any whole number or integer to represent this? This number can not be represented by a whole number. We need a fractional number to represent this quantity.

Consider one more example.

Observe the following various readings of temperature recorded on a particular day in Simla.

| Timings | 10.00 a.m. | 12.00 Noon | 3.00 p.m. | 7.00 p.m. | 10.00 p.m. |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperature | 11 °C | 14 °C | 17 °C | 10 °C | 5 °C |

In each case what is the change in temperature per hour?

Case I   Morning hours : change in temperature per hour $= \frac{14\,^{\circ}C - 11\,^{\circ}C}{2} = \frac{3^{\circ}}{2}$ C/hrs.
(10.00 A.M. - 12.00 Noon)

Case II   Afternoon hours: change in temperature per hour $= \frac{17\,^{\circ}C - 14\,^{\circ}C}{3} = 1^{\circ}$C/hrs.
(12.00 Noon - 3.00 P.M.)

Case III   Evening hours : change in temperature per hour $= \frac{10\,^{\circ}C - 17\,^{\circ}C}{4} = \frac{-7^{\circ}}{4}$ C/hrs.
(3.00 P.M. - 7.00 P.M.)

Case IV   Night hours : change in temperature per hour $= \frac{5\,^{\circ}C - 10\,^{\circ}C}{3} = \frac{-5^{\circ}}{3}$ C/hrs.
(7.00 P.M. - 10.00 P.M.)

In the above cases we come across numbers like $\frac{3}{2}\,^{\circ}$C, 1 °C, $\frac{-7}{4}\,^{\circ}$C, $\frac{-5^{\circ}}{3}$ C.

SCERT TELANGANA

అధ్యాయం

# 1 అకరణీయ సంఖ్యలు

A4Z9A2

## 1.0 పరిచయం

ఒక్కొక్కటి 5 రూపాయల చొప్పున సల్మా 3 పెన్నులు, సతీష్ 2 పెన్నులు కొనాలని ఒక రోజు దుకాణానికి వెళ్ళారు. 5 పెన్నులు గల ఒక ప్యాకెట్ వెల 22 రూపాయలని దుకాణదారుడు చెప్పాడు. వారు ఒక పెన్నుల ప్యాకెట్ కొంటే ఒక్కొక్క పెన్ను వెల ఎంత?

ఒక పెన్ను వెల ₹ $\frac{22}{5}$

ఈ పెన్ను వెలను సహజ సంఖ్యలలో సూచించగలమా? ఈ పెన్ను వెలను సూచించగల ఏదైనా పూర్ణాంకం లేదా పూర్ణసంఖ్య ఉందా? దీనిని పూర్ణాంకంతో సూచించలేము. దీనిని భిన్నంతో సూచించాలి.

మరొక ఉదాహరణను గమనించండి.

సిమ్లాలో ఒక రోజు వేర్వేరు సమయాల్లో నమోదైన ఉష్ణోగ్రతల వివరాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. వీటిని పరిశీలించండి.

| సమయం | ఉ. 10.00 గం. | మ. 12.00 గం. | మ. 3.00 గం. | రా. 7.00 గం. | రా. 10.00 గం. |
|---|---|---|---|---|---|
| ఉష్ణోగ్రత | $11^{o}$ సెం.గ్రే | $14^{o}$ సెం.గ్రే | $17^{o}$ సెం.గ్రే | $10^{o}$ సెం.గ్రే | $5^{o}$ సెం.గ్రే |

ప్రతి గంటకు ఉష్ణోగ్రతలలో మార్పును మీరు లెక్కించగలరా?

సందర్భం I ఉదయపు వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $= \frac{14\,^{o}C - 11\,^{o}C}{2} = \frac{3}{2}^{o}$ సెం.గ్రే/ గం.లు

(ఉ. 10.00 గం. – మ. 12.00 గం.)

సందర్భం II మధ్యాహ్నం వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $= \frac{17\,^{o}C - 14\,^{o}C}{3} = 1^{o}$ సెం.గ్రే/ గం.లు

(మ. 12.00 గం. – మ. 3.00 గం.)

సందర్భం III సాయంత్రం వేళలలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $= \frac{10\,^{o}C - 17\,^{o}C}{4} = \frac{-7}{4}^{o}$ సెం.గ్రే/ గం.లు

(మ. 3.00 గం. – రా. 7.00 గం.)

సందర్భం IV రాత్రివేళలో గంటకు ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు $= \frac{5\,^{o}C - 10\,^{o}C}{3} = \frac{-5}{3}^{o}$ సెం.గ్రే/ గం.లు

(రా. 7.00 గం. – రా. 10.00 గం.)

పైన పేర్కొన్న వివిధ సందర్భాలలో మనం $\frac{3}{2}^{o}$ సెం.గ్రే., $1^{o}$ సెం.గ్రే., $\frac{-7}{4}^{o}$ సెం.గ్రే., $\frac{-5}{3}^{o}$ సెం.గ్రే. లాంటి సంఖ్యలను గమనించాము.

SCERT, TELANGANA

The numbers used in these temperature are $\frac{3}{2}$ , 1 , $\frac{-7}{4}$, $\frac{-5}{3}$. What can be call these numbers? These numbers include both positive and negative fractional numbers and can be written as $\frac{p}{q}$, where $q \neq o$ and p can be positive or negative.

Let us see some more such numbers.

$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-10}{17}, \frac{3}{-2}, \frac{2013}{2014}$, .................

The numbers which are expressed in the form of $\frac{p}{q}$, where $p$ and $q$ are integers and $q \neq o$, are called 'Rational Numbers' and the set of all rational numbers is denoted by 'Q'. These are also called Quotient numbers.

Observe the following

We can express any natural number in $\frac{p}{q}$, form, for ex. 5 as $\frac{5}{1}$ or $\frac{10}{2}$ or $\frac{15}{3}$ .........

Similarly we can also express the whole number 0 as $\frac{0}{1}$ or $\frac{0}{2}$ or $\frac{0}{5}$ .........

We can also express an integer in $\frac{p}{q}$ form, for ex. –3 as $\frac{-3}{1}$ or $\frac{-6}{2}$

That is all the above $\frac{p}{q}$ forms $\frac{15}{3}$, $\frac{0}{5}$ and $\frac{-6}{2}$ are rational numbers. So all integers are also included in rational numbers. From the above observation we can conclude that all natural numbers, all whole numbers and all integers are rational numbers.

### Do This

Consider the following collection of numbers 1, $\frac{1}{2}$, –2, 0.5, $4\frac{1}{2}$, $\frac{-33}{7}$, 0, $\frac{4}{7}$, 22, –5, $\frac{2}{19}$, 0.125. Write these numbers under the appropriate category.

[A number can be written in more than one collection]

(i) Natural numbers ______________________

(ii) Whole numbers ______________________

(iii) Integers ______________________

(iv) Rational numbers ______________________

Would you leave out any of the given numbers from rational numbers?

Is every natural number, whole number and integer a rational number ?

SCERT, TELANGANA

ఉష్ణోగ్రతలను తెలుపుటకు ఉపయోగించిన $\frac{3}{2}, 1, \frac{-7}{4}, \frac{-5}{3}$ సంఖ్యలను ఏమని పిలుస్తారు? ఇవి ధన మరియు ఋణ భిన్నములు కూడా ఉంటాయి. వీటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో, $q \neq o$ మరియు, $p$ ధనాత్మకం, ఋణాత్మకంగా రాయవచ్చు. అలాంటి కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-10}{17}, \frac{3}{-2}, \frac{2013}{2014},$ ................. లాంటి కొన్ని సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

పై సంఖ్యలన్నీ $p/q$ రూపంలో ఉన్నాయి.

$p, q$ లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $(q \neq o)$ అయిన $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను 'అకరణీయ సంఖ్యలు' అని అంటారు. అకరణీయ సంఖ్యలను 'Q' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో సూచిస్తారు.

క్రింది వానిని గమనించండి.

5 అనే సహజసంఖ్యను $\frac{5}{1}$ లేదా $\frac{10}{2}$ లేదా $\frac{15}{3}, \frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు.

అదేవిధంగా ఏ పూర్ణాంకాన్నయినా అకరణీయ సంఖ్యా రూపంలో రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు 0 ను $\frac{0}{1}$ లేదా $\frac{0}{2}$ లేదా $\frac{0}{5}$ .........గా రాయవచ్చు.

-3 అనే పూర్ణసంఖ్యను $\frac{-3}{1}$ లేదా $\frac{-6}{2}$ .........గా రాయవచ్చు.

అనగా $\frac{p}{q}$ రూపంలో గల $\frac{15}{3}, \frac{0}{5}, \frac{-6}{2}$ అనే సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు.

పై పరిశీలనల నుంచి అన్ని సహజసంఖ్యలు, అన్ని పూర్ణాంకాలు మరియు అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయని అని చెప్పవచ్చు.

### ఇవి చేయండి

కింది సంఖ్యలను పరిశీలించి వాటిని సరైన సంఖ్యాసమితికి ఎదురుగా రాయండి. (ఒక సంఖ్యను ఒకటి కంటే ఎక్కువ సంఖ్యా సమితులకు ఎదురుగా రాయవచ్చు)

$1, \frac{1}{2}, -2, 0.5, 4\frac{1}{2}, \frac{-33}{7}, 0, \frac{4}{7}, 22, -5, \frac{2}{19}, 0.125.$

(i) సహజసంఖ్యలు ______________

(ii) పూర్ణాంకాలు ______________

(iii) పూర్ణసంఖ్యలు ______________

(iv) అకరణీయ సంఖ్యలు ______________

పైన ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్యల సమూహంలో రాకుండా మిగిలిపోయిందా? ఒకవేళ మిగిలితే కారణం తెలపండి.

ప్రతి సహజ సంఖ్య, ప్రతీ పూర్ణాంకము మరియు ప్రతీ పూర్ణసంఖ్య, అకరణీయ సంఖ్యయేనా?

SCERT, TELANGANA

## Try These

1. Hamid says $\frac{5}{3}$ is a rational number and 5 is only a natural number.

   Sakshi says both are rational numbers. Who do you agree with?

2. Give an example to satisfy the following statements.

   (i) All natural numbers are whole numbers but all whole numbers need not be natural numbers.

   (ii) All whole numbers are integers but all integers are not whole numbers.

   (iii) All integers are rational numbers but all rational numbers need not be integers.

We have already learnt basic operations on rational numbers in earlier classes. Let us explore some properties of operations on rational numbers.

## 1.1 Operations on Rational numbers

We have already discussed addition and subtraction of Rational numbers in 7th class. Let us recall them by doing the following problems.

**Solve**

(i) $\frac{9}{10}+\left(\frac{-13}{8}\right)$    (ii) $1\frac{3}{5}+4\frac{2}{7}$

(iii) $\frac{-7}{16}-\left(\frac{-9}{20}\right)$    (iv) $\frac{-11}{14}-\left(\frac{1}{21}\right)$

(v) Find the additive inverse of the following numbers : $\frac{-7}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{-3}{4}$, 8

### 1.1.1 Multiplication of Rational Numbers

Now, we learn how to multiply the rational numbers. In class 7 we have learnt how to multiply fractional numbers. We follow a similar process for multiplication of rational numbers also.

Consider the rational numbers $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{7}$. These are also fractional numbers.

We multiply $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{7}$

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times 5}{3\times 7}=\frac{10}{21} \qquad \left(\frac{\textit{Product of numerator}}{\textit{Product of denominator}}\right)$$

SCERT, TELANGANA

**ప్రయత్నించండి**

1. హమీద్ $\frac{5}{3}$ అకరణీయ సంఖ్య 5 కేవలం సహజ సంఖ్య మాత్రమే అవుతుందని అన్నాడు. సాక్షి ఈ రెండు సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు అని చెప్పింది. ఇద్దరి వాదనలో నీవు ఎవరితో ఏకీభవిస్తావు?
2. కింది ప్రవచనాలను తృప్తిపరిచే ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
   (i) సహజ సంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలు అవుతాయి, కాని దీని విపర్యయం సత్యం కాదు.
   (ii) పూర్ణాంకాలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలు అవుతాయి, కాని పూర్ణసంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలు కావు.
   (iii) పూర్ణసంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలే, కాని అకరణీయ సంఖ్యలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలు కావు.

అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ పరిక్రియల గురించి మనం గత తరగతుల్లో నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు మనం అకరణీయ సంఖ్యలపై వివిధ ధర్మాలను గూర్చి చర్చిద్దాం.

## 1.1 అకరణీయ సంఖ్యలు - పరిక్రియలు

మనం 7వ తరగతిలోనే అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనం మరియు వ్యవకలనముల గురించి నేర్చుకున్నాము. తిరిగి వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకొని ఈ క్రింది సమస్యలు సాధించండి.

**సాధించుము**

(i) $\frac{9}{10}+\left(\frac{-13}{8}\right)$  (ii) $1\frac{3}{5}+4\frac{2}{7}$

(iii) $\frac{-7}{16}-\left(\frac{-9}{20}\right)$  (iv) $\frac{-11}{14}-\left(\frac{1}{21}\right)$

(v) ఈ క్రింది వాటికి సంకలన విలోమం కనుగొనండి.

$\frac{-7}{6}, \frac{1}{10}, \frac{-3}{4}, -8$

### 1.1.1 అకరణీయ సంఖ్యలు - గుణకారం

ప్రస్తుతం మనం అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారం ఎలా చేయాలో నేర్చుకుందాం. 7వ తరగతిలో భిన్నాలను ఎలా గుణించాలో నేర్చుకున్నాం. అదేవిధంగా అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారం చేద్దాం.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు ఇవి భిన్నాలు కూడా.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ లను గుణకారం చేయగా

$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times 5}{3\times 7}=\frac{10}{21}$  $\left(\frac{\text{లవముల లబ్ధం}}{\text{హారముల లబ్ధం}}\right)$

SCERT, TELANGANA

Now multiply $\frac{-2}{3} \times \frac{5}{7}$

We get $\frac{-2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{-10}{21}$

Let us do one more example $\frac{-10}{21} \times \frac{14}{25}$

$$\frac{-10}{21} \times \frac{14}{25} = \frac{-10 \times 14}{21 \times 25} = \frac{\cancel{-140}^{\,28}}{\cancel{525}_{\,105}} = \frac{-28}{105} = \frac{-4}{15}$$

Or we can do like this also.

$$\frac{-\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{21}_{\,3}} \times \frac{\cancel{14}^{\,2}}{\cancel{25}_{\,5}} = \frac{-4}{15}$$

**Do this**

(i) $\frac{18}{11} \times \frac{-33}{45}$ (ii) $\frac{-7}{17} \times \frac{-1}{10}$

(iii) $\frac{-105}{72} \times \frac{18}{15}$ (iv) $\frac{13}{120} \times \frac{100}{16}$

### 1.1.2 Division of Rational Numbers

Let us observe the following.

$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$

$\frac{-9}{11} \times \frac{11}{-9} = 1$

Here we notice that the product is '1'. If the product of any two rational numbers is '1' are called the multiplicative inverse of each other.

Here $\frac{2}{5}$ and $\frac{5}{2}$; $\frac{-9}{11}$ and $\frac{11}{-9}$ are multiplicative inverse of each other.

SCERT, TELANGANA

ఇప్పుడు $\frac{-2}{3}\times\frac{5}{7}$ లను గుణకారం చేద్దాం.

$$\frac{-2\times 5}{3\times 7}=\frac{-10}{21}$$

మరొక ఉదాహరణ : $\frac{-10}{21}\times\frac{14}{25}$

$$\frac{-10}{21}\times\frac{14}{25}=\frac{-10\times 14}{21\times 25}=\frac{\overset{28}{\cancel{-140}}}{\underset{105}{\cancel{525}}}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$$

మరొక పద్ధతి

$$\frac{-\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{3}{\cancel{21}}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}=\frac{-4}{15}$$

**ఇవి చేయండి**

(i) $\frac{18}{11}\times\frac{-33}{45}$ (ii) $\frac{-7}{17}\times\frac{-1}{10}$

(iii) $\frac{-105}{72}\times\frac{18}{15}$ (iv) $\frac{13}{120}\times\frac{100}{16}$

### 1.1.2 అకరణీయ సంఖ్యలు - భాగాహారం

క్రింది వాటిని పరిశీలిద్దాం.

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$$

$$\frac{-9}{11}\times\frac{11}{-9}=1$$

పై రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం 1. ఏవేనని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం '1' అయితే వాటిని పరస్పర గుణకార విలోమాలు అంటారు.

$\frac{2}{5}$ కు $\frac{5}{2}$, $\frac{-9}{11}$ కు $\frac{11}{-9}$ గుణకార విలోమాలు అగుతాయి.

SCERT, TELANGANA

Write multiplicative inverse of $\frac{-3}{7}$, 11, $\frac{9}{5}$, $\frac{1}{-17}$.

In class 7 we have learnt to divide fractional numbers. We follow a similar process for division of Rational numbers.

Consider the rational number $\frac{3}{4}$ and $\frac{7}{11}$. These are also fractional numbers.

We devide $\frac{3}{4}$ with $\frac{7}{11}$.

$$\frac{3}{4} \div \frac{7}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{7} \qquad \text{(Multiplicative inverse of } \frac{7}{11}\text{)}$$

$$= \frac{3 \times 11}{4 \times 7} = \frac{33}{28} = 1\frac{5}{28}$$

Let's do the following examples :

(i) $\frac{-5}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{-5}{9} \times \frac{4}{3}$ (Multiplicative inverse of $\frac{3}{4}$)

$$= \frac{-5 \times 4}{9 \times 3} = \frac{-20}{27}$$

(ii) $\frac{-12}{21} \div \left(\frac{2}{-7}\right) = \frac{-\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{21}_{\,3}} \times \left(\frac{-\cancel{7}}{\cancel{2}}\right) = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}} = 2$ (Multiplicative inverse of $\frac{2}{-7}$)

**Do this**

(i) $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{18}{25} \div \left(\frac{-72}{75}\right)$

(iii) $\frac{-125}{64} \div \frac{50}{16}$ (iv) Divide $\frac{-512}{441}$ with $\frac{-1024}{21}$

## 1.2 Properties of Rational numbers

### 1.2.1 Closure property

**What is closure property?**

If the sum of two whole numbers is also a whole number, then, we say that the set of whole numbers satisfy closure property under addition.

SCERT, TELANGANA

$\frac{-3}{7}, 11, \frac{9}{5}, \frac{1}{-17}$ కు గుణకార విలోమాలు రాయండి.

7వ తరగతిలో భిన్నాలను భాగహారం చేయడం నేర్చుకున్న విధంగానే, అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయాలి.

$\frac{3}{4}, \frac{7}{11}$ అనేవి అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు భిన్నాలు.

$\frac{3}{4}$ ను $\frac{7}{11}$ చే భాగహారం చేయగా

$\frac{3}{4} \div \frac{7}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{7}$ ($\frac{7}{11}$ కు గుణకార విలోమం)

$= \frac{3 \times 11}{4 \times 7} = \frac{33}{28} = 1\frac{5}{28}$

క్రింది ఉదాహరణలను చేద్దాం.

(i) $\frac{-5}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{-5}{9} \times \frac{4}{3}$ ($\frac{3}{4}$ కు గుణకార విలోమం)

$= \frac{-5 \times 4}{9 \times 3} = \frac{-20}{27}$

(ii) $\frac{-12}{21} \div \left(\frac{2}{-7}\right) = \frac{-\cancel{12}^{6}}{\cancel{21}_{3}} \times \left(\frac{-\cancel{7}}{\cancel{2}}\right) = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}} = 2$ ($\frac{2}{-7}$ కు గుణకార విలోమం)

**ఇవి చేయండి**

(i) $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{18}{25} \div \left(\frac{-72}{75}\right)$

(iii) $\frac{-125}{64} \div \frac{50}{16}$ (iv) $\frac{-512}{441} \div \frac{-1024}{21}$

## 1.2 అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలు

### 1.2.1 సంవృత ధర్మాలు

**సంవృత ధర్మం అనగానేమి?**

రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం కూడా ఒక పూర్ణాంకం అయితే పూర్ణాంకాల సమితి సంకలనం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందని ఉంటాం లేదా కూడిక పూర్ణాంకాలలో సంవృతం అని అంటాం.

SCERT TELANGANA

**(i) Whole numbers and Integers**

Let us recall the operations under which the whole numbers and integers are closed. Complete the following table with necessary arguements and relevant examples.

| Numbers | Operations | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Addition** | **Subtraction** | **Multiplications** | **Division** |
| Whole numbers | Closed since a + b is a whole number for any two whole numbers *a* and *b* example – – | Not closed since 5–7 = –2 which is not a whole number | Closed since – – – – – – | Not closed since 5 ÷ 8 = $\frac{5}{8}$ which is not a whole number. |
| Integers | – – – | Closed Since a – b is an integer for any two integers a and b example. | – – – – – – | Not closed since – – – |

**(ii) Rational numbers - Closure Property**

**(a) Addition:**

Consider any two rational numbers $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$

$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$

The result $\frac{51}{56}$ is again a rational number

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ ______ Is it a rational number?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ______ Do you get a rational number?

Check this for few more in the following pairs.

$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$

> **∈ belongs to,**
>
> Let A = {1, 2, 3}
>
> The element 3 is in A and it is written as 3 ∈A and we read it as 3 belongs to A.
>
> **∀ for all**
>
> ∀ is the symbol for all or for every.
>
> If we write ∀ *a, b* ∈Q, it means for all *a*, *b* of Q

We observe that the sum of any two rational numbers is again a rational number. Thus we can say that rational numbers are closed under addition.

Hence (a + b) is a rational number for any two rational numbers a and b, i.e. $\forall a, b \in Q$ ; $(a + b) \in Q$.

SCERT, TELANGANA

**(i) పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలు**

మనం గత తరగతిలో నేర్చుకున్న పూర్ణసంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాల ధర్మాలను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. సరైన ఉదాహరణలు మరియు కారణాలతో క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

| సంఖ్యాసమితి | పరిక్రియలు | | | |
|---|---|---|---|---|
| | సంకలనం | వ్యవకలనం | గుణాకారం | భాగహారం |
| పూర్ణాంకాలు | సంవృతం<br>ఎందుకంటే a, b లు<br>పూర్ణాంకాలు అయిన<br>a + b కూడా<br>పూర్ణాంకమే<br>ఉదా: – – – | సంవృతం కాదు<br>ఎందుకంటే<br>$5-7=-2$. ఇక్కడ<br>$-2$ పూర్ణాంకం<br>కాదు | సంవృతం<br>– – –<br>– – –<br>– – –<br>– – – | సంవృతం కాదు<br>ఎందుకంటే<br>$5 \div 8 = \frac{5}{8}$<br>ఇది పూర్ణాంకం<br>కాదు |
| పూర్ణసంఖ్యలు | – – –<br>– – – | సంవృతం.<br>ఎందుకంటే a, bలు<br>ఏవేని రెండు పూర్ణ<br>సంఖ్యలు అయినా<br>a – b ఒక పూర్ణ<br>సంఖ్య అవుతుంది. | – – –<br>– – – | సంవృతం కాదు<br>ఎందుకంటే<br>– – –<br>– – – |

**(ii) అకరణీయ సంఖ్యలు – సంవృత ధర్మం**

**(a) సంకలనం:**

ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$ లను తీసుకోండి.

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

ఇక్కడ ఫలితం $\frac{51}{56}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే.

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ ______ మొత్తం అకరణీయ సంఖ్యయా?

$\frac{2}{7}+\frac{-2}{7} =$ ______ నీకు ఫలితం అకరణీయ సంఖ్య వచ్చిందా?

> **∈ చెందినది**
>
> సమితి A = {1, 2, 3} అనుకొనిన 3, A లోని మూలకం దీనినే 3 ∈A అని రాసి 3, A కు చెందును లేదా 3, A యొక్క మూలకం అని చదువుతాము.
>
> **∀ అన్నింటికి**
>
> ∀ అనునది 'ప్రతి' లేక 'అన్ని' అనేదానికి గుర్తు ∀ $a, b$ ∈Q, అంటే Q కి చెందిన ప్రతి $a, b$ మూలకాలకు అని అర్థం.

ఇదేవిధంగా మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల జతల మొత్తాలను కనుగొని ఫలితాన్ని సరిచూడండి.

$$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$$

ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఒక అకరణీయ సంఖ్యయే అవుతుందని మనం గమనించవచ్చు. కాబట్టి అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b లకు (a + b) ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. అనగా $\forall\ a, b \in Q;\ (a+b) \in Q$.

SCERT TELANGANA

**(b) Subtraction:**

Consider two rational numbers $\frac{5}{9}$ and $\frac{3}{4}$

Then $\frac{5}{9} - \frac{3}{4} = \frac{(5\times4)-(3\times9)}{36} = \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

Again we got a rational number $\frac{-7}{36}$ (since –7, 36 are integers and 36 is not a zero, hence $\frac{-7}{36}$ is a rational number).

Check this in the following rational numbers also.

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ______________ Is it a rational number ?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right) - \frac{11}{18} =$ ______________ Is it a rational number?

We find that the difference is also a rational number for any two rational numbers. Thus rational numbers are closed under subtraction. Hence (a – b) is a rational number for any two rational number 'a' and 'b',

i.e., $\forall$ a, b $\in$ Q, (a–b) $\in$Q

**(c) Multiplication:**

Observe the following

$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} =$ __________ ; $\frac{2}{1} \times \frac{19}{13} =$ __________

We can notice that in all the cases the product of two rational numbers is a rational number.

Try for some more pairs of rational numbers and check whether their product is a rational number or not . Can you find any two rational numbers whose product is not a rational number?

We find that rational numbers are closed under multiplication. For any two rational numbers a and b, a×b is also rational number. i.e., $\forall$ a, b $\in$ Q, a $\times$ b $\in$Q

SCERT, TELANGANA

**(b) వ్యవకలనం:**

ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{5}{9}$ మరియు $\frac{3}{4}$ లను తీసుకుందాం.

ఇప్పుడు $\frac{5}{9}-\frac{3}{4} = \frac{(5\times4)-(3\times9)}{36} = \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

ఇక్కడ $\frac{-7}{36}$ అనునది తిరిగి ఒక అకరణీయ సంఖ్య. (ఎందుకనగా −7, 36 లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు హారం 0 కి సమానం కాదు. కాబట్టి $\frac{-7}{36}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య).

ఈ ధర్మాన్ని క్రింది ఉదాహరణలతో సరిచూడండి.

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ______________ ఒక అకరణీయ సంఖ్యయా?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right)-\frac{11}{18} =$ ______________ ఒక అకరణీయ సంఖ్యయా?

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల భేదం కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్యయే అవుతుందని మనం గమనించవచ్చు. కావున అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b లకు (a–b) ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

అనగా $\forall$ a, b $\in$ Q, (a–b) $\in$Q

**(c) గుణకారం:**

క్రింది వాటిని గమనించండి.

$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} =$ __________ ; $\frac{2}{1} \times \frac{19}{13} =$ __________

పై అన్ని సందర్భాలలోనూ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం తిరిగి ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావడం మనం గమనించవచ్చు.

మీకు నచ్చిన మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల జతల లబ్ధాలను గుణించి లబ్ధాలు అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయో లేదా సరిచూడండి. లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య కాని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు చెప్పగలవా?

పై ఉదాహరణల నుంచి అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మం పాటిస్తాయని మనం గమనించవచ్చు. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b లకు a × b ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

$\forall$ a, b $\in$ Q, a × b $\in$Q

SCERT, TELANGANA

**(d) Division:**

Consider two rational numbers.

$\frac{2}{3}, \frac{7}{8}$

Then $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$ which is a rational number

Check this for two more example.

$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} =$ __________ = __________ = __________

$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} =$ __________ = __________ = __________

From all the above, we observe that when we divide two rational numbers,we get a rational number. Now can we say that the closure property holds good for rational numbers?

Let us check the following:

0, 5 are rational numbers and $5 \div 0 = \frac{5}{0}$ is not defined. Thus collection of Rational numbers Q is not closed with respect to division.

If we exclude zero from Q then the resulting collection is closed under division.

> Why $\frac{5}{0}$ is not defined ?
> Do the division $5 \div 0 = ?$
> Or 0) 5 (?
> Can you complete the division? What is the quotient? You may have observed that multiplication of any number with '0', the product will be '0'.
> Thus division is not possible, with '0' as divisor.

**Try These**

If we exclude zero from the set of integers then is it closed under division?

**Do This**

Fill the blanks in the table

| Numbers | Closure property under | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Addition | Subtraction | Multiplication | Division |
| Natural numbers | Yes | — | — | — |
| Whole numbers | — | — | — | No |
| Integers | — | Yes | — | — |
| Rational numbers | — | — | Yes | — |

SCERT, TELANGANA

**(d)** **భాగహారం:**

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{7}{8}$ లను తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$ ఇది అకరణీయ సంఖ్యయే.

మరో రెండు ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} =$ ________ $=$ ________ $=$ ________

$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} =$ ________ $=$ ________ $=$ ________

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను భాగిస్తే తిరిగి అకరణీయ సంఖ్యయే వస్తుంది అని పై ఉదాహరణల నుండి మనం గమనించవచ్చు.

అయితే అకరణీయ సంఖ్యల సమితి భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందని మనం చెప్పవచ్చా?

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

0, 5 లు అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు $5 \div 0 = \frac{5}{0}$ ను నిర్వచించలేము.

ఈ సందర్భంలో అకరణీయ సంఖ్యల భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటించడం లేదు. కాబట్టి సున్నా తప్ప మిగిలిన అకరణీయ సంఖ్యల సమితి Q భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మం పాటిస్తుంది అని చెప్పవచ్చు.

$\frac{5}{0}$ ను ఎందుకు నిర్వచించలేము.

5 ÷ 0 అనగా 0) 5 (?

ఈ భాగహారాన్ని పూర్తి చేయగలవా?

అయితే భాగఫలం/ విభక్తము ఎంత?

ఏ సంఖ్యనైనను '0' గుణిస్తే లబ్దం '0' నే వస్తుంది. కావున '0' తో భాగహారం అసాధ్యం.

### ప్రయత్నించండి

పూర్ణసంఖ్యల నుండి సున్నాను మినహాయిస్తే అది భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మం పాటిస్తుందా?

### ఇది చేయండి

కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

| సంఖ్యలు | కింది పరిక్రియల దృష్ట్యా సంవృత ధర్మం | | | |
|---|---|---|---|---|
| | సంకలనం | వ్యవకలనం | గుణకారం | భాగహారం |
| సహజ సంఖ్యలు | అవును | — | — | — |
| పూర్ణాంకాలు | — | — | — | కాదు |
| పూర్ణసంఖ్యలు | — | అవును | — | — |
| అకరణీయ సంఖ్యలు | — | — | అవును | — |

SCERT TELANGANA

### 1.2.2 Commutative Property

The commutative property states that the change in the order of two numbers on binary operation does not change the result.

$a + b = b + a$

$a \times b = b \times a$

Let us recall the commutative property with different operations for both whole numbers and Integers.

Complete the following table.

**(i) Whole numbers**

| Operation | Example | Remark |
|---|---|---|
| Addition | 2, 3 are whole numbers<br>$2+3 = 5$ and $3 + 2 = 5$<br>$\therefore\ 2 + 3 = 3 + 2$ | Addition is commutative in W. |
| Subtraction | Is $3 - 2$ equal to $2 - 3$? | Subtraction is not commutative |
| Multiplication | ------ | ------ |
| Division | $4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$<br>Is $4 \div 2 = 2 \div 4$ ? | ------- |

**(ii) Integers**

| **Operation** | **Example** | **Remark** |
|---|---|---|
| Addition | --- | Addition is commutative in Integers. |
| Subtraction | 2, 3 are integers<br>$2 - (3) = ?$; $(3) - 2 = ?$<br>Is $2 - (3) = (3) - 2 = ?$ | ....... |
| Multiplication | ... ... ... | ... ... ... |
| Division | ... ... ... | Division is not Commutative in Integers |

SCERT, TELANGANA

## 1.2.2 స్థిత్యంతర లేదా వినిమయ ధర్మం

పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలు ఏయే పరిక్రియల దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయో గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

రెండు సంఖ్యల మధ్య చేయు పరిక్రియల ఫలితం ఆ సంఖ్యల క్రమంపై ఆధారపడనిచో అది వినిమయ పరిక్రియ అంటారు.

సంకలన పరిక్రియలో $a + b = b + a$

గుణకార పరిక్రియలో $a \times b = b \times a$

**(i) పూర్ణాంకాలు**

| పరిక్రియలు | ఉదాహరణలు | వ్యాఖ్య |
|---|---|---|
| సంకలనం | 2, 3 లు పూర్ణాంకాలు<br>2+3 = 5 మరియు 3 + 2 = 5<br>$\therefore$ 2 + 3 = 3 + 2 | పూర్ణాంకాలు సంకలనం దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. |
| వ్యవకలనం | 3 – 2 మరియు 2 –3 లు సమానమేనా? | వ్యవకలనం స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు. |
| గుణకారం | ------ | ------ |
| భాగహారం | 4 ÷ 2 = ? 2 ÷ 4 = ?<br>4 ÷ 2 ; 2 ÷ 4 లు సమానమేనా? | ------- |

**(ii) పూర్ణసంఖ్యలు**

| పరిక్రియలు | ఉదాహరణలు | వ్యాఖ్య |
|---|---|---|
| సంకలనం | --- | సంకలనం పూర్ణసంఖ్యలలో వినిమయం అవుతుంది. |
| వ్యవకలనం | 2, 3 లు పూర్ణసంఖ్యలు<br>2 – 3 = ? 3 – 2 = ?<br>2 – 3 మరియు 3 – 2 సమానమేనా? | --- |
| గుణకారం | --- | --- |
| భాగహారం | --- | భాగహారం పూర్ణసంఖ్యలలో వినిమయం కాదు. |

SCERT, TELANGANA

### (iii) Rational Numbers

### (a) Addition:

Take two rational numbers $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$.

$$\frac{5}{2} + \frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

and $\frac{(-3)}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

so $\frac{5}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{5}{2}$

Now check this rule for some more pairs of rational numbers.

Find $\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ and $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$.

Is $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}$ ?

Is $\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4)}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right)$ ?

Did you find any pair of rational numbers whose sum changes when we reverse the order of numbers ? So, we can say that a + b = b + a for any two rational numbers a and b.

Thus addition is commutative in the set of rational numbers.

$\therefore \forall a, b \in Q, a + b = b + a$

**(b) Subtraction:** Take two rational numbers $\frac{2}{3}$ and $\frac{7}{8}$

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ and $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

So $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

Check the following.

Is $2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$ ?

Is $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ ?

SCERT, TELANGANA

**(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు**

**(a) సంకలనం:**

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$ తీసుకుందాం.

$$\frac{5}{2} + \frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

మరియు $\frac{(-3)}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

కాబట్టి $\frac{5}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{5}{2}$

మరికొన్ని క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల జతలు తీసుకొని ఈ నియమాన్ని సరిచూడండి.

$\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ మరియు $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$ లను కనుగొనండి.

$\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}$ అవుతుందా?

$\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right)$ మరియు $\frac{(-4)}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right)$ లు సమానమేనా?

సంఖ్యల క్రమం మార్చినపుడు మొత్తం మారిపోయిటట్లున్న రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అని చెప్పగలవా?

a, b లు ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే a + b = b + a అవుతుందని మనం గమనించవచ్చు.

కాబట్టి సంకలనం అనేది అకరణీయ సంఖ్యలలో స్థిత్యంతరం అని లేదా అకరణీయ సంఖ్యా సమితి సంకలనం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుందని చెప్పవచ్చు.

$$\forall\ a, b \in Q,\ a + b = b + a$$

**(b) వ్యవకలనం:** రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{7}{8}$ తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ మరియు $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

కాబట్టి $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

క్రింది వానిని పరిశీలించండి.

$2-\frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$ లు సమానమేనా?

$\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ అవుతుందా?



SCERT, TELANGANA

Thus we can say that subtraction is not commutative in the set of rational numbers.

$a - b \neq b - a$ for any two rational numbers a and b.

**(c) Multiplication:** Take two rational numbers $2, -\frac{5}{7}$

$$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7} \;;\quad \frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7} \quad \text{therefore} \quad 2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$$

Is $\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$ ?

Check for some more rational numbers .

We can conclude that multiplication is commutative in the set of rational numbers.

It means $a \times b = b \times a$ for any two rational numbers a and b.

i.e. $\forall$ a, b $\in$ Q, $a \times b = b \times a$

**(d) Division:**

Is $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$ ?

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} = \frac{3}{2} \quad \text{and} \quad \frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$$

Thus we can say that division of rational numbers is not commutative in the set of rational numbers .

### Do This

Complete the following table.

| Numbers | Commutative with respect to | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Addition | Subtraction | Multiplication | Division |
| Natural numbers | Yes | No | Yes | ——— |
| Whole numbers | ——— | ——— | ——— | No |
| Integers | ——— | ——— | ——— | ——— |
| Rational numbers | ——— | ——— | ——— | No |

SCERT, TELANGANA

పై పరిశీలనల నుంచి అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర లేదా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటించవని తెలుసుకున్నాం.

a, b లు ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే $a - b \neq b - a$.

**(c) గుణకారం:** రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $2, -\frac{5}{7}$ లను తీసుకుందాం.

$$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7} \;;\quad \frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7} \quad \text{కాబట్టి } 2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$$

$\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$ అవుతుందా?

మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు తీసుకొని ఈ నియమాన్ని సరిచూడండి. అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

అనగా a, b లు ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే $a \times b = b \times a$ అవుతుంది.

అనగా $\forall\, a, b \in Q,\; a \times b = b \times a$

**(d) భాగహారం:**

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9}$ మరియు $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$ లు సమానమేనా?

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{14}_{2}} = \frac{3}{2} \quad \text{మరియు} \quad \frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$$

కాబట్టి $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

దీని నుండి అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారం దృష్ట్యా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటించవు అని చెప్పవచ్చు.

### ఇవి చేయండి

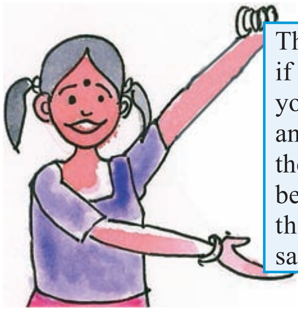
క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

| సంఖ్యలు | స్థిత్యంతర ధర్మం క్రింది పరిక్రియల దృష్ట్యా | | | |
|---|---|---|---|---|
| | సంకలనం | వ్యవకలనం | గుణకారం | భాగహారం |
| సహజ సంఖ్యలు | అవును | కాదు | అవును | — |
| పూర్ణాంకాలు | — | — | — | కాదు |
| పూర్ణసంఖ్యలు | — | — | — | — |
| అకరణీయ సంఖ్యలు | — | — | — | కాదు |

SCERT, TELANGANA

### 1.2.3 Associative Property

Recall the associative property of whole numbers with respect to four operations, i.e. addition, subtraction, multiplication & division.



The associative property states that if you have to add three numbers, you can add the first two numbers and then add the third or you add the second and third number in the beginning and then add the first to the sum. The result will be the same i.e. (3+2)+5 = 3+(2+5).

**(i) Whole numbers**

Complete the table with necessary illustrations and remarks.

| Operation | Examples with whole numbers | Remark |
|---|---|---|
| Addition | Is $2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$ ?<br>$2 + (3 + 0) = 2 + 3 = 5$<br>$(2 + 3) + 0 = 5 + 0 = 5$<br>$\Rightarrow 2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$<br>$a + (b + c) = (a + b) + c$<br>for any three whole numbers a, b, c | — — —<br>— — — |
| Subtraction | $(2-3) - 2 = ?$; $2-(3-2) = ?$<br>Is $(2-3) -2 = 2-(3-2)$ ? | Subtraction is not associative |
| Multiplication | — — — — — —<br>— — — — — — | Multiplication is associative |
| Division | Is $2 \div (3 \div 5) = (2 \div 3) \div 5$?<br>$2 \div (3 \div 5) = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$<br>$(2 \div 3) \div 5 = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$<br>$2 \div (3 \div 5) \neq (2 \div 3) \div 5$ | Division is not associative |

**(ii) Integers**

Recall associativity for integers under four operations.

Complete the following table with necessary remarks.

SCERT, TELANGANA

### 1.2.3 సహచర ధర్మం

మనం గత తరగతులలో నేర్చుకున్న సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహారాల దృష్ట్యా పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యల సహచర ధర్మాలను ఒకసారి గుర్తు చేసుకుందాం.

సంకలన సహచర ధర్మం: ఏవైనా మూడు సంఖ్యలను సంకలనం చేసే సందర్భంలో మొదటి రెండు సంఖ్యల మొత్తానికి మూడవ సంఖ్యను కలిపినా మొదటి సంఖ్యకు చివరి రెండు సంఖ్యల మొత్తాన్ని కలిపినా ఫలితం ఒక్కటే.
ఉదా: $(3+2)+5=3+(2+5)$.

**(i) పూర్ణాంకాలు**

క్రింది పట్టికను సరైన ఉదాహరణలు మరియు వ్యాఖ్యలతో పూరించండి.

| పరిక్రియలు | ఉదాహరణలు – పూర్ణాంకాలు | వ్యాఖ్య |
|---|---|---|
| సంకలనం | $2+(3+0)=(2+3)+0$ ?<br>$2+(3+0)=2+3=5$<br>$(2+3)+0=5+0=5$<br>$\Rightarrow 2+(3+0)=(2+3)+0$<br>ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు<br>a, b, c లకు $a+(b+c)=(a+b)+c$ | - - - |
| వ్యవకలనం | $(2-3)-2=$ ? : $2-(3-2)=$ ?<br>$(2-3)-2 = 2-(3-2)$ అవుతుందా? | వ్యవకలనం సహచరం కాదు. |
| గుణకారం | - - - | గుణకారం సహచరం అవుతుంది. |
| భాగహారం | $2\div(3\div5)=(2\div3)\div5$?<br>$2\div(3\div5)=2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$<br>$(2\div3)\div5=\frac{2}{3}\div5=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$<br>$2\div(3\div5)\neq(2\div3)\div5$ | భాగహారం సహచరం కాదు. |

**(ii) పూర్ణసంఖ్యలు**

చతుర్విధ ప్రక్రియల ద్వారా పూర్ణసంఖ్యలలో సహచర ధర్మాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం. క్రింది పట్టికను సరైన వ్యాఖ్యలతో పూరించండి.

SCERT, TELANGANA

| Operation | Integers with example | Remark |
|---|---|---|
| Addition | Is 2 + [(–3) + 5)] = [(2 + (–3)] + 5 ? <br> $2+[(-3)+5]=2+[-3+5]=2+2=4$ <br> $[2+(-3)]+5=[2-3]+5=-1+5=4$ <br> For any three integers a, b and c <br> a + (b + c) = (a + b) + c | — — —— — |
| Subtraction | Is 6 – (9 – 5) = (6 – 9) – 5 ? | — — —— — |
| Multiplication | Is $2\times[7\times(-3)]=(2\times7)\times(-3)$ ? | — — —— — |
| Division | $10\div[2\div(-5)]=[10\div2]\div(-5)$ ? <br> $10\div[2\div(-5)]=10\div\frac{-2}{5}=10\times\frac{-5}{2}=-25$ <br> Now <br> $(10\div2)\div(-5)=\frac{10}{2}\div(-5)=5\div(-5)=\frac{5}{-5}=-1$ <br> Thus $10\div[2\div(-5)]\neq[10\div2]\div(-5)$ | — — —— — |

**(iii) Rational numbers**

**(a) Addition**

Let us consider three rational numbers $\frac{2}{7}$, 5, $\frac{1}{2}$ and verify whether

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{L.H.S.}=\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.}=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

L.H.S. = R.H.S.

Find $\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\frac{4}{3}\right]$ and $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$

Are the two sums equal?

Take some more rational numbers and verify the associativity.

SCERT, TELANGANA

| పరిక్రియలు | ఉదాహరణలు – పూర్ణసంఖ్యలు | వ్యాఖ్య |
|---|---|---|
| సంకలనం | $2+[(-3)+5)]=[(2+(-3)]+5$ అవుతుందా?<br>$2+\left[(-3)+5\right]=2+\left[-3+5\right]=2+2=4$<br>$\left[2+(-3)\right]+5=\left[2-3\right]+5=-1+5=4$<br>ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు a, b, c లకు<br>$a+(b+c)=(a+b)+c$ | - - - |
| వ్యవకలనం | $6-(9-5)=(6-9)\ -5$ అవుతుందా? | - - - |
| గుణకారం | $2\times[7\times(-3)]=(2\times7)\times(-3)$<br>అవుతుందేమో సరిచూడండి. | - - - |
| భాగహారం | $10\div\left[2\div(-5)\right]=[10\div2]\div(-5)$ అవుతుందా?<br>$10\div\left[2\div(-5)\right]=10\div\frac{-2}{5}=10\times\frac{-5}{2}=-25$<br>అదేవిధంగా<br>$(10\div2)\ \div(-5)=\frac{10}{2}\div(-5)\ =5\div(-5)=\frac{5}{-5}=-1$<br>కావున $10\ \div\left[2\div(-5)\right]\neq\left[10\div2\right]\ \div(-5)$ | - - - |

**(iii) అకరణీయ సంఖ్యలు – సహచర ధర్మం**

**(a) సంకలనం**

ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{7}, 5, \frac{1}{2}$ తీసుకుందాం.

$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$ ను సరిచూద్దాం.

$$\text{L.H.S.}\quad \frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.}\quad \left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

$\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\frac{4}{3}\right]$ మరియు $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$ విలువలు కనుగొనండి.

ఈ రెండు మొత్తాలు సమానమేనా?

మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొని సహచర ధర్మాన్ని పరీక్షించండి.

SCERT TELANGANA

We find rational numbers satisfy associative property under addition.

a + (b + c) = (a + b) + c for any three rational numbers a, b and c.

i.e., $\forall$ a, b, c $\in$ Q, a + (b + c) = (a + b) + c

**(b) Subtraction**

Let us take any three rational numbers $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ and $\frac{-5}{4}$

Verify whether $\frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] - \left(\frac{-5}{4}\right)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{8}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2 - 3}{4}\right) + \frac{5}{4} = \left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right)$$

L.H.S. $\neq$ R.H.S.

We find subtraction is not associative in the set of rational numbers. That is a - (b - c) $\neq$ (a - b) - c for any three rational numbers a, b, c.

**(c) Multiplication**

Take three rational numbers $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{7}$

Is $\frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$ ?

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right] = \frac{-40}{147}$$

$$\text{R.H.S} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

L.H.S = R.H.S

SCERT, TELANGANA

అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం దృష్ట్యా సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని మనం తెలుసుకోవచ్చు.

ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b, మరియు c లకు

$a + (b + c) = (a + b) + c$

అనగా $\forall$ a, b, c $\in$ Q, $a + (b + c) = (a + b) + c$

**(b) వ్యవకలనం**

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ మరియు $\frac{-5}{4}$ లు ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right]$ మరియు $\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] - \left(\frac{-5}{4}\right)$ లు సమానమేనా?

$$\text{L.H.S. } \frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{8}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S. } \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2 - 3}{4}\right) + \frac{5}{4} = \left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనం దృష్ట్యా సహచర ధర్మాన్ని కలిగి ఉండవు అని మనం చెప్పవచ్చు.

అనగా ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b, c లకు $a-(b-c) \neq (a-b)-c$.

**(c) గుణకారం**

మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ మరియు $\frac{-5}{7}$ లను తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$ అవుతుందా?

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right] = \frac{-40}{147}$$

$$\text{R.H.S} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

SCERT, TELANGANA

Check the following.

Find $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right)$ and $\left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$

Is $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$ ?

Find $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right)$ and $\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$

Is $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$ ?

We can find in all the above cases L.H.S = R.H.S

Thus multiplication is associative in rational numbers

a × (b × c) = (a × b) × c for any three rational numbers a, b, c.

i.e., $\forall$ a, b, c $\in$ Q, a × (b × c) = (a × b) × c

**(d) Division**

Take any three rational numbers $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ and $\frac{1}{7}$

Is $\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$ ?

L.H.S. $= \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \frac{21}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{8}{63}$

R.H.S. $= \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right) \div \frac{1}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{56}{9}$

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$$

L.H.S. $\neq$ R.H.S.

Thus $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ for any three rational numbers a, b, c.

So, division is not associative in rational numbers.

SCERT, TELANGANA

క్రింది వానిని సరిచూడండి.

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\right)$ మరియు $\left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 3$ లను కనుగొనండి.

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\right) = \left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 3$ అవుతుందా?

$\frac{5}{3}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}\right)$ మరియు $\left(\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{5}$ లను కనుగొనండి.

$\frac{5}{3}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{5}$ అవుతుందా?

పై అన్ని సందర్భాలలో L.H.S = R.H.S అవుతుందని కనుగొంటాము.

కాబట్టి అకరణీయ సంఖ్యలలో గుణకారం సహచరం అవుతుంది అని చెప్పవచ్చు.

ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b మరియు c లకు

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

అనగా $\forall$ a, b, c $\in$ Q, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

**(d) భాగహారం**

మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ మరియు $\frac{1}{7}$ లను తీసుకుందాం.

$\frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7}$ అవుతుందా?

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3}\div\frac{21}{4} = \frac{2}{3}\times\frac{4}{21} = \frac{8}{63}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\div\frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right)\div\frac{1}{7} = \frac{8}{9}\times\frac{7}{1} = \frac{56}{9}$$

$$\frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7}$$

L.H.S. $\neq$ R.H.S.

కావున a, b, c లు మూడు అకరణీయ సంఖ్యలకు $a\div(b\div c)\neq(a\div b)\div c$, అకరణీయ సంఖ్యలలో భాగహారం దృష్ట్యా సహచర ధర్మం వర్తించదు.

SCERT, TELANGANA

## Do This

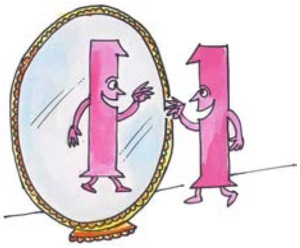
Complete the following table

| Numbers | Associative under | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Addition | Subtraction | Multiplication | Division |
| Natural numbers | Yes | No | . . . . . | . . . . . |
| Whole numbers | . . . . . | . . . . . | . . . . . | No |
| Integers | . . . . . | No | Yes | . . . . . |
| Rational numbers | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |

### 1.2.4 The Role of Zero

Can you find a number, when it is added to $\frac{1}{2}$ gives the same number $\frac{1}{2}$ ?

When the number '**0**' is added to any rational number, the rational number remains the same. For example



$1 + 0 = 1$ and $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ and $0 + (-2) = -2$

$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ and $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

For this reason we call '0' as an identity element of addition or "additive identity".

If **a** represents any rational number then $a + 0 = a$ and $0 + a = a$

Does the set of natural numbers have additive identity ?

### 1.2.5 The Role of 1

Fill in the following blanks :

$3 \times \square = 3$ and $\square \times 3 = 3$

$-2 \times \square = -2$ and $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ and $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

What observations have you made in the above multiplications?

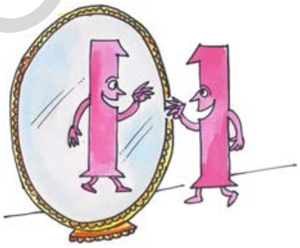
SCERT, TELANGANA

### ఇది చేయండి

క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

| సంఖ్యలు | క్రింది పరిక్రియల దృష్ట్యా సహచర న్యాయం | | | |
|---|---|---|---|---|
| | సంకలనం | వ్యవకలనం | గుణకారం | భాగహారం |
| సహజ సంఖ్యలు | అవును | కాదు | — | — |
| పూర్ణాంకాలు | — | — | — | కాదు |
| పూర్ణసంఖ్యలు | — | కాదు | అవును | — |
| అకరణీయ సంఖ్యలు | — | — | — | — |

## 1.2.4 సున్న (Zero) యొక్క పాత్ర



$\frac{1}{2}$ కు ఏ సంఖ్యను కలిపితే ఫలితం $\frac{1}{2}$ వస్తుందో చెప్పగలవా?

ఒక అకరణీయ సంఖ్యకు '0' కలిపితే ఆ అకరణీయ సంఖ్యలో మార్పు ఉండదు.

ఉదాహరణకు

$1 + 0 = 1$ మరియు $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ మరియు $0 + (-2) = -2$

అలాగే $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ మరియు $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ఒక అకరణీయ సంఖ్యకు సున్నాను కలిపినా అదే అకరణీయ సంఖ్య వస్తుంది. కావున, '0'ను సంకలన తత్సమాంశం అని అంటారు.

'a' ఏదైనా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే $a + 0 = a = 0 + a$

సహజ సంఖ్యాసమితి సంకలన తత్సమాంశంను కలిగివుందా?

## 1.2.5 '1' యొక్క పాత్ర

క్రింద ఇవ్వబడిన ఖాళీ బాక్సులను పూరించండి.

$3 \times \square = 3$ మరియు $\square \times 3 = 3$

$-2 \times \square = -2$ మరియు $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ మరియు $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

పై గుణకారములలో నీవు ఏమి పరిశీలించావు?

SCERT, TELANGANA

You will find that when you multiply any rational number with '1', you will get the same rational number as the product.

We say that '1' is the multiplicative identity for rational numbers

What is the multiplicative identity for integers and whole numbers?

We often use the identity properties without realizing that we are using them.

For example when we write $\frac{15}{50}$ in the simplest form we may do the following.

$$\frac{15}{50} = \frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$$

When we write that $\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$. Here we used the identity property of multiplication.

### 1.2.6 Existence of Inverse

**(i) Additive inverse:**

$3 + (-3) = 0$ and $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ and $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ and ____ $+ \frac{2}{3} = 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ and $? + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Here $-3$ and $3$ are called the additive inverses of each other because on adding them we get the sum '0' i.e. the additive identity. Any two numbers whose sum is '0' are called the additive inverses of each other.

**In general if a represents any rational number then a + (–a) = 0 and (–a) + a = 0. Then 'a', '–a' are additive inverse of each other.**

The additive inverse of 0 is only 0 as $0 + 0 = 0$.

**(ii) Multiplicative inverse:**

By which rational number $\frac{2}{7}$ is multiplied to get the product 1 ?

We can see $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$ and $\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1$

SCERT, TELANGANA

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను '1'చే గుణిస్తే, వాటి లబ్దం అదే సంఖ్య వస్తుందని గమనించావా?

ఇక్కడ 1 ను మనం అకరణీయ సంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశం అని అంటాం.

పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశం ఏది?

గుణకార తత్సమాంశ ధర్మాన్ని వివిధ సందర్భాలలో మనకు తెలియకుండానే ఉపయోగిస్తుంటాము.

ఈ క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

$\frac{15}{50}$ ని సూక్ష్మ రూపంలో రాయండి.

$$\frac{15}{50} = \frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$$

$\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$ అని రాసేటప్పుడు మనం ఇక్కడ గుణకార తత్సమాంశ ధర్మాన్ని ఉపయోగించాము.

### 1.2.6 విలోమ అస్థిత్వము

**(i) సంకలన విలోమం:**

$3 + (-3) = 0$ మరియు $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ మరియు $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ మరియు ____ $+ \frac{2}{3} = 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ మరియు $? + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

3 మరియు (–3) ల మొత్తం సున్న. ఇది సంకలన తత్సమాంశం. కాబట్టి 3 మరియు –3లను ఒకదానికొకటి సంకలన విలోమాలు అని అంటాము. ఏవైనా రెండు సంఖ్యల మొత్తం సున్నా అయితే ఆ రెండు సంఖ్యలను పరస్పరం సంకలన విలోమాలు అని అంటటారు.

**సాధారణంగా 'a' ఏదేని ఒక అకరణీయ సంఖ్యకు $a + (-a) = 0$ మరియు $(-a) + a = 0$ అయిన $a, -a$ లు పరస్పర సంకలన విలోమాలు.**

$0 + 0 = 0$ కావున 0 యొక్క సంకలన విలోమం 0.

**(ii) గుణకార విలోమం:**

లబ్ధం 1 కావడానికి $\frac{2}{7}$ అనే అకరణీయ సంఖ్యను ఏ అకరణీయ సంఖ్యచే గుణించాలి?

$\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$ మరియు $\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1$ అని మనం గమనించవచ్చు.

SCERT, TELANGANA

Fill the boxes below.

$2 \times \square = 1$ and $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ and $\square \times 5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ and $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

Any two numbers whose product is '1' are called the multiplicative inverses of each other.

For example, $4 \times \frac{1}{4} = 1$ and $\frac{1}{4} \times 4 = 1$, therefore the numbers 4 and $\frac{1}{4}$ are the multiplicative inverses (or the reciprocals ) of each other.

We say that a rational number $\frac{c}{d}$ is called the reciprocal or the multiplicative inverse of another rational number $\frac{a}{b}$ if $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$

### Think, Discuss and Write

1. If a property holds good with respect to addition for rational numbers, whether it holds good for integers? And for whole numbers? Which one holds good and which doesn't hold good?
2. Write the numbers whose multiplicative inverses are the numbers themselves
3. Can you find the reciprocal of '0' (zero)? Is there any rational number such that when it is multiplied by '0' gives '1'?

$\square \times 0 = 1$ and $0 \times \square = 1$

## 1.3 Distributivity of multiplication over addition

Take three rational numbers $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

Let us verify whether $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$

SCERT, TELANGANA

క్రింది గడులను పూరించండి.

$2 \times \square = 1$ మరియు $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ మరియు $\square \times 5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ మరియు $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

ఏవైనా రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 1 అయితే, ఆ రెండు సంఖ్యలను పరస్పరం గుణకార విలోమాలు అని అంటారు.

ఉదాహరణకు $4 \times \frac{1}{4} = 1$ మరియు $\frac{1}{4} \times 4 = 1$

కావున 4 మరియు $\frac{1}{4}$ లు రెండూ ఒకదానికొకటి గుణకార విలోమాలు లేదా వ్యుత్క్రమాలు అవుతాయి.

ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{c}{d}$ మరొక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ కు గుణకార విలోమం అయితే $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. సంకలనం దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యలు పాటించే ప్రతి ధర్మం పూర్ణసంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాలు కూడా పాటిస్తాయా? ఏది అవుతుంది? ఏది కాదు?
2. ఏయే సంఖ్యల గుణకార విలోమాలు అవే సంఖ్యలవుతాయి? లేదా తనకు తానే గుణకార విలోమాలు అయ్యే సంఖ్యలు ఏవి?
3. సున్నా (0) యొక్క వ్యుత్క్రమం నీవు కనుగొనగలవా? '0'చే గుణించగా లబ్ధం 1 వచ్చే ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్య కలదా?

$\square \times 0 = 1$ లేదా $0 \times \square = 1$

## 1.3 విభాగ న్యాయం (సంకలనంపై గుణకార విభాగం)

ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ లను తీసుకుందాం.

$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$ అగునేమో ఒకసారి చూద్దాం.

SCERT, TELANGANA

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5}\times\left(\frac{2+3}{4}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10}+\frac{6}{20} = \frac{4+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

Thus $$\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

This property is called the distributive law of multiplication over addition.

Now verify the following.

Is $\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)$

What do you observe? Is L.H.S = R.H.S?

This property is called the distributive law over subtraction.

**Try these:** Find using distributivity

(1) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{10}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{9}{10}\right\}$

(2) $\left\{\frac{9}{16}\times 3\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times(-19)\right\}$

Take some more rational numbers and verify the distributive property

For all rational numbers a, b and c

We can say-

$a\,(b + c) = ab + ac$

$a\,(b - c) = ab - ac$

## Do These

**Complete the following table.**

| Numbers | Additive properties | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Closure | Commutative | Associative | Existence of Identity | Existence of Inverse |
| Rational Numbers | Yes | —— | —— | —— | —— |
| Integers | Yes | —— | —— | —— | —— |
| Whole Numbers | —— | —— | —— | Yes | No |
| Natural Numbers | Yes | —— | —— | —— | —— |

SCERT, TELANGANA

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2+3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{20} = \frac{4+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

కాబట్టి $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

ఈ ధర్మాన్ని సంకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం అని అంటారు.

క్రింది వాటిని సరిచూడండి.

$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)$ అవుతుందా?

మీరు ఏమి పరిశీలించారు? L.H.S = R.H.S అవుతుందా?

ఈ ధర్మాన్ని వ్యవకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం అని అంటారు. మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలతో విభాగ న్యాయాన్ని సరిచూడండి. ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు a, b, c లకు

$a\,(b + c) = ab + ac$

$a\,(b - c) = ab - ac$ అవుతుంది.

**ప్రయత్నించండి:** విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

(1) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{10}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{9}{10}\right\}$

(2) $\left\{\frac{9}{16} \times 3\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times -19\right\}$

## ఇవి చేయండి

క్రింది పట్టికను పూరించండి.

| సంఖ్యలు | సంకలన ధర్మాలు | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | సంవృత | స్థిత్యంతరం | సహచరం | తత్సమాంశం | విలోమం |
| అకరణీయ సంఖ్యలు | అవును | — | — | — | — |
| పూర్ణసంఖ్యలు | అవును | — | — | — | — |
| పూర్ణాంకాలు | — | — | — | అవును | కాదు |
| సహజ సంఖ్యలు | అవును | — | — | — | — |

SCERT, TELANGANA

**Complete the following table.**

| Numbers | Multiplicative properties | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Closure | Commutative | Associative | Existence of Identity | Existence of Inverse |
| Rational Numbers | Yes | —— | —— | —— | —— |
| Integers | —— | Yes | —— | —— | —— |
| Whole Numbers | —— | —— | Yes | —— | —— |
| Natural Numbers | —— | —— | —— | Yes | —— |

**Example 1:** Simplify $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)$

**Solution:** Rearrange the given fractions keeping like fractions together.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{5}-\frac{13}{7}$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{13}{7}\right) \text{ (by commutative law of addition)}$$

$$=\frac{2-6}{5}+\frac{3-13}{7}$$

$$=\frac{-4}{5}+\frac{-10}{7}=\frac{-4}{5}-\frac{10}{7}$$

$$=\frac{(-4\times7)-(10\times5)}{35}=\frac{-28-50}{35}=\frac{-78}{35}$$

**Example 2:** Write the additive inverses of each of the following rational numbers.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-11}{5}$ (iii) $\frac{7}{-13}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

**Solution :** (i) The additive inverse of $\frac{2}{7}$ is $\frac{-2}{7}$

because $\frac{2}{7}+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2-2}{7}=0$

SCERT, TELANGANA

క్రింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

| సంఖ్యలు | గుణకార ధర్మాలు | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | సంవృత | స్థిత్యంతరం | సహచరం | తత్సమాంశం | విలోమం |
| అకరణీయ సంఖ్యలు | అవును | — | — | — | — |
| పూర్ణసంఖ్యలు | — | అవును | — | — | — |
| పూర్ణాంకాలు | — | — | అవును | — | — |
| సహజ సంఖ్యలు | — | — | — | అవును | — |

**ఉదాహరణ 1:** $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{-6}{5}+\frac{-13}{7}$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

**సాధన:** సజాతి భిన్నాలు ప్రక్కప్రక్కన ఉండునట్లుగా మార్చగా

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{5}-\frac{13}{7}$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{13}{7}\right) \quad (\because \text{సంకలనంపై స్థిత్యంతర న్యాయం})$$

$$=\frac{2-6}{5}+\frac{3-13}{7}$$

$$=\frac{-4}{5}+\frac{-10}{7}=\frac{-4}{5}-\frac{10}{7}$$

$$=\frac{(-4\times7)-(10\times5)}{35}=\frac{-28-50}{35}=\frac{-78}{35}$$

**ఉదాహరణ 2:** క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల సంకలన విలోమాలు రాయండి.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-11}{5}$ (iii) $\frac{7}{-13}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

**సాధన:** (i) $\frac{2}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{-2}{7}$

ఎందుకంటే $\frac{2}{7}+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2-2}{7}=0$

SCERT, TELANGANA

(ii) The additive inverse of $\frac{-11}{5}$ is $-\left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{11}{5}$

(iii) The additive inverse of $\frac{7}{-13}$ is $-\left(\frac{7}{-13}\right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

(iv) The additive inverse of $\frac{-2}{-3}$ is $-\left(\frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}3}\right) = -\frac{2}{3}$

**Example 3 :** Find $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$

**Solution :** $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

(by the commutative law of addition)

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{9}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

$= \frac{-1}{9}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{23}{180}$

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{8+15}{20}\right) + \frac{23}{180}$ (by the distributive law)

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0$ (by the additive inverse law)

**Example 4:** Find the product of the reciprocals of $\frac{-9}{2}, \frac{5}{18}$ and add the additive inverse of $\left(\frac{-4}{5}\right)$ to the product. What is the result?

**Solution :** The reciprocal of $\frac{-9}{2}$ is $\frac{-2}{9}$

The reciprocal of $\frac{5}{18}$ is $\frac{18}{5}$

Product of reciprocals $= \frac{-2}{\cancel{9}_{1}} \times \frac{\cancel{18}^{2}}{5} = \frac{-4}{5}$

SCERT, TELANGANA

(ii) $\frac{-11}{5}$ యొక్క సంకలన విలోమం $-\left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{11}{5}$

(iii) $\frac{7}{-13}$ యొక్క సంకలన విలోమం $-\left(\frac{7}{-13}\right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

(iv) $\frac{-2}{-3}$ యొక్క సంకలన విలోమం $-\left(\frac{\not{-}2}{\not{-}3}\right) = -\frac{2}{3}$

**ఉదాహరణ 3:** $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$ ను కనుగొనండి.

**సాధన:** $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

(సంకలన వినిమయ ధర్మం)

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{9}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

$= \frac{-1}{9}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{23}{180}$

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{8+15}{20}\right) + \frac{23}{180}$ ( విభాగ న్యాయం)

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0$ (సంకలన విలోమ ధర్మం)

**ఉదాహరణ 4:** $\frac{-9}{2}$ మరియు $\frac{5}{18}$ ల వ్యుత్క్రమాల లబ్దానికి $\left(\frac{-4}{5}\right)$ యొక్క సంకలన విలోమాన్ని కూడగా వచ్చే ఫలితం ఎంత?

**సాధన:** $\frac{-9}{2}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{-2}{9}$

$\frac{5}{18}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{18}{5}$

వ్యుత్క్రమాల లబ్దం $= \frac{-2}{\not{9}_1} \times \frac{\not{18}^2}{5} = \frac{-4}{5}$

SCERT TELANGANA

The additive inverse of $\left(\frac{-4}{5}\right)$ is $\frac{4}{5}$

Thus the product + the additive inverse $= \frac{-4}{5} + \frac{4}{5} = 0$ (the additive Inverse property)

## Exercise - 1.1

1. Name the property involved in the following examples

(i) $\frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5} = 0 + \frac{8}{5}$

(ii) $2\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{3}{7} \times 1 = \frac{3}{7} = 1 \times \frac{3}{7}$

(iv) $\left(\frac{-2}{5}\right) \times 1 = \frac{-2}{5} = 1 \times \left(\frac{-2}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

(vi) $\frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$

(vii) $7a + (-7a) = 0$

(viii) $x \times \frac{1}{x} = 1 \; (x \neq 0)$

(ix) $(2 \times x) + (2 \times 6) = 2 \times (x + 6)$

2. Write the additive and the multiplicative inverses of the following.

(i) $\frac{-3}{5}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{7}{9}$ (v) $-1$

3. Fill in the blanks

(i) $\left(\frac{-1}{17}\right) + (____) = \left(\frac{-12}{5}\right) + \left(\frac{-1}{17}\right)$

(ii) $\frac{-2}{3} + ____ = \frac{-2}{3}$

(iii) $1 \times ____ = \frac{9}{11}$

(iv) $-12 + \left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) = \left(-12 + \frac{5}{6}\right) + (____)$

(v) $(____) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} \times ____\right)$

(vi) $\frac{-16}{7} + ____ = \frac{-16}{7}$

SCERT, TELANGANA

$\left(\frac{-4}{5}\right)$ యొక్క సంకలన విలోమం $\frac{4}{5}$

వ్యుత్క్రమాల లబ్దం + సంకలన విలోమం $= \frac{-4}{5} + \frac{4}{5} = 0$ (సంకలన విలోమ ధర్మం)

## అభ్యాసం - 1.1

1. క్రింది ఉదాహరణలలో ఉన్న ధర్మాలను గుర్తించి రాయండి.

(i) $\frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5} = 0 + \frac{8}{5}$

(ii) $2\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{3}{7} \times 1 = \frac{3}{7} = 1 \times \frac{3}{7}$

(iv) $\left(\frac{-2}{5}\right) \times 1 = \frac{-2}{5} = 1 \times \left(\frac{-2}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

(vi) $\frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$

(vii) $7a + (-7a) = 0$

(viii) $x \times \frac{1}{x} = 1 \; (x \neq 0)$

(ix) $(2 \times x) + (2 \times 6) = 2 \times (x + 6)$

2. క్రింది వాటికి సంకలన మరియు గుణకార విలోమాలు రాయండి.

(i) $\frac{-3}{5}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{7}{9}$ (v) $-1$

3. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $\left(\frac{-1}{17}\right) + (____) = \left(\frac{-12}{5}\right) + \left(\frac{-1}{17}\right)$

(ii) $\frac{-2}{3} + ____ = \frac{-2}{3}$

(iii) $1 \times ____ = \frac{9}{11}$

(iv) $-12 + \left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) = \left(-12 + \frac{5}{6}\right) + (____)$

(v) $(____) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} \times ____\right)$

(vi) $\frac{-16}{7} + ____ = \frac{-16}{7}$

SCERT, TELANGANA

4. Multiply $\frac{2}{11}$ by the reciprocal of $\frac{-5}{14}$

5. Which properties can be used in computing $\frac{2}{5} \times \left(5 \times \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \left(3 \times \frac{4}{11}\right)$

6. Verify the following and write the property used

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{-1}{2}\right) + \frac{-3}{2} = \frac{5}{4} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2}\right)$$

7. Evaluate $\frac{3}{5} + \frac{7}{3} + \left(\frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right)$ after rearrangement.

8. Subtract

   (i) $\frac{3}{4}$ from $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{-32}{13}$ from 2 (iii) $-7$ from $\frac{-4}{7}$

9. What number should be added to $\frac{-5}{8}$ so as to get $\frac{-3}{2}$ ?

10. The sum of two rational numbers is 8 If one of the numbers is $\frac{-5}{6}$ find the other.

11. Is subtraction associative in rational numbers? Explain with an example.

12. Verify that $-(-x) = x$ for

    (i) $x = \frac{2}{15}$ (ii) $x = \frac{-13}{17}$

13. Write-

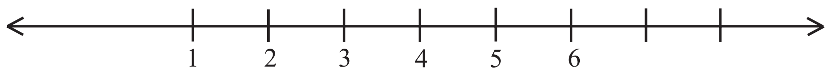
    (i) The set of numbers which do not have an additive identity

    (ii) The rational number that does not have any reciprocal

    (iii) The reciprocal of a negative rational number.

## 1.4 Representation of Rational numbers on Number line

Gayathri drew a number line and labelled some numbers on it.




What set of numbers are marked on the line?

SCERT, TELANGANA

4. $\frac{2}{11}$ ను $\frac{-5}{14}$ యొక్క గుణకార విలోమంతో గుణించండి.

5. $\frac{2}{5} \times \left(5 \times \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \left(3 \times \frac{4}{11}\right)$ యొక్క గణనలో ఏయే ధర్మాలను ఉపయోగిస్తాము.

6. క్రింది సమానత్వాన్ని సరిచూడండి మరియు ఏయే ధర్మాలను ఉపయోగించారో రాయండి.

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{-1}{2}\right) + \frac{-3}{2} = \frac{5}{4} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2}\right)$$

7. $\frac{3}{5} + \frac{7}{3} + \left(\frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right)$ విలువను పదాల అమరికను మార్చి సూక్ష్మీకరించండి.

8. క్రింది వాటిని వ్యవకలనం చేయండి.

(i) $\frac{1}{3}$ నుండి $\frac{3}{4}$ (ii) 2 నుండి $\frac{-32}{13}$ (iii) $\frac{-4}{7}$ నుండి $-7$

9. $\frac{-5}{8}$ కు ఎంత కలిపిన $\frac{-3}{2}$ వచ్చును?

10. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం 8. వాటిలో ఒక సంఖ్య $\frac{-5}{6}$ అయితే రెండవ సంఖ్య ఎంత?

11. వ్యవలకనం దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యలు సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయా? ఒక ఉదాహరణతో వివరించండి.

12. $-(-x) = x$ ను క్రింది విలువలకు సరిచూడండి.

(i) $x = \frac{2}{15}$ (ii) $x = \frac{-13}{17}$

13. క్రింది వానికి జవాబులు రాయండి.

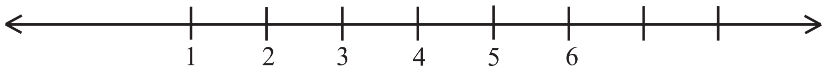
(i) సంకలన తత్సమాంశం కలిగి వుండని సమితి ఏది?

(ii) గుణకార విలోమం లేని అకరణీయ సంఖ్య ఏది?

(iii) ఋణ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క గుణకార విలోమం?

## 1.4 అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించడం

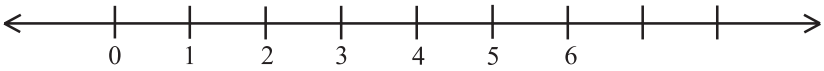
గాయత్రి ఒక సంఖ్యారేఖను గీసి దానిపై కొన్ని సంఖ్యలను గుర్తించింది.




గాయత్రి ఏ సంఖ్యాసమితిని సంఖ్యారేఖపై సూచించింది?

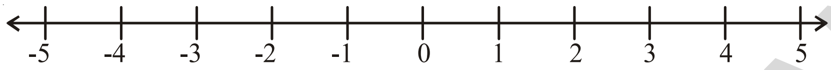
SCERT, TELANGANA

Sujatha said "They are Natural numbers". Paramesh said "They are rational numbers" Whom do you agree with?




Which set of numbers are marked on the above line?

Are they whole numbers or rational numbers?



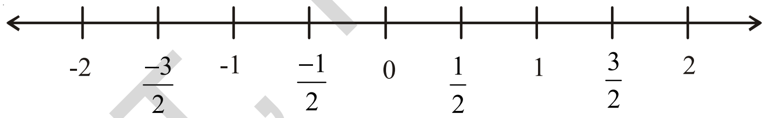

Which set of numbers are marked on the above line?

Can you find any number between $-5$ and 3 on the above line?

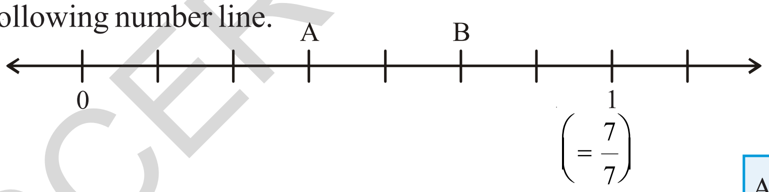
Can you see any integers between 0 and 1 or $-1$ and 0 in the above line?

Numbers in the middle of 0 and 1 is $\frac{1}{2}$ ; in the middle of 1 and 2 is $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, in the middle of 0 and $-1$ is $-\frac{1}{2}$ and in the middle of $-1$ and $-2$ is $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

These above rational numbers can be represented on the number line as follows:




**Example 5:** Identify the rational numbers shown as A and B that are marked on the following number line.

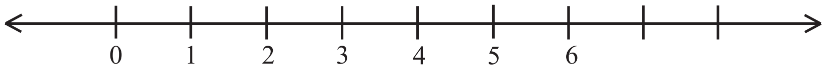



**Solution:** Here a unit, 0 to 1 is divided into 7 equal parts. A is representing 3 out of 7 parts. So, A represents $\frac{3}{7}$ and B represents $\frac{5}{7}$.

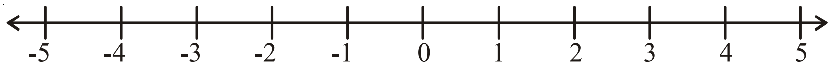
Any rational number can be represented on the number line. Notice that in a rational number the denominator tells the number of equal parts in which the each unit has been divided. The numerator tells 'how many' of these parts are considered.

SCERT, TELANGANA

సుజాత సంఖ్యారేఖపైన ఉన్నవి సహజ సంఖ్యలని చెప్పింది. పరమేశ్ సంఖ్యారేఖపై ఉన్నవి అకరణీయ సంఖ్యలని చెప్పాడు. ఎవరి వాదనతో నీవు ఏకీభవిస్తావు?




పై సంఖ్యారేఖపై సూచించిన సంఖ్యలు ఏవి? అవి పూర్ణాంకాలా? అకరణీయ సంఖ్యలా?




పై సంఖ్యారేఖపై సూచించిన సంఖ్యలేవి?

పై సంఖ్యారేఖపై −5, 3 ల మధ్య ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలు కలవా?

సంఖ్యారేఖపై 0, 1 లేదా −1, 0 ల మధ్య ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలున్నాయా?

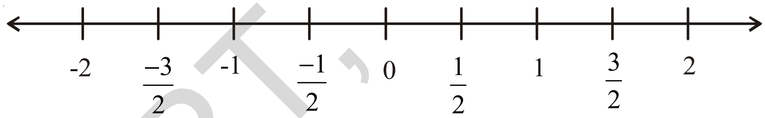
0, 1 మధ్య సంఖ్య $\frac{1}{2}$,

01 మరియు 2 ల మధ్య సంఖ్య $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

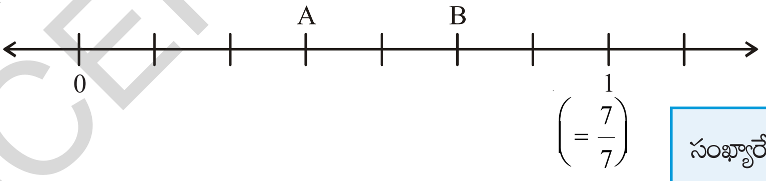
0 మరియు −1 ల మధ్య సంఖ్య $-\frac{1}{2}$

− 1 మరియు −2 ల మధ్య సంఖ్య $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

పై అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఈ క్రింది విధంగా సూచించవచ్చు.




**ఉదాహరణ 5:** క్రింది సంఖ్యారేఖపై గల A, B లు ఏ అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి?



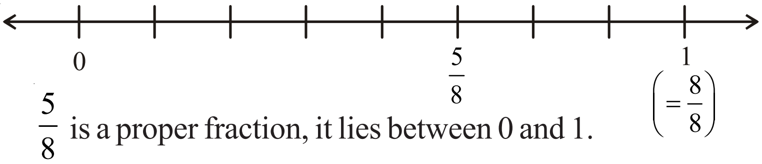

**సాధన:** ఇక్కడ 0 నుంచి 1 వరకు గల యూనిట్‌ను 7 సమాన విభాగాలుగా విభజించాం. A అనునది 7 విభాగాలలో 3వ విభాగాన్ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి A అనునది $\frac{3}{7}$ ను సూచిస్తుంది. అదేవిధంగా B అనునది $\frac{5}{7}$ ను సూచిస్తుంది.

> సంఖ్యారేఖపై ఏ అకరణీయ సంఖ్యనైనా సూచించవచ్చు. ఒక అకరణీయ సంఖ్యలో హారం అనేది సంఖ్యారేఖపై ప్రతి యూనిట్ ఎన్ని విభాగాలుగా విభజించారు అనే దానిని తెలుపుతుంది మరియు అకరణీయ సంఖ్యలోని లవము ఆ విభాగాలలో ఎన్నింటిని తీసుకున్నాం అనే విషయాన్ని తెలియజేస్తుంది.

SCERT, TELANGANA

**Example 6:** Represent $\frac{5}{8}$ on the number line.

**Solution:**



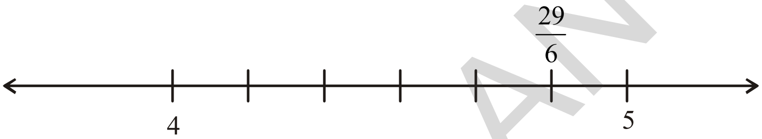

$\frac{5}{8}$ is a proper fraction, it lies between 0 and 1.

So divide the number line between 0 and 1 into 8 equal parts.

Then mark 5th part (numerator) $\frac{5}{8}$ counting from 0 is the required rational number $\frac{5}{8}$.

**Example 7:** Represent $\frac{29}{6}$ on the number line.

**Solution:**




$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4+\frac{5}{6}$. This lies between 4 and 5 on the number line

Divide the number line between 4 and 5 into 6 (denominator) equal parts.

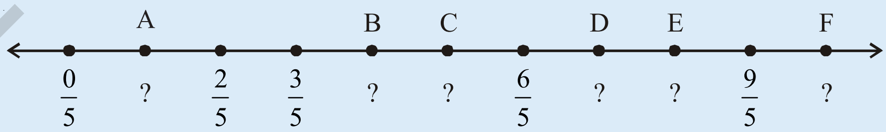
Mark 5th part (numerator of rational part) counting from 4.

$4+\frac{5}{6} = 4\frac{5}{6} = \frac{29}{6}$.

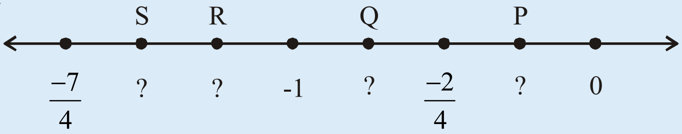
### Try These

Write the rational number for the points labelled with letters, on the number line

(i)




(ii)



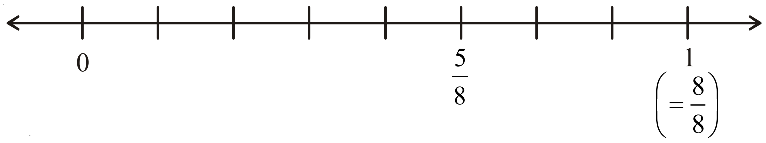

### Do This

(i) Represent $-\frac{13}{5}$ on the number line.

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 6:** $\frac{5}{8}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

**సాధన:**



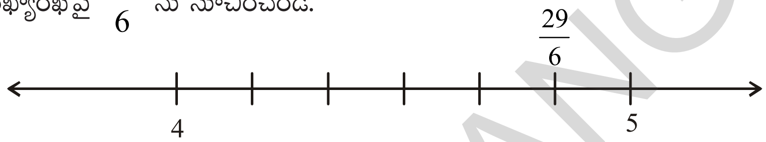

$\frac{5}{8}$ అనునది క్రమభిన్నం. దాని విలువ 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉంటుంది.

హారం 8 కాబట్టి సంఖ్యారేఖపై 0 మరియు 1ల మధ్య దూరాన్ని 8 సమాన విభాగాలుగా చేయండి.

సున్నా నుంచి 5వ విభాగం (లవం) మనకు కావలసిన అకరణీయ సంఖ్య $\frac{5}{8}$ అవుతుంది.

**ఉదాహరణ 7:** సంఖ్యారేఖపై $\frac{29}{6}$ ను సూచించండి.

**సాధన:**




$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4+\frac{5}{6}$. కావున $\frac{29}{6}$ అనునది 4 మరియు 5 ల మధ్య ఉంటుంది.

4 మరియు 5 ల మధ్య గల సంఖ్యారేఖను 6 (హారం) సమాన భాగాలుగా విభజించాం.

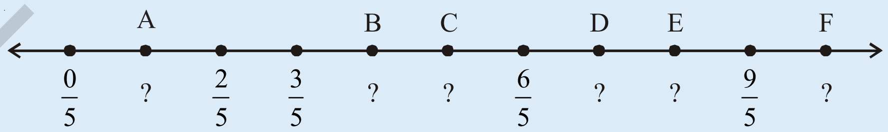
4 నుంచి కుడివైపునకు 5వ విభాగాన్ని

$4+\frac{5}{6} = 4\frac{5}{6} = \frac{29}{6}$ గా సూచించవచ్చు.

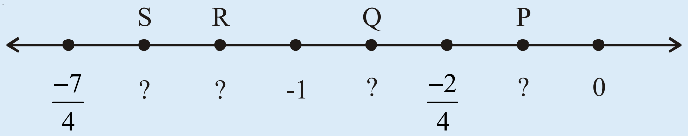
## ప్రయత్నించండి

క్రింది సంఖ్యారేఖపై ఆంగ్ల అక్షరాలు సూచించే బిందువులు ఏ అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి.

(i)




(ii)




## ఇది చేయండి

(i) $-\frac{13}{5}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

SCERT, TELANGANA

## 1.5 Rational Number between Two Rational Numbers

**Observe the following**

The natural numbers between 1 and 5 are 2, 3, 4.

Are there any natural numbers between 1 and 2?

The integers between –4 and 3 are –3, –2, –1, 0, 1, 2.

Write the integers between –2 and –1.Did you find any?

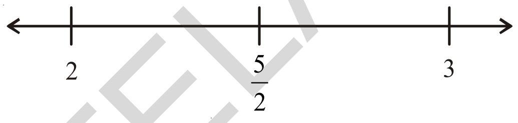
We cannot find integers between any two successive integers.

But we can write rational numbers between any two successive integers.

Let us write the rational numbers between 2 and 3.

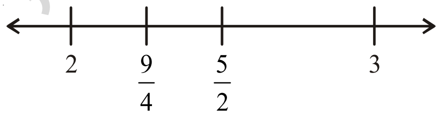
We know if $a$ and $b$ are any two rational numbers then $\frac{a+b}{2}$ (and it is also called the mean of $a$ and $b$) is a rational number between them. So $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ is a rational number which lies exactly between 2 and 3.

Thus $2 < \frac{5}{2} < 3.$

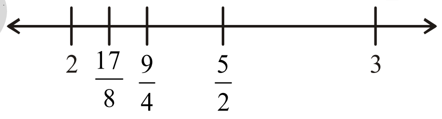



Now the rational number between 2 and $\frac{5}{2}$ is $\frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$

Thus $2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$




Again the mean of 2, $\frac{9}{4}$ is $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{2} = \frac{17}{8}$




So $2 < \frac{17}{8} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

In this way we can go on inserting rational numbers between any two numbers. Infact, there are infinite number of rational numbers between any two given rational numbers.

SCERT, TELANGANA

## 1.5 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్య

**క్రింది వానిని పరిశీలించండి.**

1 మరియు 5 ల మధ్య గల సహజ సంఖ్యలు 2, 3, 4.

1 మరియు 2 ల మధ్య ఏవైనా సహజ సంఖ్యలు ఉన్నాయా? −4 మరియు 3 ల మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యలు −3, −2, −1, 0, 1, 2.

నీవు −2 మరియు −1 ల మధ్య పూర్ణసంఖ్యలను రాయగలవా?

ఏ రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మధ్య పూర్ణసంఖ్యను కనుగొనలేము.

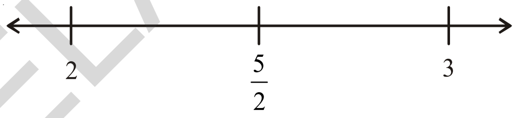
కాని మనం రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలను రాద్దాం.

ఇప్పుడు మనం 2 మరియు 3ల మధ్య కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను రాద్దాం.

a, b లు ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే $\frac{a+b}{2}$ అనే అకరణీయ సంఖ్య. దీనిని a, b ల సగటు అని అంటారు.

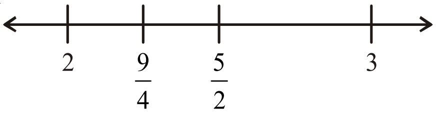
కాబట్టి 2 మరియు 3 ల మధ్యన గల అకరణీయ సంఖ్య $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$. ఇది 2, 3 ల మధ్య సంఖ్య.

కావున $2 < \frac{5}{2} < 3.$

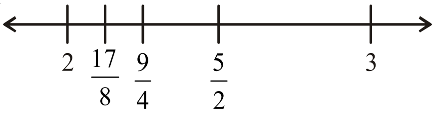



ఇప్పుడు 2 మరియు $\frac{5}{2}$ ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్య $\frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$

$$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$$




అదేవిధంగా 2, $\frac{9}{4}$ ల సగటు $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{2} = \frac{17}{8}$




కాబట్టి $2 < \frac{17}{8} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

ఇదేవిధంగా సగటును ఉపయోగించి ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్యనైనా కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను రాస్తూపోవచ్చు. అంటే దీని నుంచి రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

SCERT, TELANGANA

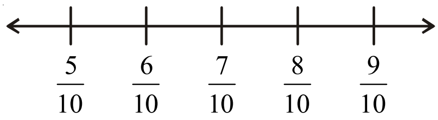
**Another Method :**

Can you write hundred rational numbers between $\frac{5}{10}$ and $\frac{9}{10}$ in mean method?

You may feel difficult because of the lengthy process.

Here is another method for you.

We know that $\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10}$




Here we can write only three rational numbers between $\frac{5}{10}$ and $\frac{9}{10}$.

But if we consider $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ and $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$

Now the rational numbers between $\frac{50}{100}$ and $\frac{90}{100}$ are

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \ldots\ldots. < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

Here we can write 39 rational numbers between $\frac{5}{10}$ and $\frac{9}{10}$.

Similarly, when we consider

$$\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} \text{ and } \frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$$

So $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$

In this way we can go on inserting required number of rational numbers.

SCERT, TELANGANA

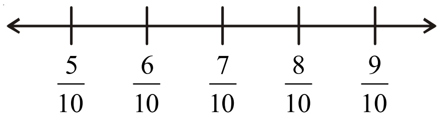
**మరొక పద్ధతి:**

సగటు పద్ధతిని ఉపయోగించి $\frac{5}{10}$ మరియు $\frac{9}{10}$ ల మధ్య 100 అకరణీయ సంఖ్యలను రాయగలవా?

ఇక్కడ సగటు పద్ధతిని ఉపయోగించడం అనేది సుదీర్ఘమైన పద్ధతి అవుతుంది.

కాబట్టి మరొక పద్ధతిని గురించి తెలుసుకుందాం.

$\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10}$ అని మనకు తెలుసు.




ఇక్కడ మనం $\frac{5}{10}$ మరియు $\frac{9}{10}$ ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను మాత్రమే రాయగలం.

కాని $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ మరియు $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$

ఇప్పుడు $\frac{50}{100}$ మరియు $\frac{90}{100}$ ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలు రాయవచ్చు.

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \ldots\ldots < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

ఇక్కడ మనం $\frac{5}{10}$ మరియు $\frac{9}{10}$ ల మధ్య 39 అకరణీయ సంఖ్యలను రాయగలం.

అదేవిధంగా $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000}$ మరియు $\frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$

కాబట్టి $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$

ఈవిధంగా మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించవచ్చు.

SCERT, TELANGANA

**Example 8:** Write any five rational numbers between $-3$ and 0.

**Solution:** $-3 = -\frac{30}{10}$ and $0 = \frac{0}{10}$ so

$-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, \ldots\ldots\ldots, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$ lies between -3 and 0.

We can take any five of these.

## Exercise - 1.2

1. Represent these numbers on the number line.

   (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{7}{5}$

2. Represent $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-9}{13}$ on the number line.

3. Write five rational numbers which are smaller than $\frac{5}{6}$.

4. Find 12 rational numbers between -1 and 2.

5. Find a rational number between $\frac{2}{3}$ and $\frac{3}{4}$.

   [Hint : First write the rational numbers with equal denominators.]

6. Find ten rational numbers between $-\frac{3}{4}$ and $\frac{5}{6}$

## 1.6 Decimal representation of Rational numbers

We know every rational number is in the form of $\frac{p}{q}$ where $q \neq 0$ and $p, q$ are integers. Let us see how to express a rational number in decimal form.

To convert a rational number into decimal by division method.

Consider a rational number $\frac{25}{16}$.

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 8:** $-3$ మరియు $0$ ల మధ్య గల 5 అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

**సాధన:** $-3 = -\frac{30}{10}$ మరియు $0 = \frac{0}{10}$ కాబట్టి

$-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, ........., -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$ లు అన్నీ $-3$ మరియు $0$ ల మధ్య ఉన్నాయి.

వీనిలోంచి ఏవైనా ఐదు సంఖ్యలను తీసుకోండి.

## అభ్యాసం - 1.2

1. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

   (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{7}{5}$

2. $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-9}{13}$ లను ఒకే సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

3. $\frac{5}{6}$ కంటే చిన్నవైన ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

4. $-1$ మరియు $2$ ల మధ్య గల 12 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

5. $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ ల మధ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

   [సూచన: ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలను సజాతి భిన్నాలుగా మార్చండి.]

6. $-\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{5}{6}$ ల మధ్య పది అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

## 1.6 అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా చూపడం

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు. ఇక్కడ $p, q$ లు పూర్ణసంఖ్యలు $q \neq 0$. ఇప్పుడు మనం ఒక అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశంగా ఎలా రాస్తామో తెలుసుకుందాం.

ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{25}{16}$ ను తీసుకుందాం.

SCERT, TELANGANA

Step1: Divide the numerator by the denominator

Step2: Continue the division till the remainder left is less than the divisor.

```
16 )25 (1
    16
    --
     9
```

Step3: Put a decimal point in the dividend and at the end of the quotient.

Step4: Put a zero on the right of decimal point in the dividend as well as right of the remainder.

Divide again just as whole numbers.

```
16 )25.0 (1.
    16
    --
     90
```

Step 5: Repeat step 4 till either the remainder is zero or requisite number of decimal places have been obtained

```
16 )25.0000 (1.5625
    16
    --
     90
     80
     ---
     100
      96
     ---
       40
       32
       --
        80
        80
        --
         0
```

Therefore $\frac{25}{16} = 1.5625$

Consider $\frac{17}{5}$

```
5 )17.0 (3.4
   15
   --
   20
   20
   --
    0
```

Therefore $\frac{17}{5} = 3.4$

Try to express $\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}, \frac{1974}{10}$ in decimal form and write the values.

We observe that there are only finite number of digits in the decimal part of these decimal numbers. Such decimals are known as terminating decimals.

**Non terminating recurring decimals:**

Consider the rational number $\frac{5}{3}$

SCERT, TELANGANA

సోపానం 1: లవాన్ని హారంతో భాగించండి.

$$16\overline{)25}\,(1$$
$$\frac{16}{9}$$

సోపానం 2: విభాజకం కంటే శేషం తక్కువగా వచ్చే వరకు భాగహారాన్ని కొనసాగించండి.

సోపానం 3: విభాజ్యం మరియు భాగఫలముల ప్రక్కన ఒక దశాంశాన్ని ఉంచండి.

$$16\overline{)25.0}\,(1.$$
$$\frac{16}{90}$$

సోపానం 4: విభాజ్యం మరియు శేషముల కుడిప్రక్కన ఒక సున్నాను ఉంచండి. ఇప్పుడు భాగహారాన్ని యథావిధిగా కొనసాగించండి.

సోపానం 5: నాల్గవ సోపానాన్ని దశాంశం తరువాత కోరిన స్థానం వరకు లేదా శేషం సున్నా వచ్చే వరకు కొనసాగించండి.

$$16\overline{)25.0000}\,(1.5625$$
16
90
80
100
96
40
32
80
80
0

కాబట్టి $\frac{25}{16} = 1.5625$

ఇప్పుడు మనం $\frac{17}{5}$ ను దశాంశ రూపంలో రాద్దాం.

$$5\overline{)17.0}\,(3.4$$
15
20
20
0

కాబట్టి $\frac{17}{5} = 3.4$

$\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}$ మరియు $\frac{1974}{10}$ లను దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

పై అన్ని ఉదాహరణలలో దశాంశ భాగంలో పరిమిత సంఖ్యలోనే అంకెలుండడం మనం గమనించవచ్చు. ఇలాంటి దశాంశాలను అంతమయ్యే దశాంశాలు అని అంటాం.

**అంతంకానని ఆవర్తిత దశాంశాలు:**

ఇప్పుడు $\frac{5}{3}$ అనే అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో రాద్దాం.

SCERT, TELANGANA

By long division method we have →

```
3 ) 5.000 (1.666
    3
    --
    20
    18
    --
     20
     18
     --
      20
      18
      --
       2
```

Therefore $\frac{5}{3} = 1.666...$

We write this as $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ the bar on '6' in the decimal part indicates it is recurring.

We observe that in the above division the same remainder is repeating itself and the digit 6 in the quotient is repeated.

Consider the rational number $\frac{1}{7}$ →

By long division method

```
7 ) 10.00000000 (0.14285714
    7
    --
    30
    28
    --
     20
     14
     --
      60
      56
      --
       40
       35
       --
        50
        49
        --
         10
          7
         --
         30
         28
         --
          2
```

$\frac{1}{7} = 0.142857142857....$

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ . The bar on decimal part 142857 indicates that these digits are repeating in the same order.

The above examples are illustrating the representation of rational numbers in the form of non-terminating recurring decimals or we call them as non-terminating repeating decimals.

Try to express $\frac{1}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{11}{9}$ and $\frac{20}{19}$ in decimal form

$\frac{1}{3} =$ ☐  $\frac{17}{6} =$ ☐  $\frac{11}{9} =$ ☐  $\frac{20}{19} =$ ☐

SCERT, TELANGANA

భాగహార పద్ధతిలో ⟶

```
3 )5.000 (1.666
   3
   --
   20
   18
   --
    20
    18
    --
     20
     18
     --
      2
```

కాబట్టి $\frac{5}{3} = 1.666........$

దీనిని $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ గా రాస్తాము. ఇక్కడ దశాంశ భాగంలోని 6 పై ఉన్న గీత 6 పునరావృతమవుతూ ఉంటుందనే విషయాన్ని సూచిస్తుంది.

పై భాగహారాన్ని పరిశీలించిన ప్రతిసారి ఒకే శేషం 2 పునరావృతమవుతుందని అదేవిధంగా భాగఫలంలో ఒకే సంఖ్య 6 పునరావృతమవుతుందని గమనించవచ్చు.

$\frac{1}{7}$ ను దశాంశ రూపంలో రాద్దాం.

భాగహార పద్ధతిలో

```
7)10.00000000(0.14285714
   7
  --
   30
   28
   --
    20
    14
    --
     60
     56
     --
      40
      35
      --
       50
       49
       --
        10
         7
        --
         30
         28
         --
          2
```

$\therefore \frac{1}{7} = 0.142857142857....$

కాబట్టి $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

దశాంశ భాగంలోని 142857 పై ఉన్న బార్ (గీత) ఆ అంకెలు అదే క్రమంలో పునరావృతమవుతాయనే విషయాన్ని సూచిస్తుంది.

పై రెండు ఉదాహరణలలో అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపం అంతం కాలేదు. కాని ఆవర్తితం అవుతున్నాయి. ఈ దశాంశాలను ఆవర్తిత దశాంశాలు లేదా అంతంకానని ఆవర్తిత దశాంశాలు అని అంటారు.

$\frac{1}{3}, \frac{17}{6}, \frac{11}{9}$ మరియు $\frac{20}{19}$ లను దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

$\frac{1}{3} = \square \quad \frac{17}{6} = \square \quad \frac{11}{9} = \square \quad \frac{20}{19} = \square$

SCERT, TELANGANA

When we try to express some rational numbers in decimal form by division method, we find that the division never comes to an end. This is due to the reason that in the division process the remainder starts repeating after a certain number of steps. In these cases in the quotient a digit or set of digits repeats in the same order.

For example 0.33333------.= $0.\overline{3}$

0.12757575---------= $0.12\overline{75}$

123.121121121121----------= $123.\overline{121}$

5.678888-----------= $5.67\overline{8}$ etc.

Such decimals are called non-terminating and repeating decimal or non-terminating recurring decimals.

The set of digits which repeats in non-terminating recurring decimal is called period.

For example

In 0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ the period is 3

In 0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ the period is 75

The number of digits in a period of non-terminating recurring decimal is called periodicity.

For example

The periodicity of $0.\overline{3}$ is 1.

The periodicity of $0.12\overline{75}$ is 2.

The period of 0.23143143143....... = _______ periodicity = _______

The period of 125.6788989 ......... = _______ periodicity = _______

## Think, Discuss and Write

1. Express the following in decimal form.

(i) $\frac{7}{5}, \frac{3}{4}, \frac{23}{10}, \frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{22}{7}$

(ii) Which of the above are terminating and which are non-terminating decimals?

(iii) Write the denominators of above rational numbers as the product of primes.

(iv) If the denominators of the above simplest rational numbers has no prime divisors other than 2 and 5 what do you observe?

SCERT, TELANGANA

పై సాధనల నుంచి ఒక అకరణీయ సంఖ్యను భాగహార పద్ధతిలో దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరిచేటప్పుడు భాగహార ప్రక్రియలో కొన్ని సోపానాల తరువాత శేషం పునరావృతమవడం గమనించవచ్చు. అదే సమయంలో భాగఫలంలో దశాంశం తరువాత ఒక అంకె లేదా కొన్ని అంకెల సమూహం ఒకే క్రమంలో పునరావృతమవడం మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణకు 0.33333------.= $0.\overline{3}$

0.12757575---------= $0.12\overline{75}$

123.121121121121----------= $123.\overline{121}$

5.678888-----------= $5.67\overline{8}$ మొదలైనవి.

ఈ దశాంశాలను అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలు అని అంటాము.

అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలలో ఆవర్తనమయ్యే సంఖ్యల సమూహం (బార్ క్రింద గల సంఖ్యలు)ను వ్యవధి అంటారు.

ఉదాహరణకు

0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ యొక్క వ్యవధి 3.

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ యొక్క వ్యవధి 75.

ఒక అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం యొక్క వ్యవధిలోని అంకెల సంఖ్యను "అవధి" అని అంటాం.

ఉదాహరణకు $0.\overline{3}$ యొక్క అవధి 1

$0.12\overline{75}$ యొక్క అవధి 2

0.23143143143....... యొక్క అవధి = ________ మరియు వ్యవధి = ________

125.6788989 ......... యొక్క అవధి = ________ మరియు వ్యవధి = ________

**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి**

1. క్రింది వానిని దశాంశ రూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{7}{5}, \frac{3}{4}, \frac{23}{10}, \frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{22}{7}$

(ii) పై వాటిలో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలు? ఏవి అంతంకాని దశాంశాలు?

(iii) పై అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్దంగా రాయండి.

(iv) కనిష్ఠ రూపంలో ఉండే పై అకరణీయ సంఖ్యల హారానికి 2, 5 తప్ప ఇతర కారణాంకాలు లేకుంటే నీవు ఏం గమనించావు?

SCERT, TELANGANA

## 1.7 Conversion of decimal form into rational form

### 1.7.1 Converting terminating decimal into rational form

Consider a decimal number 15.75

Find the number of places after the decimal point in the given number. In 15.75 there are 2 decimals places.

Therefore 15.75 can be written as $\frac{1575}{100}$. Now

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

$\frac{63}{4}$ is the rational form of 15.75.

**Example 9:** Express each of the following decimals in the $\frac{p}{q}$ form

(i) 0.35 (ii) –8.005 (iii) 2.104

**Solution:** (i) Since 0.35 has two places after decimal point. It is written as $0.35 = \frac{35}{100}$.

Now, $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii) $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii) $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

### 1.7.2 Converting a non-terminating recurring decimal into rational form

Let us discuss the method of conversion by following example.

**Example 10:** Express each of the following decimals numbers in the rational form.

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{54}$ (iii) $4.\overline{7}$

**Solution (i):** $0.\overline{4}$

Let $x = 0.\overline{4}$

$\Rightarrow x = 0.444 \ldots$ ----------------(i)

Here the periodicity of the decimal is one.

SCERT TELANGANA

## 1.7 దశాంశ భిన్నాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా చూపడం

### 1.7.1 అంతమయ్యే దశాంశాన్ని అకరణీయ సంఖ్య రూపంలోకి మార్చడం

15.75 అనే దశాంశాన్ని తీసుకుందాం.

ఇచ్చిన సంఖ్యలోని దశాంశ స్థానాల సంఖ్యను లెక్కించండి.

15.75 లో రెండు దశాంశ స్థానాలున్నాయి.

కావున 15.75 ను $\frac{1575}{100}$ గా రాయాలి.

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

15.75 యొక్క అకరణీయ రూపం $\frac{63}{4}$.

**ఉదాహరణ 9:** క్రింది దశాంశాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

(i) 0.35 (ii) −8.005 (iii) 2.104

**సాధన:** (i) 0.35 దశాంశ బిందువు తర్వాత రెండు స్థానాలున్నాయి. కావున $0.35 = \frac{35}{100}$.

ఇప్పుడు $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii) $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii) $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

### 1.7.2 అంతంకాని ఆవృత దశాంశాన్ని అకరణీయ సంఖ్యా రూపంలోకి మార్చడం

ఈ పద్ధతిని దిగువ ఉదాహరణల ద్వారా చర్చిద్దాం.

**ఉదాహరణ 10:** క్రింది దశాంశాలను అకరణీయ రూపంలోకి మార్చండి.

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{54}$ (iii) $4.\overline{7}$

**సాధన (i):** $0.\overline{4}$

$x = 0.\overline{4}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow \quad x = 0.444 \ldots$ ----------------(i)

ఇక్కడ దశాంశం యొక్క అవధి ఒకటి

SCERT TELANGANA

So we multiply both sides of (i) by 10 and we get

$10x = 4.44 \; .... \; \text{----------------(ii)}$

Subtracting (i) from (ii)

$$
\begin{array}{rl}
10\,x = & 4.444...... \\
x = & 0.444...... \\
\hline
9x = & 4.000...... \\
\hline
\end{array}
$$

$$x = \frac{4}{9}$$

Hence $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

**Solution (ii):** $0.\overline{54}$

let $x = 0.\overline{54}$

$\Rightarrow x = 0.545454....$ ------------------ (i)

here the periodicity of the decimal is two.

So we multiply both sides of (i) by 100, we get

$100x = 54.5454....$ ------------------ (ii)

On subtracting (i) from (ii)

$$
\begin{array}{rl}
100x = & 54.5454 \; ...... \\
x = & 0.5454 \; ..... \\
\hline
99x = & 54.0000...... \\
\hline
\end{array}
$$

$x = \frac{54}{99}$. Hence $0.\overline{54} = \frac{54}{99}$ .

Observe

$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

**Solution (iii) :** $4.\overline{7}$

let $x = 4.\overline{7}$

$x = 4.777....$ ---------------- (i)

here the periodicity of the decimal is one.

So multiply both sides of (i) by 10, we get

$10x = 47.777....$ ---------------- (ii)

Subtracting (i) from (ii) we get

$$
\begin{array}{rl}
10x = & 47.777 \; ..... \\
x = & 4.777 \; ..... \\
\hline
9x = & 43.000.... \\
\hline
\end{array}
$$

SCERT, TELANGANA

కాబట్టి సమీకరణం (i) ని ఇరువైపులా 10 చే గుణించగా

$10x = 4.44\ \ldots.$ ----------------(ii)

సమీకరణం (ii) నుంచి (i) ని తీసివేయగా

$$10x = 4.444\ldots\ldots$$
$$x = 0.444\ldots\ldots$$
$$9x = 4.000\ldots\ldots$$
$$x = \frac{4}{9}$$

కావున $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

గమనించండి

$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

**సాధన (ii):** $0.\overline{54}$

$x = 0.\overline{54}$ అనుకొనుము

$\Rightarrow x = 0.545454\ldots.$ ------------------ (i)

ఇచ్చిన దశాంశం యొక్క అవధి = 2

కాబట్టి సమీకరణం (i) ని ఇరువైపులా 100 చే గుణించగా

$100x = 54.5454\ldots.$ ------------------ (ii)

సమీకరణం (ii) నుంచి (i) ని తీసివేయగా

$$100x = 54.5454\ \ldots\ldots$$
$$x = 0.5454\ \ldots..$$
$$99x = 54.0000\ldots\ldots$$

$x = \frac{54}{99}$ కావున $0.\overline{54} = \frac{54}{99}$.

**సాధన (iii) :** $4.\overline{7}$

$x = 4.\overline{7}$ అనుకొనుము

$x = 4.777\ldots.$ ---------------- (i)

ఇచ్చిన దశాంశం యొక్క అవధి ఒకటి

కాబట్టి సమీకరణం (i) ని ఇరువైపులా 10 చే గుణించగా

$10x = 47.777\ldots.$ ---------------- (ii)

సమీకరణం (ii) నుంచి (i) ని తీసివేయగా

$$10x = 47.777\ \ldots..$$
$$x = 4.777\ \ldots..$$
$$9x = 43.000\ldots\ldots.$$

SCERT, TELANGANA

$$x = \frac{43}{9} \qquad\qquad \text{Hence } 4.\overline{7} = \frac{43}{9}.$$

**Alternative Method:** 
$$\begin{aligned} 4.\overline{7} &= 4 + 0.\overline{7} \\ &= 4 + \frac{7}{9} \\ &= \frac{9 \times 4 + 7}{9} \\ \therefore\ 4.\overline{7} &= \frac{43}{9} \end{aligned}$$

**Example 11:** Express the mixed recurring decimal $15.7\overline{32}$ in $\frac{p}{q}$ form.

**Solution :** Let $x = 15.7\overline{32}$

$x = 15.7323232....$ ---------------(i)

Since two digits 32 are repeating therefore

the periodicity of the above decimal is two.

So multiply (i) both sides by 100, we get

$100\,x = 1573.2323....$ -------------(ii)

Subtracting (i) from (ii), we get

$$\begin{aligned} 100\,x &= 1573.232323.... \\ x &= 15.732323.... \\ \hline 99\,x &= 1557.50000 \\ x &= \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990} \\ &= 15.7\overline{32} = \frac{15575}{990} \end{aligned}$$

**Think, Discuss and Write**

Convert the decimals $0.\overline{9}$, $14.\overline{5}$ and $1.2\overline{4}$ to rational form. Can you find any easy method other than formal method?

SCERT, TELANGANA

$x = \frac{43}{9}$ కావున $4.\overline{7} = \frac{43}{9}$.

**మరొక పద్ధతి:**

$$4.\overline{7} = 4 + 0.\overline{7}$$
$$= 4 + \frac{7}{9}$$
$$= \frac{9 \times 4 + 7}{9}$$
$$4.\overline{7} = \frac{43}{9}$$

**ఉదాహరణ 11:** మిశ్రమావర్తిత దశాంశం $15.7\overline{32}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

**సాధన:** $x = 15.7\overline{32}$ అనుకొనుము.

$x = 15.7323232....$ ---------------(i)

32 ఆవర్తితము

ఇచ్చిన దశాంశం యొక్క అవధి $= 2$

కాబట్టి సమీకరణం (i) ని ఇరువైపులా 100 చే గుణించగా,

$100\,x = 1573.2323....$ -------------(ii)

సమీకరణం (ii) నుండి (i) తీసివేయగా

$$100\,x = 1573.232323....$$
$$x = 15.732323....$$
$$99\,x = 1557.50000.......$$
$$x = \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990}$$
$$\Rightarrow 15.7\overline{32} = \frac{15575}{990}$$

**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి**

$0.\overline{9}, 14.\overline{5}$ మరియు $1.\overline{24}$ లను అకరణీయ సంఖ్యా రూపంలోకి వ్రాయండి. మామూలు సాధనా పద్ధతికి భిన్నంగా ఏదైనా సులభమైన పద్ధతిని నీవు కనుగొనగలవా?

SCERT, TELANGANA

## Exercise - 1.3

1. Express each of the following decimal in the $\frac{p}{q}$ form.

   (i) 0.57 (ii) 0.176 (iii) 1.00001 (iv) 25.125

2. Express each of the following decimals in the rational form ( $\frac{p}{q}$ ).

   (i) $0.\overline{9}$ (ii) $0.\overline{57}$ (iii) $0.7\overline{29}$ (iv) $12.2\overline{8}$

3. Find $(x + y) \div (x - y)$ if

   (i) $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{4}$ (ii) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{2}$

4. Divide the sum of $-\frac{13}{5}$ and $\frac{12}{7}$ by the product of $-\frac{13}{7}$ and $-\frac{1}{2}$.

5. If $\frac{2}{5}$ of a number exceeds $\frac{1}{7}$ of the same number by 36. Find the number.

6. Two pieces of lengths $2\frac{3}{5}$ m and $3\frac{3}{10}$ m are cut off from a rope 11 m long. What is the length of the remaining rope?

7. The cost of $7\frac{2}{3}$ meters of cloth is ₹ $12\frac{3}{4}$. Find the cost per metre.

8. Find the area of a rectangular park which is $18\frac{3}{5}$ m long and $8\frac{2}{3}$ m broad.

9. What number should $-\frac{33}{16}$ be divided by to get $-\frac{11}{4}$?

10. If 36 trousers of equal sizes can be stitched with 64 meters of cloth. What is the length of the cloth required for each trouser?

11. When the repeating decimal 0.363636 .... is written in simplest fractional form $\frac{p}{q}$, find the value of $p + q$.

SCERT, TELANGANA

## అభ్యాసం - 1.3

1. క్రింది వానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలోకి రాయండి.

   (i) 0.57 (ii) 0.176 (iii) 1.00001 (iv) 25.125

2. ఈ క్రింది ఆవృత దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యారూపంలో ($\frac{p}{q}$) వ్యక్తపరచండి.

   (i) $0.\overline{9}$ (ii) $0.\overline{57}$ (iii) $0.\overline{729}$ (iv) $12.2\overline{8}$

3. క్రింద ఇచ్చిన విలువలకు $(x+y) \div (x-y)$ ను లెక్కించండి.

   (i) $x=\frac{5}{2}, y=-\frac{3}{4}$ (ii) $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$

4. $-\frac{13}{5}$ మరియు $\frac{12}{7}$ ల మొత్తాన్ని $-\frac{13}{7}$ మరియు $-\frac{1}{2}$ ల లబ్ధంచే భాగించండి.

5. ఒక సంఖ్య యొక్క $\frac{2}{5}$ వ భాగం ఆ సంఖ్య యొక్క $\frac{1}{7}$ వ భాగం కంటే 36 ఎక్కువ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

6. 11 మీ. పొడవు గల తాడు నుండి $2\frac{3}{5}$ మీ. మరియు $3\frac{3}{10}$ మీ. ల పొడవులు గల రెండు ముక్కలు కత్తిరించగా మిగిలిన ముక్క పొడవు ఎంత?

7. $7\frac{2}{3}$ మీటర్ల పొడవు గల ఒక గుడ్డ ఖరీదు ₹ $12\frac{3}{4}$. అయిన ఒక మీటరుకు గుడ్డ ఖరీదు ఎంత?

8. $18\frac{3}{5}$ మీ. పొడవు మరియు $8\frac{2}{3}$ మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు వైశాల్యం కనుగొనండి.

9. $-\frac{33}{16}$ ను ఏ సంఖ్యచే భాగించగా $-\frac{11}{4}$ వస్తుంది?

10. 64 మీటర్ల పొడవు గల ఒక బట్ట నుంచి సమాన పరిమాణం గల 36 ప్యాంటులు తయారుచేసిన ఒక్కొక్క ప్యాంటు తయారు చేయుటకు ఎంత పొడవు గల బట్ట అవసరం?

11. ఆవర్తిత దశాంశ సంఖ్య 0.363636 .... ను $\frac{p}{q}$ కనిష్ఠ రూపంలో రాసిన $p+q$ విలువ కనుగొనండి.

SCERT, TELANGANA

## What we have discussed

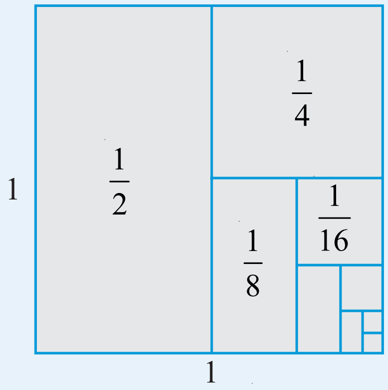
1. Rational numbers are closed under addition, subtraction and multiplication.
2. The addition and multiplications are
   (i) Commutative for rational numbers
   (ii) Associative for rational numbers
3. ‘0’ is the additive identity for rational numbers.
4. ‘1’ is the multiplicative identity for rational numbers.
5. A rational number and its additive inverse are opposite in their sign.
6. The multiplicative inverse of a rational number is its reciprocal.
7. Distributivity of rational numbers a,b and c,
   a ( b + c ) = ab + ac and a ( b – c ) = ab – ac
8. Rational numbers can be represented on a number line
9. There are infinite rational numbers between any two given rational numbers. The concept of mean help us to find rational numbers between any two rational numbers.
10. The decimal representation of rational numbers is either in the form of terminating decimal or non-terminating recurring decimals.

N7E1D4

SCERT, TELANGANA

### Can you find?

Guess a formula for $a_n$. Use the subdivided unit square below to give a visual justification of your conjecture.




**Hint :** $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots\quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots. + \frac{1}{2^n}$

$a_1 = 1 - \frac{1}{2},\ a_2 = 1 - \frac{1}{4},\ a_3 = 1 - \frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots$ then $a_n = ?$

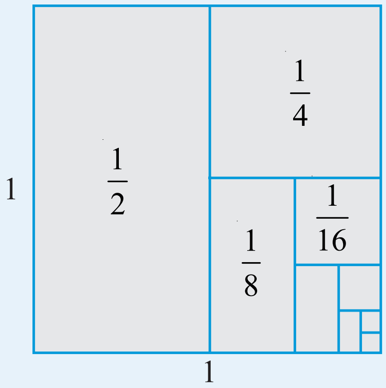
## మనం నేర్చుకున్నవి

1. అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం, వ్యవకలనం మరియు గుణకారంల దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
2. సంకలనం మరియు గుణకారాల పరిక్రియలకు
   (i) అకరణీయ సంఖ్యలు వినిమయ ధర్మాన్ని
   (ii) అకరణీయ సంఖ్యలు సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
3. '0' అకరణీయ సంఖ్యల సంకలన తత్సమాంశం.
4. '1' అకరణీయ సంఖ్యల గుణకార తత్సమాంశం.
5. ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమంలో ఆ సంఖ్య ఉండే గుర్తులకు వ్యతిరేకంగా గుర్తులు కలిగి ఉంటాయి.
6. ఒక అకరణీయ సంఖ్య లవ హారాలను తారుమారు చేయగా (వ్యుత్క్రమం చేయగా) లభించేది దాని గుణకార విలోమం.
7. విభాగ న్యాయం: a,b, c లు ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే
   a ( b + c ) = ab + ac మరియు a ( b – c ) = ab – ac
8. ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై చూపవచ్చు.
9. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండును. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మరో అకరణీయ సంఖ్యను ఉంచడానికి సగటు భావన ఉపయోగపడుతుంది.
10. ఒక అకరణీయ సంఖ్యను అంతం గల దశాంశంగాను లేదా అంతం లేని ఆవర్తిత దశాంశం గాను రాయవచ్చు.

W9X7V4

### మీరు కనుగొనగలరా?

$a_n$ కు సూత్రాన్ని ఊహించండి. దిగువ ఇచ్చిన ప్రమాణ చతురస్రపు విభజనల దృశ్యీకరణను నీ జవాబు సమర్థనకు ఉపయోగించుకొనుము.




**సూచన:** $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$......... $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2^n}$

$a_1 = 1-\frac{1}{2},\ a_2 = 1-\frac{1}{4},\ a_3 = 1-\frac{1}{8}$......... అయిన $a_n = ?$

SCERT, TELANGANA

CHAPTER 2

# Linear Equations in One Variable

Z1R2B5

## 2.0 Introduction

Sagar and Latha are playing with numbers. Sagar tells Latha "I think of a number. If I double it and take 7 away I get 35. Can you tell the number that I thought of ?" Latha thinks for a while and tells the answer. Can you too tell the answer?

Let us see how Latha told the answer. Let the number be '$x$'.

By doubling it we get '$2x$'

Next 7 was subtracted from '$2x$'. After subtraction, the resulting number is $2x - 7$

But according to Sagar it is equal to 35

$$\Rightarrow \quad 2x - 7 = 35$$

$$\therefore \quad 2x = 35 + 7 \text{ (Transposing 7 to RHS)}$$

$$2x = 42$$

$$\therefore \quad x = \frac{42}{2} \quad \text{(Transposing 2 to RHS)}$$

$$\therefore \quad x = 21$$

$\therefore$ The number that Sagar thought of is 21.

**Trick**
Take the final result. Add 7 to it and then halve the result.

**Note**
When we transpose terms
'+' quantity becomes '–' quantity
'–' quantity becomes '+' quantity
'×' quantity becomes '÷' quantity
'÷' quantity becomes '×' quantity

We learnt in earlier classes that $2x - 7 = 35$ is an example of an equation. By solving this equation in the above method, Latha was able to find the number that Sagar thought of.

In this chapter we will discuss about linear equations in one variable or simple equations, technique of solving such equations and its application in daily life problems.

**Let us briefly revise what we know about equations.**

(i) An algebraic equation is equality of algebraic expressions involving variables and constants

$2x - 7 = 35$
L.H.S R.H.S

SCERT, TELANGANA


Government's Gift for Students' Progress

అధ్యాయం

2

# ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

Z2E3G6

## 2.0 పరిచయం

సాగర్ మరియు లత సంఖ్యలతో ఆడుకుంటున్నారు. సాగర్, లతతో "నేనొక సంఖ్యను అనుకున్నాను. దానిని రెట్టింపు చేసి ఫలితం నుంచి 7 ను తీసివేస్తే 35 వచ్చింది. అయితే నేను అనుకున్న సంఖ్యను చెప్పగలవా?" అని అడిగాడు. లత కొంతసేపు ఆలోచించి సమాధానం చెప్పింది. మరి నీవు కూడా చెప్పగలవా?

లత ఏవిధంగా సమాధానం చెప్పిందో చూద్దాం. సంఖ్యను '$x$' అనుకొనిన, దానిని రెట్టింపు చేస్తే '$2x$' అవుతుంది.

తరువాత '$2x$' నుండి 7 ను తీసివేస్తే ఫలిత సంఖ్య $2x - 7$ అయితే సాగర్ ప్రకారం ఈ సంఖ్య 35 కు సమానం.

**ఉపాయం**
చివరి ఫలితాన్ని తీసుకొని 7 కలిపి వచ్చిన దానిని సగము చేయుము.

$\Rightarrow \quad 2x - 7 = 35$

$\therefore \quad 2x = 35 + 7$ (7 ను పక్షాంతరం చెందగా)

$2x = 42$

$\therefore \quad x = \frac{42}{2}$ (2 ను పక్షాంతరం చెందగా)

$\therefore \quad x = 21$

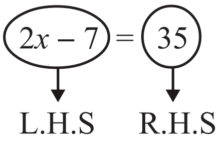
**గమనిక**
'+' రాశి పక్షాంతరం చెందిన '−'రాశిగానూ,
'−' రాశి పక్షాంతరం చెందిన '+' రాశిగానూ
'×' రాశి పక్షాంతరం చెందిన '÷' రాశిగానూ
'÷' రాశి పక్షాంతరం చెందిన '×' రాశిగానూ
మార్పు చెందును.

$\therefore$ సాగర్ అనుకొన్న సంఖ్య 21.

$2x - 7 = 35$ అనేది సమీకరణానికి ఒక ఉదాహరణ అని క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాము. సమీకరణం పై పద్ధతిలో సాధించడం ద్వారా సాగర్ అనుకున్న సంఖ్యను లత చెప్పగలిగింది.

**సామాన్య సమీకరణాలను గురించి మనకేమి తెలుసో పునరావలోకనం చేసుకుందాం.**

(i) ఒక బీజీయ సమీకరణం అనేది స్థిరరాశులు, చరరాశులు గల బీజీయ సమాసాల సమానత్వంను తెలుపుతుంది.




SCERT TELANGANA

(ii) It has an equality sign

(iii) The expression on the left of the equality sign is called the L.H.S (Left Hand Side) of the equation

(iv) The expression on the right of the equality sign is called R.H.S (Right Hand Side) of the equation

(v) In an equation, the values of LHS and RHS are equal. This happens to be true only for certain value of the Variable. This value is called the solution of the equation.

$2x - 7 = 35$ is true for $x = 21$ only
i.e., if $x = 21$
LHS $= 2x - 7$
$= 2 \times 21 - 7$
$= 35$
$=$ RHS
$\therefore$ Solution is $x = 21$

## 2.1 Linear Equations

Consider the following equations:

(1) $2x - 7 = 35$ (2) $2x + 2y = 48$ (3) $4x - 1 = 2x + 5$ (4) $x^2 + y = z$

Degree of each equation (1), (2) and (3) is one. So they are called linear equations. While degree of equation (4) is not one. So it is not a linear equation.

So equations (1), (2) and (3) are examples of linear equations.

### Do This

Which of the following are linear equations:

(i) $4x + 6 = 8$ (ii) $4x - 5y = 9$ (iii) $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$

(iv) $xy + yz + zx = 11$ (v) $3x + 2y - 6 = 0$ (vi) $3 = 2x + y$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$

## 2.2 Simple equations or Linear equations in one variable

Consider the following equations:

(i) $2x - 7 = 35$ (ii) $4x - 1 = 2x + 5$ (iii) $2x + 2y = 48$

We have just learnt that these are examples of linear equations. Observe the number of variables in each equation.

SCERT, TELANGANA

(ii) ఇది సమానత్వపు గుర్తును కలిగి ఉంటుంది.

(iii) సమానత్వపు గుర్తు ఎడమవైపున గల బీజీయ సమాసమును సమీకరణం యొక్క L.H.S (Left Hand Side) అంటాము.

(iv) సమానత్వపు గుర్తుకు కుడివైపున గల బీజీయ సమాసమును సమీకరణం యొక్క R.H.S (Right Hand Side) అంటాము.

(v) ఒక సమీకరణం యొక్క LHS మరియు RHSల విలువలు సమానం, అయితే ఇది సమీకరణంలోని చరరాశి యొక్క ఏదో ఒక విలువకు మాత్రమే సత్యమవుతుంది. చరరాశి యొక్క ఈ విలువనే సమీకరణం యొక్క సాధన అంటాం.

$2x - 7 = 35$ అనేది

$x = 21$ మాత్రమే సత్యమవుతుంది.

అనగా $x = 21$ అయిన

$$\begin{aligned} LHS &= 2x - 7 \\ &= 2 \times 21 - 7 \\ &= 35 \\ &= RHS \end{aligned}$$

$\therefore$ సాధన $x = 21$

## 2.1 రేఖీయ సమీకరణాలు

ఈ క్రింది సమీకరణాలను గమనించండి.

(1) $2x - 7 = 35$ (2) $2x + 2y = 48$ (3) $4x - 1 = 2x + 5$ (4) $x^2 + y = z$

ఇచ్చట (1), (2) మరియు (3) సమీకరణాలలో ప్రతి దాని యొక్క పరిమాణం ఒకటి. కనుక వీనిని రేఖీయ సమీకరణాలు అంటాం. అయితే (4) వ సమీకరణం యొక్క పరిమాణం ఒకటి కాదు కనుక ఇది రేఖీయ సమీకరణం కాదు.

అనగా (1), (2) మరియు (3) సమీకరణాలు రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలు.

### ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి రేఖీయ సమీకరణాలు:

(i) $4x + 6 = 8$ (ii) $4x - 5y = 9$ (iii) $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$

(iv) $xy + yz + zx = 11$ (v) $3x + 2y - 6 = 0$ (vi) $3 = 2x + y$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$

## 2.2 సామాన్య సమీకరణాలు లేదా ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

ఈ క్రింది సమీకరణాలను గమనించండి.

(i) $2x - 7 = 35$ (ii) $4x - 1 = 2x + 5$ (iii) $2x + 2y = 48$

ఇవన్నీ రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలని నేర్చుకున్నాం. వీనిలో ప్రతీ సమీకరణంలోని చరరాశుల సంఖ్యను పరిశీలించండి.

SCERT, TELANGANA

(i) and (ii) are examples of linear equations in one variable. But the (iii) equation has two variables '$x$' and '$y$'. So this is called linear equation in two variables.

Thus an equation of the form $ax + b = 0$ or $ax = b$ where $a$, $b$ are constants and $a \neq 0$ is called linear equation in one variable or simple equation.

**Do This**

Which of the following are simple equations?

(i) $3x + 5 = 14$ (ii) $3x - 6 = x + 2$ (iii) $3 = 2x + y$

(iv) $\frac{x}{3} + 5 = 0$ (v) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (vi) $5m - 6n = 0$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$ (viii) $13t - 26 = 39$

## 2.3 Solving Simple equation having the variable on one side

Let us recall the technique of solving simple equations (having the variable on one side). Using the same technique Latha was able to solve the puzzle and tell the number that Sagar thought of.

**Example 1:** Solve the equation $3y + 39 = 8$

**Solution:** Given equation : $3y + 39 = 8$

$3y = 8 - 39$ (Transposing 39 to RHS)

$3y = -31$

$y = \frac{-31}{3}$ (Transposing 3 to RHS)

$\therefore$ The solution of $3y + 39 = 8$ is $y = \frac{-31}{3}$

Do you notice that the solution $\left(\frac{-31}{3}\right)$ is a rational number?

**Check:** LHS $= 3y + 39 = 3\left(\frac{-31}{3}\right) + 39 = -31 + 39 = 8$ RHS

**Say True or false? Justify your answer?**

While solving an equation Kavya does the following:

$3x + x + 5x = 72$

$9x = 72$, $x = 72 \times 9 = 648$

Where has she gone wrong? Find the correct answer?

**Example 2:** Solve $\frac{7}{4} - p = 11$

**Solution:** $\frac{7}{4} - p = 11$

SCERT TELANGANA

(i) మరియు (ii) లు ఏక చరరాశి గల రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలు, కానీ (iii) వ సమీకరణంలో రెండు చరరాశులు '$x$' మరియు '$y$' లు కలవు. కావున దీనిని రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణం అంటారు.

అనగా $a$, $b$ లు స్థిరరాశులు $a \neq 0$ అవుతూ $ax + b = 0$ లేదా $ax = b$ రూపంలో ఉన్న వానిని ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు లేదా సామాన్య సమీకరణాలు అంటాం.

**ఇవి చేయండి**

ఈ క్రింది వానిలో ఏవి సామాన్య సమీకరణాలు?

(i) $3x + 5 = 14$ (ii) $3x - 6 = x + 2$ (iii) $3 = 2x + y$

(iv) $\frac{x}{3} + 5 = 0$ (v) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (vi) $5m - 6n = 0$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$ (viii) $13t - 26 = 39$

## 2.3 ఒకవైపే చరరాశి గల సామాన్య సమీకరణాల సాధన

ఒక వైపు మాత్రమే చరరాశి గల సామాన్య సమీకరణాల సాధనను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఇదే విధానాన్ని అనుసరించడం ద్వారా లత పజిల్‌ను ఛేదించి సాగర్ అనుకున్న సంఖ్యను చెప్పగలిగింది.

**సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి.**

కావ్య ఒక సమీకరణాన్ని క్రింది విధంగా సాధించింది.

$3x + x + 5x = 72$

$9x = 72 \quad x = 72 \times 9 = 648$

ఆమె ఎక్కడ తప్పు చేసింది?

సరైన జవాబును కనుగొనండి.

**ఉదాహరణ 1:** $3y + 39 = 8$ సాధించుము.

**సాధన:** ఇవ్వబడిన సమీకరణం: $3y + 39 = 8$

$3y = 8 - 39$ (39 ను R.H.S వైపు పక్షాంతరం చెందగా)

$3y = -31$

$y = \frac{-31}{3}$ (3 ను R.H.S వైపు పక్షాంతరం చెందగా)

$\therefore$ $3y + 39 = 8$ యొక్క సాధన $y = \frac{-31}{3}$

ఇచ్చట సాధన $(\frac{-31}{3})$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని గమనించారా?

**సరిచూచుట:** L.H.S $= 3y + 39 = 3\left(\frac{-31}{3}\right) + 39 = -31 + 39 = 8$ R.H.S

**ఉదాహరణ 2:** $\frac{7}{4} - p = 11$ సాధించుము.

**సాధన:** $\frac{7}{4} - p = 11$

SCERT, TELANGANA

$$-p = 11 - \frac{7}{4} \quad \text{(Transposing } \frac{7}{4} \text{ to RHS)}$$

$$-p = \frac{44-7}{4}$$

> Transpose p from LHS to RHS and find the value of p.
>
> Is there any change in the value of p?

$$-p = \frac{37}{4}$$

$$\therefore p = -\frac{37}{4} \quad \text{(Multiplying both sides by } -1\text{)}$$

**Check:** LHS = $\frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - (-\frac{37}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 = \text{RHS}$

## Exercise - 2.1

Solve the following Simple Equations:

(i) $6m = 12$

(ii) $14p = -42$

(iii) $-5y = 30$

(iv) $-2x = -12$

(v) $34x = -51$

(vi) $\frac{n}{7} = -3$

(vii) $\frac{2x}{3} = 18$

(viii) $3x + 1 = 16$

(ix) $3p - 7 = 0$

(x) $13 - 6n = 7$

(xi) $200y - 51 = 49$

(xii) $11n + 1 = 1$

(xiii) $7x - 9 = 16$

(xiv) $8x + \frac{5}{2} = 13$

(xv) $4x - \frac{5}{3} = 9$

(xvi) $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

SCERT, TELANGANA

$$-p = 11 - \frac{7}{4} \qquad (\frac{7}{4} \text{ ను R.H.S పక్షాంతరం చేయగా})$$

$$-p = \frac{44-7}{4}$$

$$-p = \frac{37}{4}$$

$$\therefore p = -\frac{37}{4} \qquad (-1 \text{ చే ఇరువైపులా గుణించగా})$$

p ను L.H.S నుండి R.H.S పక్షాంతరం చెందడం ద్వారా p యొక్క విలువను కనుగొనండి. p విలువలో మార్పును ఏమైనా గమనించారా?

**సరిచూచుట:** $\text{L.H.S} = \frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - (-\frac{37}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 = \text{R.H.S}$

## అభ్యాసం - 2.1

క్రింది సామాన్య సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $6m = 12$

(ii) $14p = -42$

(iii) $-5y = 30$

(iv) $-2x = -12$

(v) $34x = -51$

(vi) $\frac{n}{7} = -3$

(vii) $\frac{2x}{3} = 18$

(viii) $3x + 1 = 16$

(ix) $3p - 7 = 0$

(x) $13 - 6n = 7$

(xi) $200y - 51 = 49$

(xii) $11n + 1 = 1$

(xiii) $7x - 9 = 16$

(xiv) $8x + \frac{5}{2} = 13$

(xv) $4x - \frac{5}{3} = 9$

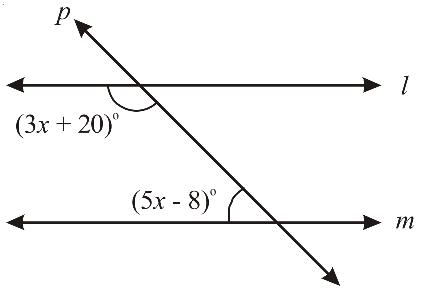
(xvi) $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

SCERT, TELANGANA

### 2.3.1 Some Applications

Consider the following examples:

**Example 3:** If $l \parallel m$, find the value of '$x$'?




**Solution:** Here $l \parallel m$ and $p$ is transversal.

Therefore $(3x + 20)^\circ + (5x - 8)^\circ = 180^\circ$ (sum of the interior angles on the same side of a transversal)

$$3x + 20^\circ + 5x - 8^\circ = 180^\circ$$

$$8x + 12^\circ = 180^\circ$$

$$8x = 180^\circ - 12^\circ$$

$$8x = 168^\circ$$

$$x = \frac{168^\circ}{8} = 21^\circ$$

**Example 4:** Sum of two numbers is 29 and one number exceeds another by 5. Find the numbers.

**Solution:** We have a puzzle here. We don't know the numbers. We have to find them.

Let the smaller number be '$x$', then the bigger number will be '$x + 5$'.

But it is given that sum of these two numbers is 29

$$\Rightarrow x + x + 5 = 29$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 29$$

$$\therefore 2x = 29 - 5$$

$$\therefore 2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2} \quad \text{(Transposing '2' to RHS)}$$

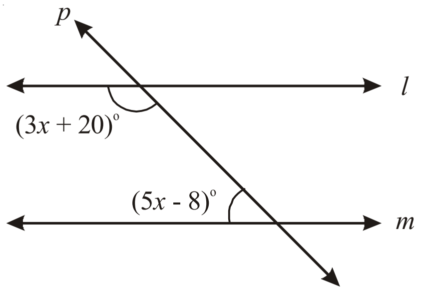
$$x = 12.$$

SCERT, TELANGANA

### 2.3.1 కొన్ని అనువర్తనాలు

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

**ఉదాహరణ 3:** $l \parallel m$ అయిన '$x$' విలువను కనుగొనుము.




**సాధన:** ఇచ్చట $l \parallel m$ మరియు $p$ ఒక తిర్యగ్రేఖ.

కనుక $(3x + 20)^o + (5x - 8)^o = 180^o$ (తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు)

$3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$

$8x + 12^o = 180^o$

$8x = 180^o - 12^o$

$8x = 168^o$

$x = \dfrac{168^o}{8} = 21^o$

**ఉదాహరణ 4:** రెండు సంఖ్యల మొత్తం 29 మరియు ఒక సంఖ్య మరొకదాని కంటే 5 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

**సాధన:** ఇది మనకు ఒక పజిల్. మనకు సంఖ్యలు తెలియవు. మనం వాటిని కనుగొనాలి.

చిన్న సంఖ్యను '$x$' అనుకుంటే పెద్ద సంఖ్య $x + 5$ అవుతుంది.

ఈ రెండింటి మొత్తం 29 అని ఇవ్వబడింది, కనుక

$\Rightarrow x + x + 5 = 29$

$\Rightarrow 2x + 5 = 29$

$\therefore 2x = 29 - 5$

$\therefore 2x = 24$

$x = \dfrac{24}{2}$ (2 ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)

$x = 12.$

SCERT, TELANGANA

Therefore smaller number : $x = 12$ and

Bigger number : $x + 5 = 12 + 5 = 17$.

**Check:** 17 exceeds 12 by 5 and $12 + 17 = 29$.

**Example 5:** Four times a number reduced by 5 equals 19. Find the number.

**Solutions:** If the number is taken to be '$x$', then four times of the number is '$4x$'

When $4x$ is reduced by 5 it equals to 19

$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 19$

$4x = 19 + 5$ (Transposing -5 to RHS)

$4x = 24$

$\therefore x = \frac{24}{4}$ (Transposing 4 to RHS)

$\Rightarrow x = 6$

Hence the required number is 6

**Check:** 4 times of 6 is 24 and $24 - 5 = 19$.

**Example 6:** The length of a rectangle shaped park exceeds its breadth by 17 meters. If the perimeter of the park is 178 meters find the dimensions of the park?

**Solution:** Let the breadth of the park $= x$ meters

Then the length of the park $= x + 17$ meters

$\therefore$ perimeter of the park $= 2$ (length + breadth)

$= 2\,(x + 17 + x)$ meters

$= 2\,(2x + 17)$ meters

But it is given that the perimeter of the rectangle is 178 meters

$$\therefore \quad 2\,(2x + 17) = 178$$

$$4x + 34 = 178$$

$$4x = 178 - 34$$

$$4x = 144$$

$$x = \frac{144}{4} = 36$$

SCERT, TELANGANA

కావున చిన్న సంఖ్య: $x = 12$ మరియు

పెద్ద సంఖ్య: $x + 5 = 12 + 5 = 17$.

**సరిచూచుట:** 17, 12 కంటే 5 ఎక్కువ మరియు $12 + 17 = 29$.

**ఉదాహరణ 5:** ఒక సంఖ్య యొక్క 4 రెట్ల నుంచి 5 తగ్గించిన 19కు సమానమవుతుంది. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

**సాధన:** సంఖ్యను '$x$' గా తీసుకొనిన 4 రెట్లు '$4x$' అవుతుంది.

ఈ $4x$ నుండి 5; తగ్గించిన ఫలితం 19 కు సమానమవుతుంది.

$$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 19$$

$$4x = 19 + 5 \qquad \text{(-5 ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)}$$

$$4x = 24$$

$$\therefore x = \frac{24}{4} \qquad \text{(4 ను RHS కు పక్షాంతరం చేయగా)}$$

$$\therefore x = 6$$

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్య 6

**సరిచూచుట:** 6 యొక్క 4 రెట్లు 24 మరియు $24 - 5 = 19$.

**ఉదాహరణ 6:** ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు పొడవు, దాని వెడల్పు కంటే 17 మీటర్లు ఎక్కువ. పార్కు యొక్క చుట్టుకొలత 178 మీటర్లు అయిన, పార్కు కొలతలను కనుగొనుము.

**సాధన:** పార్కు వెడల్పు = $x$ మీటర్లు అనుకొనిన

పార్కు పొడవు = $x + 17$ మీటర్లు

$\therefore$ పార్కు చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు)

= $2\,(x + 17 + x)$ మీటర్లు

= $2\,(2x + 17)$ మీటర్లు

కాని పార్కు యొక్క చుట్టుకొలత 178 మీటర్లు అని ఇవ్వబడినది.

$$\therefore \quad 2\,(2x + 17) = 178$$

$$4x + 34 = 178$$

$$4x = 178 - 34$$

$$4x = 144$$

$$x = \frac{144}{4} = 36$$



SCERT, TELANGANA

Therefore, breadth of the park $=$ 36 meters

Length of the park $= 36 + 17 = 53$ meters.

**Try and Check** it on your **own**.

**Example 7:** Two supplementary angles differ by 34. Find the angles

**Solution:** Let the smaller angle be $x^{o}$

Since the two angles differ by $34^{o}$, the bigger angle $= x + 34^{o}$

Since the sum of the supplementary angles is $180^{o}$

$$x^{o} + (x^{o} + 34) = 180^{o}$$

$$2x^{o} + 34 = 180^{o}$$

$$2x = 180 - 34 = 146^{o}$$

$$x^{o} = \frac{146^{o}}{2} = 73^{o}$$

Therefore smaller angle $= x^{o} = 73^{o}$

Bigger angle $= x^{o} + 34^{o} = 73^{o} + 34^{o} = 107^{o}$

**Example 8**: The present age of Vijaya's mother is four times the present age of Vijaya. After 6 years the sum of their ages will be 62 years. Find their present ages.

**Solution:** Let Vijaya's present age be '$x$' years

Then we can make the following table

| | Vijaya | Vijaya's mother |
|---|---|---|
| Present age | $x$ | $4x$ |
| Age after 6 years | $x + 6$ | $4x + 6$ |

$\therefore$ Sum of their ages after 6 years $= (x + 6) + (4x + 6)$

$= x + 6 + 4x + 6$

$= 5x + 12$

But it is given that sum of their ages after 6 years is 62

$$\Rightarrow 5x + 12 = 62$$

$$5x = 62 - 12$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

SCERT, TELANGANA

$\therefore$ పార్కు యొక్క వెడల్పు $= 36$ మీటర్లు

పార్కు యొక్క పొడవు $= 36 + 17 = 53$ మీటర్లు

**సరిచూచుట:** ప్రయత్నించి సరిచూడండి.

**ఉదాహరణ 7:** రెండు సంపూరక కోణాల భేదం $34^o$ అయిన, ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

**సాధన:** చిన్న కోణం $x^o$ అనుకొనిన

రెండు కోణాల భేదం $34^o$, కనుక పెద్ద కోణం $= x + 34^o$

సంపూరక కోణాల మొత్తం $180^o$ కనుక

$$x^o + (x^o + 34) = 180^o$$

$$2x^o + 34 = 180^o$$

$$2x = 180 - 34 = 146^o$$

$$x^o = \frac{146^o}{2} = 73^o$$

$\therefore$ చిన్న కోణం $= x^o = 73^o$

పెద్ద కోణం $= x^o + 34^o = 73^o + 34^o = 107^o$

**ఉదాహరణ 8:** ప్రస్తుతం విజయ వాళ్ళ అమ్మ వయస్సు విజయ వయస్సుకు 4 రెట్లు. 6 సంవత్సరాల అనంతరం వారిద్దరి వయస్సుల మొత్తం 62 సంవత్సరాలు. అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

**సాధన:** విజయ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు '$x$' అనుకొనిన క్రింది పట్టిక తయారు చేసుకోగలము.

| | విజయ | విజయ వాళ్ళ అమ్మ |
|---|---|---|
| ప్రస్తుత వయస్సు | $x$ | $4x$ |
| 6 సం॥ల అనంతరం వయస్సు | $x + 6$ | $4x + 6$ |

$\therefore$ 6 సం॥ల అనంతరం వారిద్దరి వయస్సుల మొత్తం $= (x + 6) + (4x + 6)$

$= x + 6 + 4x + 6$

$= 5x + 12$

అయితే 6 సంవత్సరాల అనంతరం వారిద్దరి వయస్సుల మొత్తం 62 సంవత్సరాలు అని ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow 5x + 12 = 62$$

$$5x = 62 - 12$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

SCERT TELANGANA

Therefore, present age of Vijaya = $x$ = 10 years

Present age of Vijaya's mother = $4x = 4 \times 10 = 40$ years

**Example 9 :** There are 90 multiple choice questions in a test. Two marks are awarded for every correct answer and one mark is deducted for every wrong answer . If Sahana got 60 marks in the test while she answered all the questions, then how many questions did she answer correctly?

**Solution:** Suppose the number of correctly answered questions be '$x$', then number of wrongly answer questions = $90 - x$ .

It is given that for every correct answer 2 marks are awarded.

$\therefore$ Number of marks scored for correct answers = $2x$

And it is given that for every wrongly answered questions '1' mark is deducted

$\therefore$ Number of marks to be deducted from the score = $(90 - x) \times 1 = 90 - x$

$\therefore$ Total score = $2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$

But it is given that total score is 60

$$\Rightarrow \quad 3x - 90 = 60$$

$$3x = 60 + 90$$

$$3x = 150$$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

$\therefore$ Number of questions answered correctly = $x = 50$

**Example 10:** Ravi works as a cashier in a bank. He has currency of denominations ₹ 100, ₹ 50, ₹ 10 respectively. The ratio of number of these notes is 2 : 3 : 5. The total cash with Ravi is ₹ 4,00,000.

How many notes of cash of each denomination does he have?

**Solution:** Let the number of ₹ 100 notes = $2x$

Number of ₹ 50 notes = $3x$

and Number of ₹ 10 notes = $5x$

$\therefore$ Total Money = $(2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$

$= 200x + 150x + 50x = 400x$

Note that $2x : 3x : 5x$ is same as 2 : 3 : 5

SCERT, TELANGANA

విజయ ప్రస్తుత వయస్సు $= x = 10$ సం॥లు

విజయ వాళ్ళ అమ్మ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $= 4x = 4 \times 10 = 40$ సం॥లు.

**ఉదాహరణ 9:** ఒక పరీక్షలో 90 బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు కలవు. ప్రతి సరైన సమాధానానికి 2 మార్కులు ఇవ్వబడును. ప్రతి తప్పు సమాధానంకు 1 మార్కు తగ్గించబడును. సహానా అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలను రాసి 60 మార్కులు తెచ్చుకొనిన ఆమె ఎన్ని ప్రశ్నలకు సరైన సమాధానాలు గుర్తించినది?

**సాధన:** సరైన సమాధానములను గుర్తించిన ప్రశ్నల సంఖ్య '$x$' అనుకొనిన తప్పు సమాధానం గుర్తించిన ప్రశ్నల సంఖ్య $= 90 - x$.

ప్రతి సరైన సమాధానమునకు 2 మార్కులు కనుక

సరైన సమాధానాలకు వచ్చే మార్కులు $2x$

ప్రతి తప్పు సమాధానానికి 1 మార్కు తగ్గించబడుతుంది.

కనుక తగ్గించబడే మార్కులు $= (90 - x) \times 1 = 90 - x$

$\therefore$ మొత్తం మార్కులు $= 2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$

అయితే మొత్తం మార్కులు 60 అని ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow \quad 3x - 90 = 60$$

$$3x = 60 + 90$$

$$3x = 150$$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

$\therefore$ సరైన సమాధానాలను గుర్తించిన ప్రశ్నల సంఖ్య $= x = 50$

**ఉదాహరణ 10:** రవి ఒక బ్యాంకులో క్యాషియర్‌గా పని చేస్తాడు. ఇతని వద్ద ₹ 100, ₹ 50, ₹ 10 నోట్లు 2:3:5 నిష్పత్తిలో గలవు. వీటి మొత్తం విలువ ₹ 4,00,000 అయిన ఏ రకం నోట్లు ఎన్ని గలవో కనుగొనుము.

**సాధన:** ₹ 100 నోట్ల సంఖ్య $= 2x$

₹ 50 నోట్ల సంఖ్య $= 3x$

₹ 10 నోట్ల సంఖ్య $= 5x$ అనుకుందాం.

$2x : 3x : 5x$ మరియు $2 : 3 : 5$ సమానం అని గమనించగలరు.

$\therefore$ మొత్తం నోట్ల విలువ $= (2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$

$= 200x + 150x + 50x = 400x$

But according to the problem the total money is Rs.4, 00,000.

$\Rightarrow \quad 400x = 4,00,000$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

Therefore number of ₹100 notes $= 2x = 2 \times 1000 = 2000$

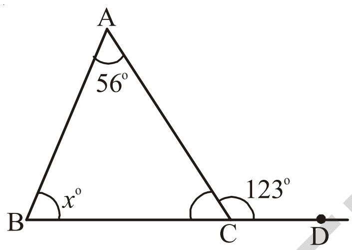
Number of ₹ 50 notes $= 3x = 3 \times 1000 = 3000$

Number of ₹10 notes $= 5x = 5 \times 1000 = 5000$

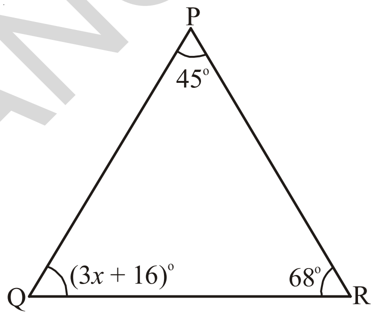
## Exercise - 2.2

1. Find 'x' in the following figures?

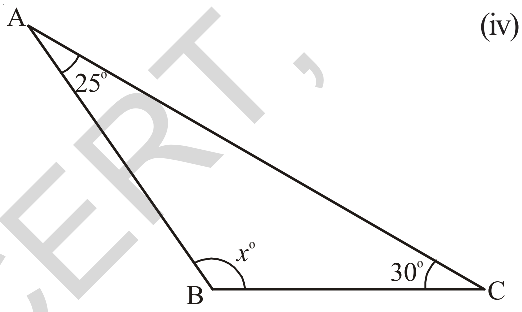
(i)



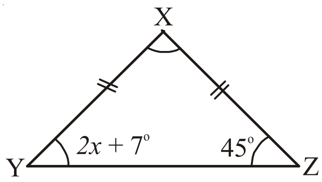

(ii)



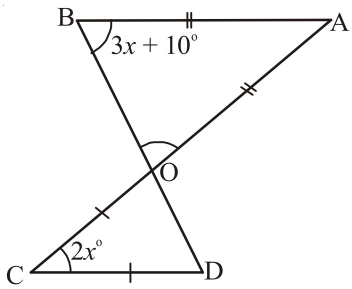

(iii)




(iv)




(v)




SCERT, TELANGANA

అయితే మొత్తం నోట్ల విలువ ₹ 4, 00,000 అని ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow \quad 400x = 4,00,000$$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

₹ 100 నోట్ల సంఖ్య $= 2x = 2 \times 1000 = 2000$

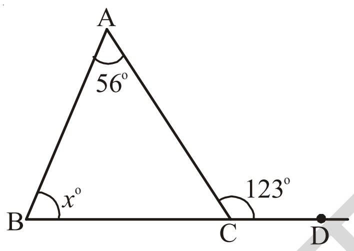
₹ 50 నోట్ల సంఖ్య $= 3x = 3 \times 1000 = 3000$

₹ 10 నోట్ల సంఖ్య $= 5x = 5 \times 1000 = 5000$

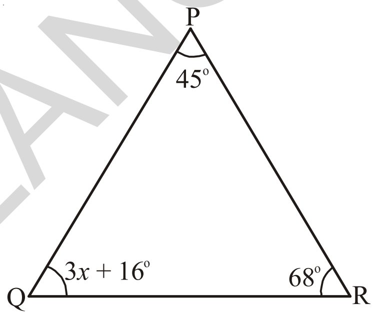
## అభ్యాసం - 2.2

1. క్రింది పటాలలో ‘$x$’ విలువను కనుగొనుము.

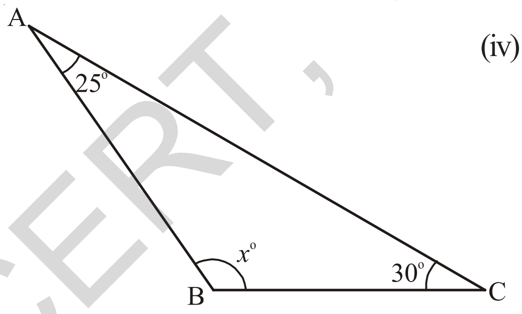
(i)



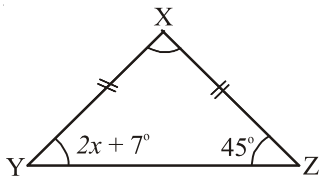

(ii)



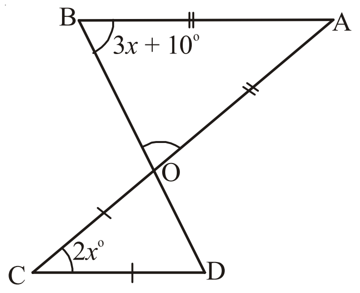

(iii)




(iv)




(v)




SCERT, TELANGANA

2. The difference between two numbers is 8. If 2 is added to the bigger number the result will be three times the smaller number . Find the numbers.

3. What are those two numbers whose sum is 58 and difference is 28?

4. The sum of two consecutive odd numbers is 56. Find the numbers.

5. The sum of three consecutive multiples of 7 is 777. Find these multiples.

   (Hint: Three consecutive multiples of 7 are '$x$', '$x + 7$', '$x + 14$')

6. A man walks 10 km, then travels a certain distance by train and then by bus as far as twice by the train. If the whole journey is of 70km, how far did he travel by train?

7. Vinay bought a cake and cut it into three pieces. When he weighed the first piece he found that it was 7g lighter than the second piece and 4g heavier than the third piece. If the whole cake weighed 300g. How much did each of the three pieces weigh?

   (Hint: Let the weight of the first piece be '$x$ ', then weight of second piece is '$x$+7', weight of the third piece is '$x$ - 4')

8. The distance around a rectangular field is 400 meters.The length of the field is 26 meters more than the breadth. Calculate the length and breadth of the field?

9. The length of a rectangular field is 8 meters less than twice its breadth. If the perimeter of the rectangular field is 56 meters, find its length and breadth?

10. Two equal sides of a triangle are each 5 meters less than twice the third side. If the perimeter of the triangle is 55 meters, find the length of its sides?

11. Two complementary angles differ by $12^{o}$, find the angles?

12. The ages of Rahul and Laxmi are in the ratio 5:7. Four years later, the sum of their ages will be 56 years. What are their present ages?

13. There are 180 multiple choice questions in a test. A candidate gets 4 marks for every correct answer, and for every un-attempted or wrongly answered questions one mark is deducted from the total score of correct answers. If a candidate scored 450 marks in the test how many questions did he answer correctly?

14. A sum of ₹ 500 is in the form of denominations of ₹ 5 and ₹ 10. If the total number of notes is 90 find the number of notes of each denomination.

   (Hint: let the number of 5 rupee notes be '$x$ ', then number of 10 rupee notes = 90–$x$)

SCERT, TELANGANA

2. రెండు సంఖ్యల భేదం 8. పెద్ద సంఖ్యకు '2' కలిపిన ఫలితం చిన్న సంఖ్యకు 3 రెట్లు అవుతుంది. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

3. మొత్తం 58, భేదం 28 అయ్యే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.

4. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తం 56. అయిన వాటిని కనుగొనుము.

5. వరుసగా మూడు 7 యొక్క గుణకాల మొత్తం 777 అయిన ఆ గుణకాలను కనుగొనుము.
(సూచన: వరుసగా మూడు 7 యొక్క గుణకాలు '$x$', '$x + 7$', '$x + 14$')

6. ఒక మనిషి కాలి నడకన 10 కి.మీ. ప్రయాణించిన తరువాత కొంత దూరం రైలులో; మరికొంత దూరం బస్సులో ప్రయాణించాడు. బస్సులో ప్రయాణించిన దూరం; రైలులో ప్రయాణించిన దూరమునకు రెట్టింపు అతని మొత్తం ప్రయాణం 70 కి.మీ. అయిన అతను రైలులో ప్రయాణించిన దూరం ఎంత?

7. వినయ్ ఒక కేక్ కొని దానిని మూడు ముక్కలు చేశాడు. వీటిని బరువు తూయగా మొదటిది రెండవదాని కంటే 7 గ్రా. తక్కువగాను, మూడవ దానికంటే 4 గ్రా. ఎక్కువగాను ఉంది. కేక్ యొక్క మొత్తం బరువు 300 కి.గ్రా. అయిన ప్రతీ ముక్క బరువును కనుగొనుము.

(సూచన: మొదటి ముక్క బరువు '$x$' అనుకొనిన, రెండవ దాని బరువు '$x + 7$', మూడవ దాని బరువు '$x - 4$')

8. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలం చుట్టుకొలత 400 మీటర్లు. దాని పొడవు, వెడల్పు కంటే 26 మీటర్లు ఎక్కువ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

9. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలం యొక్క పొడవు, వెడల్పు యొక్క రెట్టింపు కంటే 8 మీ. తక్కువ. పొలం యొక్క చుట్టుకొలత 56 మీటర్లు అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

10. ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల కొలతలు సమానం. వీని కొలత మూడవ భుజం యొక్క రెట్టింపు కంటే 5 మీ. తక్కువ. త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలత 55 మీ. అయిన భుజాల కొలతలను కనుగొనుము.

11. రెండు పూరక కోణాల భేదం $12^o$ అయిన వానిని కనుగొనుము.

12. రాహుల్ మరియు లక్ష్మిల వయస్సుల నిష్పత్తి 5:7. 4 సంవత్సరాల తరువాత వారి వయస్సుల మొత్తం 56 సంవత్సరాలు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంత?

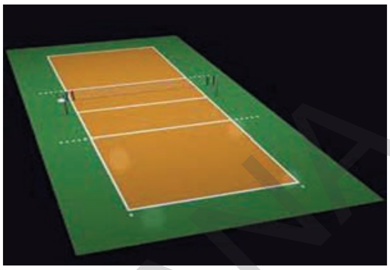
13. ఒక పరీక్షలో 180 బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు కలవు. ప్రతి సరైన సమాధానమునకు 4 మార్కులు ఇవ్వబడును. సమాధానం రాయని మరియు తప్పుగా సమాధానం రాసిన ప్రతి ప్రశ్నకు ఒక మార్కు తగ్గించబడుతుంది. ఒక అభ్యర్థికి ఈ పరీక్షలో 450 మార్కులు వచ్చిన ఆ అభ్యర్థి ఎన్ని ప్రశ్నలకు సరైన సమాధానంను రాసినాడు?

14. ₹ 5 నోట్లు, ₹ 10 నోట్లు కలిపి మొత్తం 90 నోట్లు కలవు. వీని మొత్తం విలువ ₹ 500 అయిన ఏ రకమైన నోట్లు ఎన్ని కలవు?

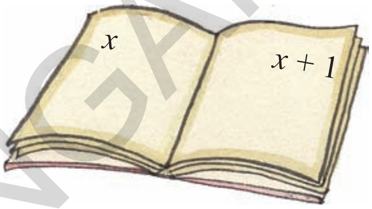
(సూచన: ₹ 5 యొక్క నోట్ల సంఖ్య '$x$' అనుకొనిన ₹ 10 యొక్క నోట్ల సంఖ్య = $90-x$)

SCERT, TELANGANA

15. A person spent ₹ 564 in buying pens and pencils if cost of each pen is ₹ 7 and each pencil is ₹ 3 and if the total number of things bought was 108, how many of each type did he buy?



16. The perimeter of a school volleyball court is 177 ft and the length is twice the width. What are the dimensions of the volleyball court?




17. The sum of the page numbers on the facing pages of a book is 373. What are the page numbers?

(Hint :Let the page numbers of open pages are $x$ and $x$+1)

## 2.4 Solving equation that has variables on both the sides

We know that an equation is the equality of the values of two expressions. In the equation $2x - 7 = 35$, the two expressions are 2x-7 and 35. In most examples that we have come across so far the RHS is just a number. But it need not be always. So, both sides could have expressions with variables. Let us see how this happens.

Consider the following example

**Example 11:** The present ages of Rafi and Fathima are in the ratio 7 : 5. Ten years later the ratio of their ages will be 9 : 7. Find their present ages?

**Solution:** Since the presen ratios of ages of Rafi and Fathima is 7:5, we may take, Rafi's age to be $7x$ and the Fathima's age to be $5x$

(Note that ratio of $7x$ and $5x$ is $7x : 5x$ and which is same as 7:5)

After 10 years Rafi's age = $7x + 10$

and Fathima's age = $5x + 10$

After 10 years, the ratio of Rafi's age and Fathima's age is $7x + 10 : 5x + 10$

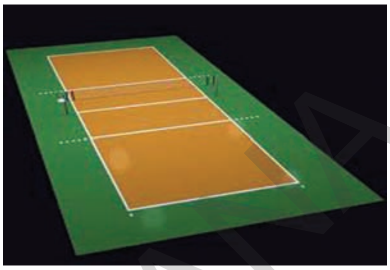
But according to the given data this ratio is equal to 9 : 7

$\Rightarrow \quad 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$

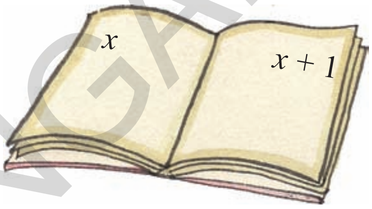
i.e., $7(7x + 10) = 9(5x + 10)$

SCERT, TELANGANA

15. ఒక వ్యక్తి పెన్నులు, పెన్సిళ్ళు కొనడానికి ₹ 564 ఖర్చు చేశాడు. ఒక్కొక్క పెన్ను ఖరీదు ₹ 7, పెన్సిల్ ఖరీదు ₹ 3, మరియు మొత్తం పెన్నులు, పెన్సిళ్ళ సంఖ్య 108 అయిన అతను ఏ రకమైన వస్తువులను ఎన్నెన్ని కొన్నాడు?



16. ఒక పాఠశాలలోని వాలీబాల్ కోర్టు యొక్క చుట్టుకొలత 177 అడుగులు. దీని పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు అయిన వాలీబాల్ కోర్టు యొక్క పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.




17. ఒక పుస్తకం తెరచి ఉంది. తెరచిన ఆ రెండు పేజీలలో పేజీ నెంబర్ల మొత్తం 373 అయిన పేజీ నెంబర్లను కనుగొనుము.

(సూచన: తెరచిన పేజీల సంఖ్యలు x మరియు x + 1 అనుకొనండి)

## 2.4 ఇరువైపులా చరరాశి గల సామాన్య సమీకరణాల సాధన

సమీకరణం అనగా రెండు మాసాల మధ్య సమానత్వమని మనకు తెలుసు. $2x - 7 = 35$ లో $2x$-7 మరియు 35 లు రెండు సమాసములు. ఇప్పటి వరకు మనం చూసిన సమీకరణాలలో RHS ఒక సంఖ్యయే. ఎల్లప్పుడు ఇలానే వుండకపోవచ్చు. ఇరువైపులా చరరాశులతో కూడిన సమాసాలు కూడా ఉండవచ్చు. ఇటువంటి సమీకరణాలు ఏవిధంగా ఏర్పడుతాయో చూద్దాం.

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

**ఉదాహరణ 11:** రఫీ మరియు ఫాతిమాల ప్రస్తుత వయస్సుల నిష్పత్తి 7 : 5. 10 సంవత్సరాల తర్వాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 9 : 7 అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

**సాధన:** రఫీ మరియు ఫాతిమాల ప్రస్తుత వయస్సుల నిష్పతి 7:5 కనుక రఫీ యొక్క వయస్సును $7x$ గాను మరియు ఫాతిమా యొక్క వయస్సు $5x$ గాను తీసుకోవచ్చు.

(గమనిక: $7x$, $5x$ ల నిష్పత్తి $7x : 5x$ మరియు 7:5 కు సమానం)

10 సం॥ల అనంతరం రఫీ యొక్క వయస్సు $= 7x + 10$

మరియు ఫాతిమా యొక్క వయస్సు $= 5x + 10$

10 సం॥ల అనంతరం వారి వయస్సుల నిష్పత్తి $7x + 10 : 5x + 10$

అయితే దత్తాంశం ప్రకారం ఈ నిష్పత్తి 9 : 7 కు సమానం.

$\Rightarrow \quad 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$

i.e., $7(7x + 10) = 9(5x + 10)$

SCERT, TELANGANA

$\Rightarrow \qquad 49x + 70 = 45x + 90.$

Did you notice that in the above equation we have algebraic expressions on both sides? Now let us learn how to solve such equations.

The above equation is $49x + 70 = 45x + 90$

$\Rightarrow \qquad 49x - 45x = 90 - 70$ (Transposing 70 to RHS and $45x$ to LHS)

$\therefore \qquad 4x = 20$

$\therefore \qquad x = \frac{20}{4} = 5$

Therefore Rafi's age = $7x = 7 \times 5 = 35$ years

And Fathima's age = $5x = 5 \times 5 = 25$ years

**Example 12:** Solve $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$

**Solution :** $5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x$ (removing brackets)

$13x + 4 = 7x - 1$ (adding like terms)

$13x - 7x = -1 - 4$ (transposing 4 to RHS, $7x$ to LHS)

$6x = -5$

$x = \frac{-5}{6}$ (transposing 6 to RHS)

## Exercise - 2.3

Solve the following equations:

1. $7x - 5 = 2x$
2. $5x - 12 = 2x - 6$
3. $7p - 3 = 3p + 8$
4. $8m + 9 = 7m + 8$
5. $7z + 13 = 2z + 4$
6. $9y + 5 = 15y - 1$
7. $3x + 4 = 5(x-2)$
8. $3(t - 3) = 5(2t - 1)$

SCERT, TELANGANA

$\Rightarrow \quad 49x + 70 = 45x + 90.$

పై సమీకరణంలో ఇరువైపులా చరరాశులను కలిగిన బీజీయ సమాసాలు ఉండడం గమనించారా? ఇలాంటి సమీకరణాల సాధనను ఇపుడు నేర్చుకుందాం.

పై సమీకరణం $49x + 70 = 45x + 90$

$\Rightarrow 49x - 45x = 90 - 70$ (70 ను RHS కు 45$x$ ను LHS కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$\therefore \quad 4x = 20$

$\therefore \quad x = \frac{20}{4} = 5$

రఫీ యొక్క వయస్సు = $7x = 7 \times 5 = 35$ సం॥లు.

మరియు ఫాతిమా యొక్క వయస్సు = $5x = 5 \times 5 = 25$ సం॥లు.

**ఉదాహరణ 12:** $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$ ను సాధించండి.

**సాధన:** $5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x$ (కుండలీకరణాలను తొలగించగా)

$13x + 4 = 7x - 1$ (సజాతి పదాలను కూడగా)

$13x - 7x = -1 - 4$ (4 ను RHS కు, 7$x$ ను LHS కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$6x = -5$

$x = \frac{-5}{6}$ (6 ను RHS కు పక్షాంతరం చెందించగా)

## అభ్యాసం - 2.3

క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

1. $7x - 5 = 2x$
2. $5x - 12 = 2x - 6$
3. $7p - 3 = 3p + 8$
4. $8m + 9 = 7m + 8$
5. $7z + 13 = 2z + 4$
6. $9y + 5 = 15y - 1$
7. $3x + 4 = 5(x - 2)$
8. $3(t - 3) = 5(2t - 1)$

SCERT, TELANGANA

9. $5(p-3) = 3(p-2)$

10. $5(z+3) = 4(2z+1)$

11. $15(x-1) + 4(x+3) = 2(7+x)$

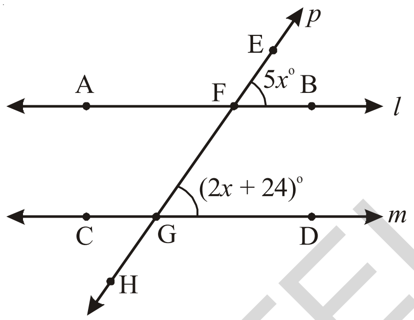
12. $3(5z-7) + 2(9z-11) = 4(8z-7) - 111$

13. $8(x-3) - (6-2x) = 2(x+2) - 5(5-x)$

14. $3(n-4) + 2(4n-5) = 5(n+2) + 16$

### 2.4.1 Some more applications

**Example 13:** In the figure $l \parallel m$, and $p$ a transversal find the value of '$x$'?




**Solution:** It is given that $l \parallel m$ and $p$ is a transversal.

$\therefore \angle EFB = \angle FGD$ (corresponding angles)

$\therefore \quad 5x^o = (2x+24)^o$

$5x^o - 2x^o = 24^o$

$3x^o = 24^o$

$$x = \frac{24}{3} = 8^o$$

**Example 14**: Hema is 24 years older than her daughter Dhamini. 6 years ago, Hema was thrice as old as Dhamini. Find their present ages.

**Solution:** Let the Present age of Dhamini be '$x$' years, then we can make the following table.

| | Dhamini | Hema |
|---|---|---|
| Present age | $x$ | $x + 24$ |
| 6 years ago | $x - 6$ | $(x + 24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18$ |

SCERT, TELANGANA

9. $5(p-3) = 3(p-2)$

10. $5(z+3) = 4(2z+1)$

11. $15(x-1) + 4(x+3) = 2(7+x)$

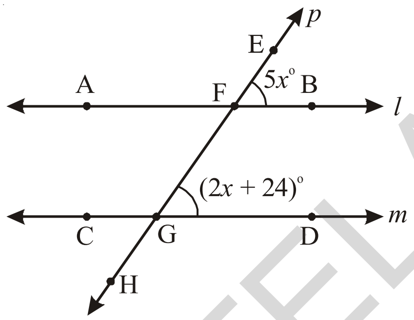
12. $3(5z-7) + 2(9z-11) = 4(8z-7) - 111$

13. $8(x-3) - (6-2x) = 2(x+2) - 5(5-x)$

14. $3(n-4) + 2(4n-5) = 5(n+2) + 16$

### 2.4.1 మరికొన్ని అనువర్తనాలు

**ఉదాహరణ 13:** క్రింది పటంలో $l \| m$ మరియు p తిర్యగ్రేఖ '$x$' విలువను కనుగొనుము.




**సాధన:** $l \| m$ p తిర్యగ్రేఖ అని ఇవ్వబడింది.

$\therefore \angle EFB = \angle FGD$ (సదృశ కోణాలు)

$\therefore 5x^o = (2x+24)^o$

$5x^o - 2x^o = 24^o$

$3x^o = 24^o$

$$x = \frac{24}{3} = 8^o$$

**ఉదాహరణ 14:** హేమ తన కూతురు ధామిని కంటే 24 సంవత్సరాలు పెద్దది. 6 సంవత్సరాల క్రితం హేమ వయస్సు ధామిని వయస్సుకు 3 రెట్లు. అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

**సాధన:** ధామిని యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు '$x$' అనుకొనిన మనం ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేసుకోగలము.

| | ధామిని | హేమ |
|---|---|---|
| ప్రస్తుత వయస్సు | $x$ | $x + 24$ |
| 6 సం॥ల క్రితం | $x - 6$ | $(x+24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18$ |



SCERT, TELANGANA

But as given that 6 years ago Hema was thrice as old as Dhamini

$\therefore\ x + 18 = 3(x - 6)$

$x + 18 = 3x - 18$

$x - 3x = -18 - 18$

$-2x = -36$

$x = 18.$

Therefore present age of Dhamini $= x = 18$ years

Present age of Hema $= x + 24 = 18 + 24 = 42$ years

**Example 15:** In a two digit number the sum of the two digits is 8. If 18 is added to the number its digits are reversed. Find the number.

**Solution:** Let the digit at ones place be '$x$'

Then the digit at tens place $= 8 - x$. (sum of the two digits is 8)

Therefore number $10(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x$ ——— (1)

Now, number obtained by reversing the digits $= 10 \times (x) + (8 - x)$

$= 10x + 8 - x = 9x + 8$

It is given that if 18 is added to the number its digits are reversed

$\therefore$ Number + 18 = Number obtained by reversing the digits

$\Rightarrow\ (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$

$98 - 9x = 9x + 8$

$98 - 8 = 9x + 9x$

$90 = 18x$

$$x = \frac{90}{18} = 5$$

By substituting the value of $x$ in equation (1) we get the number

$\therefore$ Number $= 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$

**Example 16:** A motorboat goes down stream in a river and covers the distance between two coastal towns in five hours. It covers this distance upstream in six hours. If the speed of the stream is 2 km/hour find the speed of the boat in still water.

SCERT, TELANGANA

అయితే దత్తాంశం ప్రకారం 6 సం॥ల క్రితం హేమ వయస్సు ధామిని వయస్సుకు 3 రెట్లు.

$\therefore \quad x + 18 = 3\,(x - 6)$

$x + 18 = 3x - 18$

$x - 3x = -18 - 18$

$-2x = -36$

$x = 18.$

$\therefore$ ధామిని యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $= x = 18$ సం॥లు.

హేమ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $= x + 24 = 18 + 24$

$= 42$ సం॥లు.

**ఉదాహరణ 15:** ఒక రెండంకెలు గల సంఖ్యలో రెండు అంకెల మొత్తం 8. ఈ సంఖ్యకు 18 కలిపిన, సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు అవుతాయి. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

**సాధన:** సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను '$x$' అనుకొనిన

పదుల స్థానంలోని అంకె $= 8 - x$ అవుతుంది. (రెండు అంకెల మొత్తం 8)

$\therefore$ సంఖ్య $10\,(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x$ —— (1)

ఇప్పుడు సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య $= 10 \times (x) + (8 - x)$

$= 10x + 8 - x = 9x + 8$

దత్తాంశం ప్రకారం సంఖ్యకు 18 కలిపిన సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు అవుతాయి.

$\therefore$ సంఖ్య + 18 = సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్య

$\Rightarrow \quad (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$

$98 - 9x = 9x + 8$

$98 - 8 = 9x + 9x$

$90 = 18x$

$$x = \frac{90}{18} = 5$$

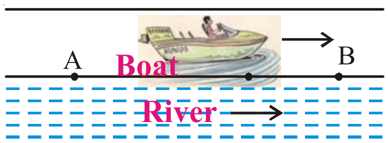
$x$ విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించి కావలసిన సంఖ్యను పొందవచ్చు.

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్య $= 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$

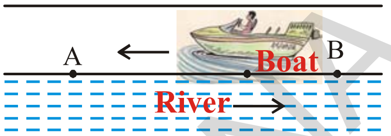
**ఉదాహరణ 16:** ఒక మోటారు పడవ నదిలో నీటి ప్రవాహం వెంట ప్రయాణిస్తూ ఒడ్డున గల రెండు పట్టణాల మధ్య దూరంను 5 గంటలలో ప్రయాణిస్తుంది. అదే మోటారు పడవ నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా ప్రయాణిస్తూ అదే దూరంను 6 గంటలలో ప్రయాణిస్తుంది. నీటి ప్రవాహ వేగం 2 కి.మీ./గం. అయిన నిశ్చల నీటిలో మోటారు పడవ వేగం ఎంత?

SCERT, TELANGANA

**Solution:** Since we have to find the speed of the boat in still water, let us suppose that it is $x$ km/h.




This means that while going downstream the speed of the boat will be $(x + 2)$ kmph because the water current is pushing the boat at 2 kmph in addition to its own speed '$x$'kmph. Now the speed of the boat down stream $= (x + 2)$ kmph




$\therefore$ Distance covered in 5 hours $= 5\,(x + 2)$ km

Hence the distance between A and B is $5\,(x + 2)$ km

But while going upstream the boat has to work against the water current. Therefore its speed upstream will be $(x - 2)$ kmph.

Distance covered in 6 hours $= 6\,(x - 2)$ km

$\therefore$ Distance between A and B is $6\,(x - 2)$ km

But the distance between A and B is fixed

$\therefore\ 5\,(x + 2) = 6\,(x - 2)$

$\Rightarrow\quad 5x + 10 = 6x - 12$

$\Rightarrow\quad 5x - 6x = -12 - 10$

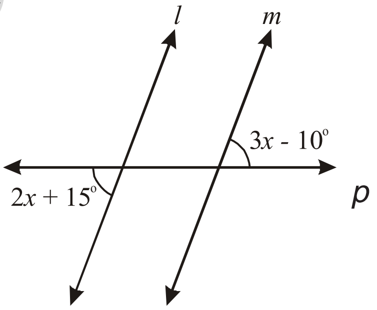
$\therefore\quad -x = -22$

$x = 22.$

Therefore speed of the boat in still water is 22 kmph.

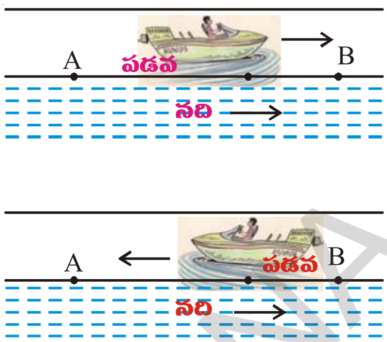
## Exercise- 2.4

1. Find the value of '$x$' so that $l \parallel m$.




SCERT, TELANGANA

**సాధన:** మనం నిశ్చల నీటిలో పడవ యొక్క వేగంను కనుగొనాలి. కనుక దీనిని '$x$' కి.మీ./గం. గా తీసుకుందాం.




నీటి ప్రవాహం వెంట పడవ ప్రయాణిస్తున్నప్పుడు నీరు 2 కి.మీ./గం. వేగంతో పడవను ముందుకు నెట్టుతుంది. కనుక నీటి ప్రవాహం వెంట ప్రయాణిస్తున్నప్పుడు పడవ వేగం $= (x + 2)$ కి.మీ./ గం.

$\therefore$ నీటి ప్రవాహం వెంట ప్రయాణిస్తున్నప్పుడు 5 గంటలలో ప్రయాణించిన దూరం $= 5\ (x + 2)$ కి.మీ.

$\therefore$ A మరియు B ల మధ్య దూరం $5\ (x + 2)$ కి.మీ.

కానీ పడవ నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా వెళ్ళునపుడు ప్రవాహ వేగానికి వ్యతిరేకంగా వెళ్ళాలి. కనుక నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా ప్రయాణిస్తున్నప్పుడు పడవ వేగం $(x - 2)$ కి.మీ./గం.

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా ప్రయాణిస్తున్నప్పుడు 6 గం॥లలో పడవ

ప్రయాణించిన దూరం $= 6(x - 2)$ కి.మీ./గం.

$\therefore$ A మరియు B ల మధ్య దూరం $6\ (x - 2)$ కి.మీ.

అయితే, A, B ల మధ్య దూరం స్థిరము కనుక

$\therefore\ 5\ (x + 2) = 6\ (x - 2)$

$\Rightarrow\quad 5x + 10 = 6x - 12$

$\Rightarrow\quad 5x - 6x = -12 - 10$

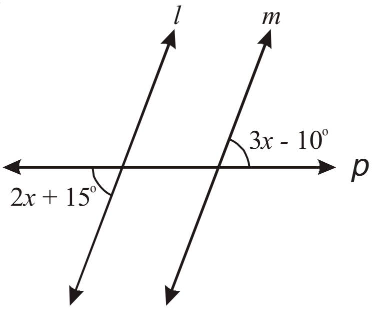
$\therefore\quad -x = -22$

$x = 22.$

$\therefore$ నిశ్చల నీటిలో పడవ వేగం = 22 కి.మీ./గం.

## అభ్యాసం - 2.4

1. $l \parallel m$ అయిన క్రింది పటంలో '$x$' విలువను కనుగొనుము.




SCERT, TELANGANA

2. Eight times of a number reduced by 10 is equal to the sum of six times the number and 4. Find the number.

3. A number consists of two digits whose sum is 9. If 27 is subtracted from the number its digits are reversed. Find the number.

4. A number is divided into two parts such that one part is 10 more than the other. If the two parts are in the ratio 5:3, find the number and the two parts.

5. When I triple a certain number and add 2, I get the same answer as I do when I subtract the number from 50. Find the number.

6. Mary is twice older than her sister. In 5 years time, she will be 2 years older than her sister. Find how old are they both now.

7. In 5 years time, Reshma will be three times old as she was 9 years ago. How old is she now?

8. A town's population increased by 1200 people, and then this new population decreased 11%. The town now had 32 less people than it did before the 1200 increase. Find the original population.

## 2.5 Reducing Equations

**Example 17**: Solve $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$

**Solution:**

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$ (Transposing $\frac{x}{3}$ to L.H.S. and $\frac{1}{4}$ to R.H.S.)

$$\frac{3x-2x}{6}=\frac{2+1}{4}$$ (LCM of 2 and 3 is 6 ; 2 and 4 is 4)

$$\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore x=\frac{3}{4}\times 6$$ (Transposing 6 to R.H.S.)

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$

$\therefore x=\frac{9}{2}$ is the solution of the given equation.

SCERT, TELANGANA

2. ఒక సంఖ్య యొక్క 8 రెట్ల నుంచి 10ని తగ్గించిన వచ్చే విలువ, అదే సంఖ్య యొక్క 6 రెట్లు మరియు 4ల మొత్తం విలువకు సమానము. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

3. రెండంకెల సంఖ్యలో రెండు అంకెల మొత్తము 9. ఈ సంఖ్య నుంచి 27 ను తీసివేసిన సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు అవుతాయి. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

4. ఒక సంఖ్యను 5:3 నిష్పత్తిలో రెండు భాగాలుగా విభజించారు. ఒక భాగం రెండవ భాగం కంటే 10 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యను, రెండు భాగాలను కనుగొనుము.

5. నేను ఒక సంఖ్యను 3 రెట్లు చేసి 2 కలిపినపుడు వచ్చిన ఫలితం, అదే సంఖ్యను 50 నుంచి తీసివేసినప్పుడు వచ్చిన ఫలితం సమానం. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

6. మేరి వయస్సు తన సోదరి వయస్సుకు రెట్టింపు. 5 సంవత్సరాల అనంతరం మేరి వయస్సు తన సోదరి వయస్సు కంటే 2 సంవత్సరాలు ఎక్కువ. అయిన వారిరువురి వయస్సును కనుగొనుము.

7. 5 సంవత్సరాల తరువాత రేష్మ వయస్సు 9 సంవత్సరాల క్రితం ఆమె వయస్సుకు 3 రెట్లు. అయిన ఆమె ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

8. ఒక పట్టణ జనాభా 1200 పెరిగిన తరువాత ప్రస్తుత జనాభాలో 11% తగ్గింది. ఇప్పుడు ఆ పట్టణ జనాభా పెరుగుటకు ముందు ఉన్న జనాభా కన్నా 32 తక్కువ. అయిన మొదట ఆ పట్టణ జనాభా ఎంత?

## 2.5 సంక్షిప్తీకరించదగిన సమీకరణాలు

**ఉదాహరణ 17:** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$ ను సాధించుము.

**సాధన:**

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$ ($\frac{x}{3}$ ను L.H.S. కు, $\frac{1}{4}$ ను R.H.S కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$$\frac{3x-2x}{6}=\frac{2+1}{4}$$ (2, 3 ల క.సా.గు. 6 మరియు 2, 4 ల క.సా.గు. 4)

$$\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore x=\frac{3}{4}\times 6$$ (6 ను R.H.S.కు పక్షాంతరం చెందించగా)

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$ ఇది కావలసిన సమీకరణ సాధన.

SCERT, TELANGANA

**Example 18:** Solve $\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$

**Solution :**

$$\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5(x-4)-7(x+4)}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x-20-7x-28}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x-48}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$-2x-48=\frac{(x+3)}{7}\times 35$$

$\Rightarrow$ $-2x - 48 = (x + 3) \times 5$

$\Rightarrow$ $-2x - 48 = 5x + 15$

$\Rightarrow$ $-2x - 5x = 15 + 48$

$-7x = 63$

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

**Example 19:** Solve the equation $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ ——————(1)

**Solution:** Let us multiply both sides of the given equation by $2x+3$. This gives

$$\frac{5x+2}{2x+3}\times(2x+3)=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$5x+2=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

Again multiply both sides of the equation by 7. This gives

$$7\times(5x+2)=7\times\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 18:** $\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$ ను సాధించుము.

**సాధన:**

$$\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5(x-4)-7(x+4)}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x-20-7x-28}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x-48}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$-2x-48=\frac{(x+3)}{7}\times 35$$

$\Rightarrow$ $-2x - 48 = (x + 3) \times 5$

$\Rightarrow$ $-2x - 48 = 5x + 15$

$\Rightarrow$ $-2x - 5x = 15 + 48$

$-7x = 63$

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

**ఉదాహరణ 19:** $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ ను సాధించుము. ——————(1)

**సాధన:** ఇచ్చిన సమీకరణంను ఇరువైపులా $2x + 3$ చే గుణించగా

$$\frac{5x+2}{2x+3}\times(2x+3)=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$5x+2=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

ఇచ్చిన సమీకరణంను తిరిగి ఇరువైపులా 7 చే గుణించగా

$$7\times(5x+2)=7\times\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

SCERT, TELANGANA

$\Rightarrow 7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$ ——————(2)

$35x + 14 = 24x + 36$

$35x - 24x = 36 - 14$

$11x = 22$

$\therefore x = \frac{22}{11} = 2$

Now look at the given equation i.e., (1) and equation (2) carefully.

| Given equation | Simplified form of the given equation |
| --- | --- |
| $\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$ | $7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$ |

What did you notice? All we have done is :

1. Multiply the numerator of the LHS by the denominator of the RHS

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

2. Multiply the numerator of the RHS by the denominator of the LHS.

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

3. Equate the expressions obtained in (1) and (2)

   $7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

For obvious reasons, we call this method of solution as the "method of cross multiplication". Let us now illustrate the method of cross multiplication by examples.

**Example 20:** Solve the equation $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$

$$\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$$

**Solution:** By cross multiplication, we get

$7 \times (x + 7) = 4 \times (3x + 16)$

$7x + 49 = 12x + 64$

$7x - 12x = 64 - 49$

$-5x = 15$

$x = -3$

SCERT, TELANGANA

$$\Rightarrow 7\times(5x+2)=12\times(2x+3) \qquad \text{———} (2)$$

$$35x+14=24x+36$$

$$35x-24x=36-14$$

$$11x=22$$

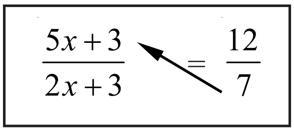
$$\therefore x=\frac{22}{11}=2$$

సమీకరణం (1), (2) లను గమనించండి.

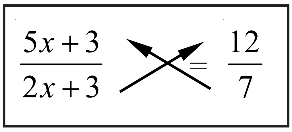
| ఇవ్వబడిన సమీకరణం | సూక్ష్మీకరించబడిన సమీకరణం |
|---|---|
| $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ | $7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$ |

మీరేమి గమనించారు? ఇచ్చట మనం చేసిందేమిటంటే:

1. LHS లోని లవమును RHS లోని హారముతో గుణించుము.




2. LHS లోని హారమును RHS లోని లవముతో గుణించుము.

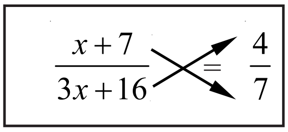



3. (1), (2) సోపానం నుంచి వచ్చిన బీజీయ సమాసాలను సమానం చేయాలి. $7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$

ఈ పద్ధతిని అడ్డ గుణకారం అంటాము. ఈ విధానాన్ని క్రింది ఉదాహరణలతో ఉపయోగిద్దాం.

**ఉదాహరణ 20:** $\frac{x+7}{3x+16}=\frac{4}{7}$ ను సాధించుము.

**సాధన:** అడ్డ గుణకారం ద్వారా మనం ఈ క్రింది సమీకరణంను పొందవచ్చు.




$$7\times(x+7)=4\times(3x+16)$$

$$7x+49=12x+64$$

$$7x-12x=64-49$$

$$-5x=15$$

$$x=-3$$

SCERT, TELANGANA

**Example 21:** Rehana got 24% discount on her frock. She paid ₹ 380 after discount. Find the marked price of the frock.

**Solution:** Let the marked price of the frock be ₹ $x$, then the discount is 24% of $x$

She paid $x - 24\%$ of $x$ i.e. 380

$x - 24\%$ of $x = 380$

$$\Rightarrow x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$\Rightarrow \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$\Rightarrow \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$\therefore$ $x = 500$

$\therefore$ Marked price = ₹ 500

**Example 22:** Four fifths of a number is greater than three fourths of the number by 4. Find the number.

**Solution:** Let the required number be '$x$',

then four fifths of the number $= \frac{4}{5}x$

And three fourths of the number $= \frac{3}{4}x$

It is given that $\frac{4}{5}x$ is greater than $\frac{3}{4}x$ by 4

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \quad \Rightarrow x = 80$$

Hence the required number is 80.

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 21:** రెహాన ఒక గౌను కొనుగోలుపై 24% డిస్కౌంట్ పొందింది. డిస్కౌంట్ అనంతరం ఆమె ₹ 380 చెల్లించింది. అయిన గౌను యొక్క ప్రకటన వెలను కనుగొనుము.

**సాధన:** గౌను యొక్క ప్రకటన వెలను ₹ $x$ అనుకుంటే దీనిపై 24% డిస్కౌంట్ పొందింది.

రెహానా చెల్లించిన సొమ్ము $x - x$ లో 24%

$\Rightarrow$ $x - x$ లో 24% $= 380$

$$\Rightarrow x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$\Rightarrow \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$\Rightarrow \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$\therefore \quad x = 500$

$\therefore$ గౌను యొక్క ప్రకటిత వెల = ₹ 500

**ఉదాహరణ 22:** ఒక సంఖ్య యొక్క $\frac{4}{5}$ రెట్లు, దాని యొక్క $\frac{3}{4}$ రెట్ల కంటే 4 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

**సాధన:** సంఖ్యను '$x$' అనుకుందాం.

సంఖ్యకు $\frac{4}{5}$ రెట్లు $= \frac{4}{5}x$

సంఖ్యకు $\frac{3}{4}$ రెట్లు $= \frac{3}{4}x$

అయితే దత్తాంశం ప్రకారం $\frac{4}{5}x$ , $\frac{3}{4}x$ కంటే 4 ఎక్కువ.

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

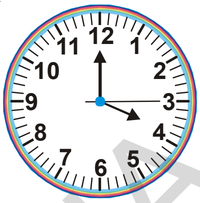
$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \quad \Rightarrow x = 80$$

$\therefore$ కావలసిన సంఖ్య = 80.

SCERT, TELANGANA

**Example 23:** John sold his watch for ₹ 301 and lost 14% on it. Find the cost price of the watch.




**Solution:** Let the cost price of the watch = ₹ $x$

The loss on it = 14% of '$x$' = $\frac{14}{100} \times x = \frac{14x}{100}$

Selling price of the watch = Cost price – Loss

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

Therefore the cost price of the watch = ₹ 350.

**Example 24:** A man had to walk a certain distance. He covered two thirds of it at 4kmph and the remaining at 5 kmph. If the total time taken is 42 minutes, find the total distance.

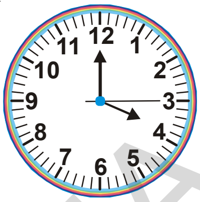
**Solution:** Let the distance be '$x$' km.

| | First part | Second part |
|---|---|---|
| Distance covered | $\frac{2}{3}$ of '$x$' $= \frac{2x}{3}$ | Remaining distance $= x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$ |
| Speed | 4 kmph | 5 kmph |
| Time taken | $\frac{\frac{2}{3}x}{4} = \frac{2x}{12}$ hr. | $\frac{\frac{x}{3}}{5} = \frac{x}{15}$ hr. |

Therefore total time taken $= \frac{2x}{12} + \frac{x}{15}$ hr.

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 23:** జాన్ తన గడియారంను ₹ 301 కు అమ్మినచో 14% నష్టపోయాడు. అయిన జాన్ గడియారంను ఎంతకు కొన్నాడు?




**సాధన:** జాన్ గడియారం కొన్న వెల = $x$ అనుకుందాం.

దీనిపై నష్టం $= x$ లో $14\% = \dfrac{14}{100} \times x = \dfrac{14x}{100}$

గడియారం అమ్మిన వెల = కొన్నవెల − నష్టము

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

$\therefore$ గడియారం కొన్నవెల = ₹ 350.

**ఉదాహరణ 24:** ఒక మనిషి తన నడవవలసిన దూరంలో $\dfrac{2}{3}$ వ భాగం 4 కి.మీ./గం. వేగంతో మిగిలిన భాగం 5 కి.మీ./గం. వేగంతో నడిచాడు. ఇతను నడిచిన మొత్తం కాలం 42 ని॥లు అయిన నడిచిన మొత్తం దూరం ఎంత?

**సాధన:** మొత్తం నడిచిన దూరంను '$x$' కి.మీ. అనుకుందాం.

| | మొదటి భాగం | రెండవ భాగం |
|---|---|---|
| నడిచిన దూరం | $x$ లో $\dfrac{2}{3}$ వ భాగం $= \dfrac{2x}{3}$ | మిగిలిన దూరం $= x - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{x}{3}$ |
| వేగం | 4 కి.మీ./గం | 5 కి.మీ./గం |
| కాలం | $\dfrac{\frac{2}{3}x}{4} = \dfrac{2x}{12}$ గంటలు | $\dfrac{\frac{x}{3}}{5} = \dfrac{x}{15}$ గంటలు |

పట్టిక నుంచి మొత్తం కాలం $= \dfrac{2x}{12} + \dfrac{x}{15}$ గంటలు

SCERT, TELANGANA

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12} + \frac{x}{15})$ hr = 42 min.

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12} + \frac{x}{15})$ hr = $\frac{42}{60}$ hr.

$$\frac{2x}{12} + \frac{x}{15} = \frac{42}{60}$$

$$\frac{10x + 4x}{60} = \frac{42}{60}$$

$\Rightarrow \quad 14x = 42$

$\Rightarrow \quad x = 3$

Total distance $x = 3$ km.

**Example 25:** The numerator of a fraction is 6 less than the denominator. If 3 is added to the numerator ,the fraction is equal to $\frac{2}{3}$, find the original fraction

**Solution:** Let the denominator of the fraction be '$x$' then

Numerator of the fraction $= x - 6$

Therefore the fraction $= \frac{x-6}{x}$

If 3 is added to the numerator , it becomes $\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{x - 6 + 3}{x} = \frac{2}{3}$

$$\frac{x-3}{x} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 3x - 9 = 2x$

$x = 9$

$\therefore$ Fraction $= \frac{x-6}{x} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$

Therefore required fraction is $\frac{3}{9}$ .

SCERT, TELANGANA

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})$ గంటలు = 42 నిమిషాలు

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})$ గంటలు = $\frac{42}{60}$ గంటలు

$$\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}=\frac{42}{60}$$

$$\frac{10x+4x}{60}=\frac{42}{60}$$

$$\Rightarrow \quad 14x = 42$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

$\therefore$ మొత్తం దూరం $x = 3$ కి.మీ.

**ఉదాహరణ 25:** ఒక భిన్నంలో లవము, హారము కంటే 6 తక్కువ. లవముకు 3 కలిపిన భిన్నం $\frac{2}{3}$ కు సమానమవుతుంది. అయిన ఆ భిన్నంను కనుగొనుము.

**సాధన:** భిన్నం యొక్క హారము '$x$' అనుకొనిన

భిన్నం యొక్క లవము $= x - 6$

$\therefore$ భిన్నం $= \frac{x-6}{x}$

దత్తాంశం ప్రకారం లవమునకు 3 కలిపిన, అది $\frac{2}{3}$ కు సమానమవుతుంది.

$$\Rightarrow \frac{x-6+3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-9=2x$$

$$x=9$$

$\therefore$ భిన్నం $= \frac{x-6}{x} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$

అందువల్ల కావలసిన భిన్నం$= \frac{3}{9}$.

SCERT, TELANGANA

**Example 26:** Sirisha has ₹9 in fifty-paisa and twenty five paise coins. She has twice as many twenty five paise coins as she has fifty paise coins. How many coins of each kind does she have?

**Solution:** Let the number of fifty paise coins = $x$

Therefore the number of twenty five paise coins = $2x$.

Value of fifty paise coins = $x \times 50$ paisa = ₹ $\frac{50x}{100}$ = ₹ $\frac{x}{2}$

Value of twenty five paise coins = $2x \times 25$ paisa = $2x \times \frac{25}{100}$

$= 2x \times \frac{1}{4}$ = ₹ $\frac{x}{2}$

Total value of all coins = ₹ $\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$

But the total value of money is ₹9

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 9$

$\frac{2x}{2} = 9$

$\therefore \; x = 9$

Therefore number of fifty paise coins = $x = 9$

Number of twenty paise coins = $2x = 2 \times 9 = 18$.

**Example 27:** A man driving his moped at 24 kmph reaches his destination 5 minutes late to an appointment. If he had driven at 30 kmph he would have reached his destination 4 minutes before time. How far is his destination?

**Solution:** Let the distance be '$x$' km.

Therefore time taken to cover '$x$' km. at 24 kmph = $\frac{x}{24}$ hr.

Time taken to cover '$x$' km. at 30 kmph = $\frac{x}{30}$ hr.

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 26:** శిరీష వద్ద 50 పైసలు మరియు 25 పైసల నాణెములు కలవు. 50 పైసల నాణెముల సంఖ్యకు రెట్టింపు సంఖ్యలో 25 పైసల నాణెములు కలవు. వీని మొత్తం విలువ ₹ 9 అయిన ఏయే రకం నాణెములు ఎన్నెన్ని కలవు?

**సాధన:** 50 పైసల నాణెముల సంఖ్య = $x$ అనుకొనిన

25 పైసల నాణెముల సంఖ్య = $2x$ అవుతుంది.

50 పైసల నాణెముల విలువ $= x \times 50$ పైసలు $= ₹\ \dfrac{50x}{100} = ₹\ \dfrac{x}{2}$

25 పైసల నాణెముల విలువ $= 2x \times\ 25$ పైసలు$= \dfrac{2 \times 25x}{100} = \dfrac{2x}{4} = ₹\ \dfrac{x}{2}$

$\therefore$ మొత్తం నాణెముల మొత్తం విలువ $= ₹\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right)$

అయితే దత్తాంశం ప్రకారం ఈ మొత్తం విలువ ₹ 9

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 9$$

$$\frac{2x}{2} = 9$$

$$\therefore\ x = 9$$

$\therefore$ 50 పైసల నాణెముల సంఖ్య $= x = 9$

25 పైసల నాణెముల సంఖ్య $= 2x = 2 \times 9 = 18$.

**ఉదాహరణ 27:** ఒక మనిషి తన మోపెడ్‌పై 24 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణించిన అతను తన గమ్య స్థానమును 5 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరుతాడు. కానీ 30 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణించిన గమ్య స్థానమును 4 నిమిషాలు ముందుగా చేరుతాడు. అయిన అతను చేరవలసిన గమ్య స్థానము ఎంత దూరంలో కలదు?

**సాధన:** చేరవలసిన గమ్య స్థానము యొక్క దూరం '$x$' కి.మీ. అనుకుందాం.

24 కి.మీ./గం. '$x$' కి.మీ. ప్రయాణించుటకు పట్టే కాలం $= \dfrac{x}{24}$ గంటలు.

30 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణించిన పట్టే కాలం $= \dfrac{x}{30}$ గంటలు.

SCERT, TELANGANA

But it is given that the difference between two timings = 9 min = $\frac{9}{60}$ hr.

$$\therefore \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

Therefore the distance is 18 km.

## Exercise - 2.5

1. Solve the following equations.

(i) $\frac{n}{5} - \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 14$

(iii) $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{6} = 8$

(iv) $\frac{2p}{3} - \frac{p}{5} = 11\frac{2}{3}$

(v) $9\frac{1}{4} = y - 1\frac{1}{3}$

(vi) $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{1}{5}$

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

(viii) $\frac{2x-3}{3x+2} = \frac{-2}{3}$

(ix) $\frac{8p-5}{7p+1} = \frac{-2}{4}$

(x) $\frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$

(xi) $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$

(xii) $\frac{3t+1}{16} - \frac{2t-3}{7} = \frac{t+3}{8} + \frac{3t-1}{14}$

2. What number is that of which the third part exceeds the fifth part by 4?

SCERT, TELANGANA

అయితే దత్తాంశం ప్రకారం, ఈ రెండింటి మధ్య తేడా = 9 నిమిషాలు = $\frac{9}{60}$ గంటలు.

$$\therefore \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

$\therefore$ గమ్య స్థానం యొక్క దూరం = 18 కి.మీ.

## అభ్యాసం - 2.5

1. క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $\frac{n}{5} - \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 14$

(iii) $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{6} = 8$

(iv) $\frac{2p}{3} - \frac{p}{5} = 11\frac{2}{3}$

(v) $9\frac{1}{4} = y - 1\frac{1}{3}$

(vi) $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{1}{5}$

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

(viii) $\frac{2x-3}{3x+2} = \frac{-2}{3}$

(ix) $\frac{8p-5}{7p+1} = \frac{-2}{4}$

(x) $\frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$

(xi) $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$

(xii) $\frac{3t+1}{16} - \frac{2t-3}{7} = \frac{t+3}{8} + \frac{3t-1}{14}$

2. ఒక సంఖ్య యొక్క 3వ భాగం దాని 5వ భాగం కంటే 4 ఎక్కువ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

3. The difference between two positive integers is 36. The quotient when one integer is divided by other is 4. Find the integers.

(Hint: If one number is '$x$', then the other number is '$x - 36$')

4. The numerator of a fraction is 4 less than the denominator. If 1 is added to both its numerator and denominator, it becomes $\frac{1}{2}$. Find the fraction.

5. Find three consecutive numbers such that if they are divided by 10, 17, and 26 respectively, the sum of their quotients will be 10.

(Hint: Let the consecutive numbers $= x, x+1, x+2$, then $\frac{x}{10} + \frac{x+1}{17} + \frac{x+2}{26} = 10$)

6. In class of 40 pupils the number of girls is three-fifths of the number of boys. Find the number of boys in the class.

7. After 15 years, Mary's age will be four times of her present age. Find her present age.

8. Aravind has a kiddy bank. It is full of one-rupee and fifty paise coins. It contains 3 times as many fifty paise coins as one rupee coins. The total amount of the money in the bank is ₹ 35. How many coins of each kind are there in the bank?

9. A and B together can finish a piece of work in 12 days. If 'A' alone can finish the same work in 20days, in how many days B alone can finish it?

10. If a train runs at 40 kmph it reaches its destination late by 11 minutes. But if it runs at 50 kmph it is late by 5 minutes only. Find the distance to be covered by the train.

11. One fourth of a herd of deer has gone to the forest. One third of the total number is grazing in a field and remaining 15 are drinking water on the bank of a river. Find the total number of deer.

12. By selling a radio for ₹903, a shop keeper gains 5%. Find the cost price of the radio.

13. Sekhar gives a quarter of his sweets to Renu and then gives 5 sweets to Raji. He has 7 sweets left. How many did he have to start with?

SCERT, TELANGANA

3. రెండు ధన సంఖ్యల భేదం 36. ఒక దానిని రెండవ దానితో భాగించగా వచ్చే భాగఫలం 4 అయిన, వాటిని కనుగొనుము.

(సూచన: ఒక సంఖ్య '$x$' అనుకొనిన, రెండవ సంఖ్య '$x - 36$')

4. ఒక భిన్నంలో లవము, హారము కంటే 4 తక్కువ. అయితే లవ, హారాలకు ఒకటి కలిపిన అది $\frac{1}{2}$ కు సమానమవుతుంది. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

5. మూడు వరుస సంఖ్యలను 10, 17, 26 లచే భాగించినపుడు భాగఫలముల మొత్తం 10 ని ఇచ్చే మూడు వరుస సంఖ్యలను కనుగొనుము.

(సూచన: మూడు వరుస సంఖ్యలను $x$ , $x + 1$, $x + 2$ , అనుకొనిన $\frac{x}{10}+\frac{x+1}{17}+\frac{x+2}{26}=10$ )

6. 40 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో బాలికల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్యలో $\frac{3}{5}$ వ వంతు అయిన బాలుర సంఖ్యను కనుగొనుము.

7. 15 సంవత్సరాల తరువాత మేరి వయస్సు, ప్రస్తుత వయస్సుకు 4 రెట్లు అయిన మేరి ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

8. అరవింద్ దగ్గర ఉన్న కిడ్డీ బ్యాంకులో రూపాయి నాణెములు, అర్ధ రూపాయి నాణెములు కలవు. అర్ధ రూపాయి నాణెముల సంఖ్య, రూపాయి నాణెముల సంఖ్యకు 3 రెట్లు. నాణెముల మొత్తం విలువ ₹ 35 అయిన ఏయే రకం నాణెములు ఎన్నెన్ని గలవు?

9. A మరియు B లు కలిసి ఒక పనిని 12 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. A ఒక్కడే ఆ పనిని 20 రోజులలో పూర్తి చేసిన, B ఒక్కడే ఆ పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలడు?

10. ఒక రైలు 40 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణించిన గమ్యస్థానమును 11 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరును. ఒకవేళ 50 కి.మీ./గం. వేగంతో ప్రయాణించిన 5 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరును. అయిన రైలు ప్రయాణించవలసిన దూరమును కనుగొనుము.

11. ఒక జింకల గుంపులో $\frac{1}{4}$ వ భాగం అడవికి వెళ్ళినాయి. మొత్తంలో $\frac{1}{3}$ వ భాగం పచ్చియ మైదానంలో వున్నాయి. మిగిలిన 15 నది ఒడ్డున నీరు త్రాగుతున్నాయి. అయిన మొత్తం జింకల సంఖ్యను కనుగొనుము.

12. ఒక దుకాణాదారుడు ఒక రేడియోను ₹903 లకు అమ్మడం వల్ల అతను 5% లాభాన్ని పొందుతాడు. అయిన రేడియో యొక్క కొన్నవెలను కనుగొనుము.

13. శేఖర్ తన వద్ద ఉన్న మిఠాయిలలో పావు భాగం రేణుకు, 5 మిఠాయిలు రాజికి ఇచ్చాడు. ఇంకా తన వద్ద 7 మిఠాయిలు మిగిలి ఉన్న అతని వద్ద మొదట ఉన్న మిఠాయిలు ఎన్ని?

SCERT, TELANGANA

## What we have discussed

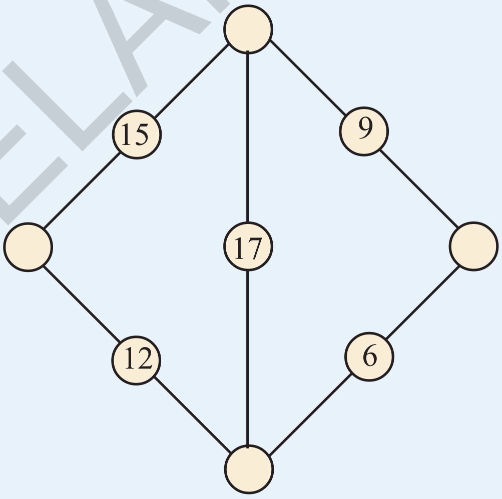
1. If the degree of an equation is one then it is called a linear equation.
2. If a linear equation has only one variable then it is called a linear equation in one variable or simple equation.
3. The value which when subsitututed for the variable in the given equation makes L.H.S. = R.H.S. is called a solution or root of the given equation.
4. Just as numbers, variables can also be transposed from one side of the equation to the other side.

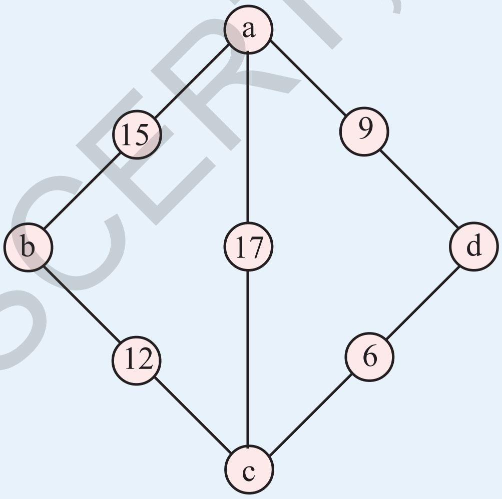
W9A6Q3

SCERT, TELANGANA

### A magic Diamond

Find numbers to put in the circles so that the total along each line of the dimond is the same.




Hint : The number will be of the form

$a = x,\ b = 5 + x,\ \ c = 3 + x,\ \ d = 11 + x$

Where x is any number and the total along each line will be $20 + 2x$.

For example if $x = 1$, then $a = 1$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 12$ and each line total will be 22.

## మనం ఏమి చర్చించాం

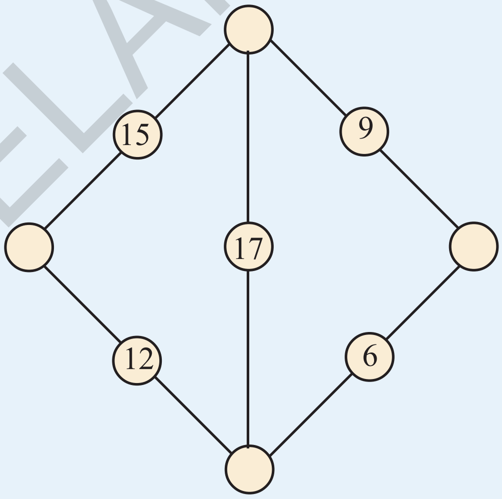
1. ఒక సమీకరణం యొక్క పరిమాణం ఒకటి అయిన దానిని రేఖీయ సమీకరణం అంటాం.
2. ఒక రేఖీయ సమీకరణంలో ఒకే ఒక చరరాశి వున్న దానిని ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణం లేదా సామాన్య సమీకరణం అంటాము.
3. సమీకరణంలో చరరాశి బదులుగా ఏ విలువను ప్రతిక్షేపిస్తే L.H.S. = R.H.S. అవుతుందో ఆ చరరాశి విలువనే ఆ సమీకరణానికి సాధన అంటాము.
4. స్థిరరాశుల లాగానే చరరాశులను కూడా సమీకరణం యొక్క ఒక వైపు నుండి మరొక వైపుకు పక్షాంతరం చెందించవచ్చు.

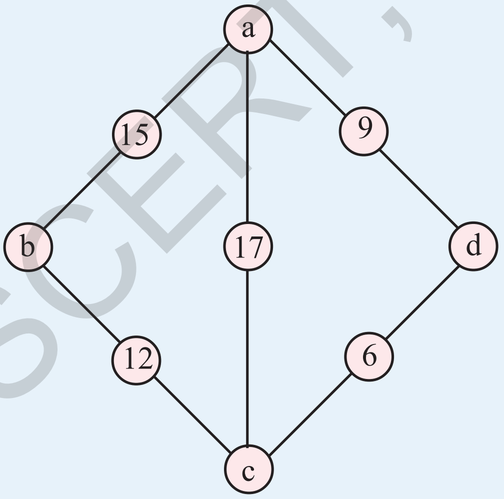
P4E6U1

SCERT, TELANGANA

### మ్యాజిక్ డైమండ్

డైమండ్‌లోని ప్రతి వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం సమానమయ్యేలా, గడులను సరైన సంఖ్యలతో పూరించండి.




సూచన: $a = x$, $b = 5 + x$, $c = 3 + x$, $d = 11 + x$ రూపంలో ఉంటాయి.

ఏదైనా ఒక సంఖ్య 'x' ప్రతి వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $20 + 2x$ అగును.

ఉదాహరణకు $x = 1$ అయిన, $a = 1, b = 6, c = 4, d = 12$ అవుతుంది మరియు ప్రతి వరుసలోని అంకెల మొత్తం 22 అగును.

CHAPTER 3

# Construction of Quadrilaterals

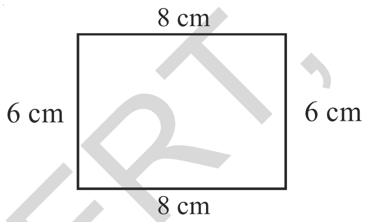
Q5R3E7

## 3.0 Introduction

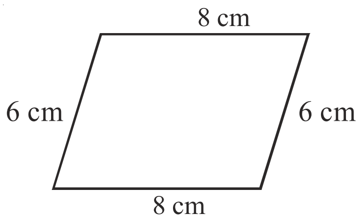
We see fields, houses, bridges, railway tracks, school buildings, play grounds etc, around us. We also see kites, ludos, carrom boards, windows, blackboards and other things around. When we draw these things what do the figures look like? What is the basic geometrical shape in all these? Most of these are quadrilateral figures with four sides.

Kamal and Joseph are drawing a figure to make a frame of measurement with length 8 cm and breadth 6cm. They drew their figures individually without looking at each other's figure.

Kamal




Joseph




Are both the figures same?

You can see that both of these figures are quadrilaterals with the same measurements but the figures are not same. In class VII we have discussed about uniqueness of triangles. To construct unique triangle you need three sides or two sides and one included angle or two angles and a side. How many measurements do we need to construct a unique quadrilateral? By a unique quadrilateral we mean that quadrilaterals made by different persons with the same measurements will be congruent.

SCERT, TELANGANA

అధ్యాయం

3

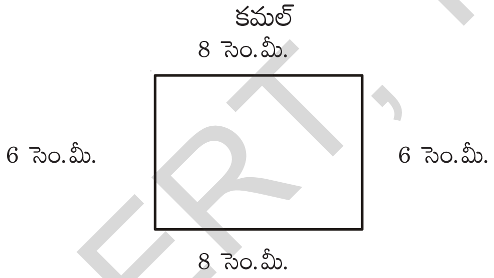
# చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు

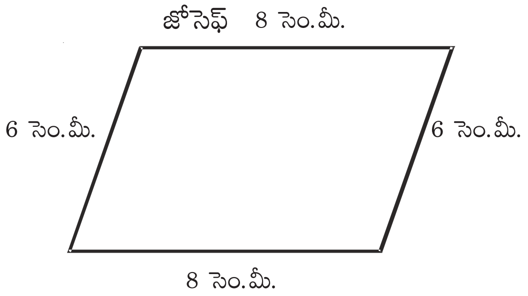
B9C5F3

## 3.0 పరిచయం

మన చుట్టూ పంట పొలాలు, ఇండ్లు, వంతెనలు, రైలు మార్గాలు, పాఠశాల భవనాలు, ఆట స్థలాలు వంటివి అనేకం ఎల్లప్పుడూ చూస్తూ వుంటారు. అదే విధంగా గాలి పటాలు, లూడో అట్టలు, క్యారం బోర్డు, కిటికీలు, నల్లబల్లలు వంటివి కూడా అనేకం చూస్తాం. ఇటువంటి వాటిని పటాలుగా గీస్తే మనకు ఎలా కనిపిస్తాయి? వీటన్నింటి యొక్క ప్రాథమిక జ్యామితి ఆకారాలు ఏమిటి? వీటిలో అత్యధికంగా నాలుగు భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజాలు వస్తాయి.

కమల్ మరియు జోసెఫ్‌లు పొడవు 8 సెం.మీ., వెడల్పు 6 సెం.మీ. కొలతలు గల పటాలను వేర్వేరుగా దిగువ విధంగా గీశారు.



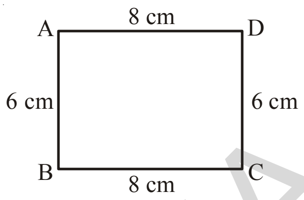

ఈ రెండు పటాలు ఒకే విధంగా వున్నాయా ?

వారిద్దరు గీచిన పటాలు ఒకే కొలతలు కలిగిన చతుర్భుజాలైనప్పటికీ, పటాలు వేర్వేరుగా వున్నాయని గమనించే వుంటారు. మనం త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఏలా గీయగలమో 7వ తరగతిలో తెలుసుకున్నాం. ఏ త్రిభుజ నిర్మాణానికైనా ఖచ్చితంగా మూడు కొలతలు అవసరమని మీకు తెలుసు. అవి మూడు భుజాలు లేదా రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం లేదా రెండు కోణాలు, వాటి మధ్య భుజం కావచ్చు. మరి ఏకైక చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఎన్ని స్వతంత్ర కొలతలు అవసరం? ఏకైక చతుర్భుజం అంటే ఇరువురు వ్యక్తులకు ఒకే కొలతలు ఇచ్చినపుడు గీయగలిగే సర్వసమాన చతుర్భుజాలు అని అర్థం.

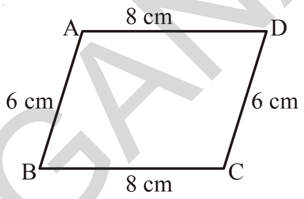
SCERT, TELANGANA

## Do This

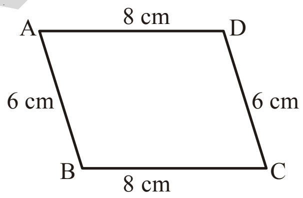
Take a pair of sticks of equal length, say 8 cm. Take another pair of sticks of equal length, say, 6 cm. Arrange them suitably to get a rectangle of length 8 cm and breadth 6 cm. This rectangle is created with the 4 available measurements. Now just push along the breadth of the rectangle. Does it still look alike? You will get a new shape of a rectangle Fig (ii), observe that the rectangle has now become a parallelogram. Have you altered the lengths of the sticks? No! The measurements of sides remain the same. Give another push to the newly obtained shape in the opposite direction; what do you get? You again get a parallelogram again, which is altogether different Fig (iii). Yet the four measurements remain the same. This shows that 4 measurements of a quadrilateral cannot determine its uniqueness. So, how many measurements determine a unique quadrilateral? Let us go back to the activity!



(i)

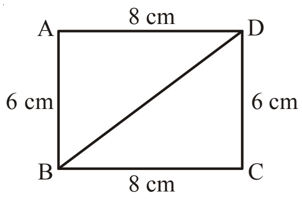


(ii)



(iii)

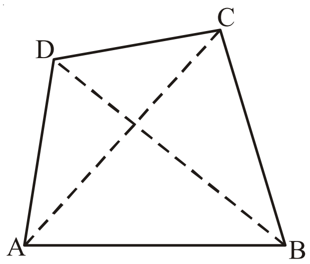
You have constructed a rectangle with two sticks each of length 8 cm and other two sticks each of length 6 cm. Now introduce another stick of length equal to BD and put it along BD (Fig iv). If you push the breadth now, does the shape change? No! It cannot, without making the figure open. The introduction of the fifth stick has fixed the rectangle uniquely, i.e., there is no other quadrilateral (with the given lengths of sides) possible now. Thus, we observe that five measurements can determine a quadrilateral uniquely. But will any five measurements (of sides and angles) be sufficient to draw a unique quadrilateral?



(iv)

## 3.1 Quadrilaterals and their Properties

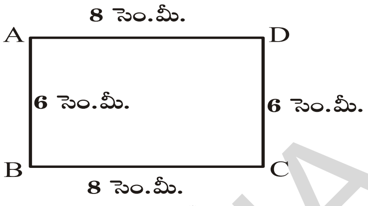
In the given Figure, ABCD is a quadrilateral with vertices A, B, C, D and sides ; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. The angles of ABCD are $\angle BAD$, $\angle ADC$, $\angle DCB$ and $\angle CBD$ and the diagonals are $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.



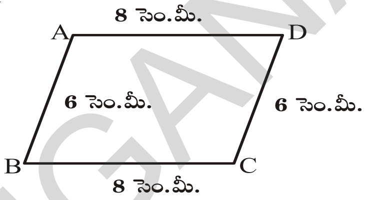

SCERT, TELANGANA

## ఇది చేయండి

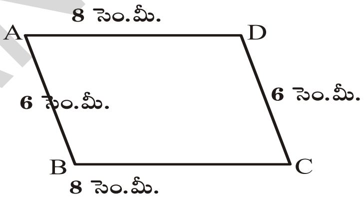
8 సెం.మీ. పొడవు గల ఒక జత కర్రపుల్లలు తీసుకోండి. అదేవిధంగా 6 సెం.మీ. పొడవు గల మరొక జత కర్రపుల్లలు తీసుకోండి. వీటితో ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారాన్ని ఏర్పరచండి. ఈ దీర్ఘచతురస్రం ఇవ్వబడిన 4 కొలతలతో (పుల్లలు) ఏర్పడింది. దీనిని వెడల్పు పుల్ల వెంబడి నెమ్మదిగా కదిలించండి. ఏర్పడిన ఈ కొత్త రకం ఆకారం పూర్వపు ఆకారమేనా? పటం (ii) లో ఏర్పడిన చతుర్భుజానికి కొత్త రూపం వచ్చింది కదా! ముందు దీర్ఘ చతురస్రం ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం అయింది. నీవు ఏమైన కర్రపుల్లల కొలతలు మార్చావా? లేదు కదా! భుజాల పొడవులు అదే విధంగా ఉన్నాయి. కొత్తగా ఏర్పడిన చతుర్భుజ రూపాన్ని మరొకసారి వ్యతిరేక దిశలో కదిలించండి. ఏ రూపం వచ్చింది? తిరిగి మరలా సమాంతర చతుర్భుజం వచ్చింది. కాని ఇది పూర్తిగా వేరొక రూపం అని పటం (iii) చూసి గమనించవచ్చు. ఈ సందర్భంలోనూ నాలుగు కొలతలు ఒకే విధంగా ఉన్నాయి. దీనిని బట్టి నాలుగు కొలతలతో ఏకైక చతుర్భుజం ఏర్పడదని తెలుసుకోవచ్చు. మరి అయిదు కొలతలు ఒక ఏకైక చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయా? తిరిగి మనం కృత్యాన్ని కొనసాగిద్దాం. 8 సెం.మీ, 6 సెం.మీ పొడవులు గల రెండు జతల పుల్లలతో దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరిచారు కదా! పటం (iv)లో చూపిన విధంగా BD పొడవుకు సమానమయ్యే మరొక కర్ర పుల్లను చేరుద్దాం. ఇప్పుడు ముందుగా చేసినట్లుగా వెడల్పు వెంబడి కదిపి చూడండి. ఆకారంలో మార్పు వచ్చిందా? లేదు కదా! మార్పు చెందలేదని గమనిస్తారు. అందుచే ఐదవ కొలత (పుల్ల) దీర్ఘ చతురస్రాకారాన్ని మార్చడానికి వీలు లేకుండా చేయగలిగింది. మరొక రకమైన చతుర్భుజం ఏర్పడే అవకాశం లేకుండా (కొలతలు మార్చనంత వరకు) పోయింది. దీనిని బట్టి ఒక చతుర్భుజం ఏకైకంగా ఏర్పడాలంటే ఐదు కొలతలు అవసరమని తెలుస్తున్నది. మరి ఏ ఐదు కొలతలైనా ఏకైక చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరచడానికి సరిపోతాయా?



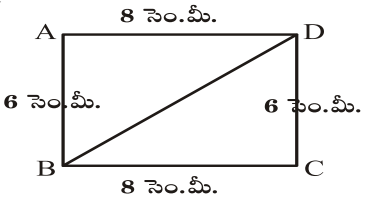
(i)



(ii)



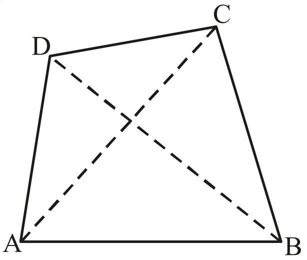
(iii)



(iv)

## 3.1 చతుర్భుజాలు - వాటి ధర్మాలు

ప్రక్క పటంలో ABCD ఒక చతుర్భుజం. A, B, C, D లు దాని యొక్క శీర్షాలు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ మరియు $\overline{DA}$ లు భుజాలు $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ మరియు $\angle DAB$ లు నాలుగు కోణాలు. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు రెండు కర్ణాలు.



## Do This

**Equipment**

You need: a ruler, a set square, a protractor.

**Remember:**

To check if the given lines are parallel, slide the set square from the first line to the second line as shown in adjacent figures.

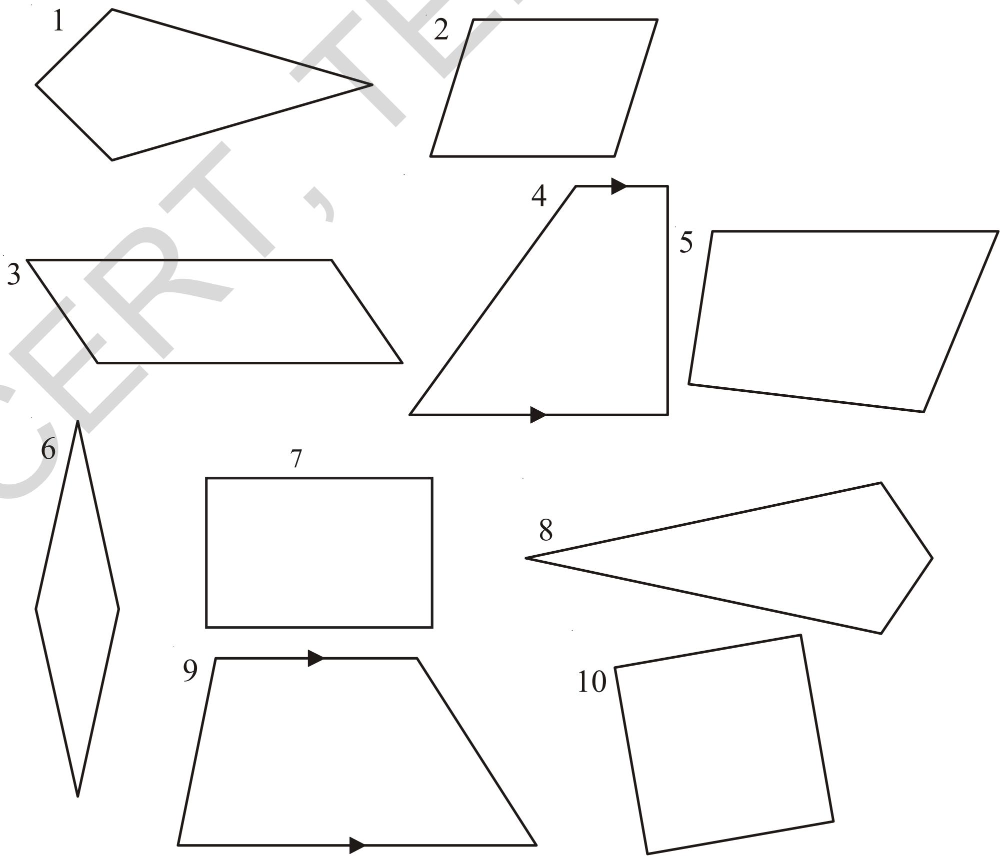
Now let us investigate the following using proper instrument

For each quadrilateral.

(a) Check if opposite sides are parallel.

(b) Measure each angle.

(c) Measure the length of each side.




SCERT, TELANGANA

## ఇది చేయండి

**కావలసిన సామగ్రి:**

కొలబద్ధ, మూలమట్టాలు మరియు కోణమానిని

**గుర్తుంచుకోవాల్సినవి:**

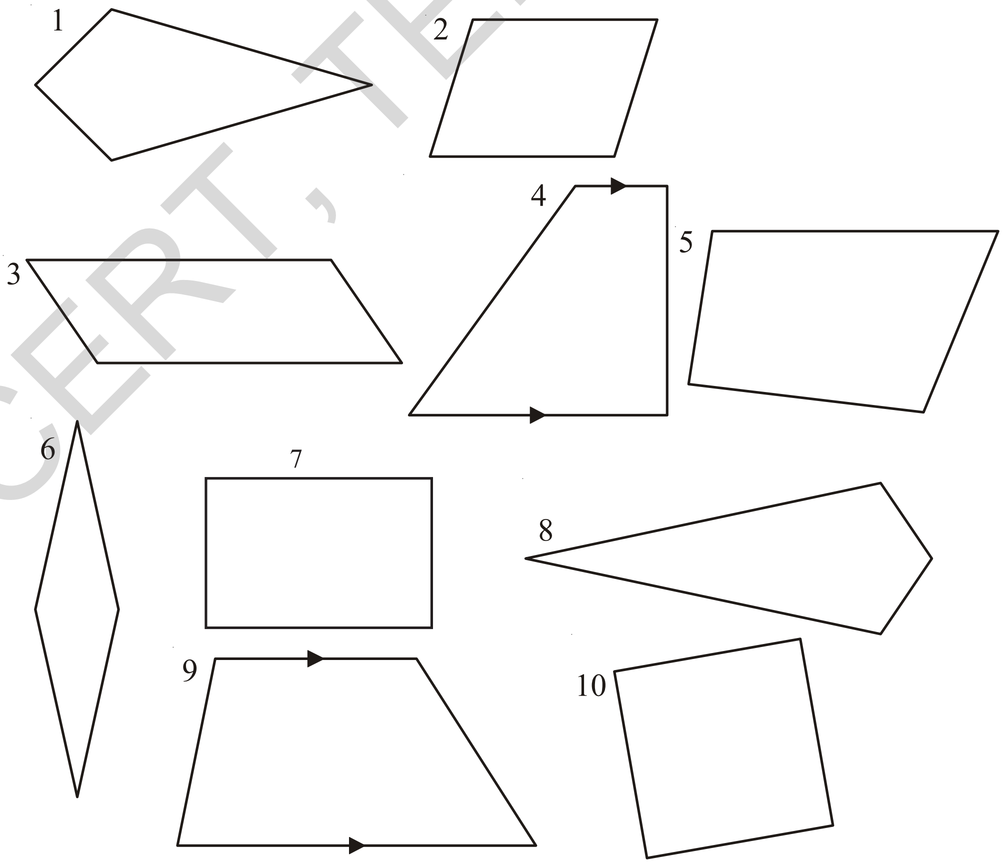
రేఖలు సమాంతరాలలో కాదో తెలుసుకొనుటకు మూలమట్టాలను మొదటి రేఖ నుండి రెండవ రేఖ వైపు జరపాలి.
క్రింది పటాలలో ధర్మాలను పరిశీలించడానికి తగు పరికరాలు ఎంచుకొని పరిశోధించి రాయండి.

ప్రతి చతుర్భుజానికి

(a) ఎదుటి భుజాలు సమాంతరమో, కాదో చూడాలి.

(b) ప్రతి కోణం కొలత కనుగొనాలి.

(c) ప్రతి భుజం పొడవు కనుగొనాలి.




SCERT, TELANGANA

Record your observations and complete the table given below.

| Quadrilateral | 2 pairs of parallel sides | 1 pair of parallel sides | 4 right angles | 2 pairs of opposite sides equal | 2 pairs of opposite angles equal | 2 pairs of adjacent sides equal | 4 sides equal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | ✓ | × |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |

**Parallelogram** is a quadrilateral with 2 pairs of parallel sides.

(a) Which shapes are parallelograms?

(b) What are the other properties does a parallelogram have?

**Rectangle** is a parallelogram with four right angles.

(a) Which shapes are rectangles?

(b) What properties does a rectangle have?

**Rhombus** is a parallelogram with four equal sides.

(a) Which could be called a rhombus?

(b) What properties does a rhombus have?

**Square** is a rhombus with four right angles.

(a) Which shapes are squares?

(b) What properties does a square have?

**Trapezium** is a quadrilateral with at least one pair of parallel sides.

(a) Which of the shapes could be called only a trapezium?

(b) What are the properties of a trapezium?

SCERT, TELANGANA

మీరు పరిశోధించిన వివిధ చతుర్భుజాల ధర్మాలను అనుసరించి క్రింది పటంలో సూచించిన విధంగా వర్గీకరించవచ్చు.

| చతుర్భుజం సంఖ్య | రెండు జతల సమాంతర భుజాలు | ఒక జత సమాంతర భుజాలు | నాలుగు లంబ కోణాలు | 2 జతల ఎదుటి భుజాలు సమానం | 2 జతల ఎదుటి కోణాలు సమానం | 2 జతల ప్రక్క కోణాలు సమానం | 4 భుజాలు సమానం |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | ✓ | × |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |

**సమాంతర చతుర్భుజంలో** రెండు జతల సమాంతర భుజాలుంటాయి.

(a) ఏ పటాలు సమాంతర చతుర్భుజాలు?

(b) సమాంతర చతుర్భుజాలకు గల ఇతర ధర్మాలేవి?

**దీర్ఘచతురస్రాలు** నాలుగు లంబకోణాలు కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజాలు

(a) ఏ పటాలు దీర్ఘచతురస్రాలు?

(b) దీర్ఘచతురస్ర పటాల ధర్మాలేవి?

**సమ చతుర్భుజాలు** (రాంబస్) నాలుగు సమాన భుజాలు కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజాలు

(a) ఏ పటాలను సమచతుర్భుజాలు అనవచ్చు?

(b) సమచతుర్భుజాల ధర్మాలేవి?

**చతురస్రాలు** నాలుగు లంబకోణాలు కలిగిన సమచతుర్భుజాలు (రాంబస్)

(a) ఏ పటాలు చతురస్రాకారంలో ఉన్నాయి?

(b) చతురస్రాలకు ఉన్న ధర్మాలేవి?

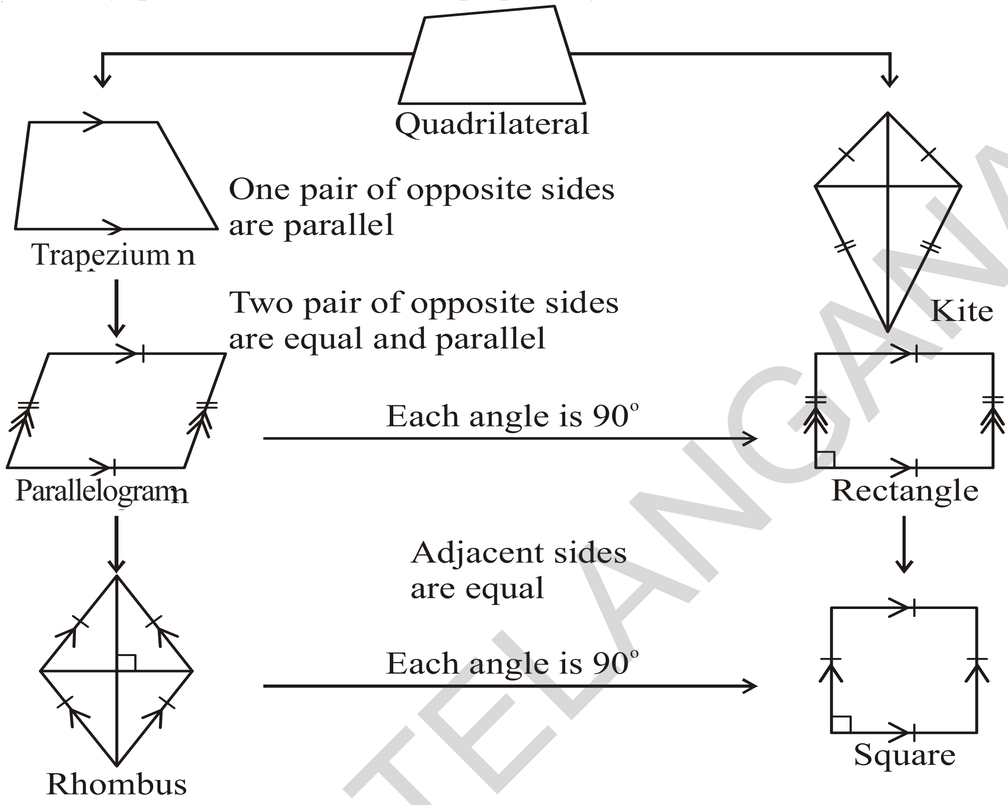
**సమలంబ చతుర్భుజాలు** కనీసం ఒక జత భుజాలు సమాంతరాలు కలిగిన చతుర్భుజాలు

(a) ఏ పటాలను సమలంబ చతుర్భుజాలను మాత్రమే అనవచ్చు?

(b) సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క ఇతర ధర్మాలేవి?

SCERT, TELANGANA

Quadrilaterals 1 and 8 are **kites**. Write down some properties of kites.
We can classify quadrilaterals based on the properties you have observed.




## Think, Discuss and Write

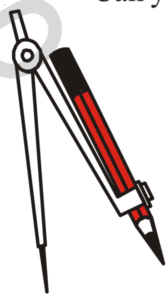
1. Is every rectangle a parallelogram? Is every parallelogram a rectangle?
2. Uma has made a sweet chikki. She wanted it to be rectangular shaped In how many different ways can she verify that it is rectangular?

## Do This

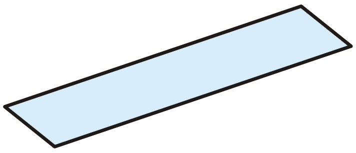
Can you draw the angle of 60°

Allowed

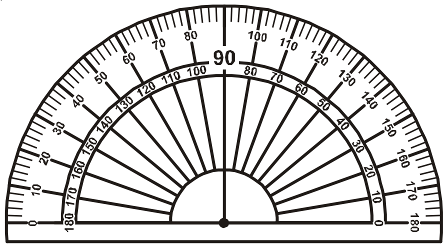
Not allowed



Compass



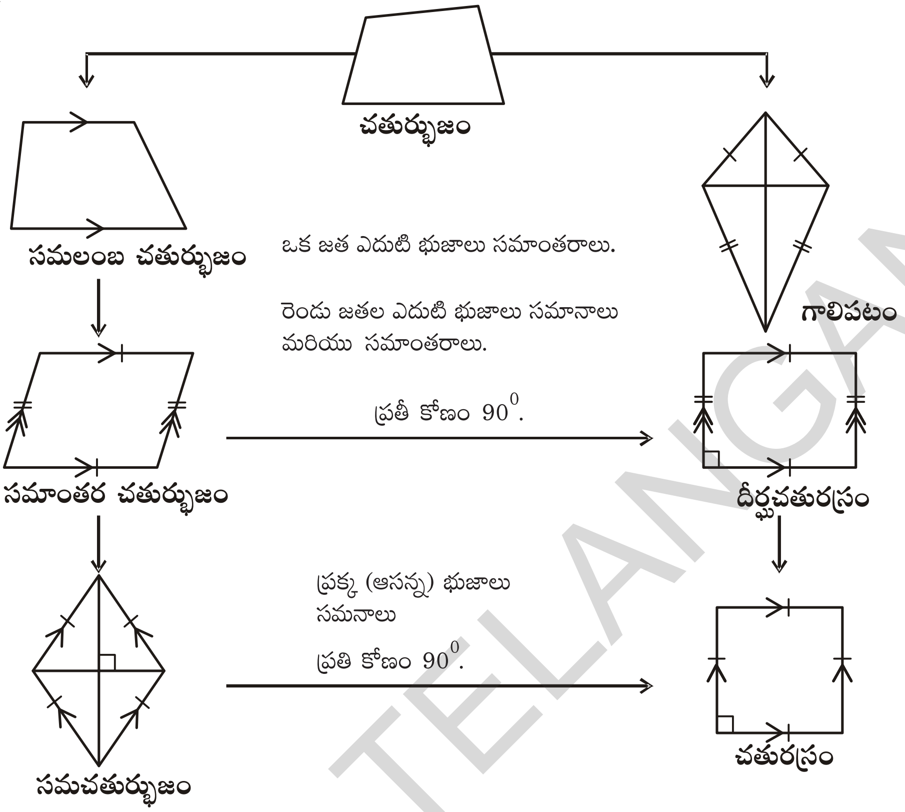
A straight edge Scale (Ruler)



Protractor

SCERT, TELANGANA

1వ, 8వ సంఖ్య గల చతుర్భుజాలు గాలి పటాలంటాం. **గాలి పటాలను** పరిశీలించి కొన్ని ధర్మాలను రాయండి.

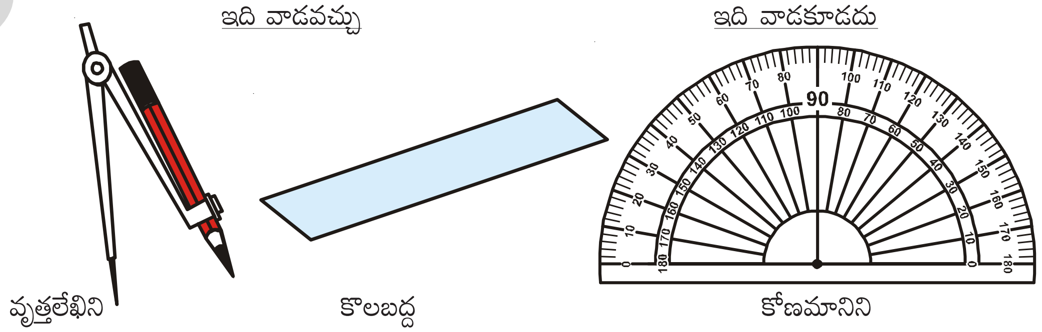



## ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. ప్రతి దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమేనా? ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రమనా?
2. ఉమ బెల్లం చెక్కని దీర్ఘచతురస్రాకారంలో చేయాలనుకున్నది. అది దీర్ఘచతురస్రాకారంలోనే వుండాలంటే ఆమె దానిని ఎన్ని రకాలుగా పరిశీలించి ఆకారం తీసుకురావాలి?

## ఇవి చేయండి

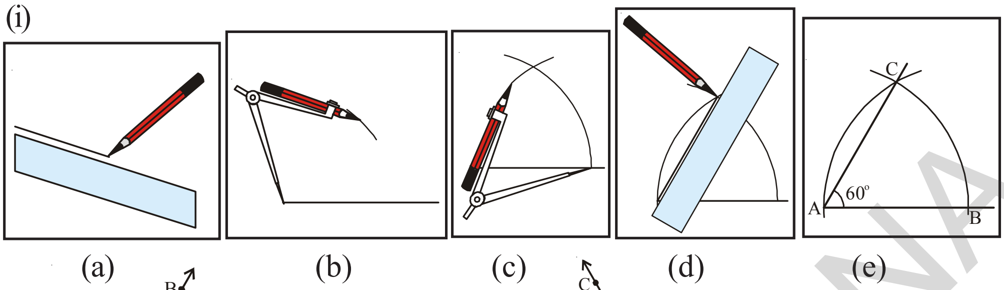
$60^0$ కోణాన్ని గీయగలరా?



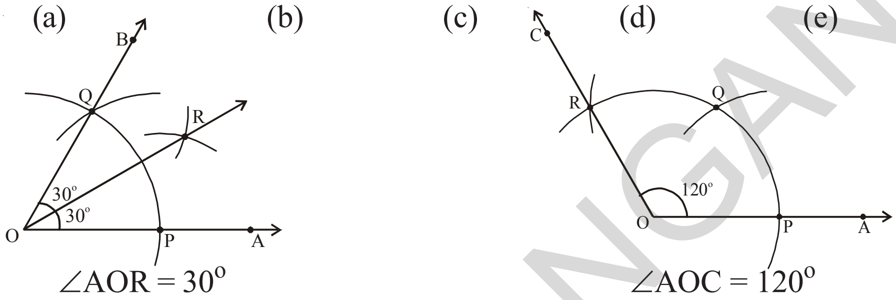

SCERT, TELANGANA

Observe the illustrations and write steps of construction for each.

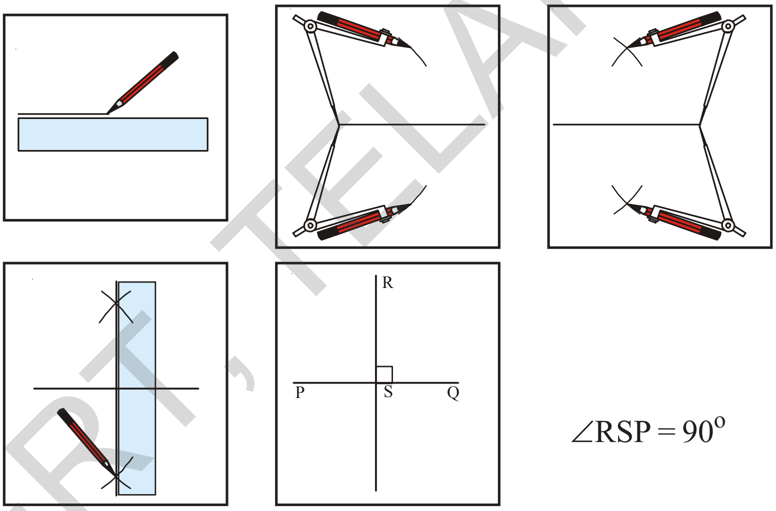
(i)




(ii)

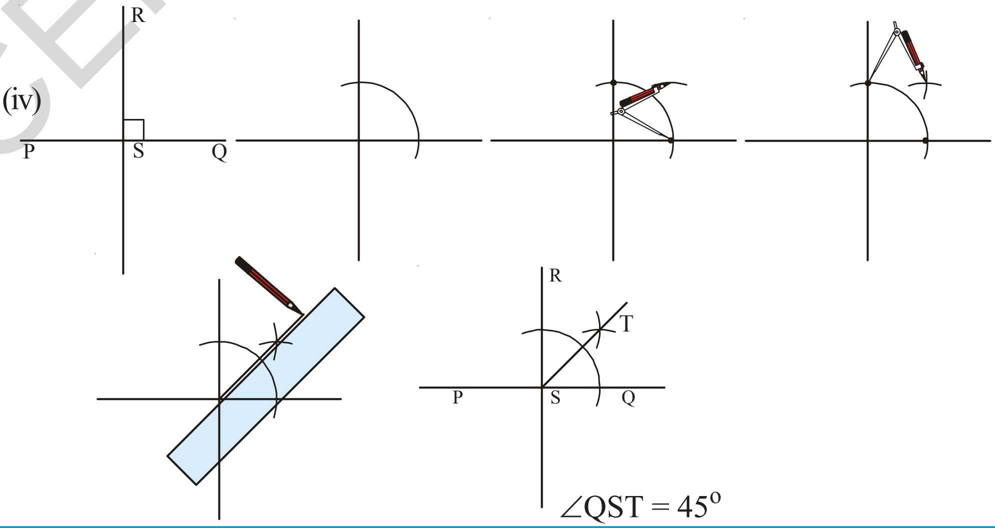



(iii)




$\angle RSP = 90^{o}$

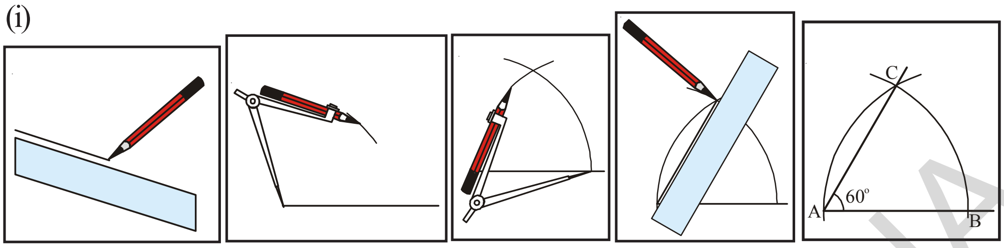
(iv)




SCERT, TELANGANA

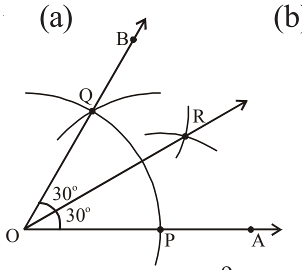
క్రింది పటాలు పరిశీలించి, వాటి నిర్మాణ సోపానాలు రాయండి.

(i)

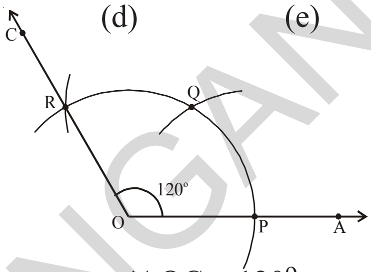



(a) (b) (c) (d) (e)

(ii)

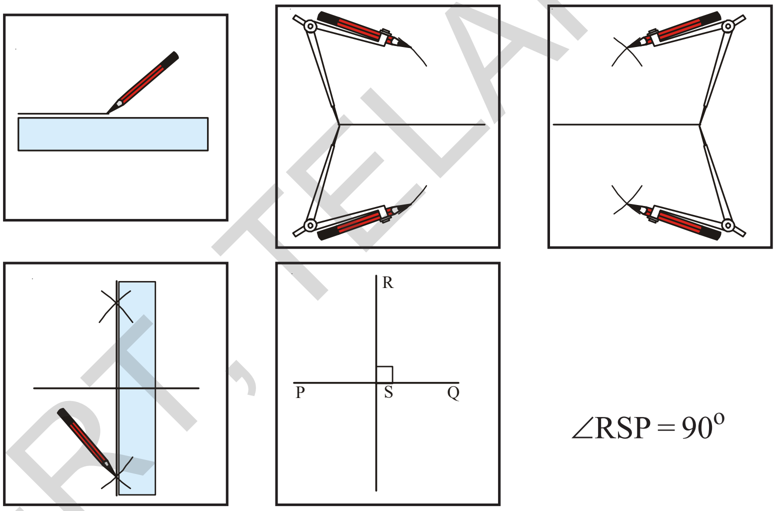



$\angle AOR = 30^{o}$



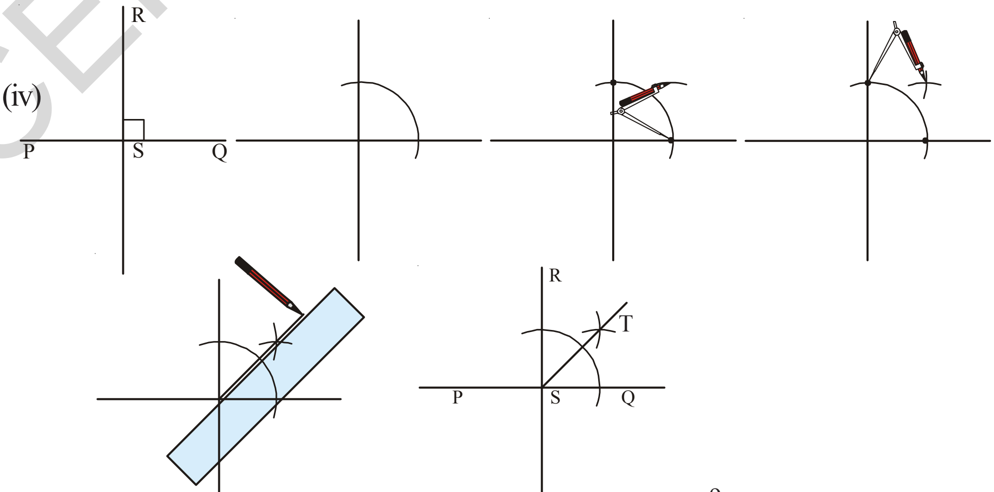

$\angle AOC = 120^{o}$

(iii)




$\angle RSP = 90^{o}$

(iv)




$\angle QST = 45^{o}$

SCERT, TELANGANA

## 3.2 Constructing a Quadrilateral

We would draw quadrilaterals when the following measurements are given.

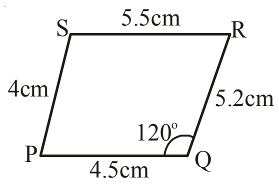
1. When four sides and one angle are given (S.S.S.S.A)
2. When four sides and one diagonal are given (S.S.S.S.D)
3. When three sides and two diagonals are given (S.S.S.D.D)
4. When two adjacent sides and three angles are given (S.A.S.A.A)
5. When three sides and two included angles are given (S.A.S.A.S)

### 3.2.1 Construction : When the lengths of four sides and one angle are given (S.S.S.S.A)

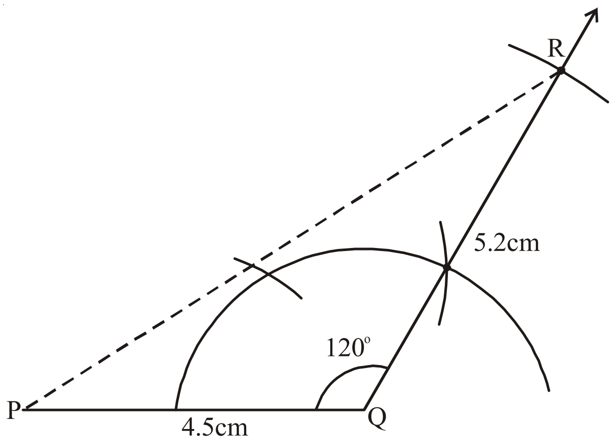
**Example 1 :** Construct a quadrilateral PQRS in which PQ = 4.5 cm, QR = 5.2 cm, RS = 5.5 cm, PS = 4 cm and $\angle$RQP = 120°.

**Solution :**

**Step 1 :** Draw a rough sketch of the required quadrilateral and mark the given measurements. Are they enough ?




**Step 2 :** Draw $\Delta$PQR using S.A.S Property of construction, by taking PQ = 4.5 cm, $\angle$RQP = 120° and QR = 5.2 cm.




SCERT, TELANGANA

## 3.2 చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు

క్రింది విధంగా కొలతలు ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజాలను నిర్మించడం తెలుసుకుందాం.

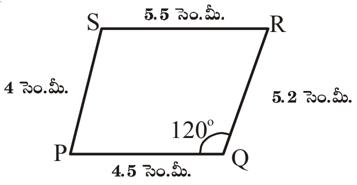
1. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.A.)
2. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.D.)
3. మూడు భుజాలు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.S.S.D.D.)
4. రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.A.)
5. మూడు భుజాలు మరియు రెండు ఉమ్మడి కోణాలు కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.S.)

### 3.2.1 నిర్మాణం : నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.A.)

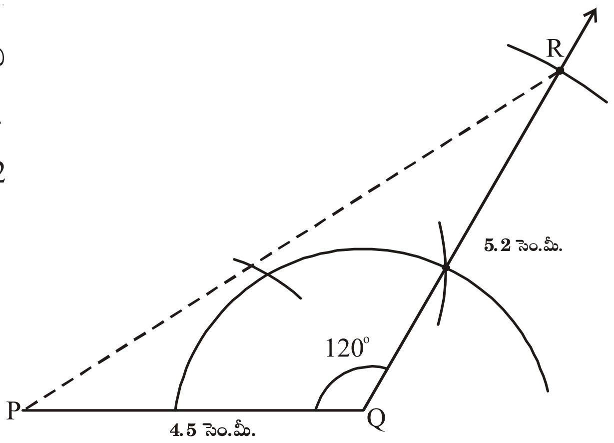
**ఉదాహరణ 1:** PQ = 4.5 సెం.మీ., QR = 5.2 సెం.మీ., RS = 5.5 సెం.మీ., PS = 4 సెం.మీ. మరియు $\angle RQP = 120^o$. కొలతలతో PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

**నిర్మాణం:**

**సోపానం 1:** కావల్సిన చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు పటం వేసి, ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి. ఈ కొలతలు చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి సరిపోతాయా?

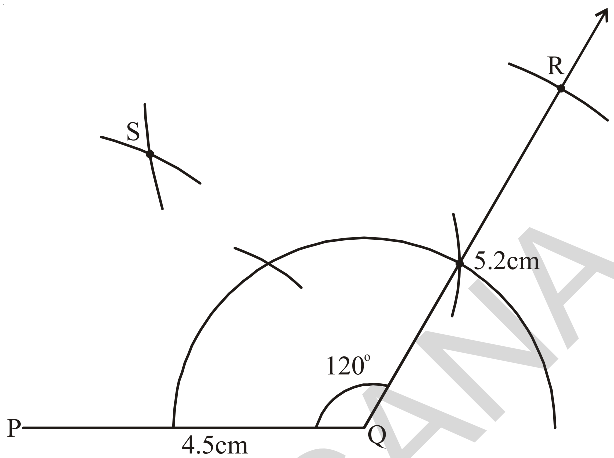



**సోపానం 2:** భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం ఉపయోగించి $\Delta PQR$ నిర్మించాలి. PQ = 4.5 సెం.మీ. $\angle RQP = 120^o$ మరియు QR = 5.2 సెం.మీ. తీసుకోవాలి.

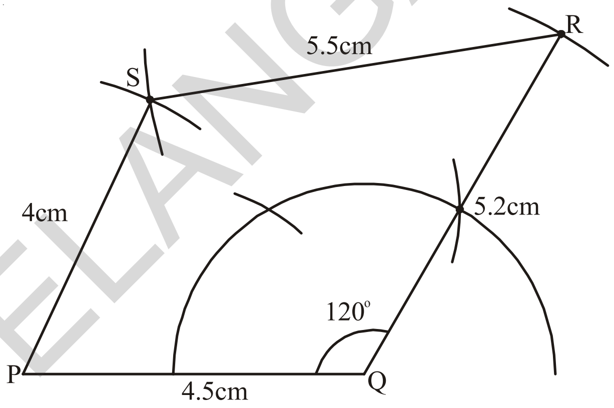



SCERT, TELANGANA

**Step 3 :** To locate the fourth vertex 'S', draw an arc, with centre P and radius 4cm (PS = 4 cm) Draw another arc with centre R and radius 5.5 cm (RS = 5.5 cm) which cuts the previous arc at S.



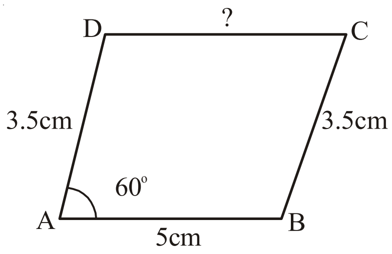

**Step 4 :** Join PS and RS to complete the required quadrilateral PQRS.




**Example 2 :** Construct parallelogram ABCD given that AB = 5 cm, BC = 3.5 cm and $\angle A = 60^o$.

**Solution :**

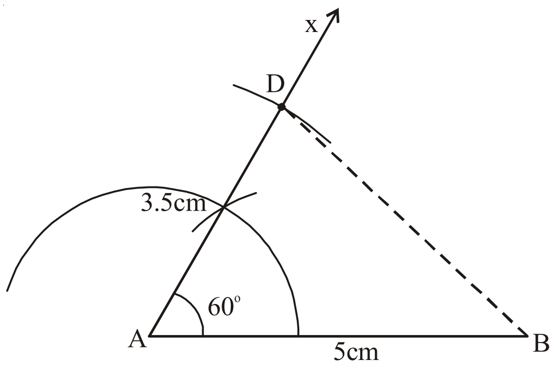
**Step 1 :** Draw a rough sketch of the parallelogram (a special type of quadrilateral) and mark the given measurements.




Here we are given only 3 measurements. But as the ABCD is a parallelogram we can also write that CD = AB = 5 cm and AD = BC = 3.5 cm. (How?)

(Now we got 5 measurements in total).

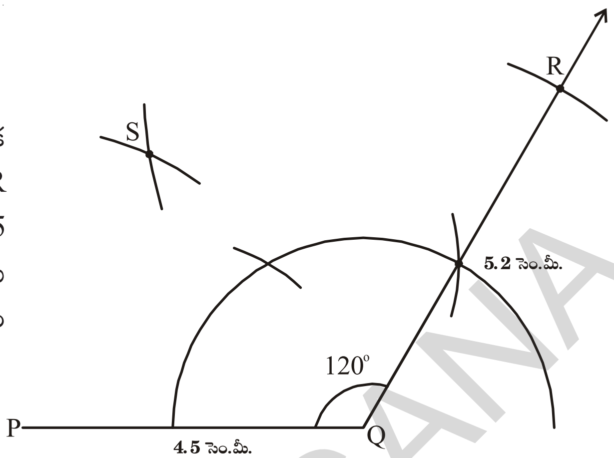
**Steps 2:** Draw $\Delta BAD$ using the measures AB = 5cm, $\angle A = 60^0$ and AD = 3.5 cm.



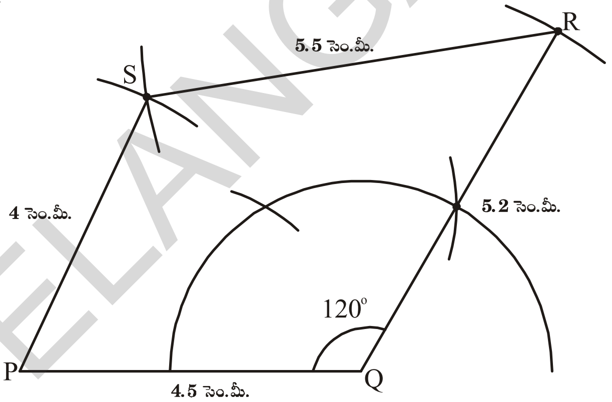

SCERT, TELANGANA

**సోపానం 3:** నాల్గవ శీర్షం 'S' ను గుర్తించడానికి, P కేంద్రంగా 4 సెం.మీ.

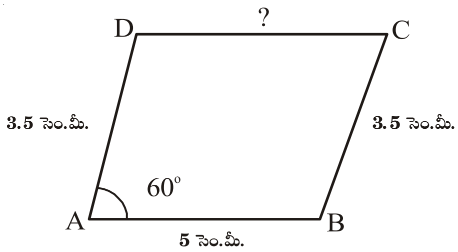
(PS = 4 సెం.మీ.) వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం గీయాలి. అదేవిధంగా R కేంద్రంగా 5.5 సెం.మీ. (RS= 5.5 సెం.మీ.) వ్యాసార్ధంతో మొదటి చాపంను S వద్ద ఖండించునట్లు మరొక చాపం గీయాలి.




**సోపానం 4:** P, S మరియు R, S లను కలిపితే మనకు కావలసిన చతుర్భుజం PQRS వస్తుంది.



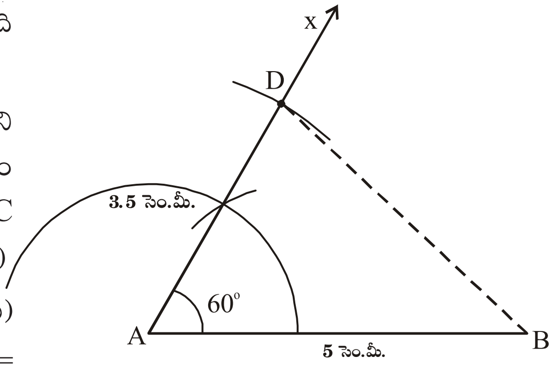

**ఉదాహరణ 2:** AB = 5 సెం.మీ., BC = 3.5 సెం.మీ. మరియు $\angle A = 60^o$. కొలతలతో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం గీయండి.




**నిర్మాణం**

**సోపానం 1:** సమాంతర చతుర్భుజం ABCD యొక్క చిత్తుపటం గీచి, ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి (ఇది ఒక ప్రత్యేక చతుర్భుజమని గుర్తించండి.)

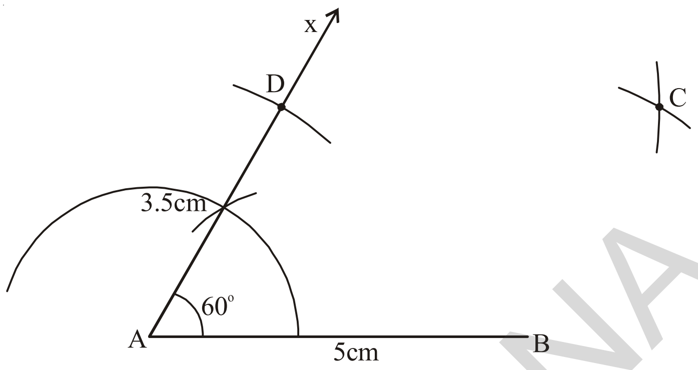
ప్రశ్నలో 3 కొలతలు మాత్రమే ఇవ్వబడ్డాయి. కాని ఇది సమాంతర చతుర్భుజం అయినందున మనం CD=AB=5 సెం.మీ. మరియు AD = BC = 3.5 సెం.మీ. అని తీసుకోవచ్చును (ఎలా?) (ఇప్పుడు మనకు మొత్తం 5 కొలతలు వచ్చాయి)



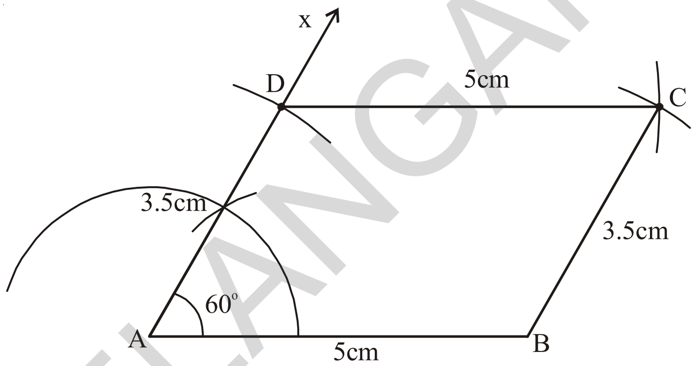

**సోపానం 2:** AB = 5 సెం.మీ. $\angle A = 60^o$ మరియు AD= 3.5 సెం.మీ. కొలతలతో $\Delta BAD$ నిర్మించాలి.

SCERT TELANGANA

**Steps 3:** Locate the fourth vertex 'C' using other two measurements BC=3.5cm and DC = 5 cm.




**Step 4 :** Join B, C and C, D to complete the required parallelogram ABCD.




(Verify the property of the parallelogram using scale and protractor)

Let us generalize the steps of construction of quadrilateral.

**Step 1:** Draw a rough sketch of the figure .

**Step 2 :** If the given measurements are insufficient, analyse the figure. Try to use special properties of the figure to obtain the required measurements

**Step 3 :** Draw a triangle with three of the five measurements and use the other measurements to locate the fourth vertex.

**Step 4:** Describe the steps of construction in detail.

## Exercise - 3.1

**Construct the quadrilaterals with the given measurements. And write steps of construction.**

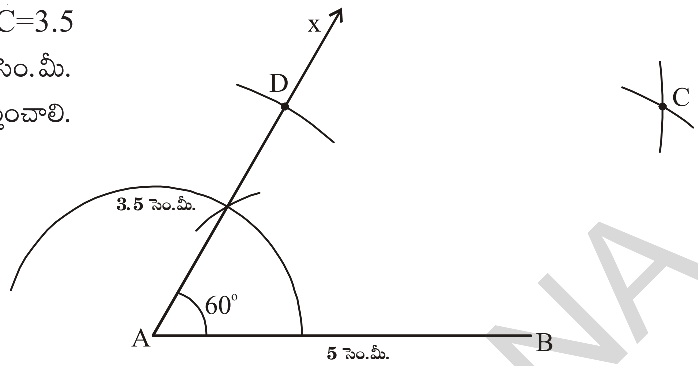
(a) Quadrilateral ABCD with AB = 5.5 cm, BC = 3.5 cm, CD = 4 cm, AD = 5 cm and $\angle A = 45^{o}$.

(b) Quadrilateral BEST with BE = 2.9 cm, ES = 3.2 cm, ST = 2.7 cm, BT = 3.4 cm and $\angle B = 75^{o}$.

(c) Parallelogram PQRS with PQ = 4.5 cm, QR = 3 cm and $\angle RQP = 60^{o}$.

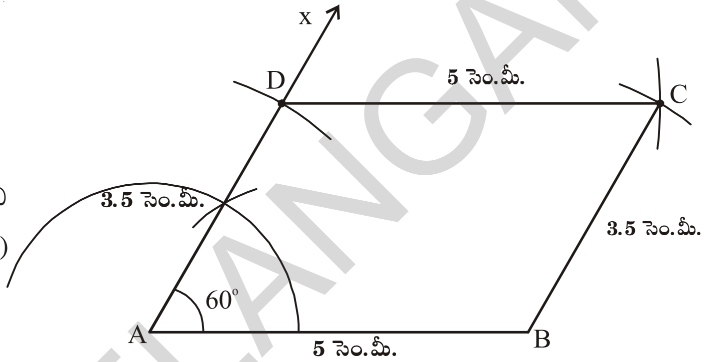
SCERT, TELANGANA

**సోపానం 3:** మిగిలిన రెండు కొలతలు BC=3.5 సెం.మీ. మరియు DC=5 సెం.మీ. లతో నాల్గవ శీర్షం 'C'ను గుర్తించాలి.




**సోపానం 4:** B, C మరియు C, D లను కలుపగా మనకు కావల్సిన సమాంతర చతుర్భుజం ABCD వస్తుంది.

(స్కేలు, కోణమానిని ఉపయోగించి సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలను పరిశీలించండి.)




పై ఉదాహరణలను బట్టి చతుర్భుజ నిర్మాణ సోపానాలను క్రింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

**సోపానం 1:** కావలసిన చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు పటం గీయాలి.

**సోపానం 2:** ఇవ్వబడిన కొలతలు, నిర్మాణానికి సరిపోనప్పుడు పటాన్ని విశ్లేషించి, నిర్మాణానికి కావలసిన కొలతలను చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారంగా కనుగొనాలి.

**సోపానం 3:** నిర్మాణంలో ఐదు కొలతలలో మూడు కొలతలను త్రిభుజ నిర్మాణానికి, మిగిలిన రెండు కొలతలను చతుర్భుజ నాల్గవ శీర్షం గుర్తించడానికి వాడుకోవాలి.

**సోపానం 4:** నిర్మాణం యొక్క సోపానాలను క్రమపద్ధతిలో వివరంగా రాయాలి.

## అభ్యాసం - 3.1

క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల నిర్మాణాలను చేయండి. నిర్మాణ క్రమం రాయండి.

(a) ABCD చతుర్భుజంలో AB = 5.5 సెం.మీ., BC = 3.5 సెం.మీ., CD = 4 సెం.మీ., AD = 5 సెం.మీ., మరియు $\angle A = 45^o$.

(b) BEST చతుర్భుజంలో BE = 2.9 సెం.మీ., ES = 3.2 సెం.మీ., ST = 2.7 సెం.మీ., BT = 3.4 సెం.మీ., $\angle B = 75^o$.

(c) సమాంతర చతుర్భుజం PQRS లో PQ = 4.5 సెం.మీ., QR = 3 సెం.మీ., $\angle RQP = 60^o$.

SCERT, TELANGANA

(d) Rhombus MATH with AT = 4 cm, $\angle MAT = 120^o$.

(e) Rectangle FLAT with FL = 5 cm, LA = 3 cm.

(f) Square LUDO with LU = 4.5 cm.

## 3.2.2 Construction : When the lengths of four sides and a diagonal is given (S.S.S.S.D)

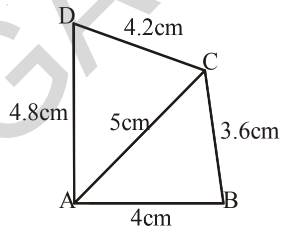
**Example 3:** Construct a quadrilateral ABCD where AB = 4 cm, BC = 3.6 cm, CD = 4.2 cm, AD = 4.8 cm and AC = 5 cm.

**Solution :**

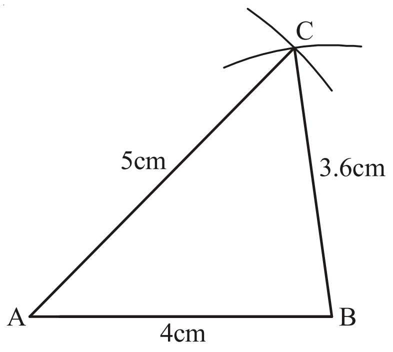
**Step 1:** Draw a rough sketch of the quadrilateral ABCD with the given data.

(Analyse if the given data is sufficient to draw the quadrilateral or not.

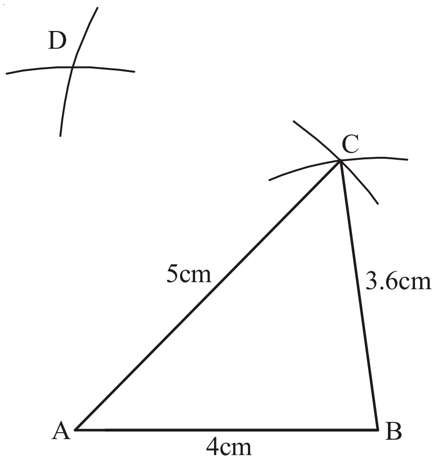
If sufficient then proceed further, if not conclude that the data is not enough to draw the given figure).




**Step 2:** Construct $\Delta ABC$ with AB = 4 cm, BC = 3.6 cm and AC = 5 cm




**Step 3:** We have to locate the fourth vertex 'D'. It would be on the other side of AC. So with centre A and radius 4.8 cm (AD = 4.8 cm) draw an arc and with centre C and radius 4.2 cm (CD = 4.2 cm) draw another arc to cut the previous arc at D.




SCERT, TELANGANA

(d) రాంబస్ MATH లో AT = 4 సెం.మీ., $\angle MAT = 120^o$.

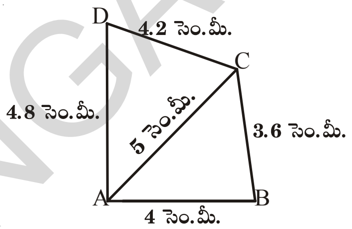
(e) దీర్ఘచతురస్రం FLAT లో FL = 5 సెం.మీ., LA = 3 సెం.మీ.

(f) చతురస్రం LUDO లో LU = 4.5 సెం.మీ.

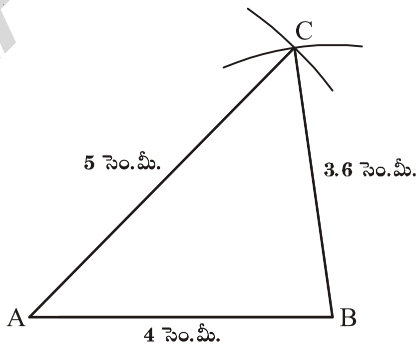
### 3.2.2 నిర్మాణం : నాలుగు భుజాల కొలతలు మరియు కర్ణం పొడవు ఇచ్చినపుడు (S.S.S.S.D)

**ఉదాహరణ 3:** AB = 4 సెం.మీ., BC = 3.6 సెం.మీ., CD = 4.2 సెం.మీ., AD = 4.8 సెం.మీ. మరియు AC = 5 సెం.మీ. కొలతలతో ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.

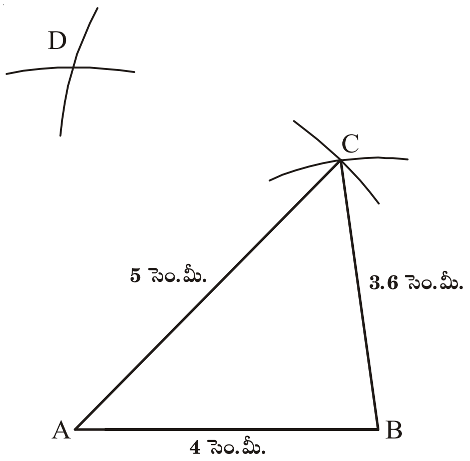
**నిర్మాణం:**




**సోపానం 1:** ABCD చతుర్భుజం యొక్క చిత్తుపటం గీచి కొలతలు గుర్తించాలి. (ఇచ్చిన దత్తాంశం పట్ల నిర్మాణానికి సరిపోతుందో లేదో అని విశ్లేషణ చేయాలి. సరిపోతే నిర్మాణం మొదలు పెట్టాలి. లేదంటే ఇచ్చిన దత్తాంశం నిర్మాణానికి సరిపోదని గుర్తించి, ఇచ్చిన కొలతల ఆధారంగా మరియు నిర్మించవలసిన చతుర్భుజం ధర్మాల ననుసరించి మిగిలిన కొలతలు కనుగొనడానికి ప్రయత్నించాలి.)



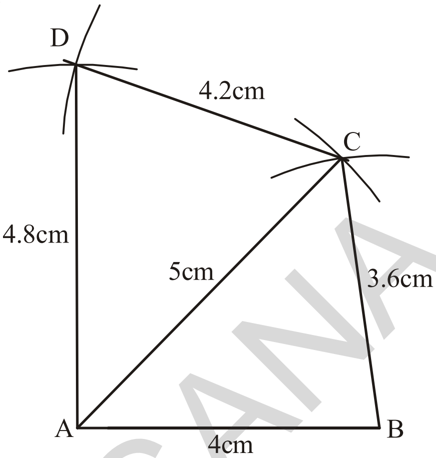

**సోపానం 2:** AB = 4 సెం.మీ., BC = 3.6 సెం.మీ., మరియు AC = 5 సెం.మీ. కొలతలతో $\Delta ABC$ నిర్మించాలి.




**సోపానం 3:** AC భుజం వైపున ఉండే నాల్గవ శీర్షం 'D' ను ఎలా గుర్తించగలమో పరిశీలించాలి. A కేంద్రంగా 4.8 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో (AD = 4.8 సెం.మీ.) ఒక చాపం గీయాలి. అదేవిధంగా C కేంద్రంగా 4.2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో (CD = 4.2 సెం.మీ.) మరొక చాపాన్ని మొదటి చాపంను D వద్ద ఖండించేవిధంగా గీయాలి.

SCERT, TELANGANA

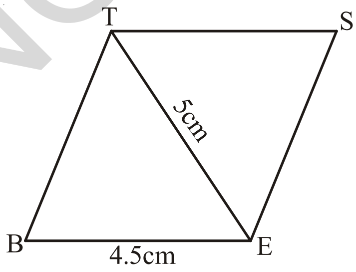
**Step 4:** Join A, D and C, D to complete the quadrilateral ABCD.




**Example 4:** Construct a rhombus BEST with BE = 4.5 cm and ET = 5 cm

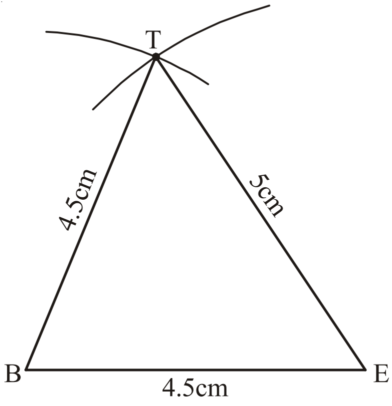
**Solution :**

**Step 1 :** Draw a rough sketch of the rhombus (a special type of quadrilateral). In which all sides are equal. So BE = ES = ST = BT = 4.5 cm and mark the given measurements.

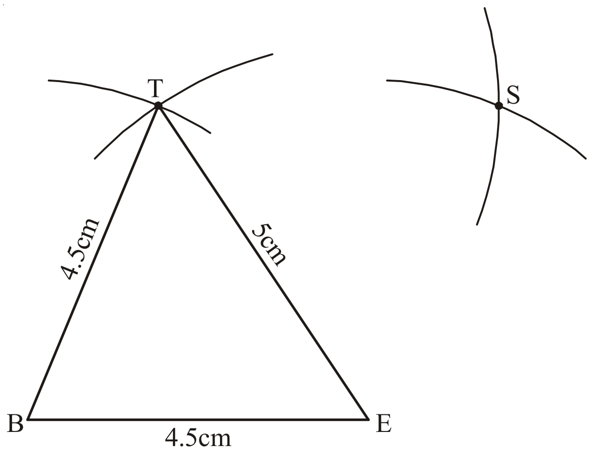



Now, with these measurements, we can construct the figure.

**Step 2 :** Draw ΔBET using SSS property of construction with measures BE = 4.5 cm, ET = 5 cm and BT = 4.5 cm

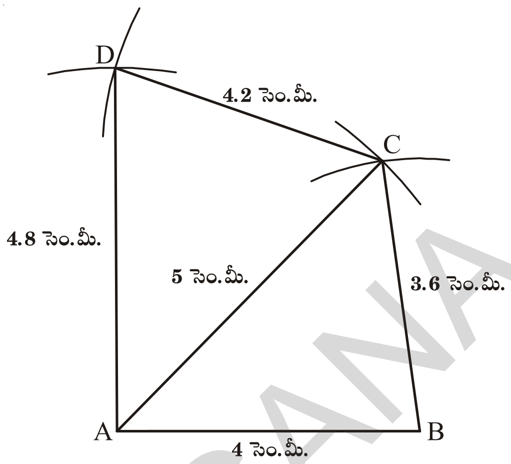



**Step 3 :** By drawing the arcs locate the fourth vertex 'S', with the remaining two measures ES = 4.5 cm and ST = 4.5 cm.




SCERT, TELANGANA

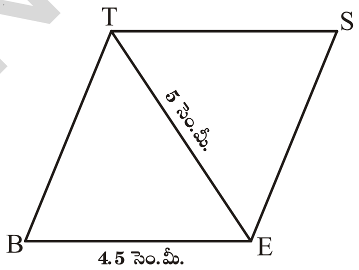
**సోపానం 4:** A, D మరియు C, D లను కలిపితే మనకు కావాల్సిన ABCD చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.




**ఉదాహరణ 4:** BE = 4.5 సెం.మీ. ET = 5 సెం.మీ. కొలతలతో రాంబస్ BEST ని నిర్మించండి.

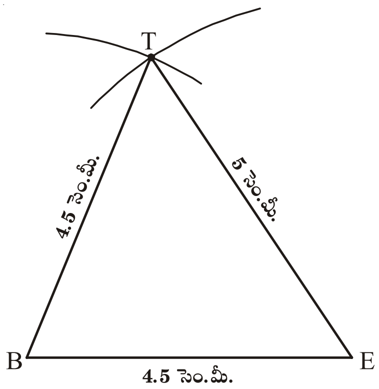
**నిర్మాణం:**

**సోపానం 1:** రాంబస్ యొక్క చిత్తు పటం గీయాలి (ఇది ప్రత్యేక చతుర్భుజమని గుర్తించండి). దీనిలో అన్ని భుజాల కొలతలు సమానం కావున BE = ES = ST = BT = 4.5 సెం.మీ.లను పటంలో గుర్తించాలి.

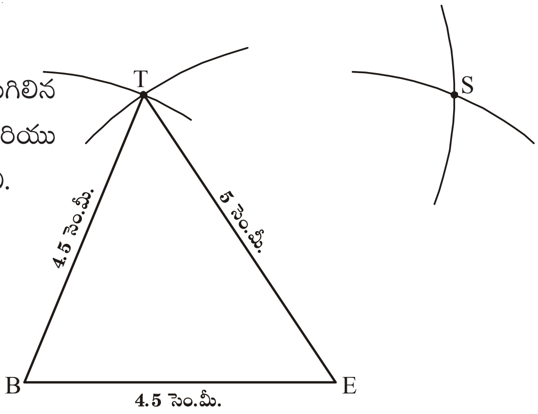



ఇప్పుడు మనం పటంను నిర్మించవచ్చు.

**సోపానం 2:** భు.భు.భు. త్రిభుజ నియమం ప్రకారం BE=4.5 సెం.మీ., ET = 5 సెం.మీ., BT = 4.5 సెం.మీ. కొలతలతో $\Delta$BET ను నిర్మించాలి.

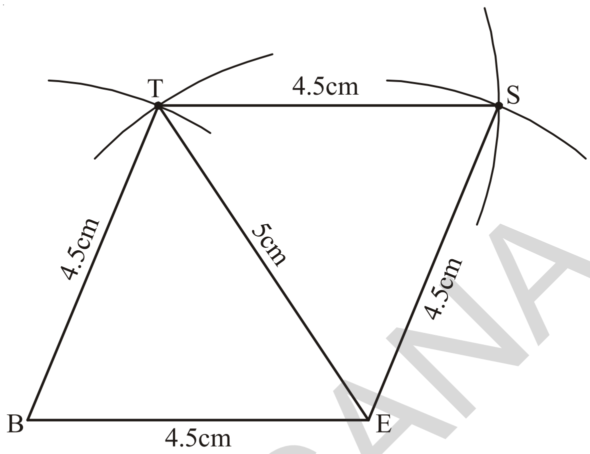



**సోపానం 3:** నాల్గవ శీర్షం 'S' ను గుర్తించడానికి, మిగిలిన రెండు కొలతలు ES = 4.5 సెం.మీ. మరియు ST = 4.5 సెం.మీ.లతో చాపాలు గీయాలి.




SCERT, TELANGANA

**Step 4 :** Join E, S and S, T to complete the required rhombus BEST.




## Try These

1. Can you draw a parallelogram BATS where BA = 5 cm, AT = 6cm and AS = 6.5 cm? explain?

2. A student attempted to draw a quadrilateral PLAY given that PL = 3 cm, LA = 4 cm, AY = 4.5 cm, PY = 2 cm and LY = 6 cm. But he was unable to draw it why? Try to draw the quadrilateral yourself and give reason.

## Exercise - 3.2

**Construct quadrilateral with the measurements given below :**

(a) Quadrilateral ABCD with AB = 4.5 cm, BC = 5.5 cm, CD = 4 cm, AD = 6 cm and AC = 7 cm

(b) Quadrilateral PQRS with PQ = 3.5 cm, QR = 4 cm, RS = 5 cm, PS = 4.5 cm and QS = 6.5 cm

(c) Parallelogram ABCD with AB = 6cm, AD = 4.5 cm and BD = 7.5 cm

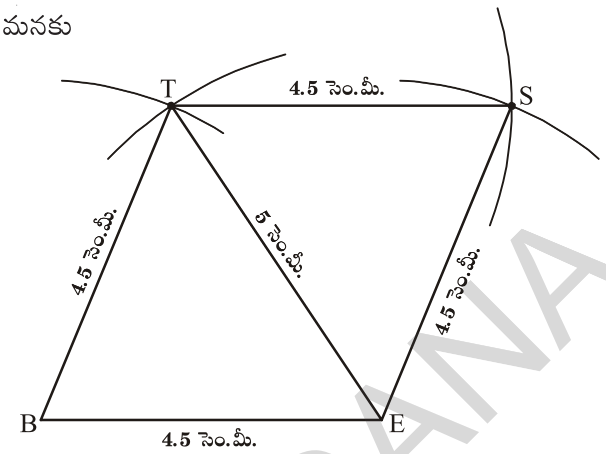
(d) Rhombus NICE with NI = 4 cm and IE = 5.6 cm

### 3.2.3 Construction: When the lengths of three sides and two diagonals are given (S.S.S.D.D)

**Example 5 :** Construct a quadrilateral ABCD, given that AB = 4.5 cm, BC = 5.2 cm, CD = 4.8 cm and diagonals AC = 5 cm and BD = 5.4 cm.

SCERT, TELANGANA

**సోపానం 4:** E, S మరియు S, T లను కలిపితే మనకు కావలసిన రాంబస్ BEST వస్తుంది.




### ప్రయత్నించండి

1. BA = 5 సెం.మీ., AT = 6 సెం.మీ. మరియు AS = 6.5 సెం.మీ.? కొలతలతో BATS సమాంతర చతుర్భుజం గీయగలమా? వివరించండి.

2. ఒక విద్యార్థి PL 3 సెం.మీ, LA = 4 సెం.మీ, AY=4.5 సెం.మీ, PY=2 సెం.మీ మరియు LY= 6 సెం.మీ. కొలతలతో PLAY అనే చతుర్భుజాన్ని నిర్మించడానికి ప్రయత్నించాడు. కాని సాధ్యం కాలేదు. ఎందుకు? నీవు కూడా చతుర్భుజాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించి, తగు కారణాలు తెల్పండి.

## అభ్యాసం - 3.2

**క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల నిర్మాణాలను చేయండి.**

(a) ABCD చతుర్భుజంలో AB=4.5 సెం.మీ, BC=5.5 సెం.మీ, CD=4 సెం.మీ, AD=6 సెం.మీ మరియు AC=7 సెం.మీ.

(b) PQRS చతుర్భుజంలో PQ=3.5 సెం.మీ, QR=4 సెం.మీ, RS=5 సెం.మీ, PS=4.5 సెం.మీ మరియు QS= 6.5 సెం.మీ.

(c) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో AB=6 సెం.మీ, CD=4.5 సెం.మీ మరియు BD=7.5 సెం.మీ.

(d) సమచతుర్భుజం (రాంబస్) NICE లో NI=4 సెం.మీ మరియు IE=5.6 సెం.మీ.

### 3.2.3 నిర్మాణం: మూడు భుజాలు, రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.S.S.D.D)

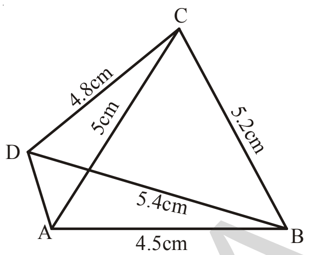
**ఉదాహరణ 5 :** AB=4.5 సెం.మీ, BC=5.2 సెం.మీ, CD=4.8 సెం.మీ, కర్ణాలు AC=5 సెం.మీ మరియు BD=5.4 సెం.మీ కొలతలతో చతుర్భుజం ABCD నిర్మించండి.

SCERT TELANGANA

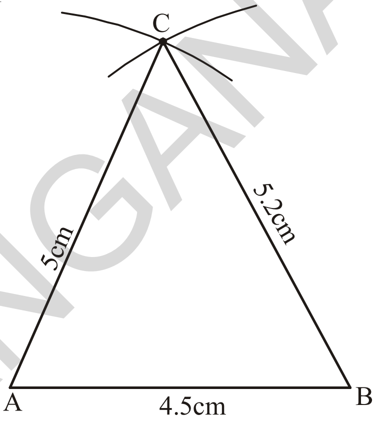
**Solution:**

**Step 1:** We first draw a rough sketch of the quadrilateral ABCD. Mark the given measurements.

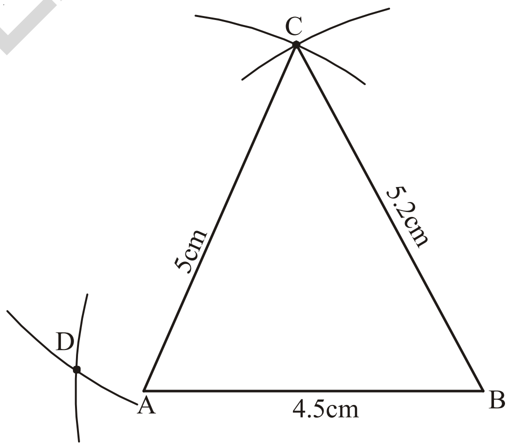
(It is possible to draw $\Delta ABC$ with the available measurements)



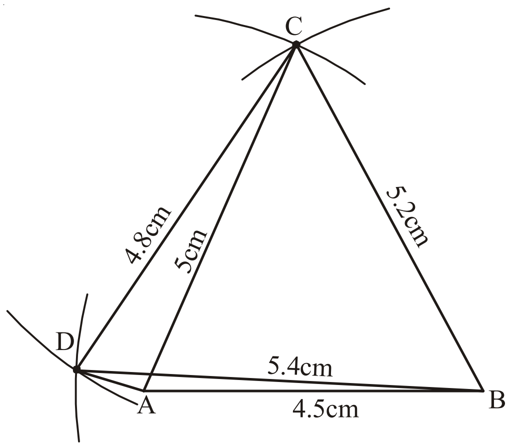

**Step 2:** Draw $\Delta ABC$ using SSS Property of construction with measures AB = 4.5 cm, BC = 5.2 cm and AC = 5 cm




**Step 3:** With centre B and radius 5.4 cm and with centre C and radius 4.8 cm draw two arcs opposite to vertex B to locate D.



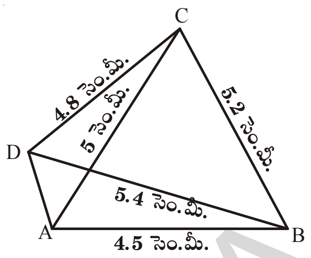

**Step 4:** Join C,D, B,D and A,D to complete the quadrilateral ABCD.



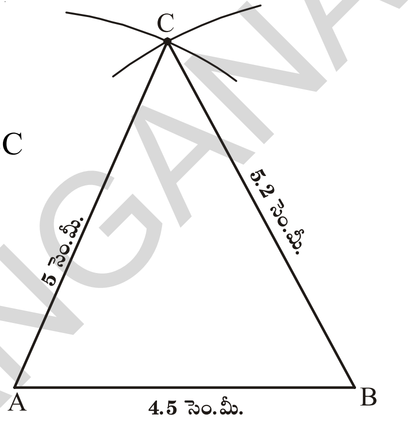

SCERT, TELANGANA

సాధన:

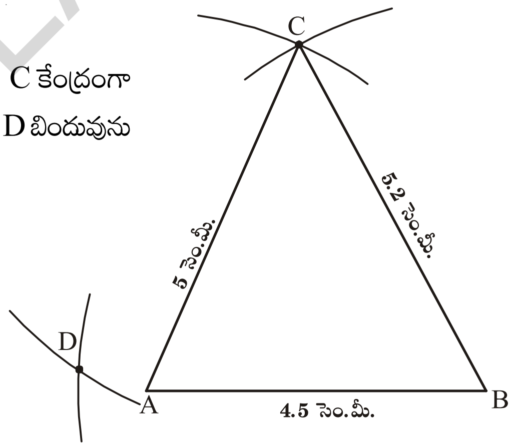
**సోపానం 1:** మొదటి చతుర్భుజం ABCD యొక్క చిత్తుపటం గీచి, ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి.
(ఇచ్చిన కొలతలతో ΔABC త్రిభుజం నిర్మించగలం)



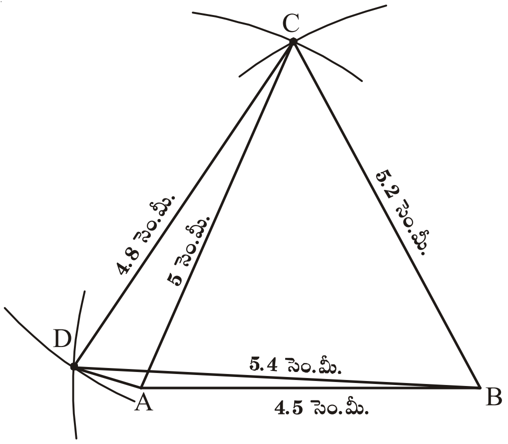

**సోపానం 2:** భు.భు.భు త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా AB=4.5 సెం.మీ, BC=5.2 సెం.మీ మరియు AC=5 సెం.మీ కొలతలతో ΔABC నిర్మించాలి.




**సోపానం 3:** B కేంద్రంగా 5.4 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం, C కేంద్రంగా 4.8 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో మరొక చాపం గీచి, 'B' శీర్షానికి ఎదురుగా D బిందువును గుర్తించాలి.




**సోపానం 4:** C, D మరియు A, D లను కలుపగా చతుర్భుజం ABCD వస్తుంది.




SCERT, TELANGANA

## Think, Discuss and Write

1. Can you draw the quadrilateral ABCD (given above) by constructing $\Delta ABD$ first and then fourth vertex 'C' ? Give reason .
2. Construct a quadrilateral PQRS with PQ = 3 cm, RS = 3 cm, PS = 7.5 cm, PR = 8 cm and SQ = 4 cm. Justify your result.

## Exercise - 3.3

**Construct the quadrilateral with the measurements given below.**

(a) Quadrilateral GOLD; OL = 7.5 cm, GL = 6 cm, LD = 5 cm, DG = 5.5 cm and OD = 10 cm

(b) Quadrilateral PQRS PQ = 4.2 cm, QR = 3 cm, PS = 2.8 cm, PR = 4.5 cm and QS = 5 cm.

### 3.2.4 Construction : When the lengths of two adjacent sides and three angles are known (S.A.S.A.A)

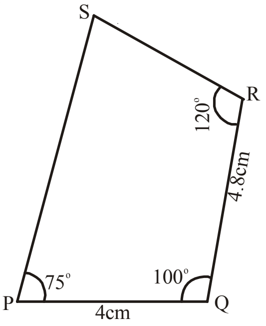
We construct the quadrilateral required as before but as many angles are involved in the construction use a ruler and a compass for standard angles and a protractor for others.

**Example 6 :** Construct a quadrilateral PQRS, given that PQ = 4 cm, QR = 4.8 cm, $\angle P = 75^o$ $\angle Q = 100^o$ and $\angle R = 120^o$.

> The angles such as $0^o$, $30^o$, $45^o$, $60^o$, $90^o$, $120^o$ and $180^o$ are called standard angles.

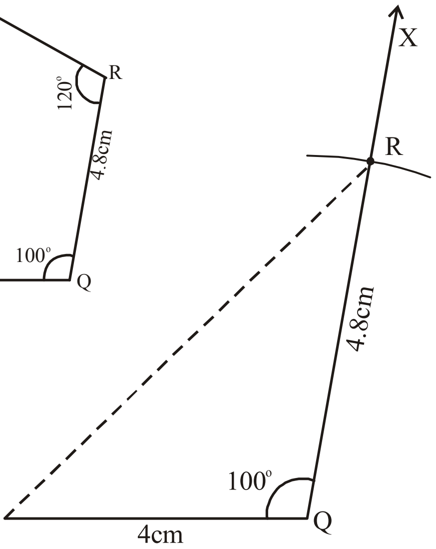
**Solution :**

**Step 1 :** We draw a rough sketch of the quadrilateral and mark the given measurements. Select the proper instruments to construct angles.




**Step 2:** Construct $\Delta PQR$ using SAS property of construction with measures PQ = 4 cm, $\angle Q = 100^o$ and QR = 4.8 cm

(Why a dotted line is used to join PR ? This can be avoided in the next step).




SCERT, TELANGANA

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. ఉదాహరణలో ఇచ్చిన చతుర్భుజం ABCD గీయడానికి ముందుగా $\Delta$ ABD తో మొదలు పెట్టి నాల్గవ శీర్షం C ని గుర్తించగలరా? కారణాలు తెలపండి.
2. PQ=3 సెం.మీ, RS=3 సెం.మీ, PS=7.5 సెం.మీ, PR=8 సెం.మీ, మరియు SQ=4 సెం.మీ. కొలతలతో చతుర్భుజం PQRS నిర్మించండి. నిర్మాణం ఏ విధంగా చేస్తారో వివరించండి.

## అభ్యాసం - 3.3

**క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలను ఉపయోగించి కావల్సిన చతుర్భుజాలను నిర్మించండి.**

(a) GOLD అనే చతుర్భుజంలో OL=7.5 సెం.మీ, GL=6 సెం.మీ, LD=5 సెం.మీ, DG=5.5 సెం.మీ. మరియు OD=10 సెం.మీ.

(b) PQRS చతుర్భుజంలో PQ=4.2 సెం.మీ, QR=3 సెం.మీ, PS=2.8 సెం.మీ, PR=4.5 సెం.మీ మరియు QS=5 సెం.మీ.

### 3.2.4 నిర్మాణం : రెండు ఆసన్న భుజాలు మరియు మూడు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.A)

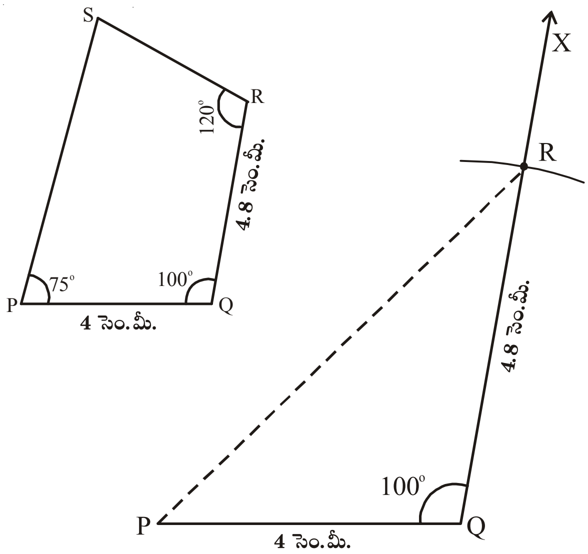
కావలసిన చతుర్భుజ నిర్మాణాన్ని మనం ముందుగా చేసినట్లుగానే చేస్తాం. అయితే ఈ నిర్మాణంలో ఎక్కువ కోణాలను నిర్మించవలసి వున్నందున నిర్మాణంలో కొలబద్ద, వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి ప్రామాణిక కోణాలను నిర్మిస్తాం. మిగిలిన సందర్భాలలో కోణమానిని వినియోగించుకోవచ్చు.

**ఉదాహరణ 6:** PQ=4 సెం.మీ, QR=4.8 సెం.మీ, $\angle P=75^0$ $\angle Q=100^0$ మరియు $\angle R=120^0$ కొలతలతో PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

ప్రామాణిక కోణాలంటే $0^o$, $30^o$, $45^o$, $60^o$, $90^o$, $120^o$ మరియు $180^o$.

**నిర్మాణం:**

**సోపానం 1:** చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు పటంను గీచి కొలతలు గుర్తించాలి. నిర్మాణానికి సరిపడే పరికరాలు ఎన్నుకోవాలి.




**సోపానం 2:** భు.కో.భు త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా PQ=4 సెం.మీ, $\angle Q=100^0$ మరియు QR=4.8 సెం.మీ కొలతలతో $\Delta$PQR నిర్మించాలి.

(PR ను చుక్కల గీతతో కలిపాం. ఎందుకు? దీనిని తర్వాత సోపానంలో తొలగించవచ్చు).



SCERT, TELANGANA

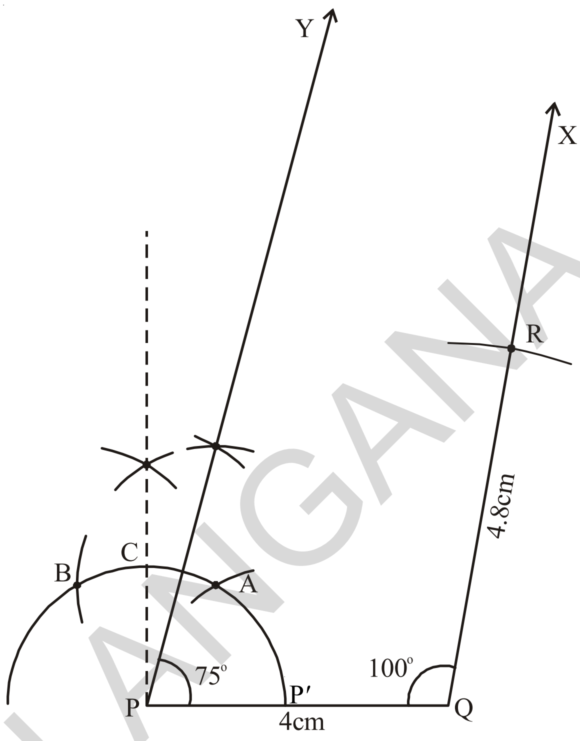
**Step 3:** Construct $\angle P = 75^{o}$ and draw $\overrightarrow{PY}$

[Do you understand how $75^{o}$ is constructed?

(a) An arc is drawn from P. Let it intersect PQ at $P'$. With center $P'$ and with the same radius draw two arcs to cut at two points A, B which give $60^{o}$ and $120^{o}$ respectively.

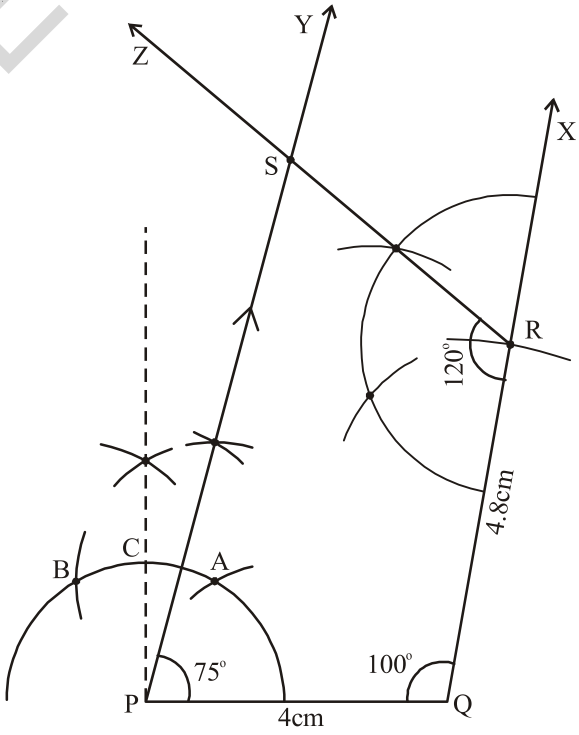
(b) From A,B construct an angular bisector. Which cuts the arc at C, making $90^{o}$.

(c) From A, C construct angular bisector (median of $60^{o}$ and $90^{o}$) which is $75^{o}$.]




**Step 4:** Construct $\angle R = 120^{o}$ and draw $\overrightarrow{RZ}$ to meet $\overrightarrow{PY}$ at S.

PQRS is the required quadrilateral.




SCERT, TELANGANA

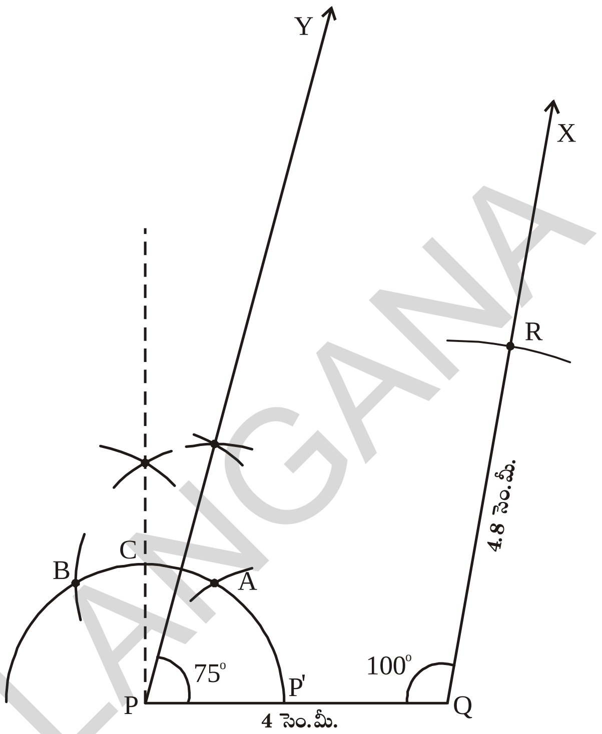
**సోపానం 3:** $\angle P=75^0$ కోణం నిర్మించి $\overrightarrow{PY}$ ను గీయాలి.

[$75^0$ కోణం ఎలా నిర్మిస్తారో తెలుసుకుందాం.

(a) P కేంద్రంగా కొంత వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం గీయాలి అది PQ ను వద్ద P' ఖండించింది అనుకొనుము. P' కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్ధంతో మరి రెండు చాపములు గీస్తే అవి A, B ల వద్ద ఖండిస్తాయి. ఇచ్చట మనకు $60^0$ మరియు $120^0$ కోణం ఏర్పడుతుంది.

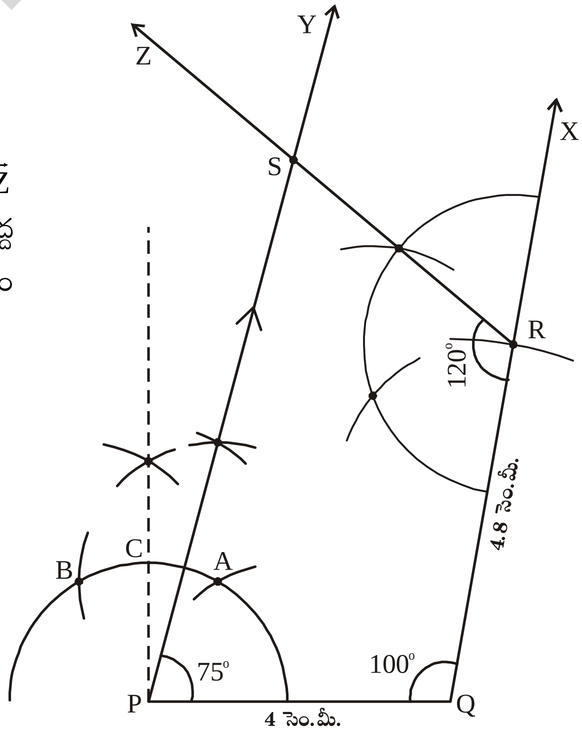
(b) A,B ల మధ్య కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీస్తే అది మొదటి చాపాన్ని C వద్ద ఖండిస్తే అచ్చట $90^0$ కోణం అవుతుంది.

(c) A, C ల మధ్య తిరిగి కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీస్తే ($60^0$ మరియు $90^0$ ల మధ్య) మనకు $75^0$ కోణం చేసే కోణ రేఖ $\overrightarrow{PY}$ వస్తుంది.]




SCERT, TELANGANA

**సోపానం 4:** $\angle R=120^0$ కోణం నిర్మించాలి. కోణరేఖ $\overrightarrow{RZ}$ ముందుగా గీచిన కోణరేఖ $\overrightarrow{PY}$ ను S వద్ద ఖండిస్తుంది. మనకు కావలసిన చతుర్భుజం PQRS వస్తుంది.



### Think, Discuss and Write

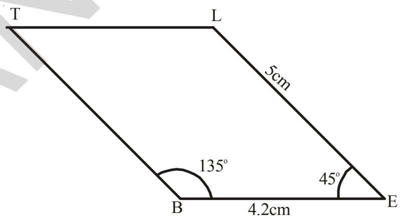
1. Can you construct the above quadrilateral PQRS, if we have an angle of $100^o$ at P instead of $75^o$ Give reason.

2. Can you construct the quadrilateral PLAN if PL = 6 cm, LA = 9.5 cm, $\angle P = 75^o$, $\angle L = 15^o$ and $\angle A = 140^o$.

   (Draw a rough sketch in each case and analyse the figure) State the reasons for your conclusion.

**Example 7 :** Construct a parallelogram BELT, given that BE = 4.2 cm, EL = 5 cm, $\angle T = 45^o$.

**Solution :**




**Step 1:** Draw a rough sketch of the parallelogram BELT and mark the given measurements. (Are they are sufficient for construction ?)

**Analysis :**

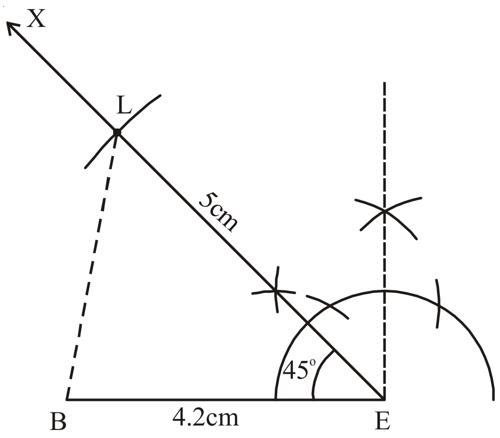
Since the given measures are not sufficient for construction, we shall find the required measurements using the properties of a parallelogram.

As "Opposite angles of a parallelogram are equal" so $\angle E = \angle T = 45^o$ and

"The consecutive angles are supplementary" so $\angle L = 180^o - 45^o = 135^o$.

Thus $\angle B = \angle L = 135^o$

**Step 2 :** Construct $\Delta BEL$ using SAS property of construction model with BE = 4.2 cm, $\angle E = 45^o$ and EL = 5 cm




SCERT, TELANGANA

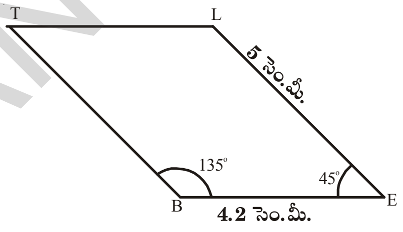
**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి**

1. పై ఉదాహరణలో ఇచ్చిన కొలతలలో $\angle P = 75^{o}$ కు బదులు $\angle P = 100^{o}$ తీసుకుంటే చతుర్భుజం PQRS నిర్మించగలరా? కారణాలు తెలపండి.

2. PL = 6 సెం.మీ., LA = 9.5 సెం.మీ., $\angle P = 75^{o}$, $\angle L = 15^{o}$ మరియు $\angle A = 140^{o}$ కొలతలతో చతుర్భుజం PLAN గీయలరా?

(ప్రతి సందర్భంలోనూ చిత్తు పటాలను గీచి, కొలతలను విశ్లేషించండి.) మీ యొక్క సమాధానాలకు తగిన కారణాలు తెలపండి.

**ఉదాహరణ 7 :** BE = 4.2 సెం.మీ., EL = 5 సెం.మీ., $\angle T = 45^{o}$ కొలతలతో BELT అనే సమాంతర చతుర్భుజం నిర్మించండి.




**నిర్మాణం:**

**సోపానం 1:** BELT సమాంతర చతుర్భుజానికి చిత్తు పటం గీచి, ఇవ్వబడిన కొలతలు గుర్తించండి.

(నిర్మాణానికి ఈ కొలతలు సరిపోతాయా?)

**విశ్లేషణ:**

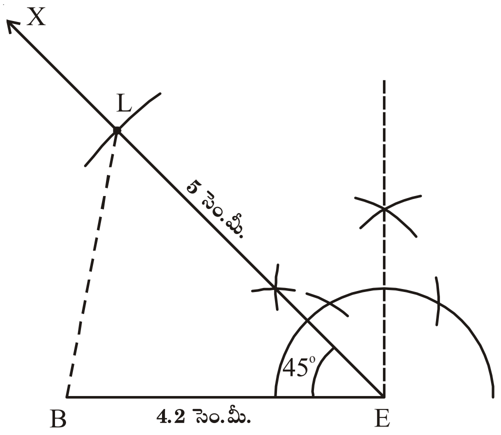
ఇచ్చిన కొలతలు పట నిర్మాణానికి చాలనందున సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారంగా మిగిలిన కొలతలు తెలుసుకోవాలి.

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదుటి కోణాలు సమానం. కావున $\angle E = \angle T = 45^{o}$ అగును.

అదేవిధంగా ఆసన్న కోణాలు $\angle L = 180^{o} - 45^{o} = 135^{o}$.

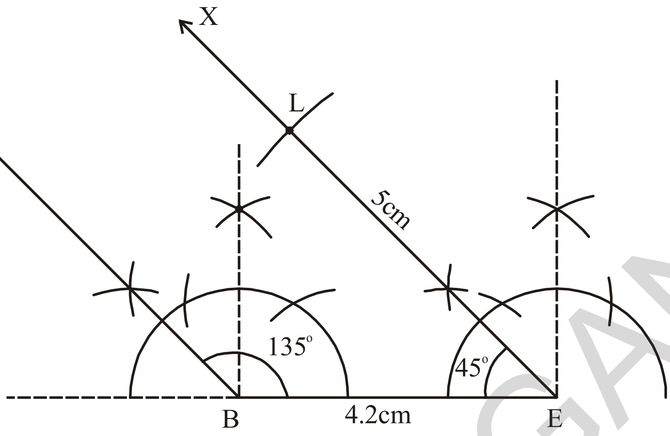
అందుచే $\angle B = \angle L = 135^{o}$ అగును.

**సోపానం 2:** భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా $\Delta BEL$ త్రిభుజాన్ని BE = 4.2 సెం.మీ. $\angle E = 45^{o}$ మరియు EL = 5 సెం.మీ. కొలతలతో నిర్మించాలి.



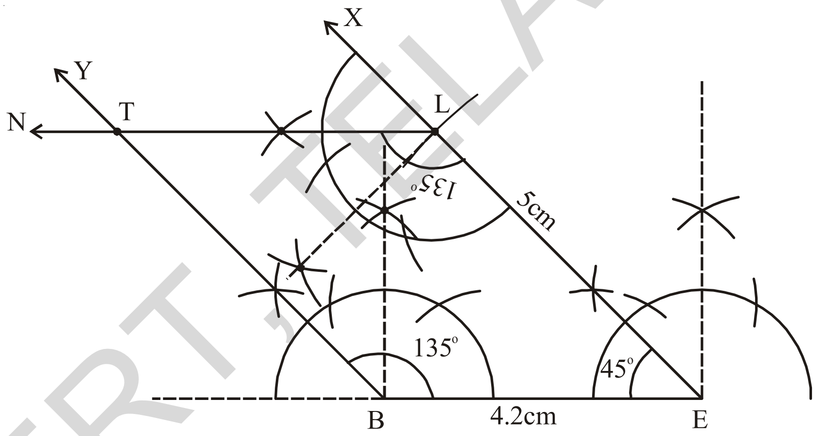

SCERT, TELANGANA

**Step 3 :** Construct $\angle B = 135^o$ and draw $\overrightarrow{BY}$




**Step 4 :** Construct $\angle L = 135^o$ and draw $\overrightarrow{LN}$ to meet $\overrightarrow{BY}$ at T.

BELT is the required quadrilateral (i.e. parallelogram)




### Do This

Construct the above parallelogram BELT by using other properties of parallelogram?

## Exercise - 3.4

**Construct quadrilaterals with the measurements given below :**

(a) Quadrilateral HELP with HE = 6cm, EL = 4.5 cm, $\angle H = 60^o$, $\angle E = 105^o$ and $\angle P = 120^o$.

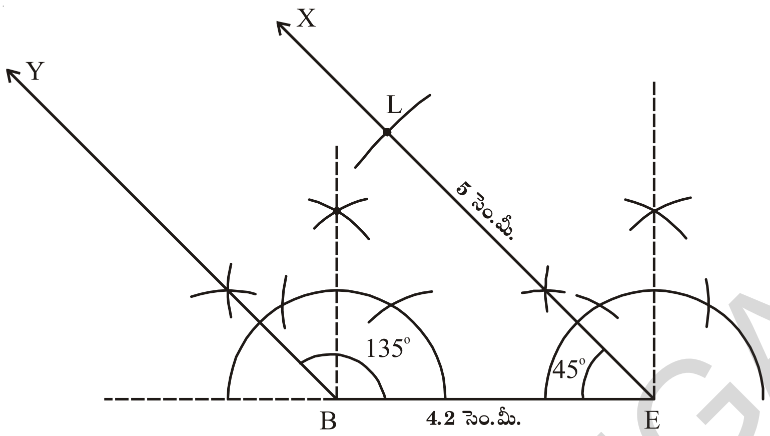
(b) Parallelogram GRAM with GR = AM = 5 cm, RA = MG = 6.2 cm and $\angle R = 85^o$.

(c) Rectangle FLAG with sides FL = 6cm and LA = 4.2 cm.

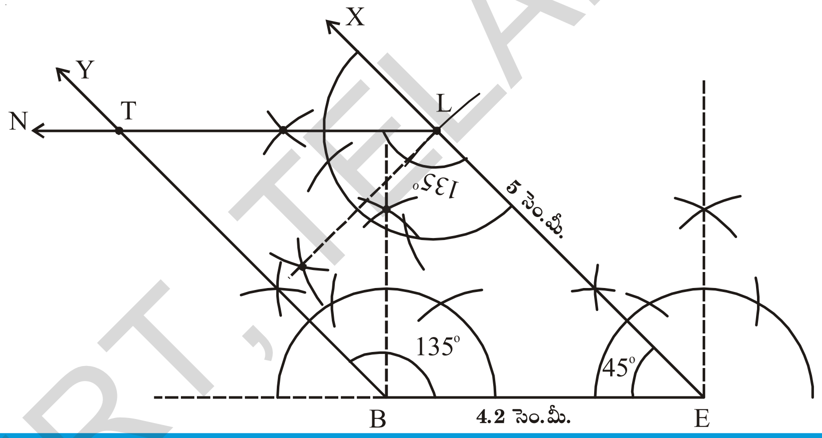


SCERT, TELANGANA

**సోపానం 3:** $\angle B = 135^{o}$ కోణం నిర్మించి $\overrightarrow{BY}$ గీయాలి.




**సోపానం 4 :** $\angle L = 135^{o}$ కోణం నిర్మించి $\overleftrightarrow{LN}$ రేఖ $\overleftrightarrow{BY}$ రేఖను T వద్ద ఖండించునట్లు గీయాలి. మనకు కావల్సిన సమాంతర చతుర్భుజం BELT నిర్మించబడినది.




### ఇవి చేయండి

BELT సమాంతర చతుర్భుజాన్ని, మరి ఏ ఇతర సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారంగా నిర్మించవచ్చో తెలిపి, నిర్మించి చూడండి.

## అభ్యాసం - 3.4

క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతల ఆధారంగా కావాల్సిన చతుర్భుజాలను నిర్మించండి.

(a) చతుర్భుజం HELP లో HE=6 సెం.మీ., EL=4.5 సెం.మీ., $\angle H=60^{o}$, $\angle E=105^{o}$ మరియు $\angle P=120^{o}$.

(b) సమాంతర చతుర్భుజం GRAM లో GR=AM=5 సెం.మీ., RA=MG=6.2 సెం.మీ. మరియు $\angle R=85^{o}$.

(c) దీర్ఘచతురస్రం FLAG లో భుజం FL = 6 సెం.మీ. మరియు LA = 4.2 సెం.మీ.

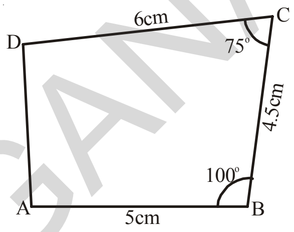
SCERT, TELANGANA

## 3.2.5 Construction : When the lengths of three sides and two included angles are given (S.A.S.A.S)

We construct this type of quadrilateral by constructing a triangle with SAS property. Note particularly the included angles.

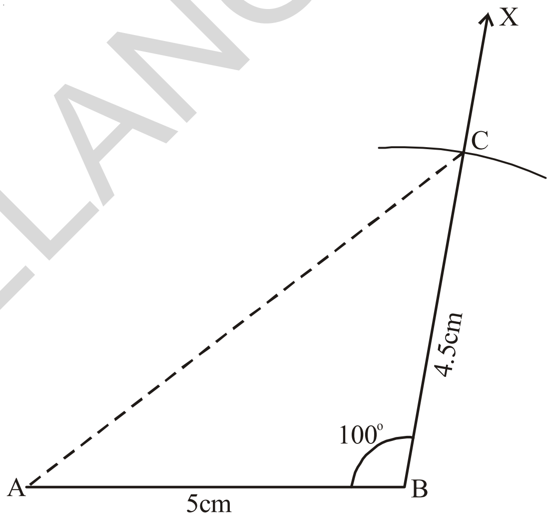
**Example 8 :** Construct a quadrilateral ABCD in which AB = 5cm, BC = 4.5 cm, CD = 6 cm, $\angle B = 100^o$ and $\angle C = 75^o$.

**Solution :**

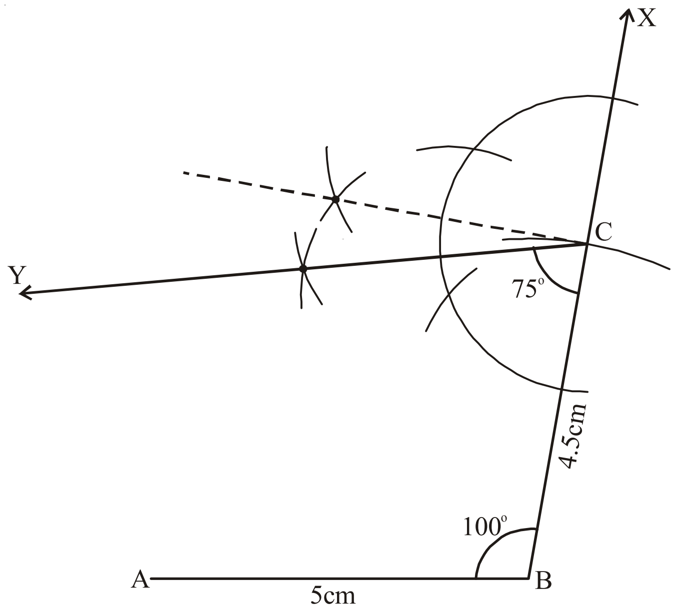



**Step 1 :** Draw a rough sketch, as usual and mark the measurements given (Find whether these measures are sufficient to construct a quadrilateral or not? If yes, proceed)

**Step 2 :** Draw $\Delta ABC$ with measures AB= 5cm, $\angle B = 100^o$ and BC = 4.5 cm using SAS rule.




**Step 3 :** Construct $\angle C = 75^o$ and Draw $\overrightarrow{CY}$ .

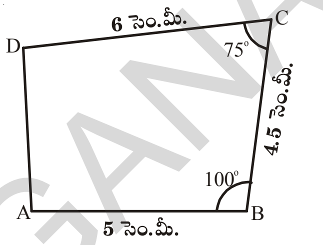



SCERT, TELANGANA

### 3.2.5 నిర్మాణం: మూడు భుజాల కొలతలు, రెండు మధ్య కోణాలు ఇచ్చినపుడు (S.A.S.A.S)

ఇటువంటి చతుర్భుజాల నిర్మాణంలో మనం భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం ఆధారంగా త్రిభుజం నిర్మిస్తాం. ప్రధానంగా ఉమ్మడి కోణాలను తీసుకుంటాం.

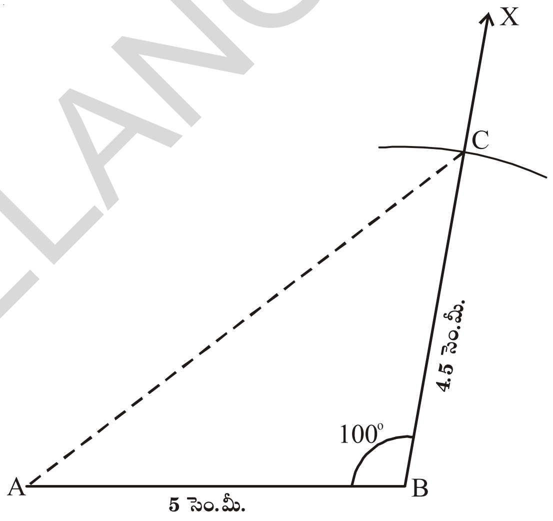
**ఉదాహరణ 8:** AB = 5 సెం.మీ., BC = 4.5 సెం.మీ., CD = 6 సెం.మీ., $\angle B = 100^o$ మరియు $\angle C = 75^o$ కొలతలతో ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.



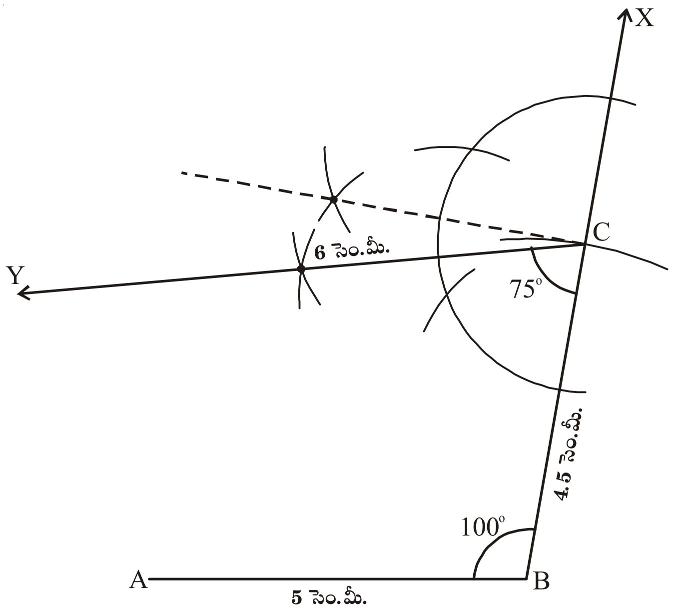

**నిర్మాణం:**

**సోపానం 1:** ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తిస్తూ మొదట చతుర్భుజం ABCD చిత్తు పటాన్ని గీయాలి.

(చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఈ కొలతలు సరిపోతాయా? సరిపోవా? సరిపోతే ముందుకు సాగుదాం)



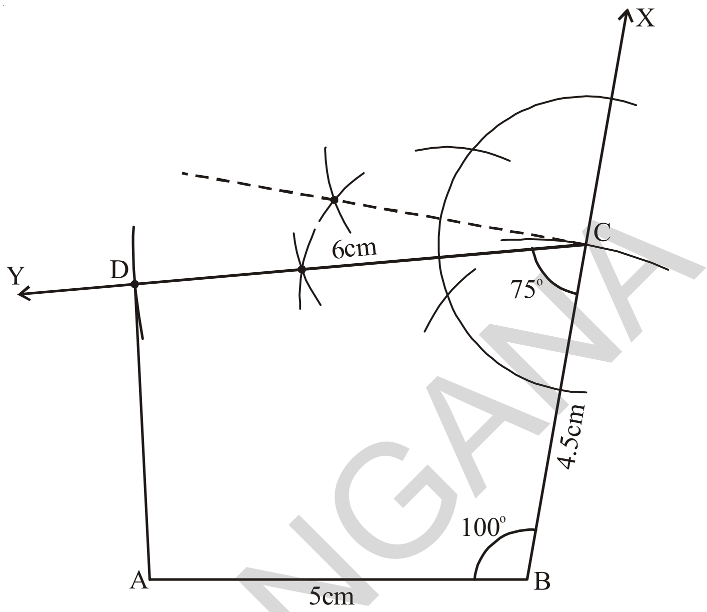

**సోపానం 2:** AB= 5 సెం.మీ., $\angle B = 100^o$ మరియు BC = 4.5 సెం.మీ. కొలతలతో భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం ప్రకారం $\Delta ABC$ నిర్మించాలి.




**సోపానం 3:** $\angle C = 75^o$ కోణం నిర్మించి $\overrightarrow{CY}$ రేఖను గీయాలి.

SCERT, TELANGANA

**Step 4 :** With centre 'C' and radius 6 cm draw an arc to intersect $\overline{CY}$ at D. Join A, D. ABCD is the required quadrilateral.




### Think, Discuss and Write

Do you construct the above quadrilateral ABCD by taking BC as base instead of AB? If So, draw a rough sketch and explain the various steps involved in the construction.

### Exercise - 3.5

Construct following quadrilaterals-

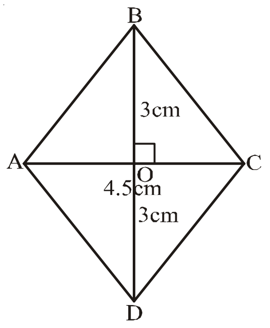
(a) Quadrilateral PQRS with PQ = 3.6cm, QR = 4.5 cm, RS = 5.6 cm, $\angle RQP = 135^o$ and $\angle SRQ = 60^o$.

(b) Quadrilateral LAMP with AM = MP = PL = 5cm, $\angle M = 90^o$ and $\angle P = 60^o$.

(c) Trapezium ABCD in which AB || CD, AB = 8 cm, BC = 6cm, CD = 4cm and $\angle B = 60^o$.

## 3.2.6 Construction of Special types Quadrilaterals

### (a) Construction of a Rhombus :




**Example 9 :** Draw a rhombus ABCD in which diagonals AC = 4.5 cm and BD = 6 cm.

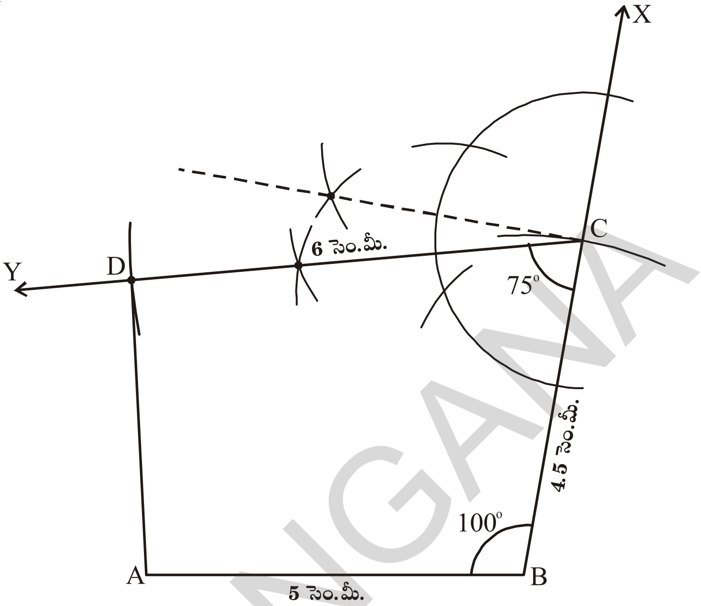
**Solution :**

**Step 1 :** Draw a rough sketch of rhombus ABCD and mark the given measurements. Are these measurements enough to construct the required figure ?

To examine this, we use one or other properties of rhombus to construct it.

SCERT TELANGANA

**సోపానం 4:** 'C' కేంద్రంగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపంను $\overline{CY}$ రేఖపై గీచి 'D' బిందువును గుర్తించాలి. A, D లను కలుపగా కావాల్సిన చతుర్భుజం ABCD నిర్మించబడినది.




### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

పై ఉదాహరణలో ABCD చతుర్భుజాన్ని BC భూమిగా తీసుకొని (AB భూమిగా కాకుండా) నిర్మించగలరా? చిత్తుపటం గీచి నిర్మాణ సోపానాలను వివరించుము.

### అభ్యాసం - 3.5

క్రింది చతుర్భుజాలను ఇవ్వబడిన కొలతలతో నిర్మించండి.

(a) PQRS చతుర్భుజంలో PQ $= 3.6$ సెం.మీ., QR $= 4.5$ సెం.మీ., RS $= 5.6$ సెం.మీ., $\angle RQP = 135^o$ మరియు $\angle SRQ = 60^o$.

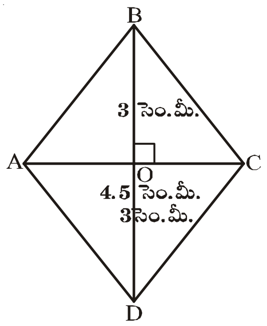
(b) LAMP చతుర్భుజంలో $AM = MP = PL = 5$ సెం.మీ., $\angle M = 90^o$ మరియు $\angle P = 60^o$.

(c) ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం ABCD నందు AB || CD, AB=8 సెం.మీ., BC=6 సెం.మీ. CD=4 సెం.మీ. మరియు $\angle B = 60^o$.

## 3.2.6 ప్రత్యేక చతుర్భుజ నిర్మాణాలు

### (a) రాంబస్ నిర్మాణం:

**ఉదాహరణ 9:** కర్ణములు $AC = 4.5$ సెం.మీ. మరియు $BD = 6$ సెం.మీ. కొలతలతో ABCD నిర్మించండి.

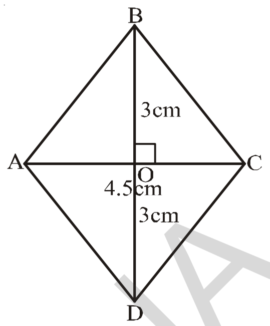



**నిర్మాణం:**

**సోపానం 1:** రాంబస్ ABCD యొక్క చిత్తుపటంను గీచి ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి. (ఇచ్చిన కొలతలు కావలసిన రాంబస్ నిర్మాణానికి సరిపడేటట్లు ఉన్నాయా? పరిశీలించి రాంబస్ ధర్మాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

SCERT, TELANGANA

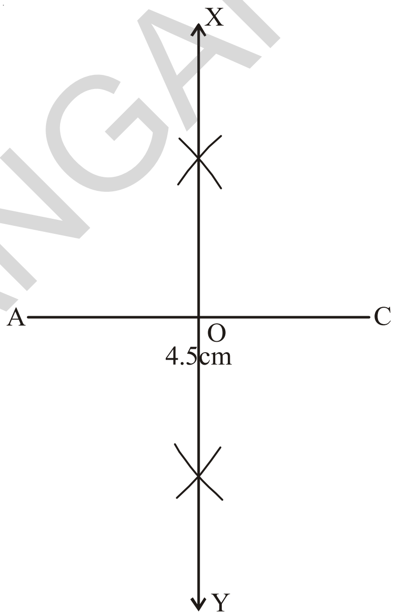
**Analysis:** The diagonals of a rhombus bisect each other perpendicularly, $\overline{AC}$ and $\overline{BD}$ are diagonals of the rhombus ABCD. Which bisect each other at 'O'. i.e. $\angle AOB = 90^o$ and



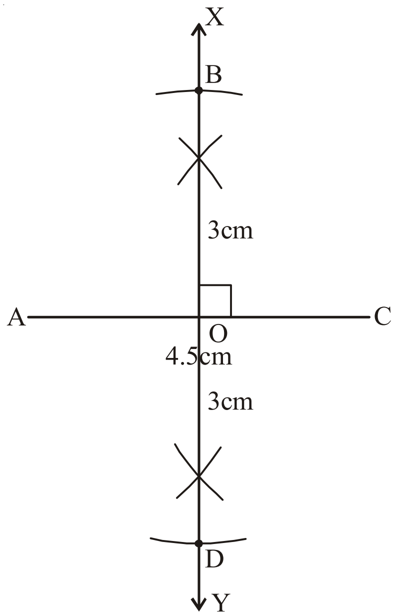

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Now proceed to step 2 for construction.

**Step 2:** Draw $\overline{AC} = 4.5$ cm (one diagonal of the rhombus ABCD) and draw a perpendicular bisector $\overline{XY}$ of it and mark the point of intersection as 'O'.




**Step 3:** As the other diagonal $\overline{BD}$ is Perpendicular to $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ is a part of $\overline{XY}$. So with centre 'O' and radius 3 cm (OB = OD = 3cm) draw two arcs on either sides of $\overline{AC}$ to cut $\overline{XY}$ at B and D.

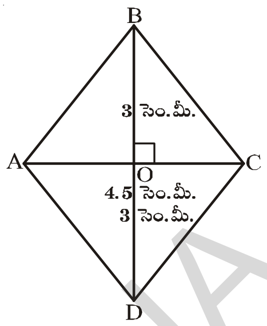



SCERT, TELANGANA

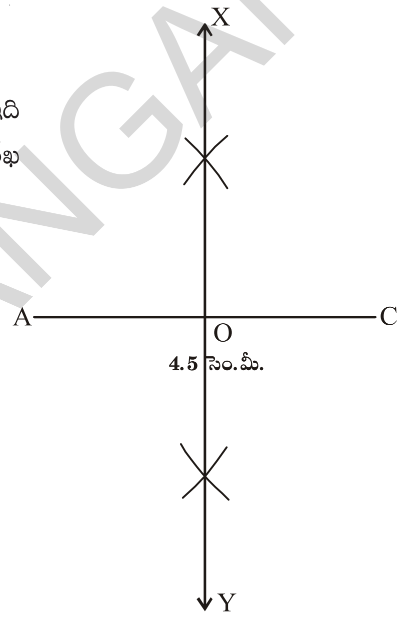
**విశ్లేషణ:** రాంబస్‌లో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. రాంబస్ ABCD లో $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు కర్ణాలు అవి 'O' వద్ద ఖండించుకున్నాయనుకుందాం. అంటే $\angle AOB = 90^o$ మరియు

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ సెం.మీ.}$$

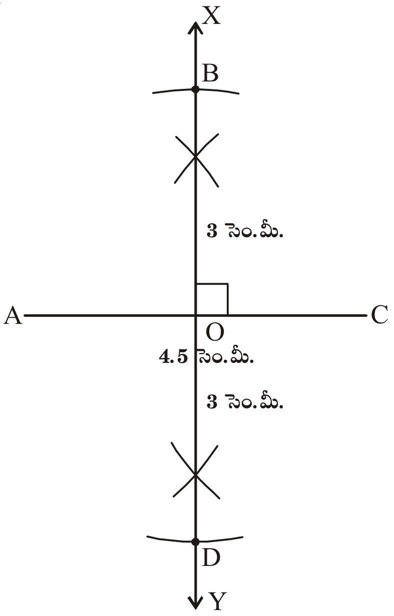
ఇప్పుడు 2వ సోపానంకు వెళ్దాం.




**సోపానం 2:** $\overline{AC}$ = 4.5 సెం.మీ. కొలతతో రేఖాఖండం గీయాలి. (ఇది ABCD రాంబస్‌లో ఒక కర్ణం దానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖ $\overline{XY}$ లను గీచి, ఖండన బిందువును 'O' అని గుర్తించాలి.

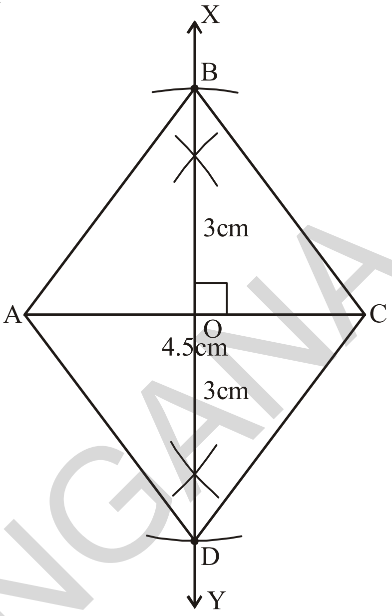



**సోపానం 3:** రెండవ కర్ణం $\overline{BD}$, మొదటి కర్ణం $\overline{AC}$ కు లంబంగా ఉంటుంది. కావున $\overline{BD}$, $\overline{XY}$ రేఖలో భాగం అవుతుంది. కావున 'O' కేంద్రంగా 3 సెం.మీ. (OB = OD = 3 సెం.మీ.) వ్యాసార్ధంతో రెండు చాపములు $\overline{AC}$ కు ఇరువైపులా గీయాలి. ఖండన బిందువులను B మరియు D అని గుర్తించాలి.




SCERT, TELANGANA

**Step 4:** Join A, B ; B, C ; C, D and D, A to complete the rhombus.




## Think, Discuss and Write

1. Can you construct the above quadrilateral (rhombus) taking BD as a base instead of AC? If not give reason.
2. Suppose the two diagonals of this rhombus are equal in length, what figure did you obtain? Draw a rough sketch for it. State reasons.

## Exercise - 3.6

**Construct quadrilaterals for measurements given below :**

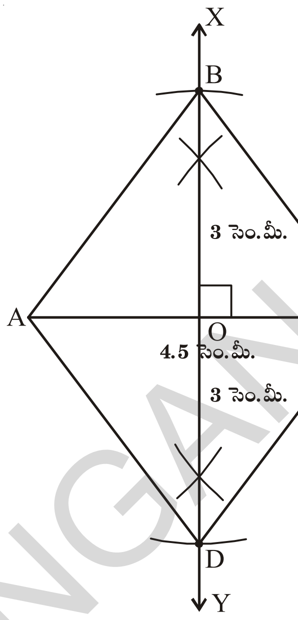
(a) A rhombus CART with CR = 6 cm, AT = 4.8 cm

(b) A rhombus SOAP with SA = 4.3 cm, OP = 5 cm

(c) A square JUMP with diagonal 4.2 cm.

SCERT, TELANGANA

**సోపానం 4:** (i) A, B; B, C; C, D మరియు D, A లను కలుపగా ABCD రాంబస్ ఏర్పడుతుంది.




### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పై ఉదాహరణలో ABCD రాంబస్‌ను AC భూమిగా కాకుండా BD ని భూమిగా తీసుకొని నిర్మించగలరా? లేదంటే కారణాలు తెలపండి.

2. రాంబస్‌లో రెండు కర్ణాల పొడవులు సమానం అయితే ఏ పటం ఏర్పడుతుంది? చిత్తుపటం గీచి, తగు కారణాలను తెలపండి.

SCERT, TELANGANA

### అభ్యాసం - 3.6

క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలతో కావల్సిన చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(a) రాంబస్ CART నందు CR = 6 సెం.మీ., AT = 4.8 సెం.మీ.

(b) రాంబస్ SOAP నందు SA = 4.3 సెం.మీ., OP = 5 సెం.మీ.

(c) చతురస్రం JUMP నందు కర్ణం 4.2 సెం.మీ.

## What we have discussed

1. Five independent measurements are required to draw a unique quadrilateral
2. A quadrilateral can be constructed uniquely, if
   (a) The lengths of four sides and one angle are given
   (b) The lengths of four sides and one diagonal are given
   (c) The lengths of three sides and two diagonals are given
   (d) The lengths of two adjacent sides and three angles are given
   (e) The lengths of three sides and two included angles are given
3. The two special quadrilaterals, namely rhombus and square can be constructed when two diagonals are given.

B6C5U8

## Note to Teachers

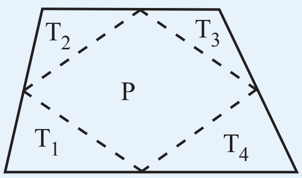
Angles constructed by using compass are accurate and can be proved logically, where as the protractor can be used for measurement and verification. So let our students learn to construct all possible angles with the help of compass.

### Fun with Paper Cutting

**Tile and Smile**

Cut a quadrilateral from a paper as shown in the figure. Locate the mid points of its sides, and then cut along the segments joining successive mid points to give four triangles $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ and a parallelogram P.

Can you show that the four triangular tiles make a parallelogram. How does the area of the parallelogram compare to the area of the original quadrilateral?




**Just for fun**

Qudrilateral + Quadrilateral = Parallelogram?

Fold a sheet of paper in half, and then use scissors to cut a pair of congruent quadrilaterals. Cut one of the quadrilateral along one of the diagonals, and cut the second quadrilateral along the other diagonal. Show that four triangles can be arranged to form a parallelogram.

SCERT, TELANGANA

## మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఏకైక చతుర్భుజం నిర్మించాలంటే అయిదు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరం.
2. చతుర్భుజాలు ఏకైకంగా నిర్మించడానికి మనం వాడే కొలతలు.
    - (a) నాలుగు భుజాల పొడవులు, ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు
    - (b) నాలుగు భుజాల పొడవులు, ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినపుడు
    - (c) మూడు భుజాల పొడవులు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు
    - (d) రెండు ఆసన్న భుజాలు పొడవులు మరియు మూడు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు
    - (e) మూడు భుజాల పొడవులు మరియు వాటి మధ్య రెండు కోణాలు ఇచ్చినపుడు
3. ప్రత్యేక చతుర్భుజాలైన రాంబస్ మరియు చతురస్రాలను వాటి రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు నిర్మించవచ్చు.

X1P2Z9

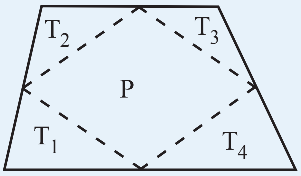
### ఉపాధ్యాయులకు సూచన

కోణముల నిర్మాణానికి వృత్తలేఖిని వాడితే అవి ఖచ్చితమైన పటాలుగా ఏర్పడడమే కాక తార్కికంగా నిరూపించవచ్చు. కోణమాని అనేది కోణాల కొలతలు సరిచూసుకోవడానికి మాత్రమే ఎక్కువగా ఉపయోగించాలి. అందుచే విద్యార్థులకు వృత్తలేఖిని ఎక్కువగా ఉపయోగించి అనుకూలమైన అన్ని రకాల కోణాలను నిర్మించే విధానాలను వివరంగా తెలియజేయాలి.

### కాగితం కత్తిరింపుతో తమాషాలు

**అమర్చి, ఆనందించు**

ఒక కాగితం నుండి ప్రక్క పటములో చూపిన విధంగా ఒక చతుర్భుజాన్ని కత్తిరించండి. భుజాల మధ్య బిందువులను గుర్తించి వరుస క్రమంలో కలిపి, కత్తిరించగా నాలుగు త్రిభుజాలు $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ లు మరియు సమాంతర చతుర్భుజం P ఏర్పడుతుంది.

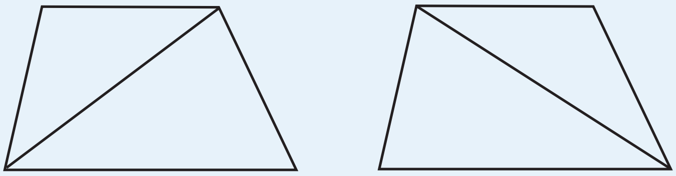



ఈ నాలుగు త్రిభుజాలతో సమాంతర చతుర్భుజాన్ని అమర్చగలరా?లి

**చిన్న తమాషా**

చతుర్భుజం + చతుర్భుజం = సమాంతర చతుర్భుజమా?

ఒక కాగితాన్ని మధ్యకు రెండు భాగాలుగా మడిచి, కత్తెరతో రెండు కుంభాకార చతుర్భుజాలను ఏర్పరచండి. మొదటి చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం వెంబడి కత్తిరించండి. రెండవ చతుర్భుజంలో రెండవ కర్ణం వెంబడి కత్తిరించండి. ఏర్పరచవచ్చునని చూపండి.



SCERT, TELANGANA

CHAPTER 4

# Exponents and Powers

S5S3E3

## 4.0 Introduction

We know that $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ and

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times$ .................... (m times) $= 3^m$

(i) The estimated diameter of the sun is 1,40,00,00,000 m and

(ii) Mass of the sun is 1, 989, 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 kg

(iii) The distance from the Sun to Earth is 149, 600, 000, 000 m.

(iv) The universe is estimated to be about 12,000,000,000 years old.

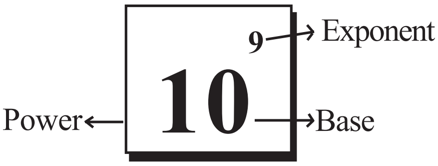
(v) The earth has approximately 1,353,000,000 cubic km of sea water.

In a chess board there are 64 boxes. Let us fill each square of a chess board is filled with grain like this. First box is filled with one grain and remaining boxes are filled in such a way that number of grains in a box is double of the previous box. Do you know how many number of grains required to fill all 64 boxes? It is 18,446,744,073,709,551,615.

Can we read, write and understand such large numbers? Try to recall how we have written these kinds of numbers using exponents.

1,40,00,00,000 m $= 1.4 \times 10^9$ m.

**We read $10^9$ as 10 raised to the power of 9.**




### Do This

1. Simplify the following-

   (i) $3^7 \times 3^3$ (ii) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ (iii) $3^4 \times 4^3$

2. The distance between Hyderabad and Delhi is 1674.9 km by rail. How would you express this in centimeters? Also express this in the scientific form.

SCERT TELANGANA

అధ్యాయం

# 4 ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు

M3P6D4

## 4.0 పరిచయం

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ మరియు

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times$ .................... (m సార్లు) $= 3^m$ అని మనకు తెలుసు.

సూర్యుని వ్యాసం 1,40,00,00,000 మీ. గా అంచనా వేయబడింది. మరియు

సూర్యుని ద్రవ్యరాశి 1, 989, 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 కి.గ్రా.

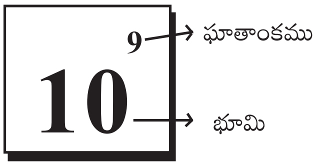
సూర్యునికి భూమికి మధ్య గల దూరం 149, 600, 000, 000 మీ.

విశ్వం యొక్క వయస్సు 12,000,000,000 సంవత్సరాలుగా అంచనా వేయబడింది.

భూమి మీద 1,353,000,000 ఘన కి.మీ. నీరు గలదు. అని మీకు తెలుసా!

> చెస్ బోర్డులో 64 చదరాలుంటాయి. ఒక చెస్ బోర్డుపై ప్రతి చదరంలో ధాన్యపు గింజలు ఉంచబడినాయి. మొదటి చదరంలో ఒక గింజ ఉంచబడింది. మిగిలిన ప్రతీ చదరంలో దాని ముందున్న చదరంలోని గింజలకు రెట్టింపు ఉంచబడినాయి. ఇలా 64 చదరాలలో నింపడానికి ఎన్ని గింజలు కావాలో తెలుసా? ఇవి 18,446,744,073,709,551,615 గింజలు అవుతాయి.

ఇలాంటి సంఖ్యలను రాయడం, చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం కష్టం అనిపించడం లేదా? ఇలాంటి వానిని ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ఎలా రాస్తామో గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.




1,40,00,00,000 మీ. $= 1.4 \times 10^9$ మీ.

**$10^9$ ను 10 యొక్క 9 వ ఘాతమని చదువుతాం.**

### ఇవి చేయండి

1. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $3^7 \times 3^3$ (ii) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ (iii) $3^4 \times 4^3$

2. హైదరాబాద్ మరియు ఢిల్లీల మధ్య రైలు మార్గంలో దూరం 1674.9 కి.మీ. దీనిని సెంటీమీటర్లలోకి మార్చి ఘాతాంక రూపంలో రాయండి. దీనిని శాస్త్రీయ రూపంలో కూడా రాయండి.

SCERT, TELANGANA

## 4.1 Powers with Negative Exponents

Usually we write

Diameter of the sun = 1,40,00,00,000 m = $1.4 \times 10^9$ m

Avagadro number = $6.023 \times 10^{23}$

These numbers are large numbers and conveniently represented in exponential form.

But how we represent very small numbers even less than unit in exponential form?

For example

Thickness of hair = 0.000005 m

Thickness of micro film = 0.000015 m

Let us observe how we can represent these numbers that are less than a unit.

Let us recall the following patterns from the earlier classes.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^2 = 10 \times 10 = 100 = 1000/10$

$10^1 = 10 = 100/10$

$10^0 = 1 = 10/10$

$10^{-1} = ?$

> As the exponent decreases by 1, the value becomes one-tenth of the previous value.

Continuing the above pattern we can say that $10^{-1} = \frac{1}{10}$

Similarly $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

From the above illustrations we can say $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ *or* $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$

Observe the following table:

| 1 kilometre | 1 hectometre | 1 decametre | 1 metre | 1 decimeter | 1centimetre | 1 millimetre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000m | 100m | 10m | 1 m | $\frac{1}{10}$ m | $\frac{1}{100}$ m | $\frac{1}{1000}$ m |
| $10^3$ m | $10^2$ m | $10^1$m | $10^0$m | $10^{-1}$m | $10^{-2}$m | $10^{-3}$m |

SCERT, TELANGANA

## 4.1 ఋణ ఘాతాంకాలతో కూడిన

సాధారణంగా మనం

సూర్యుని వ్యాసం = 1,40,00,00,000 మీ. = $1.4\times10^9$ మీ.

అవగాడ్రో సంఖ్య = $6.023 \times 10^{23}$ అని వ్రాస్తాము.

ఈ సంఖ్యలు పెద్ద సంఖ్యలు కనుక వీటిని సులభంగా ఘాతాంక రూపంలో రాయగలిగాము. అయితే అతి చిన్న సంఖ్యలను అనగా ఒక ప్రమాణం కంటే మరీ చిన్న సంఖ్యలను ఘాతాంక రూపంలో ఎలా రాస్తాము? అలా రాయాలంటే మనకు ఏమి అవసరమవుతాయి?

ఉదాహరణకు

తల వెంట్రుక మందము = 0.000005 మీ.

మైక్రో ఫిల్మ్ యొక్క మందము = 0.000015 మీ.

ఒక ప్రమాణం కంటే అతి చిన్నవైన ఇలాంటి సంఖ్యలను ఘాతాంక రూపంలో ఎలా రాయవచ్చు. పరిశీలించండి.

క్రింది తరగతులలో చర్చించిన అమరికలను ఒకసారి గుర్తు తెచ్చుకోండి.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^2 = 10 \times 10 = 100 = 1000/10$

$10^1 = 10 = 100/10$

$10^0 = 1 = 10/10$

$10^{-1} = ?$

> ఒక సంఖ్య యొక్క ఘాతాంకం 1 తగ్గిన ఆ సంఖ్య విలువ 10వ భాగం తగ్గుతుంది.

పై అమరికను అదేవిధంగా కొనసాగిస్తే $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$ అని చెప్పగలము.

అదేవిధంగా $10^{-2} = \dfrac{1}{10} \div 10 = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

పై ఉదాహరణల నుంచి $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$ లేదా $\dfrac{1}{10^{-n}} = 10^n$ అని చెప్పగలము.

క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

| 1 కి.మీ. | 1 హె.మీ. | 1 డె.మీ. | 1 మీ. | 1 డెసి.మీ. | 1 సెం.మీ. | 1 మి.మీ. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 మీ. | 100 మీ. | 10 మీ. | 1 మీ. | $\frac{1}{10}$ మీ. | $\frac{1}{100}$ మీ. | $\frac{1}{1000}$ మీ. |
| $10^3$ మీ. | $10^2$ మీ. | $10^1$ మీ. | $10^0$ మీ. | $10^{-1}$ మీ. | $10^{-2}$ మీ. | $10^{-3}$ మీ. |

SCERT, TELANGANA

**Do This**

What is $10^{-10}$ equal to?

Observe the pattern-

(i) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(ii) $\frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2 = 2^2$

(iii) $\frac{4}{2} = 2 = 2^1$

(iv) $\frac{2}{2} = 1 = 2^0$

(v) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

(vi) $\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

In general we can say that for any non zero integer '$a$' , $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, which is the multiplicative inverse of $a^m$ . (How ?)

That is $a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$

**Do This**

Find the multiplicative inverse of the following

(i) $3^{-5}$ (ii) $4^{-3}$ ( iii) $7^{-4}$ (iv) $7^{-3}$

(v) $x^{-n}$ (vi) $\frac{1}{4^3}$ (vii) $\frac{1}{10^3}$

**Look at this!**

We know that, speed $= \frac{\text{distance}}{\text{time}}$. Writing this symbolically , $s = \frac{d}{t}$. When distance is expressed in meters (**m**) and time in seconds(**s**), the unit for speed is written as $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-1}$ .

Similarly the unit for acceleration is $\frac{m}{s^2}$, which can also be expressed as $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-2}$.

SCERT, TELANGANA

**ఇది చేయండి**

$10^{-10}$ కు సమానమయ్యే విలువ ఎంత?

క్రింది మరొక అమరికను పరిశీలించండి.

(i) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(ii) $\frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2 = 2^2$

(iii) $\frac{4}{2} = 2 = 2^1$

(iv) $\frac{2}{2} = 1 = 2^0$

(v) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

(vi) $\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

దీని నుండి '$a$' ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య అయిన $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ అని సామాన్యీకరించవచ్చు. ఇచ్చట $a^{-m}$ ను $a^m$ యొక్క గుణకార విలోమం అంటాము. ఎలా?

$$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$$

**ఇవి చేయండి**

క్రింది వాని గుణకార విలోమములను కనుగొనుము.

(i) $3^{-5}$ (ii) $4^{-3}$ (iii) $7^{-4}$ (iv) $7^{-3}$

(v) $x^{-n}$ (vi) $\frac{1}{4^3}$ (vii) $\frac{1}{10^3}$

**వీటిని గమనించండి!**

వేగం = $\frac{\text{దూరం}}{\text{కాలం}}$ అని మనకు తెలుసు. దీనిని సాంకేతికంగా $s = \frac{d}{t}$ అని రాయవచ్చు. దూరంను మీటర్లలో కాలంను సెకండ్లలో చెప్పినపుడు వేగ ప్రమాణంను $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-1}$ లలో తెలియజేస్తాం. అదేవిధంగా త్వరణాన్ని $\frac{m}{s^2}$. అనగా $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-2}$. చే సూచిస్తాం.

SCERT, TELANGANA

We can express the numbers like 3456 in the expanded form as follows :

$$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$$

$$3456 = (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10) + (6 \times 10^0)$$

Similarly $7405 = (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + (5 \times 10^0)$

Now let us see how we can express the decimal numbers like 326.57 in the expanded form by using exponentials.

(We have $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ & $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$)

$$326.57 = (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + \left(\frac{5}{10}\right) + \left(\frac{7}{10^2}\right)$$

$$= (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$$

Also $734.684 = (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + \left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10^2}\right) + \left(\frac{4}{10^3}\right)$

$$= (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$$

**Do This**

Expand the following numbers using exponents.

(i) 543.67 (ii) 7054.243 (iii) 6540.305 (iv) 6523.450

## 4.2 Laws of Exponents

We have learnt that for any non-zero integer '*a*', $a^m \times a^n = a^{m+n}$; where '*m*' and '*n*' are natural numbers.

Does this law also hold good for negative exponents? Let us verify.

(i) Consider $3^2 \times 3^{-4}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ for any non zero integer '*a*'

We know that $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

We know that $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, where $m > n$

Therefore $3^2 \times 3^{-4} = 3^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^2}{3^4}$

$$= 3^{2-4} = 3^{-2}$$

i.e., $3^2 \times 3^{-4} = 3^{-2}$

(ii) Take $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$

$$(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}} \qquad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

SCERT, TELANGANA

3456 వంటి సంఖ్యలను విస్తృత రూపంలో ఈ క్రింది విధంగా తెలియజేస్తాం.

$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$

$3456 = (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10) + (6 \times 10^0)$

అదేవిధంగా $7405 = (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + (5 \times 10^0)$

ఇదేవిధంగా 326.57 లాంటి దశాంశ సంఖ్యలను విస్తృత రూపంలో ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ఏవిధంగా రాయవచ్చు పరిశీలించండి.

$$326.57 = (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + \left(\frac{5}{10}\right) + \left(\frac{7}{10^2}\right)$$

$$= (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$$

$\frac{1}{10} = 10^{-1}$ & $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ అని తెలుసు.

అదేవిధంగా $734.684 = (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + \left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10^2}\right) + \left(\frac{4}{10^3}\right)$

$$= (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$$

**ఇవి చేయండి**

క్రింది సంఖ్యలను ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) 543.67 (ii) 7054.243 (iii) 6540.305 (iv) 6523.450

## 4.2 ఘాతాంక న్యాయాలు

'$a$' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు $m, n$ లు ఏవేని సహజ సంఖ్యలైన $a^m \times a^n = a^{m+n}$ అని మనం నేర్చుకున్నాం. అయితే ఈ నియమం ఋణ ఘాతాంకాలకు కూడా సరిపోతుందేమో పరిశీలిద్దాం.

(i) $3^2 \times 3^{-4}$ ను పరిగణనలోకి తీసుకుందాం.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ఇచ్చట '$a$' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

కావున $3^2 \times 3^{-4} = 3^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^2}{3^4}$

$= 3^{2-4} = 3^{-2}$

$\left(\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right), m > n$

అనగా $3^2 \times 3^{-4} = 3^{-2}$

(ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ పరిశీలిద్దాం.

$$(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}} \qquad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

SCERT TELANGANA

$$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7} \qquad \left(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$$

Therefore $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-7}$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

(iii) Let us take $(-5)^2 \times (-5)^{-5}$

$$(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^2 \times \frac{1}{(-5)^5}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{5-2}} = \frac{1}{(-5)^3} \qquad \left(\because \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\right)$$

$$= (-5)^{-3} \qquad \left(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$$

Therefore $(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^{-3}$ (We know $2+(-5) = -3$)

In general, we can infer that for any non-zero integer '*a*', $a^m \times a^n = a^{m+n}$; where '*m*' and a '*n*' are integers.

**Do This**

Simplify and express the following as single exponent.

(i) $2^{-3} \times 2^{-2}$ (ii) $7^{-2} \times 7^5$ (iii) $3^4 \times 3^{-5}$

(iv) $7^5 \times 7^{-4} \times 7^{-6}$ (v) $m^5 \times m^{-10}$ (vi) $(-5)^{-3} \times (-5)^{-4}$

Similarly, we can also verify the following laws of exponents where '***a***' and '***b***' are non zero integers and '***m***' and '***n***' are any integers.

1. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a^m \times b^m) = (ab)^m$

You have studied these laws in lower classes only for positive exponents (Whole Numbers).

SCERT, TELANGANA

$$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7} \qquad \left(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$$

కావున $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-7} \quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

(iii) $(-5)^{2} \times (-5)^{-5}$ కు తీసుకుందాం.

$$(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^2 \times \frac{1}{(-5)^5}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{5-2}} = \frac{1}{(-5)^3} \qquad \left(\because \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\right)$$

$$= (-5)^{-3} \qquad \left(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$$

కావున $(-5)^{2} \times (-5)^{-5} = (-5)^{-3}$ ($2+(-5) = -3$ అని మనకు తెలుసు.)

పై ఉదాహరణల నుంచి $\boldsymbol{a}$ ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు $m, n$ లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలైన $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ అని నిర్ధారించగలము.

**ఇవి చేయండి**

క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించి ఒకే ఘాతాంకంగా వ్యక్తపరుచుము.

(i) $2^{-3} \times 2^{-2}$ (ii) $7^{-2} \times 7^{5}$ (iii) $3^{4} \times 3^{-5}$

(iv) $7^{5} \times 7^{-4} \times 7^{-6}$ (v) $m^{5} \times m^{-10}$ (vi) $(-5)^{-3} \times (-5)^{-4}$

ఇదేవిధంగా క్రింది ఘాతాంక న్యాయాలను కూడా $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ లు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలు అయినప్పుడు సరిచూడవచ్చును.

1. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2. $(a^m)^n = a^{mn}$

3. $(a^m \times b^m) = (ab)^m$

ధన ఘాతాంకాలకు (పూర్ణాంకాలు) ఈ న్యాయాలను క్రింది తరగతులలో సరి చూడడం జరిగింది.

SCERT, TELANGANA

4. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

5. $a^0 = 1$

Do you find any relation between '$m$' and '$n$' if $a^m = a^n$, where '$a$' is a non zero integer and $a \neq 1, a \neq -1$. Let us see:

Let $a^m = a^n$ then $\dfrac{a^m}{a^n} = 1$ ( Dividing both sides by $a^n$)

That is $a^{m-n} = 1$. $a^{m-n} = a^0$

$\therefore m - n = 0$

$\therefore m = n$

> Why $a \neq 1$?
> If $a = 1$, m = 7 and n = 6 then $1^7 = 1^6$
> $\Rightarrow 7 = 6$, is it true?
> So $a \neq 1$, $a = -1$, then what happens?

> Thus we can conclude that if $a^m = a^n$ then $m = n$.

**Example 1:** Find the value of (i) $5^{-2}$ (ii) $\dfrac{1}{2^{-5}}$ (iii) $(-5)^2$

**Solution :** (i) $5^{-2} = \dfrac{1}{(5)^2} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{25}$ $\left(\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right)$

(ii) $\dfrac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $\left(\because \dfrac{1}{a^{-m}} = a^m\right)$

$2^5 = 32$

(iii) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

**Example 2 :** Simplify the following

(i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ (iii) $\left(\dfrac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

**Solution:** (i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{(-5) \times (-5)} = \dfrac{1}{25}$ $\left(\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right)$

(ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ $\left(\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$= 4^{7-4} = 4^3 = 64$

SCERT, TELANGANA

4. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

5. $a^0 = 1$

$a$ ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు $a \neq 1, a \neq -1$ అయినప్పుడు $a^m = a^n$ అయిన $m$, $n$ లను గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? వాటి మధ్య ఎలాంటి సంబంధం ఉంటుంది. క్రింది వానిని గమనించండి.

$a^m = a^n$ అనుకొనిన $\dfrac{a^m}{a^n} = 1$ ($a^n$ చేత ఇరువైపులా భాగించగా)

అనగా $a^{m-n} = 1$. $a^{m-n} = a^0$

$\therefore m - n = 0$

$\therefore m = n$

దీని నుండి $a^m = a^n$ అయిన $m = n$ అని నిర్ధారించగలము.

$a \neq 1$ ఎందుకు?
a = 1, m = 7 మరియు n= 6 అయిన $1^7 = 1^6$
$\Rightarrow 7 = 6$ ఇది సత్యమా?
అందుచే $a \neq 1$, $a = -1$ అయితే ఏమవుతుంది?

**ఉదాహరణ 1:** (i) $5^{-2}$ (ii) $\dfrac{1}{2^{-5}}$ (iii) $(-5)^2$ విలువలను కనుగొనుము.

**సాధన:** (i) $5^{-2} = \dfrac{1}{(5)^2} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{25}$ $\quad (\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m})$

(ii) $\dfrac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $\quad (\because \dfrac{1}{a^{-m}} = a^m)$

$2^5 = 32$

(iii) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

**ఉదాహరణ 2:** క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ (iii) $\left(\dfrac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

**సాధన:** (i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ $\quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{(-5)\times(-5)} = \dfrac{1}{25}$ $\quad (\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m})$

(ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ $\quad (\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n})$

$= 4^{7-4} = 4^3 = 64$

SCERT, TELANGANA

(iii) $\left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

$= (3^{5-3})^5 \times 3^{-6}$ $\qquad (\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n})$

$= (3^2)^5 \times 3^{-6}$ $\qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

$= 3^{10} \times 3^{-6} = 3^4 = 81$

**Example 3:** Express each of the following with positive exponents.

(i) $4^{-7}$ $\qquad$ (ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ $\qquad$ (iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ $\qquad$ (iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

**Solution :** (i) $4^{-7}$ $\qquad$ (We know $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$)

$= \frac{1}{(4)^7}$

(ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ $\qquad (\because \frac{1}{a^{-m}} = a^m)$

$= 5^4$

(iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}}{7^{-3}}$ $\qquad \left(a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ and } a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$

$= \frac{7^3}{4^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$ $\qquad \because \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

(iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

$= 7^{-4-(-6)}$

$= 7^{-4+6} = 7^2$

**Example 4 :** Express $27^{-4}$ as a power with base 3

**Solution :** 27 can be written as $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

Therefore $27^{-4} = (3^3)^{-4}$

$= 3^{-12}$ $\qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

SCERT, TELANGANA

(iii) $\left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

$= (3^{5-3})^5 \times 3^{-6}$ $\quad\left(\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$= (3^2)^5 \times 3^{-6}$

$= 3^{10} \times 3^{-6} = 3^4 = 81$ $\quad(\because (a^m)^n = a^{mn})$

**ఉదాహరణ 3:** క్రింది వాని ఘాతాంకాలు ధనాత్మకంగా ఉండేటట్లు రాయుము.

(i) $4^{-7}$ (ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ (iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ (iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

**సాధన:** (i) $4^{-7}$ $\quad\left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

$= \frac{1}{(4)^7}$

(ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ $\quad\left(\because \frac{1}{a^{-m}} = a^m\right)$

$= 5^4$

(iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}}{7^{-3}}$ $\quad\left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m};\ a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$

$= \frac{7^3}{4^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$

$\because \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

(iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

$= 7^{-4-(-6)}$

$= 7^{-4+6} = 7^2$

**ఉదాహరణ 4:** $27^{-4}$ ను 3 భూమిగా గల ఘాత రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

**సాధన:** 27 ను $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ గా రాయవచ్చు.

$\therefore\ 27^{-4} = (3^3)^{-4}$

$= 3^{-12}$ $\quad(\because (a^m)^n = a^{mn})$

SCERT, TELANGANA

**Example 5 :** Simplify

(i) $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

**Solution :** (i) $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3}$

27 can be expressed as $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

So, $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3} = \frac{1}{3^3} \times 2^{-3}$ $\qquad \because \frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$= 3^{-3} \times 2^{-3}$ $\qquad \because a^m \times b^m = (ab)^m$

$= (3 \times 2)^{-3} = \frac{1}{(3 \times 2)^3}$

$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times (4^2)^{-2} \times 4^0$ $\qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

$= 4^4 \times 4^{-4} \times 4^0$ $\qquad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= 4^{4-4+0} = 4^0$ $\qquad (\because a^0 = 1)$

$= 1$

**Example 6:** Guess the value of '$x$' when $2^x = 1$

**Solution:** as we discussed before $a^0 = 1$

$\therefore \quad 2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$\Rightarrow \quad x = 0$

**Example 7 :** Find the value of '$x$' such that

(i) $25 \times 5^x = 5^8$ (ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ (iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 5:** సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

**సాధన:** (i) $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3}$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ అని రాయవచ్చును.

కావున $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3} = \frac{1}{3^3} \times 2^{-3}$ $\quad \because \frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$= 3^{-3} \times 2^{-3}$ $\quad \because a^m \times b^m = (ab)^m$

$= (3 \times 2)^{-3} = \frac{1}{(3 \times 2)^3}$

$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times (4^2)^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times 4^{-4} \times 4^0$ $\quad (\because (a^m)^n = a^{mn})$

$= 4^{4-4+0} = 4^0$ $\quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= 1$ $\quad (\because a^0 = 1)$

**ఉదాహరణ 6:** $2^x = 1$ అయిన $x$ విలువను ఊహించండి.

**సాధన:** ఇంతకుముందు చర్చించుకున్నట్లుగా $a^0 = 1$

$\therefore \quad 2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$\Rightarrow x = 0$

**ఉదాహరణ 7:** క్రింది వానిలో $x$ విలువను కనుగొనుము.

(i) $25 \times 5^x = 5^8$ (ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ (iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

SCERT, TELANGANA

**Solution :** (i) $25 \times 5^x = 5^8$ (as $25 = 5 \times 5 = 5^2$)

$5^2 \times 5^x = 5^8$ But $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$5^{2+x} = 5^8$ If $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

$2 + x = 8$

$\therefore x = 6$

(ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

$\Rightarrow \frac{1}{7^2} \times 7^{2x} = 7^8$ $(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m})$

$7^{-2} \times 7^{2x} = 7^8$

$7^{2x-2} = 7^8$

As bases are equal, Hence

$2x - 2 = 8$

$2x = 8 + 2$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore x = 5$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$3^{24} = 3^{12x}$

As bases are equal, Hence

$24 = 12x$

$\therefore x = \frac{24}{12} = 2$

(iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+1+7} = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+8} = (-2)^{12}$

As bases are equal, Hence

$x + 8 = 12$

$\therefore x = 12 - 8 = 4$

SCERT, TELANGANA

**సాధన:** (i) $25 \times 5^x = 5^8$     ($25 = 5 \times 5 = 5^2$ కావున)

$5^2 \times 5^x = 5^8$     కాని $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$5^{x+2} = 5^8$

$x + 2 = 8$     ($a^m = a^n$ అయిన $m = n$)

$\therefore x = 6$

(ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

$\Rightarrow \frac{1}{7^2} \times 7^{2x} = 7^8$

$7^{-2} \times 7^{2x} = 7^8$     $(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m})$

$7^{2x-2} = 7^8$

భూములు సమానం కావున

$2x - 2 = 8$ అగును.

$2x = 8 + 2$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore x = 5$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$

$3^{24} = 3^{12x}$     $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$24 = 12x$

భూములు సమానం కావున

$\therefore x = \frac{24}{12} = 2$ అగును.

(iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+1+7} = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+8} = (-2)^{12}$

భూములు సమానం కావున

$x + 8 = 12$ అగును.

$\therefore x = 12 - 8 = 4$

SCERT, TELANGANA

**Example 8 :** Simplify $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

**Solution:** $\frac{25}{4} = \frac{5\times5}{2\times2} = \frac{5^2}{2^2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2} \qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3}$$

$\because$ As $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

**Example 9 :** Simplify $\left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$

**Solution:** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right] \qquad (\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m})$

$$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}}\right] \qquad (\because a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ and } a^m = \frac{1}{a^{-m}})$$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3}\right) \div \frac{5^2}{1^2}\right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1}\right) \div 25$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

**Example 10 :** If $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ find the value of $x^{-2}$

**Solution:** $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}} \qquad (\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m})$$

**ఉదాహరణ 8:** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$ సూక్ష్మీకరించుము.

**సాధన:** $\frac{25}{4} = \frac{5 \times 5}{2 \times 2} = \frac{5^2}{2^2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2} \qquad (\because (a^m)^n = a^{mn})$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3}$$

$$\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

**ఉదాహరణ 9:** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$ సూక్ష్మీకరించుము.

**సాధన:** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$

$$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}}\right] \qquad \left(\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3}\right) \div \frac{5^2}{1^2}\right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1}\right) \div 25 \qquad \left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

**ఉదాహరణ 10:** $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ అయిన $x^{-2}$ విలువను కనుగొనుము.

**సాధన:** $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}} \qquad \left(\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right)$$

SCERT, TELANGANA

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

## Exercise - 4.1

1. Simplify and give reasons

   (i) $4^{-3}$ (ii) $(-2)^7$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ (iv) $(-3)^{-4}$

2. Simplify the following :

   (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$ (ii) $(-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$

   (iii) $4^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{5^{-4}}{5^{-6}}\right) \times 5^3$ (v) $(-3)^4 \times 7^4$

3. Simplify (i) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$ (ii) $(4^{-1} \times 3^{-1}) \div 6^{-1}$

4. Simplify and give reasons

   (i) $(4^0 + 5^{-1}) \times 5^2 \times \frac{1}{3}$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

   (iii) $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}) \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{3^{-2}}{3} \times (3^0 - 3^{-1})$

   (v) $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^0$ (vi) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

SCERT, TELANGANA

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

## అభ్యాసం - 4.1

1. సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెలపండి.

   (i) $4^{-3}$  (ii) $(-2)^7$  (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$  (iv) $(-3)^{-4}$

2. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.

   (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$  (ii) $(-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$

   (iii) $4^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^4$  (iv) $\left(\frac{5^{-4}}{5^{-6}}\right) \times 5^3$  (v) $(-3)^4 \times 7^4$

3. సూక్ష్మీకరించుము  (i) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$  (ii) $(4^{-1} \times 3^{-1}) \div 6^{-1}$

4. సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెలపండి.

   (i) $(4^0 + 5^{-1}) \times 5^2 \times \frac{1}{3}$  (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

   (iii) $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}) \times \frac{3}{4}$  (iv) $\frac{3^{-2}}{3} \times (3^0 - 3^{-1})$

   (v) $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^0$  (vi) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

SCERT, TELANGANA

5. Simplify and give reasons (i) $\left[(3^2-2^2)\div\frac{1}{5}\right]^2$ (ii) $((5^2)^3\times 5^4)\div 5^6$

6. Find the value of 'n' in each of the following :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(ii) $(-3)^{n+1}\times(-3)^5=(-3)^{-4}$

(iii) $7^{2n+1}\div 49=7^3$

7. Find '$x$' if $2^{-3}=\frac{1}{2^x}$

8. Simplify $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\div\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]\times\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

9. If $m=3$ and $n=2$ find the value of

(i) $9m^2-10n^3$ (ii) $2m^2n^2$ (iii) $2m^3+3n^2-5m^2n$ (iv) $m^n-n^m$

10. Simplify and give reasons $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{-7}$

## 4.3 Application of Exponents to Express numbers in Standard Form

In previous class we have learnt how to express very large numbers in standard form.

For example $300{,}000{,}000\text{ m}=3\times10^8\text{ m}$

Now let us try to express very small number in standard form.

Consider, diameter of a wire in a computer chip is 0.000003m

$$0.000003\text{ m}=\frac{3}{1000000}\text{ m}$$

$$=\frac{3}{10^6}\text{ m}$$

$$=3\times10^{-6}\text{ m}$$

Therefore, $0.000003\text{ m}=3\times10^{-6}\text{ m}$

SCERT TELANGANA

5. (i) $\left[(3^2 - 2^2) \div \frac{1}{5}\right]^2$ (ii) $((5^2)^3 \times 5^4) \div 5^6$ సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెలపండి.

6. క్రింది వానిలో 'n' విలువను కనుగొనుము.

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(ii) $(-3)^{n+1} \times (-3)^5 = (-3)^{-4}$

(iii) $7^{2n+1} \div 49 = 7^3$

7. $2^{-3} = \frac{1}{2^x}$ అయిన $x$ విలువను కనుగొనుము.

8. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right] \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ సూక్ష్మీకరించుము.

9. m = 3 మరియు n = 2 అయిన క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము.

(i) $9m^2 - 10n^3$ (ii) $2m^2 n^2$ (iii) $2m^3 + 3n^2 - 5m^2n$ (iv) $m^n - n^m$

10. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{-7}$ సూక్ష్మీకరించి తగు కారణాలు తెలపండి.

## 4.3 ఘాతాంకాల వినియోగం - సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచడం

పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరిచే విధానాన్ని క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం.

ఉదాహరణకు 300,000,000 మీ. $= 3 \times 10^8$ మీ.

ఇప్పుడు అతి చిన్న సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

కంప్యూటర్ చిప్‌లో వాడే తీగ మందం 0.000003 మీ. పరిశీలిస్తే

0.000003 మీ. $= \frac{3}{1000000}$ మీ.

$= \frac{3}{10^6}$ మీ.

$= 3 \times 10^{-6}$ మీ.

$\therefore$ 0.000003 మీ. $= 3 \times 10^{-6}$ మీ.

SCERT TELANGANA

Similarly consider the size of plant cell which is 0.00001275m

$$0.00001275\text{m} = \frac{1275}{100000000} \text{ m}$$

$$= 1.275 \times \frac{10^3}{10^8} \text{ m}$$

$$= 1.275 \times 10^{-5} \text{ m}$$

## Do This

1. Change the numbers into standard form and rewrite the statements.
   (i) The distance from the Sun to earth is 149,600,000,000m
   (ii) The average radius of Sun is 695000 km
   (iii) The thickness of human hair is in the range of 0.08 mm - 0.12 mm
   (iv) The height of Mount Everest is 8848 m

2. Write the following numbers in the standard form
   (i) 0.0000456 (ii) 0.000000529 (iii) 0.0000000085
   (iv) 6020000000 (v) 35400000000 (vi) $0.000437 \times 10^4$

## 4.4 Comparing very large and very small numbers

We know that the diameter of the Sun is 1400000000 m. and earth is 12750000 m. If we want to know how bigger the Sun is than the Earth, we have to divide the diameter of Sun by the diameter of the Earth.

i.e. $\dfrac{1400000000}{12750000}$

This is difficult to do but if we write these diameters in standard form then it is easy to find how big the Sun in comparison to the Earth.

Diameter of the Sun = 1400000000 m = $1.4 \times 10^9$ m

Diameter of the Earth = 12750000 = $1.275 \times 10^7$ m

Therefore we have, $\dfrac{\text{Diameter of the sun}}{\text{Diameter of the earth}} = \dfrac{1.4 \times 10^2 \times 10^7}{1.275 \times 10^7}$

$$= \frac{1.4 \times 10^2}{1.275}$$

$$\therefore 10^2 = 100 \quad \text{(Approximately)}$$

SCERT, TELANGANA

అదేవిధంగా ఒక మొక్క యొక్క కణ పరిమాణం 0.00001275 మీ. ను పరిశీలించండి.

$$0.00001275 \text{ మీ.} = \frac{1275}{100000000} \text{ మీ.}$$

$$= 1.275 \times \frac{10^3}{10^8} \text{ మీ.}$$

$$= 1.275 \times 10^{-5} \text{ మీ.}$$

**ఇవి చేయండి**

1. క్రింది వాక్యాలలోని సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చి వాక్యాలను తిరిగి వ్రాయండి.
   (i) భూమి నుంచి సూర్యుని దూరం 149,600,000,000 మీ.
   (ii) సూర్యుని సరాసరి వ్యాసార్థం 695000 కి.మీ.
   (iii) మనిషి తల వెంట్రుక యొక్క మందం 0.08 నుండి 0.12 మి.మీ. వరకు ఉంటుంది.
   (iv) ఎవరెస్టు శిఖరం యొక్క ఎత్తు 8848 మీ.
2. ఈ క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండి.
   (i) 0.0000456 (ii) 0.000000529 (iii) 0.0000000085
   (iv) 6020000000 (v) 35400000000 (vi) $0.000437 \times 10^4$

## 4.4 అతి పెద్ద, అతి చిన్న సంఖ్యలను పోల్చడం

సూర్యుని యొక్క వ్యాసం 1400000000 మీ. మరియు భూమి యొక్క వ్యాసం 12750000 మీ. అని మనకు తెలుసు. అయితే భూమి కంటే సూర్యుని పరిమాణం ఎన్ని రెట్లు ఎక్కువో తెలుసుకోవాలంటే సూర్యుని వ్యాసమును భూమి వ్యాసంతో భాగించాలి.

అనగా $\frac{1400000000}{12750000}$.

ఈ భాగహారంను చేయడం కష్టం కాని ఈ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చి, సులభంగా భాగహారం చేసి సూర్యుడు, భూమి కంటే సూర్యుని పరిమాణం ఎన్ని రెట్లు ఎక్కువో తెలుసుకోవాలంటే సూర్యుని వ్యాసమును భూమి వ్యాసంతో భాగించాలి.

సూర్యుని వ్యాసం $= 1400000000$ మీ. $= 1.4 \times 10^9$ మీ.

భూమి వ్యాసం $= 12750000 = 1.275 \times 10^7$ మీ.

$$\therefore \frac{\text{సూర్యుని వ్యాసం}}{\text{భూ వ్యాసం}} = \frac{1.4\times10^2\times10^7}{1.275\times10^7} = \frac{1.4\times10^2}{1.275}$$

$$\approx 10^2 = 100 \quad \text{(సుమారుగా)}$$



SCERT, TELANGANA

Thus the diameter of the Sun is approximately 100 times the diameter of the Earth. So the Sun is 100 times bigger than the Earth.

Let us consider one more illustration

The mass of the earth is $5.97 \times 10^{24}$ kg and the mass of the moon is $7.35 \times 10^{22}$ kg.

What is their total mass?

The mass of the earth $= 5.97 \times 10^{24}$ kg

The mass of the moon $= 7.35 \times 10^{22}$ kg

Total Mass $= 5.97 \times 10^{24}$ Kg $+ 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= (5.97 \times 10^{2} \times 10^{22}$ Kg$) + 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= (5.97 \times 10^{2} + 7.35) \times 10^{22}$ kg

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$ kg

$= 604.35 \times 10^{22}$ kg

$= 6.0435 \times 10^{24}$ kg

> When we have to add numbers in the standard form we convert them in numbers with same exponents.

**Example 11 :** Express the following in the usual form.

(i) $4.67 \times 10^{4}$ (ii) $1.0001 \times 10^{9}$ (iii) $3.02 \times 10^{-6}$

**Solution:**

(i) $4.67 \times 10^{4} = 4.67 \times 10000 = 46700$

(ii) $1.0001 \times 10^{9} = 1.0001 \times 1000000000 = 1000100000$

(iii) $3.02 \times 10^{-6} = 3.02/10^{6} = 3.02/1000000 = 0.00000302$

## Exercise - 4.2

1. Express the following numbers in standard form.
   (i) 0.000000000947 (ii) 543000000000
   (iii) 48300000 (iv) 0.00009298 (v) 0.0000529
2. Express the following numbers in usual form.
   (i) $4.37 \times 10^{5}$ (ii) $5.8 \times 10^{7}$ (iii) $32.5 \times 10^{-4}$ (iv) $3.71529 \times 10^{7}$
   (v) $3789 \times 10^{-5}$ (vi) $24.36 \times 10^{-3}$
3. Express the following information in standard form
   (i) Size of the bacteria is 0.0000004 m
   (ii) The size of red blood cells is 0.000007mm

SCERT, TELANGANA

కావున సూర్యుని వ్యాసం, భూమి వ్యాసం కంటే 100 రెట్లు ఎక్కువ కలదని చెప్పవచ్చు. అనగా సూర్యుడు, భూమి కంటే 100 రెట్లు ఎక్కువ పరిమాణం కలిగి ఉన్నదని అర్థం.

మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

భూ ద్రవ్యరాశి $5.97 \times 10^{24}$ కి.గ్రా. మరియు చంద్రుని ద్రవ్యరాశి $7.35 \times 10^{22}$ కి.గ్రా. అయిన వాటి ద్రవ్యరాశుల మొత్తం ఎంత?

భూమి ద్రవ్యరాశి $= 5.97 \times 10^{24}$ కి.గ్రా.

చంద్రుని ద్రవ్యరాశి $= 7.35 \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

$\therefore$ మొత్తం ద్రవ్యరాశి $= 5.97 \times 10^{24}$ కి.గ్రా. $+ 7.35 \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

$= (5.97 \times 10^2 \times 10^{22}$ కి.గ్రా.$) + 7.35 \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

$= (5.97 \times 10^2 + 7.35) \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

$= 604.35 \times 10^{22}$ కి.గ్రా.

$= 6.0435 \times 10^{24}$ కి.గ్రా.

> రెండు ప్రామాణిక రూపాలలోని సంఖ్యలను కూడేటపుడు అవి రెండూ ఒకే ఘాతాంకాన్ని కలిగి ఉండునట్లుగా రాయాలి.

**ఉదాహరణ 11:** క్రింది వానిని సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) $4.67 \times 10^4$ (ii) $1.0001 \times 10^9$ (iii) $3.02 \times 10^{-6}$

**సాధన:**

(i) $4.67 \times 10^4 = 4.67 \times 10000 = 46700$

(ii) $1.0001 \times 10^9 = 1.0001 \times 1000000000 = 1000100000$

(iii) $3.02 \times 10^{-6} = 3.02/10^6 = 3.02/1000000 = 0.00000302$

## అభ్యాసం - 4.2

1. క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

   (i) 0.000000000947 (ii) 543000000000

   (iii) 48300000 (iv) 0.00009298 (v) 0.0000529

2. క్రింది సంఖ్యలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తీకరించండి.

   (i) $4.37 \times 10^5$ (ii) $5.8 \times 10^7$ (iii) $32.5 \times 10^{-4}$ (iv) $3.71529 \times 10^7$

   (v) $3789 \times 10^{-5}$ (vi) $24.36 \times 10^{-3}$

3. క్రింది సమాచారంలోని సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి.

   (i) బాక్టీరియా పరిమాణం 0.0000004 మీ.

   (ii) ఎర్రరక్త కణాల పరిమాణం 0.000007 మి.మీ.

SCERT, TELANGANA

(iii) The speed of light is 300000000 m/sec

(iv) The distance between the moon and the earth is 384467000 m(app)

(v) The charge of an electron is 0.0000000000000000016 coulombs

(vi) Thickness of a piece of paper is 0.0016 cm

(vii) The diameter of a wire on a computer chip is 0.000005 cm

4. In a pack, there are 5 books, each of thickness 20 mm and 5 paper sheets each of thickness 0.016mm. What is the total thickness of the pack.

5. Rakesh solved some problems of exponents in the following way. Do you agree with the solutions? If not why ? Justify your argument.

(i) $x^{-3} \times x^{-2} = x^{-6}$ (ii) $\frac{x^3}{x^2} = x^4$ (iii) $(x^2)^3 = x^{2^3} = x^8$

(iv) $x^{-2} = \sqrt{x}$ (v) $3x^{-1} = \frac{1}{3x}$

## Project work

Refer science text books of 6th to 10th classes in your school and collect some scientific facts involving very small numbers and large numbers and write them in standared form using exponents.

## What we have discussed

1. Numbers with negative exponents holds the following laws of exponents.

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. Very small numbers can be expressed in standard form using negative exponents.

3. Comparison of smaller and larger numbers.

4. Identification of common errors.

S7V5S9

SCERT, TELANGANA

(iii) కాంతి వేగం 300000000 మీ/సెకండ్

(iv) భూమికి, చంద్రునికి మధ్య దూరం 384467000 మీ. (సుమారుగా)

(v) ఎలక్ట్రాన్ ఆవేశం 0.0000000000000000016 కూలుంబ్‌లు.

(vi) పేపర్ యొక్క మందం 0.0016 సెం.మీ.

(vii) కంప్యూటర్ చిప్‌లోని తీగ వ్యాసం 0.000005 సెం.మీ.

4. ఒక పుస్తకాల కట్టలో 20 మి.మీ. మందం గల 5 పుస్తకాలు, 0.016 మి.మీ. మందం గల 5 పేపర్లు కలవు. అయిన పుస్తకాల కట్ట (stack) యొక్క మొత్తం మందంను కనుగొనుము.

5. రాకేష్ ఘాతాంకాలు కలిగిన కొన్ని సమస్యలను క్రింది విధంగా సాధించాడు. నీవు రాకేష్‌తో ఏకీభవిస్తావా? ఏకీభవించవా? నీ సమాధానంను సమర్థించుము.

(i) $x^{-3} \times x^{-2} = x^{-6}$ (ii) $\frac{x^3}{x^2} = x^4$ (iii) $(x^2)^3 = x^{2^3} = x^8$

(iv) $x^{-2} = \sqrt{x}$ (v) $3x^{-1} = \frac{1}{3x}$

### ప్రాజెక్టు పని

మీ పాఠశాలలో 6 నుండి 10వ తరగతి వరకు కల సైన్స్ పాఠ్యపుస్తకాలు పరిశీలించి, వాటిలో అతి చిన్న సంఖ్యలు, అతి పెద్ద సంఖ్యలు గల శాస్త్రీయ సమాచారం సేకరించి వాటిని ప్రామాణిక ఘాతాంక రూపాలలో రాయండి.

## మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఋణ ఘాతాంకాలు కలిగిన సంఖ్యలు ఈ క్రింది నియమాలను పాటించును.

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. చాలా చిన్న సంఖ్యలను ఋణ ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ప్రామాణిక రూపంలో రాయడం.

3. అతి చిన్న, అతి పెద్ద సంఖ్యలను పోల్చడం.

4. సాధారణ తప్పులను గుర్తించడం.

B6B6I8

SCERT , TELANGANA

# CHAPTER 5

# Comparing quantities using Proportion

W4U5W3

## 5.0 Introduction

In our day-to-day activities, some times we need to compare quantities. We learnt that ratio and percentages are used to compare quantities. Let us consider the following example.

Voting was conducted for class mentor, in a class of 40 students. Snigdha became first mentor by getting 24 votes and Siri became second mentor by getting 16 votes. So the ratio of votes polled to Snigdha and Siri is 24 : 16. After simplification, what is its ratio? It is 3:2.

Inversely the ratio of votes polled to Siri and Snigdha is 2:3. Can you say what a ratio is?

A **Ratio** is an **ordered** comparison of two quantities.

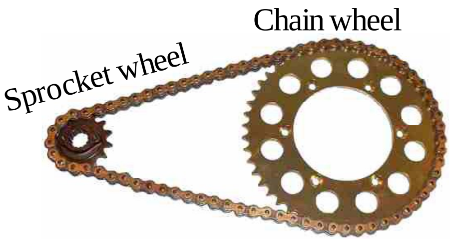
### Try These

1. Find the ratio of gears of your bicycle.

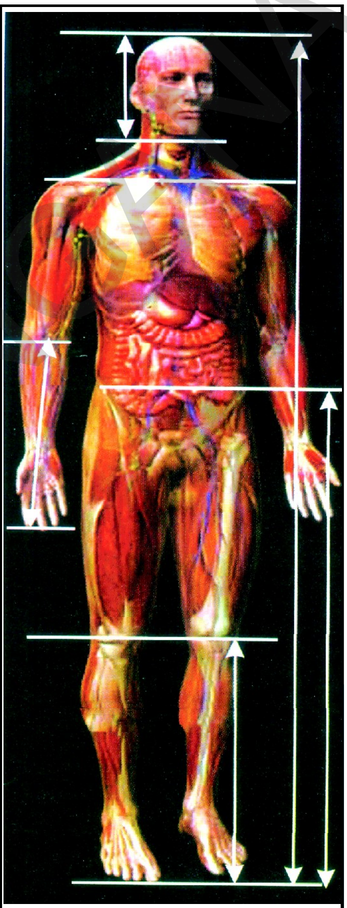
   Count the number of teeth of the chain wheel and the number of teeth of the sprocket wheel.

   $\left\{\begin{array}{l}\textit{number of teeth of}\\ \textit{the chain wheel}\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l}\textit{number of teeth}\\ \textit{of Sprocket wheel}\end{array}\right\}$.

   This is called gear ratio. Write the number of times the Sprocket wheel turns for every time the chain wheel rotates.




2. Collect News Paper cuttings related to percentages of any five different situations.



**Golden Ratio in the Human body**

**1.615:1 is Golden ratio**

Human beings are no exception to the golden ratio. In fact, our body architecture is one of the most perfect examples of this 'Divine proportion'.

Consider the following:

- Height**:** length between naval point and foot
- Length between shoulder line**:** length of the head.
- Length between finger tip to elbow**:** length between wrist and elbow
- Length between naval point to knee:length between knee and foot.

SCERT, TELANGANA

అధ్యాయం

5

# అనుపాతముతో రాశులను పోల్చుట

U4S6K7

## 5.0 పరిచయం

మన రోజువారీ పనులలో మనం కొన్నిసార్లు రాశులను పోల్చవలసి వస్తుంది. ఇలా రాశులను పోల్చడానికి నిష్పత్తిని, శాతాలను ఉపయోగిస్తారని మనం నేర్చుకున్నాము. ఇప్పుడు ఈ కింది ఉదాహరణను చూడండి.

ఒక తరగతిలోని 40 మంది విద్యార్థులకు లీడర్ కొరకు ఎన్నిక నిర్వహించబడినది. స్నిగ్ధ 24 ఓట్లతో మొదటి లీడర్ గాను, సిరి 16 ఓట్లతో రెండవ లీడర్ గాను ఎన్నుకోబడ్డారు. వారి ఇరువురికి అనగా స్నిగ్ధ, సిరిలకు వచ్చిన ఓట్ల నిష్పత్తి 24:16. కనిష్ట పదాలలో ఈ నిష్పత్తిని చెప్పగలరా? అది 3 : 2.

పై దానికి విలోమంగా, సిరి మరియు స్నిగ్ధలకు వచ్చిన ఓట్ల నిష్పత్తి 2 : 3. నిష్పత్తి అంటే ఏమిటో మీరు చెప్పగలరా?

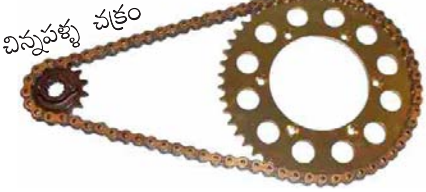
ఒకే ప్రమాణాలు గల రాశుల క్రమానుగత పోలికే నిష్పత్తి.

### ప్రయత్నించండి

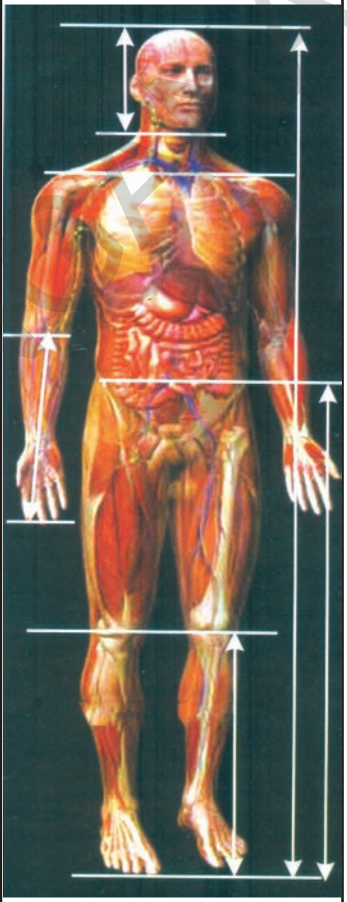
1. మీ సైకిల్ గేర్ల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
   పెడల్ వద్దనున్న పెద్ద పళ్ళచక్రం (chain wheel) పళ్ళను అలాగే వెనక చక్రం వద్ద నున్న చిన్నపళ్ళ చక్రం (sprocket wheel) పళ్ళను లెక్కపెట్టండి.

   $\left\{ \text{పెద్దపళ్ళ చక్రపు పళ్ళసంఖ్య} \right\} : \left\{ \text{చిన్న చక్రపు పళ్ళసంఖ్య} \right\}$ ను

   కనుగొనండి. దీనినే మనం గేర్ నిష్పత్తి అంటాం. ఒక్కసారి పెడల్ను తిప్పడం వలన వెనక చక్రం ఎన్నిసార్లు తిరిగిందో గమనించి మీ నోట్ పుస్తకంలో రాయండి.




2. ఏవైనా ఐదు వివిధ సందర్భాలకు చెందిన శాతములను వార్తాపత్రికల నుండి సేకరించి మీ నోట్ పుస్తకంలో అంటించండి.



మానవ శరీరంలో గోల్డెన్ రేషియో

గోల్డెన్ రేషియో 1.615:1

గోల్డెన్ రేషియో నుండి మానవులకు మినహాయింపు లేదు. మన శరీరం "దివ్య అనుపాత" శిల్పమునకు సరైన ఉదాహరణ.

క్రింది విషయాలను గమనించండి.

- ఎత్తు: నాభి నుండి పాదాగ్రం వరకు గల పొడవు.
- భుజ రేఖ పొడవు : తల పొడవు
- చేతివేళ్ళ చివరి నుండి మోచేతికి దూరం : మణికట్టు నుండి మోచేతికి దూరం.
- నాభి నుండి మోకాల దూరం : మోకాలు నుండి పాదం దూరం.

SCERT, TELANGANA

## Compound Ratio

Some times we have to express two ratios as a single ratio. Why? Let us consider the following example to understand this.

Ramayya and Gopalam started a business with an investment of ₹ 2000 and ₹ 3000. At the end of the year in what ratio would they have to divide the annual profit obtained?

Ratio of investments = 2000: 3000

= 2: 3

Investments throughout the year are given below.

| Month | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec | Total shares |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ramayya's shares | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | 24 |
| Gopalam's shares | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | 36 |

Ratio of their shares = 24: 36

= 2: 3 and ratio of time period = 1:1

What do you observe? Ratio of investments is equal to ratio of shares when time period is the same. So they will divide the profit in the ratio of their shares. So annual profit is to be divided in the ratio of 2:3

In the above example,

**Case 1 :** Suppose they both started the business with the same amount of ₹ 5000, but Ramayya did business for a period of 12 months and Gopalam for a period of 9 months. How do they share the same profit? Do you say that because they started the business with the same amount, they have to divide the profit in the same ratio at the year ending?

SCERT, TELANGANA

### బహుళ నిష్పత్తి

కొన్ని సందర్భాలలో మనం రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా రాయవలసి వస్తుంది. ఎందుకు? దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది ఉదాహరణను చూదండి.

రామయ్య మరియు గోపాలం వరుసగా ₹2000 మరియు ₹3000 పెట్టుబడులతో ఒక వ్యాపారమును ప్రారంభించిరి. సంవత్సరాంతమున వారికి వచ్చిన లాభమును వారు ఏ నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి?

పెట్టుబడుల నిష్పత్తి = 2000 : 3000

= 2 : 3

క్రింద ఇచ్చిన పటాన్ని పరిశీలించండి. వారు ఇద్దరూ సంవత్సరమంతా పెట్టుబడులు పెట్టారు.

| నెలలు | జనవరి | ఫిబ్రవరి | మార్చి | ఏప్రిల్ | మే | జూన్ | జూలై | ఆగస్టు | సెప్టెంబర్ | అక్టోబర్ | నవంబర్ | డిసెంబర్ | మొత్తం వాటాలు |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| రామయ్య వాటాలు | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | 24 |
| గోపాలం వాటాలు | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | 36 |

వారి వాటాల నిష్పత్తి = 24 : 36

= 2 : 3 మరియు వారి వాటాల పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తి = 1 : 1

మీరు ఏమి గమనించారు? సమాన కాలములు పెట్టుబడి పెట్టినప్పుడు పెట్టుబడుల నిష్పత్తి, వారి వాటాల నిష్పత్తి సమానము కావున వారు వచ్చిన లాభాన్ని 2:3 నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి.

పై ఉదాహరణలో,

**సందర్భం 1:** వారు వ్యాపారాన్ని ఒక్కొక్కరు 5000 పెట్టుబడితో ప్రారంభించారనుకొనుము. కాని రామయ్య తన పెట్టుబడిని 12 నెలలు వుంచగా గోపాలం కేవలం 9 నెలలు మాత్రమే పెట్టుబడి పెట్టాడు. వారిద్దరూ లాభాన్ని ఎలా పంచుకొంటారు? వారిద్దరూ సమాన మొత్తాలు పెట్టుబడి పెట్టారు కనుక వారు లాభాన్ని సమానంగా పంచుకోవాలని మీరు చెప్పగలరా? లేదు కదా! ఎందుకంటే రామయ్య ఎక్కువ కాలం పెట్టుబడి పెట్టాడు కదా.

SCERT TELANGANA

Ratio of their investments = 5000: 5000 = 1:1

| Month | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec | Total shares |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ramayya's shares | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | 12 |
| Gopalam.s shares | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | - | - | - | 9 |

Ratio of shares = 12: 9 = 4:3

and Ratio of time periods = 12: 9 = 4: 3

Their investment is the same, so they share the profit in the ratio of their shares i.e. ratio of their time period.

**Case 2 :** Further suppose Ramayya invested an amount of ₹ 2000 for 12 months and Gopalam invested an amount of ₹ 3000 for 9 months. In what ratio they have to divide the annual profit? Is it the ratio of investments or ratio of time period? Ramayya invested less amount but for more period. Gopalam invested more amount but for less period. Here we have to give importance for their investments as well as their investment periods. How to do that?

Ratio of investments = 2000: 3000 = 2:3

Ratio of time periods = 12: 9 = 4:3

| Month | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec | Total shares |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ramayya's shares | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | 24 |
| Gopalam's shares | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | - | - | - | 27 |

Ratio of shares = 24 : 27 = 8 : 9

$= (2 \times 12) : (3 \times 9) = 8 : 9$ (observe above table)

Here the ratio of investments is 2:3 and the ratio of time period is 4 : 3. So the ratio of shares is $(2 \times 12) : (3 \times 9) = 8 : 9$. Hence they have to divide the annual profit in the ratio of 8 : 9. Do you find any relation between ratio of investment and time period and ratio of shares?

SCERT, TELANGANA

వారి పెట్టుబడుల నిష్పత్తి = 5000 : 5000 = 1 : 1

| నెలలు | జనవరి | ఫిబ్రవరి | మార్చి | ఏప్రిల్ | మే | జూన్ | జూలై | ఆగస్టు | సెప్టెంబర్ | అక్టోబర్ | నవంబర్ | డిసెంబర్ | మొత్తం వాటాలు |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| రామయ్య వాటాలు | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | 12 |
| గోపాలం వాటాలు | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | ₹ | - | - | - | 9 |

వారి వాటాల నిష్పత్తి = 12 : 9 = 4 : 3.

మరియు పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తి $= 12 : 9 = 4 : 3$

పై సందర్భంలో మీరు గమనించిన విషయం వారి పెట్టుబడులు సమానం. కానీ వారి పెట్టుబడుల కాలాలు వేరు. కావున వారి లాభాన్ని పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి.

**సందర్భం 2:** రామయ్య ₹2000 లను 12 నెలలు, గోపాలం ₹3000 లను 9 నెలలు పెట్టుబడి పెట్టారనుకొనుము. సంవత్సరాంతమున వచ్చిన లాభాన్ని వారు ఏ నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి? వారి పెట్టుబడుల నిష్పత్తిలోనా లేక వారి కాలవ్యవధుల నిష్పత్తిలోనా? రామయ్య తక్కువ పెట్టుబడిని ఎక్కువ కాలం పెట్టగా, గోపాలం ఎక్కువ పెట్టుబడిని తక్కువ కాలం పెట్టాడు. ఇక్కడ మనం వారి పెట్టుబడులకు, కాలవ్యవధులకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. కాని దీనిని ఎలా చేయాలి?

పెట్టుబడుల నిష్పత్తి $= 2000 : 3000 = 2 : 3$

పెట్టుబడి కాలముల నిష్పత్తి $= 12 : 9 = 4 : 3$

| నెలలు | జనవరి | ఫిబ్రవరి | మార్చి | ఏప్రిల్ | మే | జూన్ | జూలై | ఆగస్టు | సెప్టెంబర్ | అక్టోబర్ | నవంబర్ | డిసెంబర్ | మొత్తం వాటాలు |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| రామయ్య వాటాలు | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | ₹ ₹ | 24 |
| గోపాలం వాటాలు | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | ₹ ₹ ₹ | - | - | - | 27 |

వారి వాటాల నిష్పత్తి = 24 : 27 = 8 : 9

లాభాల నిష్పత్తి = $(2 \times 12) : (3 \times 9) = 8:9$

ఇక్కడ పెట్టుబడుల నిష్పత్తి 2 : 3 మరియు కాలవ్యవధుల నిష్పత్తి 4:3. కావున వాటాల నిష్పత్తి $(2 \times 12) : (3 \times 9) = 8 : 9$. కావున వారు సంవత్సరాంతమున వచ్చిన లాభాన్ని 8 : 9. నిష్పత్తిలో పంచుకోవాలి.

మీరు పెట్టుబడులు మరియు కాలముల నిష్పత్తులకు వాటాల నిష్పత్తికి మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని కనుగొన్నారా?

SCERT TELANGANA

The ratio of shares can be written as $8 : 9 = \underbrace{2 : 3 \quad :: \quad 4 : 3}$

Product of antecedents    Product of consequents

Two simple ratios are expressed in the form of single ratio as the ratio of product of antecedents to product of consequents and we call it **Compound ratio** of the given two simple ratios i.e. ratios are compounded by multiplying together the fractions which denote them.

a : b and c : d are any two ratios, then their compound ratio is $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ i.e. ac: bd.

**Try These**

1. Find the compound ratios of the following.

   (a) 3 : 4 and 2 : 3   (b) 4 : 5 and 4 : 5   (c) 5 : 7 and 2 : 9

2. Give examples of compound ratio from daily life.

**Percentage:**

Consider the following example.

M. K. Nagar high school students decided to sell tickets of a charity show. Class VIII students have 300 tickets to sell and class VII students have 250 tickets to sell. One hour before the show, eighth class students sold 225 tickets and seventh class students sold 200 tickets.Which class students were closer to the goal of selling all their tickets?

To figure out which class students were closer to their goal, you may try to compare the ratios 225:300 and 200:250. For eighth class students the ratio is 3:4 and for seventh class students the ratio is 4:5. Do you compare and say? It is difficult to have a meaningful comparison, hence we can't say directly, we need to have equivalent ratios of both which can be compared. One way to compare quantities is to change them into percentages.

A **percentage (%)** compares a number to 100. The word **percent** means "per **every hundred**" or "**out of every hundred**". $100\% = \frac{100}{100}$. It is also a fraction with denominator 100.

Percentage of tickets sold by eighth class students $= \frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$

Percentage of tickets sold by seventh class students $= \frac{4}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

From this we understand that seventh class students were closer to the goal of selling all their tickets.

Percentage is number of parts out of 100. So the denominator is to be made 100 for which we are multiplying both numerator and denominator with 100.

SCERT TELANGANA

వారి వాటాల నిష్పత్తిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$8 : 9 = \quad 2 : 3 \quad :: \quad 4 : 3$ [2 : 3 మరియు 4 : 3 నిష్పత్తులకు]

పూర్వపదముల లబ్ధం  పరపదముల లబ్ధం

రెండు విష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా తెలపడానికి మనం ఆ రెండు నిష్పత్తుల పూర్వపదముల లబ్ధము మరియు పదములు లబ్ధముల నిష్పత్తిని కనుగొంటాము. ఇలా వచ్చిన నిష్పత్తినే మనం ఆ రెండు నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి అంటా అనగా బహుళ నిష్పత్తి కనుగొనడానికి ఇచ్చిన నిష్పత్తులను సూచించే భిన్నాలను గుణిస్తున్నాము.

a : b మరియు c : d లు ఇచ్చిన రెండు నిష్పత్తులైన, వాటి బహుళ నిష్పత్తి $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ అనగా ac : bd.

### ప్రయత్నించండి

1. క్రింది నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

   (a) 3 : 4 మరియు 2 : 3 (b) 4 : 5 మరియు 4 : 5 (c) 5 : 7 మరియు 2 : 9

2. నిత్య జీవితంలో బహుళ నిష్పత్తికి కొన్ని ఉదాహరణలు తెల్పుము.

**శాతము:**

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఎం.కె.నగర్ ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థులు ఒక ప్రదర్శన ఏర్పాటు చేసి టిక్కెట్లు అమ్మడం ద్వారా విరాళాలు సేకరించారు. నిర్ణయించుకొన్నారు. 8వ తరగతి విద్యార్థులు 300 టికెట్లను, 7వ తరగతి విద్యార్థులు 250 టికెట్లను అమ్మాలని నిర్ణయించబడినది. ప్రదర్శనకు ఒక గంట ముందు పరిశీలించగా 8వ తరగతి విద్యార్థులు 225 టికెట్లను, 7వ తరగతి విద్యార్థులు 200 టికెట్లను అమ్మినట్లు తెలిసినది. ఏ తరగతి విద్యార్థుల టికెట్లను అమ్మడంలో వారికి నిర్దేశించిన లక్ష్యానికి దగ్గరగా వచ్చారు?

ఏ తరగతి విద్యార్థులు వారి లక్ష్యానికి దగ్గరగా వచ్చారో తెలుసుకోవడానికి, మీరు 225 : 300 మరియు 200:250 నిషత్తులను పోల్చడానికి ప్రయత్నిస్తారు. 8వ తరగతి విద్యార్థుల టికెట్ల నిష్పత్తి 3 : 4 మరియు 7వ తరగతి విద్యార్థుల టికెట్ల నిష్పత్తి 4 : 5 మీరు వీటిని పోల్చి చెప్పగలరా? అర్థవంతమైన పోలిక కష్టమే కదా అందువలన చూడగానే చెప్పలేను కదా! వాటిని పోల్చడానికి వాటి తుల్య నిష్పత్తులు కావాలి. రాశులను పోల్చడానికి వాటిని శాతములలోనికి మార్చడము అనేది ఒక పద్ధతి.

శాతము అనగా ఒక సంఖ్యను 100 తో పోల్చడం. శాతము అనగా ప్రతీ వందకు లేదా ప్రతీ వందలో అని అర్థము.

$100\% = \frac{100}{100}$. శాతము అనగా 100 హారముగా గల భిన్నము.

8వ తరగతి విద్యార్థులచే అమ్మబడిన టిక్కెట్ల శాతం $= \frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$

7వ తరగతి విద్యార్థులచే అమ్మబడిన టిక్కెట్ల శాతం $= \frac{4}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

దీనిని బట్టి మనం టికెట్లు అమ్మాలనే లక్ష్యంలో 7వ తరగతి విద్యార్థులు దగ్గరగా వచ్చారని అర్థం చేసుకోవచ్చు. శాతము అనేది 100 లోని భాగముల సంఖ్య కావున హారమును 100 కు సమానం చేయాలి. దీని కొరకు లవ, హారాలను 100 తో గుణించాలి.

Let us consider one example to understand this. We can use percentage as a common scale.

In the introductory part, we compared the number of votes polled to Snigdha and Siri by ratio. We can compare the same by percentages also.

| The votes polled to Snigdha are 24 out of 40 or 3 out of 5 in the simplified form. So percentage of votes are $\frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$ | By other method<br>Out of 40 votes, number of votes for Snigdha are 24.<br>So out of 100 votes, number of votes polled to Snigdha $= \frac{24}{40} \times 100 = 60$<br>Out of 100 votes 60 are for her, so percentage of her votes = 60% |
|---|---|

Since all the students voted,

Percentage of votes for Snigdha + percentage of votes for Siri = 100%

60% + percentage of votes for Siri = 100%

Thus percentage of votes for Siri = 100% – 60% = 40%

## 5.1 Finding the increase or decrease percent

Consider the following situation.

- Class sizes have increased by 10%.
- House prices have dropped by 12%.
- $CO_2$ emissions need to fall by 25% by the year 2020.

Changes in quantities are often expressed as a percentage of the original quantity.

There are two different methods which can be used to solve increase or decrease in percentage problems. Let us see the following examples to understand this.

(1) A sales manager asked his team to increase the sales by 35% over previous month's sales which was ₹ 98,700. What is the target sales ?

| Sales in the previous month = ₹ 98,700.<br>35% of ₹ 98,700 = $\frac{35}{100} \times 98,700$<br>= ₹ 34545<br>Target sales for the month<br>= ₹ 98,700 + 34,545<br>= ₹ 1, 33, 245. | Unitary method.<br>35% increase means,<br>₹ 100 increased to ₹ 135.<br>How much ₹ 98,700 will increase to?<br>Increased sales = ₹ $\frac{135}{100} \times 98,700$<br>= ₹ 1,33,245. |
|---|---|

Decrease percentage in price would imply the actual decrease followed by its subtraction from the original price.

SCERT, TELANGANA


Government's Gift for Students' Progress

శాతాలను మనం సాధారణ కొలమానంగా ఉపయోగించవచ్చును.

మొదటి ఉదాహరణలో మనం స్నిగ్ధ, సిరిలకు వచ్చిన ఓట్లను నిష్పత్తిలో పోల్చాము. దీనినే మనం శాతముతో కూడా పోల్చవచ్చును.

స్నిగ్ధకు 40 ఓట్లలో 24 వచ్చాయి.
దీనినే మనం క్లుప్తంగా ప్రతీ 5 ఓట్లకు 3 ఓట్లు వచ్చాయి అని చెప్పవచ్చును.

వచ్చిన శాతం = $\frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$

**మరొక పద్ధతి**

40 ఓట్లలో స్నిగ్ధకు వచ్చిన ఓట్లు 24. కావున 100 ఓట్లలో స్నిగ్ధకు వచ్చిన ఓట్లు = $\frac{24}{40} \times 100 = 60$

కావున ప్రతీ 100 ఓట్లలో 60 ఓట్లు ఆమెకు వచ్చాయి అనగా ఆమెకు వచ్చిన ఓట్ల శాతం = 60%

మొత్తం విద్యార్థులందరూ ఓటు వేశారు కనుక

స్నిగ్ధకు వచ్చిన ఓట్ల శాతం సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతం + సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతం = 100%

60% + సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతం = 100%

సిరికి వచ్చిన ఓట్ల శాతం = 100% - 60% = 40%

## 5.1 శాతంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను కనుగొనుట

క్రింది సందర్భాలను గమనించండి.

- తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్య 10 శాతం పెరిగినది.
- ఇండ్ల ధరలు 12 శాతం పడిపోయినవి.
- 2020 వ సంవత్సరం నాటికి $CO_2$ విడుదల 25% కి తగ్గవలసి ఉన్నది.

రాశులలోని మార్పులను తరచుగా మనం ఇచ్చిన రాశిలోని శాతంగా పేర్కొనడం జరుగుతుంది.

శాతములో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను లెక్కించడానికి రెండు పద్ధతులు ఉన్నాయి. దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

(1) ఒక కంపెనీ క్రిందటి నెల అమ్మకాలు మొత్తం ₹98,700. ఈ అమ్మకాల మొత్తాన్ని ఈ నెలలో 35% పెంచమని

క్రిందటి నెల అమ్మకాలు = ₹ 98,700.

₹ 98,700 లలో 35% = $\frac{35}{100} \times 98,700$
= ₹ 34545

ఈ నెల అమ్మకాల మొత్తం
= ₹ 98,700 + 34,545
= ₹ 1, 33, 245.

**మరొక పద్ధతి**

35% పెరుగుదల అనగా

₹ 100 లో పెరుగుదల వలన ₹ 135.

₹ 98,700 పెరుగుదల వలన?

పెరగవలసిన అమ్మకాలు = ₹ $\frac{135}{100} \times 98,700$
= ₹ 1,33,245.

ఆ కంపెనీ అధికారి క్రింది సిబ్బందికి వివరించెను. ఆ సిబ్బంది ఈ నెలలో చేయవలసిన అమ్మకాల మొత్తం ఎంత?

SCERT TELANGANA

Let us consider one example to understand this.

The original price of shoes is ₹ 550. They are for sale with a reduction of 10%. What is the new sale price of the shoes?

Original price of shoes = ₹ 550.

Reduction = 10% of ₹ 550

$= \frac{10}{100} \times 550 =$ ₹ 55.

New sale price = original price – reduction

= ₹ 550 – ₹ 55 = ₹ 495.

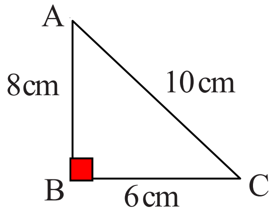
## Think, Discuss and Write

1. Two times a number is 100% increase in the number. If we take half the number what would be the decrease in percent?
2. By what percent is ₹ 2000 less than ₹ 2400? Is it the same as the percent by which ₹ 2400 is more than ₹ 2000?

## Exercise - 5.1

1. Find the ratio of the following
   (i) Smita works in office for 6 hours and Kajal works for 8 hours in her office. Find the ratio of their working hours.
   (ii) One pot contains 8 litre of milk while other contains 750 milliliter.
   (iii) speed of a cycle is 15km/h and speed of the scooter is 30km/h.
2. If the compound ratio of 5:8 and 3:7 is 45:x. Find the value of x.
3. If the compound ratio of 7:5 and 8:x is 84:60. Find x.
4. The compound ratio of 3:4 and the inverse ratio of 4:5 is 45:x. Find x.
5. In a primary school there shall be 3 teachers to 60 students. If there are 400 students enrolled in the school, how many teachers should be there in the school in the same ratio?
6. In the adjacent ΔABC, write all possible ratios by taking measures of sides pair wise.

   (Hint : Ratio of AB : BC = 8 : 6)




SCERT, TELANGANA

శాతములో తగ్గుదల అనగా తగ్గించవలసిన మొత్తమును కనుగొని ఇచ్చిన మొత్తము నుండి దానిని తీసివేయాలి.
దీనిని అర్థం చేసుకొనుటకు ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

(2) ఒక జత బూట్ల ధర ₹ 550. వాటి అమ్మకంపై 10% తగ్గింపు ఉన్న, ఆ బూట్ల అమ్మకం ధర ఎంత?

బూట్ల ధర = ₹ 550.

తగ్గింపు = ₹ 550లో 10% తగ్గింపు

$$= \frac{10}{100} \times 550 = ₹\,55.$$

అమ్మకపు ధర = అసలు ధర – తగ్గింపు

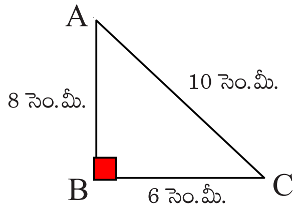
$$= ₹\,550 - ₹\,55 = ₹\,495.$$

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. ఒక సంఖ్యకు రెండు రెట్లు అనగా ఆ సంఖ్యలో పెరుగుదల 100% . మనం ఆ సంఖ్యలో సగటు తీసుకొన్న దానిలో తగ్గుదల శాతం ఎంత?
2. ₹ 2400 కన్నా ₹ 2000 అనేది ఎంత శాతం తక్కువ. అలాగే ₹ 2000 లు కంటే ₹ 2400 లు ఎంత శాతం ఎక్కువ? ఈ రెండు శాతములు సమానమేనా?

## అభ్యాసం - 5.1

1. క్రింది వాటికి నిష్పత్తులను కనుగొనుము.
   (i) స్మిత తన కార్యాలయంలో రోజుకు 6 గంటలు పని చేయును. కాజల్ తన కార్యాలయంలో రోజుకు 8 గంటలు పని చేయును. అయిన వారి పని గంటల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
   (ii) ఒక కుండలో 8 లీట్ల పాలు, మరొక దానిలో 750 మి.లీ. పాలు ఉన్నాయి. వాటి నిష్పత్తి ఎంత?
   (iii) ఒక సైకిల్ వేగం గంటకు 15 కి.మీ. ఒక స్కూటర్ వేగం గంటకు 30 కి.మీ. వాటి వేగముల నిష్పత్తి ఎంత?
2. 5 : 8 మరియు 3 : 7 ల బహుళ నిష్పత్తి 45 : x అయిన x విలువ ఎంత?
3. 7 : 5 మరియు 8 : x ల బహుళ నిష్పత్తి 84 : 60 అయిన x విలువ ఎంత?
4. 3 : 4 మరియు 4 : 5 యొక్క విలోమ నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి 45 : x అయిన x విలువ ఎంత?
5. ఒక ప్రాథమిక పాఠశాలలో 60 మంది విద్యార్థులకు ముగ్గురు ఉపాధ్యాయులు ఉండవలెను. ఆ పాఠశాలలో 400 మంది విద్యార్థులు చేరిన ఇదే నిష్పత్తిలో ఎంత మంది ఉపాధ్యాయులు కావలెను?
6. ఇచ్చిన పటంలో ABC ఒక త్రిభుజం, ప్రతీసారి ఒక జత భుజాల కొలతలు తీసుకుంటూ రాయడానికి వీలైన అన్ని నిష్పత్తులను రాయండి.
   (**సూచన:** AB : BC భుజాల నిష్పత్తి 8 : 6)




SCERT, TELANGANA

7. If 9 out of 24 students scored below 75% marks in a test. Find the ratio of student scored below 75% marks to the student scored 75% and above marks.

8. Find the ratio of number of vowels in the word' MISSISSIPPI' to the number of consonants in the simplest form.

9. Rajendra and Rehana own a business. Rehana receives 25% of the profit in each month. If Rehana received ₹ 2080 in particular month , what is the total profit in that month?

10. In triangle ABC, AB = 2.2 cm, BC = 1.5 cm and AC = 2.3 cm. In triangle XYZ, XY = 4.4 cm, YZ = 3 cm and XZ = 4.6 cm. Find the ratio AB : XY, BC : YZ, AC : XZ. Are the lengths of corresponding sides of ΔABC and ΔXYZ in proportion?

    [Hint : Any two triangles are said to be in proportion, if their corresponding sides are in the same ratio]

11. Madhuri went to a super market. The price changes are as follows. The price of rice reduced by 5% jam and fruits reduced by 8% and oil and dal increased by 10%. Help Madhuri to find the changed prices in the given table.

| Item | Original price/kg | Changed price |
|---|---|---|
| Rice | ₹ 30 | |
| Jam | ₹ 100 | |
| Apples | ₹ 280 | |
| Oil | ₹ 120 | |
| Dal | ₹ 80 | |

12. There were 2075 members enrolled in the club during last year. This year enrolment is decreased by 4% .

    (a) Find the decrease in enrolment.

    (b) How many members are enrolled during this year?

13. A farmer obtained a yielding of 1720 bags of cotton last year. This year she expects her crop to be 20% more. How many bags of cotton does she expect this year?

14. Points P and Q are both on the line segment AB and on the same side of its midpoint. P divides AB in the ratio 2 : 3, and Q divides AB in the ratio 3 : 4. If PQ = 2, then find the length of the line segment AB.

## 5.2 Finding discounts

In big shops and super markets we see price tag of the articles. Do you know what do we call them? This is called **marked price (M.P.)** of the article. Prices of the items are marked according to the price list quoted by the factory which is called **List price or catalogue price or marked price**

SCERT, TELANGANA

7. 24 మంది విద్యార్థులలో 9 మందికి ఒక పరీక్షలో 75% కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చినవి 75% కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్యకు, 75% కంటే ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి ఎంత?

8. MISSISSIPPI అనే పదంలోని అచ్చుల సంఖ్యకు, హల్లుల సంఖ్యకు నిష్పత్తి కనుగొని, దానిని కనిష్ఠ పదాలలో తెలపండి.

9. రాజేంద్ర, రెహానాలు ఒక వ్యాపారము చేయుచున్నారు. రెహానా ప్రతీ నెల వచ్చిన లాభంలో 25% తీసుకుంటుంది. ఒక నెలలో రెహానా తీసుకున్న మొత్తం ₹ 2080 అయిన ఆ నెలలో వారికి వచ్చిన మొత్తం లాభంను కనుగొనండి.

10. $\Delta ABC$ లో $AB=2.2$ సెం.మీ., $BC=1.5$ సెం.మీ. మరియు $AC=2.3$ సెం.మీ. $\Delta XYZ$ లో $XY=4.4$ సెం.మీ. $YZ=3$ సెం.మీ. మరియు $XZ=4.6$ సెం.మీ. అయిన $AB:XY$, $BC:YZ$, $AC:XZ$ లను కనుగొనండి. $\Delta ABC$ భుజాల కొలతలు, $\Delta XYZ$ భుజాల కొలతలలో అనుపాతంలో ఉన్నాయా?

(సూచన: రెండు త్రిభుజములలో సదృశ భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వున్న ఆ త్రిభుజాలు అనుపాతంలో ఉండునని చెప్పవచ్చును)

11. మాధురి ఒక సూపర్ మార్కెట్‌కు పోగా అక్కడ సరుకుల మారిన ధరలు ఇలా ఉన్నాయి. బియ్యం ధరలో 5% తగ్గుదల, జామ్ మరియు పండ్లపై 8% పెరుగదల తగ్గుదల మరియు నూనె, పప్పులపై 10% పెరుగుదల వున్నవి. అయిన ఆ మారిన ధరలు కనుగొనుటకు మాధురికి సహాయం చేయండి.

| వస్తువు | అసలు ధర | మారిన ధర |
|---|---|---|
| బియ్యం | ₹ 30 | |
| జామ్ | ₹ 100 | |
| యాపిల్ పళ్ళు | ₹ 280 | |
| నూనె | ₹ 120 | |
| పప్పు | ₹ 80 | |

12. ఒక క్లబ్‌లో క్రిందటి సంవత్సరం 2075 మంది చేరినారు. ఈ సంవత్సరం చేరిన వారి సంఖ్య 4% తగ్గిన
(a) తగ్గిన వారి సంఖ్యను (b) ఈ సంవత్సరం చేరిన వారి సంఖ్యను కనుగొనుము.

13. ఒక రైతుకు గత సంవత్సరం ప్రత్తి పంటలో 1720 బస్తాల దిగుబడి వచ్చినది. ఈ సంవత్సరంలో ఆమె ప్రత్తి పంటపై దిగుబడి 20% ఎక్కువ వచ్చునని భావించుచున్నది. అయిన ఈ సంవత్సరం ఆమె ఎన్ని బస్తాల దిగుబడిని ఆశిస్తున్నది.

14. P, Q లు AB రేఖాఖండంపై, $\overline{AB}$ యొక్క మధ్య బిందువుకు ఒకే వైపునకు గల బిందువులు. P బిందువు $\overline{AB}$ ను 2 : 3 లో, Q బిందువు $\overline{AB}$ ను 3 : 4 లో విభజించుచున్నవి. PQ = 2 సెం.మీ. అయిన AB రేఖాఖండపు పొడవును కనుగొనుము.

## 5.2 రుసుము (డిస్కౌంట్)లను కనుగొనుట

పెద్ద పెద్ద షాపులలో మరియు సూపర్ మార్కెట్లలో వస్తువులకు ధరల సూచీలను ఏర్పాటు చేస్తారు? ఆ ధరలను ఏమంటారో మీకు తెలుసా? ఫ్యాక్టరీలో ఉత్పత్తి అయిన వస్తువులకు వారు ఇచ్చిన జాబితాల ప్రకారం ధరలను నిర్ణయిస్తారు. దీనినే మనం **జాబితా ధర లేదా క్యాటలాగు ధర లేదా ప్రకటన ధర అంటారు.**

SCERT TELANGANA

Ravi went to shop to buy a book. Printed price of the book is ₹ 80. But shop owner gave him a discount of 15%. How much amount has Ravi paid to buy the book?

In our daily life we come across so many situations where we are given a price discount on the articles.

Price discount is also called Rebate. It is given on marked price or List Price.

Now in the above example Ravi was given 15% discount. Printed price is ₹ 80. Then the discount will be $\frac{15}{100} \times 80 =$ ₹ 12. So the amount he has to pay is ₹ 80 – ₹ 12 = ₹ 68.

Let us see few more examples.

**Example 1:** A cycle is marked at ₹ 3600 and sold for ₹ 3312. What is the discount and discount percentage ?

**Solution:** Discount = marked price – sale price

= ₹ 3600 – ₹ 3312 = ₹ 288

Since discount is calculated on marked price. For calculating the discount percentage we use M.P. as the base.

On marked price of ₹ 3600, the discount is ₹ 288

On marked price of ₹ 100, how much will the discount be?

Discount percent = $\frac{288}{3600} \times 100 = 8\%$

We can also find discount when discount percent is given.

**Example 2:** The marked price of a ceiling fan is ₹ 1600 and the shop keeper allows a discount of 6% on it. Find its selling price.

**Solution:**

Raju solved it like this.

Discount = 6% of ₹ 1600

= $\frac{6}{100} \times 1600 =$ ₹96

Selling Price = Marked price – discount

= ₹ 1600 – ₹ 96

= ₹ 1504.

Latha solved it in a different way.

6% decrease means

₹ 100 decreased to ₹ 94

So ₹ 1600 decreased to?

Selling price = $\frac{94}{100} \times 1600 =$ ₹1504

SCERT TELANGANA

రవి ఒక వస్తువును కొనుటకు దుకాణమునకు వెళ్ళెను. ఆ పుస్తకంపై ముద్రించి వున్న ధర ₹ 80. ఆ షాపు యజమాని దానిపై 15% రుసుము ఇచ్చిన ఆ పుస్తకమును కొనుటకు రవి ఎంత సొమ్ము చెల్లించవలెను.

ఇలా మన దైనందిన జీవితంలో అనేక సందర్భాలలో మనకు వస్తువులపై రుసుము అనగా తగ్గింపు లభిస్తుంది.

ఈ ధరల తగ్గింపునే రుసుము లేదా ముదరా అని కూడా అంటారు. దీనిని ప్రకటన వెల లేదా జాబితా వెలపై నిర్ణయిస్తారు.

పై ఉదాహరణలో రవికి 15% రుసుము లభించినది. ముద్రిత వెల ₹ 80. అప్పుడు రుసుము $\frac{15}{100} \times 80 =$ ₹ 12.

కావున రవి చెల్లించవలసిన మొత్తం ₹ 80 – ₹ 12 = ₹ 68.

మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనించండి.

**ఉదాహరణ 1:** ఒక సైకిల్ ప్రకటన వెల ₹ 3600 మరియు అమ్మకపు వెల ₹ 3312 అయిన దానిపై తగ్గింపును తగ్గింపు శాతమును కనుగొనండి.

**సాధన:** రుసుము = ప్రకటన వెల – అమ్మకపు వెల

= ₹ 3600 – ₹ 3312 = ₹ 288

రుసుమును ఎల్లప్పుడూ ప్రకటన వెలపై లెక్కించెదరు. కావున రుసుము శాతం కనుగొనుటకు ప్రకటన వెలను తీసుకోవాలి.

ప్రకటన వెల ₹ 3600 అయిన రుసుము ₹ 288

ప్రకటన వెల ₹ 100 అయిన రుసుము ఎంత?

తగ్గింపు శాతం $= \frac{288}{3600} \times 100 = 8\%$

అలాగే రుసుము శాతమును ఇచ్చిన రుసుమును కూడా కనుగొనవచ్చును.

**ఉదాహరణ 2:** ఒక పంకా (ఫ్యాన్) ప్రకటన వెల ₹ 1600. అమ్మకందారు దానిపై 6% రుసుము ఇచ్చిన దాని అమ్మకం వెల ఎంత?

**సాధన:**

రాజు దానిని ఈ విధంగా లెక్కించెను.

రుసుము = ₹ 1600 లో 6%

$= \frac{6}{100} \times 1600 =$ ₹96

అమ్మకం వెల = ప్రకటన వెల – రుసుము

= ₹ 1600 – ₹ 96

= ₹ 1504.

లత దీనిని వేరొక పద్ధతిలో లెక్కించినది.

6% తగ్గుదల అనగా

₹ 100 తగ్గుదల తర్వాత ₹ 94, అమ్మకం వెల

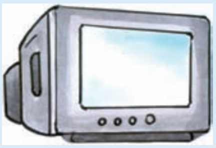
₹ 1600 తగ్గుదల తరువాత?

అమ్మకం వెల $= \frac{94}{100} \times 1600 =$ ₹1504

SCERT, TELANGANA

## Try These

1. Fill the selling price for each.

| Item | Marked price in ₹ | Discount % | Selling price in ₹ |
|---|---|---|---|
| | 450 | 7% | |
| | 560 | 9% | |
| | 250 | 5% | |
|  | 15000 | 15% | |

SCERT, TELANGANA

**Example 3:** Neelima went to a shop to buy a dress. Marked price of the dress is ₹ 1000. Shop owner gave a discount of 20% and then 5%. Find the single discount equivalent to these two successive discounts.

**Solution:** Marked price of the article = ₹ 1000.

Percentage of first discount = 20%

First Discount = 20% of 1000

$$= \frac{20}{100} \times 1000 = ₹\ 200$$

Price after first discount = ₹ 1000 – ₹ 200

= ₹ 800.

Percentage of second discount = 5%

Second discount = 5% of ₹ 800

$$= \frac{5}{100} \times 800 = ₹\ 40$$

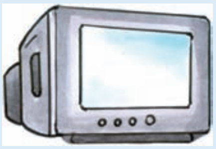
Price after second discount = ₹ 800 – ₹ 40 = ₹ 760.

Net selling price = ₹ 760.

> 20% discount means ₹ 100 is decreased to ₹ 80.
>
> 5% discount means ₹ 100 is decreased to ₹ 95.
>
> ∴ Net selling price
>
> $$= 1000 \times \frac{80}{100} \times \frac{95}{100}$$
>
> = ₹ 760

## ప్రయత్నించండి

1. క్రింది పట్టికలో అమ్మకం ధరలను రాయండి.

| వస్తువు | ప్రకటన వెల (₹ లలో) | రుసుము % | అమ్మకం వెల (₹ లలో) |
|---|---|---|---|
| | 450 | 7% | |
| | 560 | 9% | |
| | 250 | 5% | |
|  | 15000 | 15% | |

**ఉదాహరణ 3:** నీలిమ బట్టలు కొనుటకు ఒక దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె ఎంచుకున్న దుస్తుల ప్రకటన వెల ₹1000. దుకాణదారు మొదట 20% తరువాత 5% రుసుము ఇచ్చెను అయిన ఆమెకు మొత్తం మీద ఎంత శాతం రుసుము లభించినదో కనుగొనండి.

**సాధన:** దుస్తుల ప్రకటన వెల = ₹ 1000.

మొదటి రుసుము శాతం = 20%

మొదటి తగ్గింపు = 20% of 1000

$$= \frac{20}{100} \times 1000 = ₹\ 200$$

మొదటి రుసుము తరువాత ధర = ₹ 1000 – ₹ 200

= ₹ 800.

రెండవ రుసుము శాతం = 5%

రెండవ రుసుము = 5% of ₹ 800

$$= \frac{5}{100} \times 800 = ₹\ 40$$

రెండవ రుసుము తరువాత ధర = ₹ 800 – ₹ 40 = ₹ 760.

అయిన అమ్మకపు ధర = ₹ 760.

> 20% రుసుము అనగా ₹ 100 ధర ₹ 80 కి తగ్గింపు
>
> 5% రుసుము అనగా ₹ 100 ధర ₹ 95 కి తగ్గింపు
>
> ∴ మొత్తంపై అమ్మకపు ధర
>
> $$= 1000 \times \frac{80}{100} \times \frac{95}{100}$$
>
> = ₹ 760

SCERT, TELANGANA

Single discount equivalent to given discounts = ₹ 1000 – ₹ 760 = ₹ 240.

For ₹ 1000 the discount amount is ₹ 240

Percentage of discount given on ₹ 240 = $\frac{240}{1000} \times 100$ = 24%

What do you observe? Is the given single discount percentage is equivalent to the percentage of two given successive discounts.

**Think, Discuss and Write**

Preeti went to a shop to buy a dress. Its marked price is ₹ 2500. Shop owner gave 5% discount on it. On further insistence, he gave 3% more discount. What will be the final discount she obtained? Will it be equal to a single discount of 8%? Think, discuss with your friends and write it in your note book.

## 5.3 Estimation in percentages

Your bill in a shop is ₹ 477.80 and the shop keeper gives a discount of 15%. How would you estimate the amount to be paid?

Round off the bill to the nearest tens.₹ 477.80 are rounded off to ₹ 480.

Then find 10% of this amount. It is ₹ 48. Take half of this. It is ₹ 24. So discount amount is ₹ 48 + ₹ 24 = ₹ 72. Amount to be paid approximately around ₹ 410.

**Try These**

(i) Estimate 20% of ₹ 357.30 (ii) Estimate 15% of ₹ 375.50

## 5.4 Profit and Loss

Prices related to buying and selling (Profit and Loss)

Observe the following situations.

- Sita bought a chair for ₹ 750 and sold it for ₹ 900.
- Mary bought 10g of gold for ₹ 25000 in last year and sold it for ₹ 30,000 in this year.
- Rahim bought a bicycle for ₹ 1600 and next year he sold it for ₹ 1400.
- Anitha purchased a car for ₹ 4.8 lakh and sold it for ₹ 4.1 lakh after 2 years.
- Hari purchased a house for ₹ 9 lakh and incurred an expenditure of ₹ 1 lakh for its repairs. He sold it for ₹ 10.7 lakh.

SCERT TELANGANA

ఇచ్చి రెండు రుసుములకు సమానమైన ఏకైక రుసుము = ₹ 1000 – ₹ 760 = ₹ 240.

₹ 1000 పై లభించిన మొత్తం రుసుము ₹ 240

₹ 240 పై లభించే రుసుము శాతం = $\frac{240}{1000} \times 100 = 24\%$

మీరు ఏమి గమనించారు? ఆమెకు లభించిన రుసుము శాతం విడి, విడి రుసుము శాతములకు సమానమా?

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ప్రీతి బట్టలు కొనుటకు ఒక దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె ఎంచుకున్న దుస్తుల ప్రకటన వెల ₹ 2500. దుకాణాదారుడు మొదట 5% రుసుము ఇచ్చినాడు మరలా అడుగగా మరొక 3% రుసుము ఇచ్చినాడు. అయిన ఆమెకు లభించిన మొత్తం రుసుము శాతం ఎంత? అది 8% కి సమానంగా వుంటుందా? ఆలోచించి మీ మిత్రులతో చర్చించి నోట్ పుస్తకంలో రాయండి.

## 5.3 శాతములను అంచనా వేయడం

ఒక దుకాణంలో మీరు చేసిన కొనుగోలు మొత్తం ₹ 477.80. దుకాణాదారుడు మీకు 15% తగ్గించిన మీరు చెల్లించవలసిన మొత్తంను ఎలా అంచనా వేస్తారు?

బిల్లును దగ్గర పదులకు సవరించుము. ₹ 477.80 లు ₹ 480 కి సవరించబడినది.

ఇప్పుడు దానిలో 10% లెక్కకట్టుము. అది ₹ 48. దాని సగము లెక్కించుము అది ₹ 24. కనుక కావలసిన తగ్గింపు మొత్తం ₹ 48 + ₹ 24 = ₹ 72. చెల్లించవలసిన మొత్తం సుమారుగా ₹ 410.

### ప్రయత్నించండి

(i) ₹ 357.30 లో 20% అంచనా వేయండి. (ii) ₹ 375.50 లకు 15% అంచనా వేయండి.

## 5.4 లాభ నష్టములు

అమ్మకములు మరియు కొనుగోళ్ళకు సంబంధించిన ధరలు (లాభ నష్టములు)

క్రింది సందర్భాలను పరిశీలించండి.

- సీత ఒక కుర్చీని ₹ 750 లకు కొని ₹ 900 లకు అమ్మినది.
- మేరి గత సంవత్సరం 10 గ్రాముల బంగారమును ₹ 25000 లకు కొని ఈ సంవత్సరం ₹ 30,000 లకు అమ్మినది.
- రహీమ్ ఒక సైకిల్‌ను ₹ 1600 లకు కొని తరువాత సంవత్సరం ₹ 1400 లకు అమ్మెను.
- అనిత ఒక కారును ₹ 4.8 లక్షలకు కొని రెండు సంవత్సరాల తరవాత ₹ 4.1 లక్షలకు అమ్మెను.
- హరి ఒక ఇంటిని ₹ 9 లక్షలకు కొని, దాని మరమ్మతుల నిమిత్తం ₹ ఒక లక్ష ఖర్చు పెట్టెను. దానిని తరవాత ₹ 10.7 లక్షలకు అమ్మెను.

In the first four examples profit or loss is known by finding the difference between cost price and selling price.

But in the last example, what is the profit obtained by Hari? Is it ₹ 1.7 lakh? Obviously not. He incurred some additional expenditure on it before selling. What do we call such expenditures?

Some times the shop keeper has to spend on additional expenses like transportation, maintenance, labour, repair, commission, rent of godown etc. in addition to the price paid to buy an article. Such additional expenses are called **overhead expenses** and are to be added to the Cost price. Profit or loss is always calculated on this resultant cost price.

### Think, Discuss and Write

What happens if cost price = selling price. Do we get any such situations in our daily life?

It is easy to find profit % or loss % in the above situations. But it will be more meaningful if we express them in percentages. Profit % is an example of **increase percent** of cost price and loss % is an example of **decrease percent of cost price**.

Let us see some more examples.

**Example 4:** Radhika deals with second-hand goods. She bought a second hand refrigerator for ₹ 5000. She spends ₹ 100 on transportation and ₹ 500 on its repair. She sells the refrigerator for ₹ 7000.

Find (i) the total cost price of the refrigerator (ii) profit or loss percent.

**Solution:** (i) Total cost price = purchasing price+ transportation charges+ repair charges

= ₹ (5000 + 100 + 500) = ₹ 5600

So the total cost price is ₹ 5600.

(ii) Selling price is ₹ 7000. Here Selling price > cost price, so there is a profit.

Profit = selling price – cost price = ₹ 7000 – ₹ 5600 = ₹ 1400.

On cost price of ₹ 5600 profit is ₹ 1400

If cost price is ₹ 100, profit will be?

$$\text{Profit percent} = \frac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$$

**Example 5:** Vinay bought a flat for ₹ 4,50,000. He spent ₹ 10,000 on its paintings and repair. Then he sold it for ₹ 4,25,500. Find his gain or loss and also its percent.

**Solution:** Total cost price = purchasing price+ repair charges.

= ₹ (4,50,000 + 10,000) = ₹ 4,60,000.

SCERT TELANGANA

మొదటి నాలుగు ఉదాహరణలతో లాభం లేదా నష్టం అనేది వాటి అమ్మకపు వెల మరియు కొన్నవెలల భేదం కనుగొనుట ద్వారా తెలుసుకోవచ్చును.

చివరి ఉదాహరణలో, హరికి వచ్చిన లాభం ఎంత? ₹ 1.7 లక్షలు లాభమా? కాదు కదా! దానిని అమ్మడానికి ముందర కొన్నవెల కాకుండా అదనంగా కొంత సొమ్మును ఖర్చు పెట్టెను. అటువంటి ఖర్చులను మనం ఏమని పిలుస్తాము?

కొన్నిసార్లు దుకాణదారుల వస్తువులను కొన్నవెలతో పాటు కొన్ని అదనపు ఖర్చులు అనగా రవాణా, నిల్వ చేయడం (గోడౌన్‌లకు), కూలీలు, మరమ్మతులు, కమీషన్‌లు మొదలగునవి చేయవలసి వస్తుంది. అటువంటి ఖర్చులను మనం అదనపు ఖర్చులు అంటాము. వీటిని కొన్నవెలకు కలపాలి. అప్పుడు లాభ నష్టాలను ఈ మొత్తం కొన్నవెలపై లెక్కిస్తాము.

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

అమ్మినవెల కొన్నవెల సమానమైతే ఏమి జరుగుతుంది? మన నిత్య జీవితంలో అటువంటి పరిస్థితులు వస్తాయా?

పై సందర్భాలలో లాభం లేదా నష్టం కనుగొనుట చాలా తేలిక, కాని వాటినని శాత రూపంలలో తెలిపితే మరింత అర్థవంతంగా ఉంటుంది. లాభం అనేది కొన్నవెలపై పెరుగుదల శాతం మరియు నష్టం అనేది కొన్నవెలపై తగ్గుదల శాతము.

**ఉదాహరణ 4:** రాధిక పాత వస్తువులను కొని అమ్మే వ్యాపారం చేయును. ఆమె ఒక పాత రిఫ్రిజిరేటర్‌ను ₹ 5000 లకు కొని ₹ 100 రవాణాకు, ₹ 500 మరమ్మతులకు ఖర్చు చేసేను. దానిని ఆమె ₹ 7000 లకు అమ్మిన (i) ఆ రిఫ్రిజిరేటర్ కొన్నవెలకు (ii) లాభ శాతం లేదా నష్ట శాతంను కనుగొనుము.

**సాధన:** (i) కొన్నవెల మొత్తం = కొన్న ధర + రవాణా ఖర్చు + మరమ్మతు ఖర్చులు

$= ₹ (5000 + 100 + 500) = ₹ 5600$

కావున కొన్నవెల మొత్తం ₹ 5600.

(ii) అమ్మకపు వెల ₹ 7000. ఇక్కడ అమ్మకపు వెల > కొన్నవెల, కావున లాభం వస్తుంది.

లాభం = అమ్మిన వెల – కొన్నవెల = ₹ 7000 – ₹ 5600 = ₹ 1400.

కొన్నవెల ₹ 5600 అయిన లాభం ₹ 1400

కొన్నవెల ₹ 100 అయిన లాభం ఎంత?

లాభ శాతం $= \frac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$

**ఉదాహరణ 5:** వినయ్ ఒక ప్లాట్‌ను ₹ 4,50,000 లకు కొని దాని మరమ్మతులు, రంగులు వేయడానికి ₹ 10,000 ఖర్చు చేసేను. తరువాత దానిని ₹ 4,25,500 లకు అమ్మిన అతనికి లాభమా, నష్టమా? ఎంత శాతము?

**సాధన:** మొత్తం కొన్నవెల = కొన్నవెల + మరమ్మతులు

$= ₹ (4,50,000 + 10,000) = ₹ 4,60,000.$



SCERT, TELANGANA

Selling price is ₹ 4,25,500. Here we can observe Selling price $<$ cost price. So there is a loss.

Loss = cost price – selling price

= ₹ 4,60,000 – ₹ 4,25,500 = ₹ 34,500.

For cost price of ₹ 4, 60, 000 loss is ₹ 34,500 if its cost price is ₹ 100 what will the loss percentage be?

$$\text{Loss percent} = \frac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$$

**Example 6:** Venkanna purchased 50 dozen bananas for ₹ 1250. He incurred transportation charges of ₹ 250. He could not sell five dozen bananas as they were spoiled. He sold the remaining bananas at ₹ 35 for each dozen. Will he get a profit or a loss? Find profit or loss percent.

**Solution:** Total cost price = Cost price of bananas + Transportation charges

= ₹ 1250 + ₹ 250 = ₹ 1500.

Number of dozens of bananas sold = Number of dozens purchased – number of dozens rotten

= 50 – 5 = 45 dozens

Selling price = ₹ 35 × 45 = ₹ 1575

Clearly selling price $>$ cost price so it is a profit.

Profit = selling price – cost price

= ₹ 1575 – ₹ 1500 = ₹ 75

On cost price of ₹ 1500 profit is ₹ 75

The profit on the cost price of ₹ 100 is the percentage of profit.

$$\text{Therefore, profit percent} = \frac{75}{1500} \times 100 = 5\%$$

**Example 7:** Malik sells two tables for ₹ 3000 each. He gains 20% on one table and on the other he loses 20%. Find his gain or loss percent on the whole transaction.

SCERT, TELANGANA

అమ్మకపు వెల ₹ 4,25,500. ఇక్కడ అమ్మకపు వెల < కొన్నవెల, కావున నష్టం వస్తుంది.

నష్టం = కొన్నవెల – అమ్మిన వెల

$= ₹\ 4,60,000 - ₹\ 4,25,500 = ₹\ 34,500.$

కొన్నవెల ₹ 4, 60, 000 అయిన నష్టం ₹ 34,500, కొన్నవెల ₹ 100 అయిన నష్టం ఎంత?

నష్ట శాతం $= \dfrac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$

**ఉదాహరణ 6:** వెంకన్న 50 డజన్ల అరటి పళ్ళను ₹ 1250 కి కొనెను. అతను రవాణా ఖర్చులకు ₹ 250 ఖర్చు చేసెను. 5 డజన్ల అరటి పళ్ళు కుళ్ళిపోవుట వలన వాటిని అమ్మలేకపోయెను. మిగిలిన అరటి పళ్ళను డజను ₹ 35 లకు అమ్మిన అతనికి లాభమా, నష్టమా? ఎంత శాతం?

**సాధన:** మొత్తం కొన్నవెల = అరటి పళ్ళు కొన్నవెల + రవాణా ఖర్చులు

$= ₹\ 1250 + ₹\ 250 = ₹\ 1500.$

అమ్మిన అరటి పళ్ళు = కొన్న అరటి పళ్ళు – పాడైనవి

$= 50 - 5 = 45$ డజన్లు

కొన్నవెల $= ₹\ 35 \times 45 = ₹\ 1575$

ఇక్కడ అమ్మిన వెల > కొన్నవెల, కావున లాభం వచ్చును.

లాభం = అమ్మిన వెల – కొన్నవెల

$= ₹\ 1575 - ₹\ 1500 = ₹\ 75$

కొన్నవెల ₹ 1500 లకు లాభం ₹ 75

కొన్నవెల ₹ 100 పై లాభం, లాభ శాతం అవుతుంది.

లాభ శాతం $= \dfrac{75}{1500} \times 100 = 5\%$

**ఉదాహరణ 7:** మాలిక్ రెండు టేబుళ్ళను ఒక్కొక్కటి ₹ 3000 లకు అమ్మెను. ఒక టేబుల్‌పై 20% లాభం, మరొక దానిపై 20% నష్టం వచ్చిన, మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

SCERT, TELANGANA

**Solution:**

For first table

Selling Price = ₹ 3000

Profit percent = 20%

profit percent means increased percent on cost price

Selling price is ₹ 120 when Cost price is ₹ 100

When selling price is ₹ 3000 what will be the cost price?

Cost price = ₹ $100 \times \frac{3000}{120}$ = ₹ 2500

For second table

Selling price = ₹ 3000

Loss percent = 20%

Loss percent means decreased percent on cost price

Selling price is ₹ 80 when cost price is ₹ 100

When selling price is ₹ 3000 what will be the cost price?

Cost price = ₹ $100 \times \frac{3000}{80}$ = ₹ 3750

Total cost price on two tables = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

Total selling price on two tables = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000.

Since cost price > selling price. So there is a loss

Loss = cost price – selling price = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250

On cost price of ₹ 6250 loss is ₹ 250

On cost price of ₹ 100 what will be the loss?

Loss percent = $250 \times \frac{100}{6250} = 4\%$

So there is a loss of 4% on the whole transaction.

**Think, Discuss and Write**

A shop keeper sold two TV sets at ₹ 9,900 each. He sold one at a profit of 10% and the other at a loss of 10%. On the whole whether he gets profit or loss. If so what is its percentage?

## 5.5 Sales Tax / Value Added Tax (VAT)

Government collects taxes on every sale. This is called VAT. Shop keepers collect this from the customers and pay it to the Government. Why does the government charge taxes like this? Do you know? With the taxes collected, government does several welfare activities.

SCERT, TELANGANA

**సాధన:**

| మొదటి టేబుల్ | రెండవ టేబుల్ |
|---|---|
| అమ్మిన వెల = ₹ 3000 | అమ్మిన వెల = ₹ 3000 |
| లాభ శాతం = 20% | నష్ట శాతం = 20% |
| లాభ శాతం అనగా కొన్నవెలపై పెరుగుదల శాతం | నష్ట శాతం అనగా కొన్నవెలపై తగ్గుదల శాతం |
| అమ్మకపు వెల ₹ 120 అయిన కొన్నవెల ₹ 100 | అమ్మకపు వెల ₹ 80 అయిన కొన్నవెల ₹ 100 |
| అమ్మకపు వెల ₹ 3000 అయిన కొన్నవెల? | అమ్మకపు వెల ₹ 3000 అయిన కొన్నవెల |
| కొన్నవెల $= ₹\ 100 \times \frac{3000}{120} = ₹\ 2500$ | కొన్నవెల $= ₹\ 100 \times \frac{3000}{80} = ₹\ 3750$ |

రెండు టేబుళ్ళ కొన్నవెల $= ₹\ 2500 + ₹\ 3750 = ₹\ 6250$

రెండు టేబుళ్ళ అమ్మకం వెల $= ₹\ 3000 + ₹\ 3000 = ₹\ 6000$.

ఇక్కడ, కొన్నవెల > అమ్మిన వెల, కావున నష్టం వస్తుంది.

నష్టం = కొన్నవెల – అమ్మిన వెల $= ₹\ 6250 - ₹\ 6000 = ₹\ 250$

కొన్నవెల ₹ 6250 అయిన నష్టం ₹ 250

కొన్నవెల ₹ 100 అయిన నష్టం ఎంత?

$$\text{నష్ట శాతం} = 250 \times \frac{100}{6250} = 4\%$$

అనగా మొత్తం మీద అతనికి 4% నష్టం వచ్చును.

**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి**

ఒక దుకాణదారుడు రెండు TV లను ఒక్కొక్కటి ₹ 9,900 లకు అమ్మెను. మొదటి దానిపై 10% లాభం, రెండవ దానిపై 10% నష్టం వచ్చిన అతనికి మొత్తం మీద లాభమా? నష్టమా?

## 5.5 అమ్మకపు పన్ను/ విలువ ఆధారిత పన్ను

ప్రభుత్వం వారు వస్తువుల అమ్మకాలపై పన్ను వసూలు చేయును. దీనినే మనం విలువ ఆధారిత పన్ను (VAT) అంటాము. దుకాణదారుడు మన నుండి అంటే వినియోగదారుల నుండి ఈ పన్ను వసూలు చేసి ప్రభుత్వానికి చెల్లించును. అసలు ప్రభుత్వం ఈ పన్నులను ఎందుకు వేస్తుందో మీకు తెలుసా? ఇలా వసూలు చేసిన పన్ను మొత్తాలతో ప్రభుత్వం అనేక సంక్షేమ కార్యక్రమాలు చేస్తుంది.

SCERT TELANGANA

Sales tax is levied on the sale of movable goods. VAT is imposed on goods only and not services and it has replaced sales tax. The percent of VAT is different for different items. In general, on the essential commodities, there is an exemption from VAT, 1% on bullion and precious stones, 5% on industrial inputs and capital goods and items of mass consumption. For all other items it is 14.5%. ( Rates were fixed by Government of India in 2012).

VAT is charged on the Selling Price of an item and will be included in the bill. VAT is an increase percent of selling price. Observe the following VAT added bill.

Ganapati went to a medical shop to buy medicines for his mother. The shop keeper gave the bill which appears like this. Bill amount was ₹ 372.18. It contains 5% VAT.

(i) Find the bill amount before VAT was added.

Tax Invoice No. : 2012?301549007214 Date : 15-09-2012 20:48:31

Name : Ganpathi Age : 35 Gender : M Doc: Dr. Aiman Do.Reg. No. :

Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)

| S. | Product | Mfgr | Sch | Batch | Exp. | MRP. | Rate | Qty | Amount |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | BETATROP TAB | SUN | H | BSK4198 | 12-14 | 5.9 | 5.9 | 60 | 318.60 |
| 2. | ECOSPRIN 150 MG TAB | USV | H | 04004652 | 05-14 | 0.4242857 | 0.38 | 42 | 16.04 |
| 3. | LASIX 40 MG TAB | AVENTIS | H | 0212016 | 03-16 | 0.44733334 | 0.40 | 15 | 6.04 |
| 4. | ELDERVIT PLUS CAD | ELDER | C | SE0022008 | 08-13 | 2.3333333 | 2.10 | 15 | 31.5 |

Amount saved : 41.35 VAT ON ₹ 354.45 @ 5% = 17.72 Total : 372.18

Rounded Total : 372.00

From the bill copy it is clear that the actual bill amount = ₹ 354.45 and VAT @ 5% = ₹17.72

**Example 8:** The cost of a pair of shoes is ₹ 450. The sales tax charged was 6%. Find the bill amount.

**Solution:** On ₹ 100 the sales tax paid is ₹ 6.

On ₹ 450 the tax to be paid is?

Sales tax paid = ₹ $\frac{6}{100} \times 450$ = ₹ 27.

Bill amount = Cost of item + sales tax = ₹ 450 + ₹ 27 = ₹ 477.

## 5.6 Goods and Service Tax (GST)

It is a single indirect tax on the supply of goods and services. It was introduced in July 2017 by abolishing a variety of taxes such as sales tax and excise prevailed in India. Under GST, tax is imposed on the basis of value addition at each stage of the movement of goods and services.

SCERT, TELANGANA

అమ్మకం పన్ను అనేది రవాణా చేసే సరుకులపై మాత్రమే వేస్తారు. వ్యాట్ (VAT) అనేది కేవలం సరుకులపై వేసే పన్ను. దీనిని సేవలపై వేరు. అమ్మకం పన్నునే ఇప్పుడు VAT గా మార్చారు. ఇది అన్ని వస్తువులకు ఒకేలా ఉండదు. నిత్యావసర వస్తువులపై VAT ఉండదు. 2012 సంవత్సరం నాటికి బంగారం, వజ్రాలు మొదలైన వాటిపై 1%, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల పెట్టుబడి సరుకులు, ఎక్కువ వినియోగమున్న వస్తువులపై 5% మిగిలిన అన్ని ఇతర వస్తువులపై 14.5% పన్నును కేంద్ర ప్రభుత్వం నిర్ణయించింది.

ఈ VAT ను ఎప్పుడూ అమ్మకపు పన్నుపై లెక్కిస్తారు. ఇంకా ఇది మనం కట్టే బిల్లులో కలిపి ఉంటుంది. VAT అనేది అమ్మకపు వెలపై పెరుగుదల శాతం ఈ క్రింద వచ్చిన బిల్లును పరిశీలించండి. VAT కలిపిన బిల్లు.
గణపతి ఒక మందుల దుకాణంలో తన తల్లికి మందులు కొనెను. దుకాణదారుడు ఇచ్చిన బిల్లు ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది. బిల్లు మొత్తం ₹ 372.18. దీనిలో 5% VAT కలపబడి ఉన్నది.
VAT కలపక ముందు గల బిల్లు మొత్తం కనుగొనండి.

Tax Invoice No. : 2012?301549007214 Date : 15-09-2012 20:48:31

Name : Ganpathi Age : 35 Gender : M Doc: Dr. Aiman Do.Reg. No. :

Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)

| S. | Product | Mfgr | Sch | Batch | Exp. | MRP. | Rate | Qty | Amount |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | BETATROP TAB | SUN | H | BSK4198 | 12-14 | 5.9 | 5.9 | 60 | 318.60 |
| 2. | ECOSPRIN 150 MG TAB | USV | H | 04004652 | 05-14 | 0.4242857 | 0.38 | 42 | 16.04 |
| 3. | LASIX 40 MG TAB | AVENTIS | H | 0212016 | 03-16 | 0.44733334 | 0.40 | 15 | 6.04 |
| 4. | ELDERVIT PLUS CAD | ELDER | C | SE0022008 | 08-13 | 2.3333333 | 2.10 | 15 | 31.5 |

VAT ON ₹ 354.45 @ 5% = 17.72 Total : 372.18
Rounded Total : 372.00

బిల్లును పరిశీలించిన బిల్లు మొత్తం = ₹ 354.45 ,VAT @ 5% = ₹17.72

**ఉదాహరణ 8:** ఒక జత బూట్లు ₹ 450. దానిపై 6% అమ్మకపు పన్ను విధించిన కట్టవలసిన బిల్లు మొత్తం ఎంత?

**సాధన:** ₹ 100 లపై అమ్మకం పన్ను ₹ 6.

₹ 450 పై అమ్మకం పన్ను ఎంత?

$$\text{అమ్మకం పన్ను} = ₹\ \frac{6}{100} \times 450 \quad = ₹\ 27.$$

బిల్లు మొత్తం = వస్తువు ఖరీదు + అమ్మకం పన్ను = ₹ 450 + ₹ 27 = ₹ 477.

## 5.6 వస్తువు సేవా పన్ను

ఇది వస్తువుల మరియు సేవల సరఫరాపై ఒకే పరోక్ష పన్ను. భారతదేశంలో విక్రయ పన్ను మరియు ఎక్సైజ్ లాంటి అనేక రకాల పన్నులను రద్దు చేయడం ద్వారా ఇది 2017 జులైలో ప్రవేశపెట్టబడింది. GST పరిధిలో, వస్తువుల మరియు సేవల యొక్క కదలిక ప్రతి దశలో విలువ జోడింపు ఆధారంగా పన్ను విధించబడుతుంది.

SCERT, TELANGANA

Different slabs of tax rates such as 3%, 5%, 12%, 18% and 28% are imposed on almost all the goods and services. This slab is same throughout the country. In prescribed slabs 50% of the amount goes to central government and the other 50% goes to state government.

**Example:9** Vignesh went to a general store to buy some items for his family. The shop keeper gave the bill which appears as follows.

Bill amount was ₹ 2200. It contains 18% GST. Find the bill amount before GST was added and Also find CGST and SGST share amount in GST?

| Name of Item | Quantity | Rate Per kg | Amount (₹) |
|---|---|---|---|
| Rice | 10 kg | 100 | 1000 |
| Washing Powder | 3 kg | 100 | 300 |
| Pulses | 6 kg | 150 | 900 |
| **Total** | | | **2200** |

**Solution:** Bill amount including GST = ₹ 2200

Value of GST = 18%

Value of GST in the bill amount = $2200 \times \frac{18}{100}$ = ₹ 396

Total Bill amount before GST = ₹ 2200 – ₹ 396 = ₹ 1804

The percentage of CGST in GST = 50%

The percentage of SGST in GST = 50%

The value of CGST in GST amount = $396 \times \frac{50}{100}$ = ₹ 198

Similarly the value of SGST in GST amount = $396 \times \frac{50}{100}$ = ₹ 198

**Example: 10** The cost of a pair of shoes is ₹1000. The GST charged was 5%. Find the bill amount.

**Solution:** On ₹ 100 the GST paid is ₹ 5.

On ₹ 1000 the tax to be paid is?

GST tax paid = ₹$\frac{5}{100} \times 1000$ = ₹ 50

Bill amount = Cost of item + GST = ₹1000 + ₹50 = ₹ 1050.

## Exercise - 5.2

1. In the year 2012, it was estimated that there were 36.4 crore Internet users worldwide. In the next ten years, that number will be increased by 125%. Estimate the number of Internet users worldwide in 2022.

SCERT, TELANGANA

పన్ను రేట్లు వివిధ స్లాబులు 3%, 5%, 12%, 18% మరియు 28% దాదాపు అన్ని వస్తువులు మరియు సేవల మీద విధించబడతాయి. ఈ స్లాబ్ దేశ వ్యాప్తంగా ఉంటుంది. నిర్ణయించిన స్లాబులలో 50% కేంద్ర ప్రభుత్వానికి మరియు 50% రాష్ట్ర ప్రభుత్వానికి చెందుతుంది.

**ఉదాహరణ 9:** విగ్నేశ్ సరుకుల దుకాణమునకు వెళ్ళి సబ్బులకు సంబంధించిన వస్తువులను కొన్నాడు. దుకాణదారుడు ఇచ్చిన బిల్లులో ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నది. బిల్లు మొత్తం ₹ 2200 దీనిలో 18% వస్తు సేవా పన్ను (GST) కలపబడింది. అయితే GST కలపక ముందు బిల్లు మొత్తం కనుగొనండి. GST లోని కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాల వాటాల విలువలు ఎంతెంత?

| వస్తువు పేరు | పరిమాణం | రేటు కి.గ్రా. | మొత్తం (₹) |
|---|---|---|---|
| బియ్యం | 10 కి.గ్రా. | 100 | 1000 |
| సర్ఫు ప్యాకెట్లు | 3 కి.గ్రా. | 100 | 300 |
| పప్పులు/ విత్తనాలు | 6 కి.గ్రా. | 150 | 900 |
| **బిల్లు మొత్తం** | | | **2200** |

**సాధన:**

బిల్లు మొత్తం విలువ = ₹ 2200

బిల్లులో GST విలువ = 18%

$= 2200 \times \frac{18}{100} = ₹\ 396$

GST కలపక ముందు బిల్లు మొత్తం = ₹ 2200 − ₹ 396 = ₹ 1804

GST లో కేంద్రం (CGST) వాటా = 50%

GST లో రాష్ట్రం (SGST) వాటా = 50%

GST లో కేంద్రం (CGST) వాటా విలువ $= 396 \times \frac{50}{100} = ₹\ 198$

GST లో రాష్ట్రం (SGST) వాటా విలువ $= 396 \times \frac{50}{100} = ₹\ 198$

**ఉదాహరణ 10:** ఒక జత బూట్లు ₹1000. దానిపై 5% GST విధించిన కట్టవలసిన బిల్లు మొత్తం ఎంత?

**సాధన:** ₹ 100 పై GST ₹ 5

₹ 1000 పై GST ఎంత?

$GST = ₹\frac{5}{100} \times 1000 = ₹\ 50$

బిల్లు మొత్తం = వస్తువు ఖరీదు + GST = ₹1000 + ₹50 = ₹ 1050.

## అభ్యాసం - 5.2

1. 2012 వ సంవత్సరంలో ప్రపంచం మొత్తం మీద అంతర్జాలం (Internet) ఉపయోగించే వారి సంఖ్య 36.4 కోట్లుగా అంచనా వేయడమైనది. వచ్చే 10 సంవత్సరాలలో ఈ సంఖ్య 125% పెరుగునని అంచనా వేయబడినది. అయిన 2022వ సంవత్సరంలో అంతర్జాలంను ఉపయోగిస్తారని అంచనా వేయబడిన, వారి సంఖ్య ఎంత?



SCERT TELANGANA

2. An owner increases the rent of his house by 5% at the end of each year. If currently its rent is ₹ 2500 per month, how much will be the rent after 2 years?
3. On Monday, the value of a company's shares was ₹ 7.50. The price increased by 6% on Tuesday, decreased by 1.5% on Wednesday, and decreased by 2% on Thursday. Find the value of each share when trade opened on Friday.
4. With most of the Xerox machines, you can reduce or enlarge your original by entering a percentage for the copy. Reshma wanted to enlarge a 2 cm by 4 cm drawing. She set the Xerox machine for 150% and copied her drawing. What will be the dimensions of the copy of the drawing be?
5. The printed price of a book is ₹ 150. And discount is 15%. Find the actual amount to be paid.
6. The marked price of a gift item is ₹ 176 and sold it for ₹ 165. Find the discount percent.
7. A shop keeper purchased 200 bulbs for ₹ 10 each. However 5 bulbs were fused and put them into scrap. The remaining were sold at ₹ 12 each. Find the gain or loss percent.
8. Complete the following table with appropriate entries (Wherever possible)

| S. No. | Cost Price (C.P.) | Expenses | Selling Price(S.P.) | Profit | Loss | Profit Percentage | Loss Percentage |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ₹ 750 | ₹ 50 | | ₹ 80 | | | |
| 2 | ₹ 4500 | ₹ 500 | | | ₹ 1,000 | | |
| 3 | ₹ 46,000 | ₹ 4000 | ₹ 60,000 | | | | |
| 4 | ₹ 300 | ₹ 50 | | | | 12% | |
| 5 | ₹ 330 | ₹ 20 | | | | | 10% |

9. A table was sold for ₹ 2,142 at a gain of 5%. At what price should it be sold to gain 10%.
10. Gopi sold a watch to Ibrahim at 12% gain and Ibrahim sold it to John at a loss of 5%. If John paid ₹ 1,330, then find how much did Gopi sold it?
11. Madhu and Kavitha purchased a new house for ₹ 3,20,000. Due to some economic problems they sold the house for ₹ 2, 80,000.

    Find (a) The loss incurred (b) the loss percentage.
12. A pre-owned car show-room owner bought a second hand car for ₹ 1,50,000. He spent ₹ 20,000 on repairs and painting, then sold it for ₹ 2,00,000. Find whether he gets profit or loss. If so, what percent?
13. Lalitha took a parcel from a hotel to celebrate her birthday with her friends. It was billed with ₹ 1,450 including 5% VAT. Lalitha asked for some discount, the hotel owner gave 8% discount on the bill amount. Now find the actual amount that lalitha has to pay to the hotel owner.

SCERT, TELANGANA

2. ఒక గృహ యజమాని తన ఇంటి అద్దెను ప్రతీ సంవత్సరం 5% పెంచును. ప్రస్తుతం ఆ ఇంటి అద్దె ₹ 2500 అయిన రెండు సంవత్సరాల తరవాత ఆ ఇంటి అద్దె ఎంత?

3. ఒక కంపెనీ విలువ సోమవారం నాడు ₹ 7.50, మంగళవారం నాడు అది 6% పెరిగి, బుధవారం నాడు 1.5% తగ్గినది. మరల గురువారం నాడు 2% తగ్గిన, శుక్రవారం నాడు ఉదయం ఆ షేర్ విలువ ఎంత?

4. చాలా జిరాక్స్ యంత్రాలలో ప్రతీసారి పరిమాణ శాతంను మార్చడం ద్వారా ఇచ్చిన ప్రతి యొక్క పరిమాణంను పెంచడం లేదా తగ్గించడం చేయవచ్చును. రేష్మా తన వద్దనున్న 2 సెం.మీ., 4 సెం.మీ. బొమ్మను పరిమాణం పెంచాలని కోరుకున్నది. ఆమె జిరాక్స్ యంత్రంలో 150% వేసి దాని ప్రతిని తీసుకొన్నది. అయిన ఆమెకు లభించిన ప్రతిలోని బొమ్మ పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

5. ఒక పుస్తకం ముద్రిత వెల ₹ 150, దానిపై 15% రుసుము లభించిన ఆ పుస్తకంను కొనుటకు ఎంత మొత్తం చెల్లించవలెను?

6. ఒక కానుక ప్రకటన వెల ₹ 176, దానిని దుకాణదారుడు మీకు ₹ 165 లకు అమ్మిన మీకు లభించిన రుసుమును, రుసుము శాతంను కనుగొనండి.

7. ఒక దుకాణదారుడు ప్రతీ బల్బు ₹ 10 చొప్పున 200 బల్బులను కొనెను. కాని అందులో 5 బల్బుల కాలిపోయినందున వాటిని బయట పడేసినాడు. మిగిలిన బల్బులను ఒక్కొక్కటి ₹ 12 చొప్పున అమ్మిన మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

8. ఈ క్రింది పట్టికలో సరైన గడులను అవసరమైన చోట మాత్రమే నింపుము.

| క్ర.సం. | కొన్నవెల | అదనపు ఖర్చులు | అమ్మకపు వెల | లాభం | నష్టం | లాభ శాతం | నష్ట శాతం |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ₹ 750 | ₹50 | | ₹ 80 | | | |
| 2 | ₹ 4500 | ₹500 | | | ₹ 1,000 | | |
| 3 | ₹ 46,000 | ₹4000 | ₹ 60,000 | | | | |
| 4 | ₹ 300 | ₹50 | | | | 12% | |
| 5 | ₹ 330 | ₹20 | | | | | 10% |

9. ఒక బల్లను ₹ 2,142 లకు అమ్మగా 5% లాభం వచ్చెను. దానిపై 10% లాభం రావలెనన్న దానిని ఎంతకు అమ్మవలెను?

10. గోపి ఒక గడియారంను 12% లాభమునకు ఇబ్రహీమ్ అమ్మెను. ఇబ్రహీమ్ దానిని 5% నష్టమునకు జాన్‌కు అమ్మెను. జాన్ ఆ గడియారమునకు ₹ 1,330 చెల్లించిన గోపి ఆ గడియారంను ఎంతకు అమ్మెను?

11. మధు మరియు కవిత ఒక క్రొత్త ఇంటిని ₹ 3,20,000 లకు కొనిరి. కొన్ని ఆర్థిక ఇబ్బందుల వల్ల ఆ ఇంటిని ₹ 2, 80,000 లకు అమ్మిన (a) వారికి ఇచ్చిన నష్టమును (b) నష్ట శాతమును కనుగొనుము.

12. ఒక పాత కార్లను కొని, అమ్మే దుకాణదారుడు ఒక పాత కారును ₹ 1,50,000 లకు కొని దాని మరమ్మతులు మరియు రంగు వేయుటకు ₹ 20,000 ఖర్చు చేసెను. అతడు ఆ కారును ₹ 2,00,000 లకు అమ్మిన అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

13. లలిత తన పుట్టిన రోజును స్నేహితులతో జరుపుకొనుటకు హోటల్ నుండి పార్సెల్ తెప్పించినది. 5% VAT తో కలిపి ₹ 1,450 బిల్లు వేయబడినది. హొటల్ వారు బిల్లు మొత్తంపై 8% రుసుము ఇచ్చిన లలిత హోటల్ వారికి కట్టవలసిన మొత్తంను కనుగొనుము.

SCERT, TELANGANA

14. If GST is included in the price, find the actual price of each of the following.

| S. No. | Item | GST% | Bill amount(in ₹) | Original Price( in ₹) |
|---|---|---|---|---|
| (i) | Diamond | 3% | ₹ 10,300 | |
| (ii) | Pressure cooker | 12% | ₹ 3,360 | |
| (iii) | Face powder | 28% | ₹ 256 | |

15. A Cellphone Company fixed the price of a cellphone as ₹ 4500. A dealer purchased a cell phone on which he paid 12% GST. additionally. How much did the dealer paid as GST? What is the purchase price of Cellphone?

16. A Super-Bazar prices an item in rupees and paise so that when 4% sales tax is added, no rounding is necessary because the result is exactly in 'n' rupees, where 'n' is a positive integer. Find the smallest value of 'n'.

## 5.7 Compound Interest

Interest is the money paid by bank or post office when money is deposited with them. Also it is paid by the borrower to the person or organisation that lent money. Interest is the extra amount paid on principal amount with a year marked percent.

But how do we calculate this interest? When the interest is calculated uniformly on the original principal throughout the loan period, what do you call such interest calculation? Yes! It is called simple interest. It is also an increase percent on the Principal. Let us see an example to understand this.

**Example 11:** A sum of ₹ 2500 is borrowed at a rate of 12% per annum for 3 years. Find the simple interest on this sum and also the amount to be paid at the end of 3 years.

**Solution:** Here P = ₹ 2500, T = 3 years, R = 12%

$$\text{As} \quad I = \frac{PTR}{100}$$

$$= \frac{2500 \times 3 \times 12}{100}$$

Interest for 3 years = ₹ 900.

Amount to be paid at the end of 3 years = Principal + Interest

= ₹ 2500 + ₹ 900 = ₹ 3400.

We see that $\text{Amount} = \text{Principal} + \text{Interest} = P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$

When $T = 1\text{year}, \ \text{Amount } A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$



SCERT TELANGANA

14. క్రింది పట్టికలో GST తో కలిసిన బిల్లు మొత్తం ఇవ్వబడినది. GST కలపక ముందు ఆ వస్తువుల ధరను కనుగొనుము.

| క్ర.సం. | వస్తువు | GST % | బిల్లు మొత్తం (₹ లలో) | అసలు ధర (₹ లలో) |
|---|---|---|---|---|
| (i) | వజ్రం | 3% | ₹10,300 | |
| (ii) | ప్రెజర్ కుక్కర్ | 12% | ₹3,360 | |
| (iii) | పౌడర్ డబ్బా | 28% | ₹256 | |

15. ఒక సెల్‌ఫోన్ కంపెనీదారు సెల్‌ఫోన్ రేటును ₹ 4500 గా నిర్ణయించాడు. దానిపై డీలర్ 12% GST చెల్లించి సెల్‌ఫోన్ ఖరీదు చేశాడు. అయితే డీలర్ సెల్‌ఫోన్‌పై ఎంత GST చెల్లించాడు. GST తో కలిపి సెల్‌ఫోన్ కొన్న ధర ఎంత?

16. ఒక సూపర్ బజారులోని వస్తువు వెలలు 4% అమ్మకపు పన్ను కలిపినను రూపాయలకు సవరింపు అవసరం లేక 'n' రూపాయలు అగునట్లు రూపాయలు మరియు పైసలలో నిర్ణయించెను. 'n' ధనసంఖ్య అయిన, 'n' విలువ కనిష్ఠంగా ఎంత ఉండవచ్చును?

## 5.7 చక్ర వడ్డీ

వడ్డీ అనేది సాధారణంగా మనం బ్యాంక్‌లో లేదా పోస్టాఫీస్‌లో డబ్బులు దాచుకొన్నప్పుడు ఇస్తారు. అంతేకాక ఎవరైనా డబ్బులు అప్పు తీసుకొన్నప్పుడు బాకీదారు అప్పు ఇచ్చినవారికి వడ్డీ చెల్లిస్తారు. వడ్డీ అనేది సంవత్సర వడ్డీ రేటుతో అసలు మీద వచ్చే అదనపు సొమ్ము.

కానీ ఈ వడ్డీని ఎలా లెక్కకడతారు? వడ్డీని చెల్లించినంత కాలం తీసుకున్న అసలుపై ఒకే విధంగా లెక్కకడితే అటువంటి వడ్డీని ఏమంటారు? దానిని సాధారణ వడ్డీ అంటారు. కదా! ఇది కూడా మనం తీసుకున్న అసలుపై పెరుగుదల శాతమే. ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం.

**ఉదాహరణ 11:** ₹ 2500 లను 12% వడ్డీ రేటున 3 సంవత్సరాలకు వడ్డీకి తీసుకొనిన, దానిపై వడ్డీని, 3 సంవత్సరముల చివర కట్టవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.

**సాధన:** ఇక్కడ P = ₹ 2500, T = 3 సంవత్సరాలు, R = 12%

$$I = \frac{PTR}{100} \text{ కావున}$$

$$= \frac{2500 \times 3 \times 12}{100}$$

3 సంవత్సరాలకు అగు వడ్డీ = ₹ 900.

3 సంవత్సరముల చివర చెల్లించవలసిన మొత్తము = అసలు + వడ్డీ

= ₹ 2500 + ₹ 900 = ₹ 3400.

పై ఉదాహరణ నుండి మనం ఇలా చెప్పవచ్చు.

$$\text{మొత్తం} = \text{అసలు} + \text{వడ్డీ} = P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$$

$$T = 1 \text{ సంవత్సరం అయిన మొత్తం } A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$



SCERT, TELANGANA

## Try These

Complete the table

| S. No. | Principal (P) in ₹ | Time (T) in years | Rate of interest p.a. (R) in % | Interest (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ in ₹ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3000 | 3 | 6 | |
| 2 | | 2 | 5 | 50 |
| 3 | 1875 | | 12 | 675 |
| 4 | 1080 | 2.5 | | 90 |

Ramesh borrowed an amount of ₹100 at the rate of 10% p.a. (per annum) from Sreenu as hand loan. After 2 years he went to Sreenu to repay his debt. Ramesh gave an amount of ₹ 120 and Sreenu said he has to pay ₹ 1 more. To find out the difference in their calculations, both of them did their calculations on a paper as shown below.

| **Ramesh's method** | | | **Sreenu's method** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^{st}$ year | Principal amount<br>Interest @ 10%<br>Total amount | ₹ 100<br>₹ 10<br>₹ 110 | $1^{st}$ year | Principal amount<br>Interest @ 10%<br>Total amount | ₹ 100<br>₹ 10<br>₹ 110 |
| $2^{nd}$ year | Principal<br>Interest @ 10%<br>Amount to be paid at the end of $2^{nd}$ year | ₹ 100<br>₹ 10<br>= Principal + Interest on $1^{st}$ year + Interest on $2^{nd}$ year<br>= 100+10+10<br>= ₹120 | $2^{nd}$ year | Principal<br>Interest @ 10%<br>Amount to be paid at the end of $2^{nd}$ year | ₹ 110<br>₹ 11<br>₹ 121 |

The difference in the two methods is ₹1. Why there is a difference in both the methods? You can easily observe that while doing the calculation of interest for $2^{nd}$ year Ramesh took principal amount as ₹ 100 whereas for doing the same Sreenu took ₹ 110. We call the interest calculated by Ramesh as Simple interest. Do you know what we call the interest calculated by Sreenu? In case of Sreenu, the interest is calculated on amount accumulated till then. It is called compound interest.. So Compound interest allows you to earn interest on interest. Which type of interest would you prefer and why ?



SCERT, TELANGANA

## ప్రయత్నించండి

క్రింది పట్టికను నింపుము.

| క్ర.సం. | అసలు (రూపాయలలో) | కాలము (సంవత్సరాలలో) | వడ్డీ రేటు % లో (R) | వడ్డీ (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ (రూపాయలలో) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3000 | 3 | 6 | |
| 2 | | 2 | 5 | 50 |
| 3 | 1875 | | 12 | 675 |
| 4 | 1080 | 2.5 | | 90 |

రమేశ్ ₹100 లను సంవత్సరమునకు 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున శ్రీను వద్ద చేబదులు తీసుకొనెను. 2 సంవత్సరముల తరువాత అప్పు తీర్చుటకు అతను శ్రీను వద్దకు వెళ్ళి ₹ 120 లను ఇచ్చెను. శ్రీను అప్పుడు ఇంకొక రూపాయి ఇవ్వవలెనని అడుగగా, లెక్కలో ఎందుకు తేడా వచ్చినదో తెలుసుకొనుటకు ఇద్దరూ వారి లెక్కలను కాగితంపై ఈ క్రింది విధంగా చేశారు.

| రమేష్ చేసిన పద్ధతి | | | శ్రీను చేసిన పద్ధతి | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1వ సంవత్సరం | అసలు<br>వడ్డీ<br>@ 10% మొత్తం | ₹ 100<br>₹ 10<br>₹ 110 | 1వ సంవత్సరం | అసలు<br>వడ్డీ<br>@ 10% మొత్తం | ₹ 100<br>₹ 10<br>₹ 110 |
| 2వ సంవత్సరం | అసలు<br>వడ్డీ<br>@ 10% మొత్తం<br>2వ సంవత్సరం<br>కట్టవలసిన మొత్తం | ₹ 100<br>₹ 10<br>= అసలు +<br>1వ సంవత్సర వడ్డీ<br>+<br>2వ సంవత్సర వడ్డీ<br>= 100+10+10<br>= ₹ 120 | 2వ సంవత్సరం | అసలు<br>వడ్డీ<br>@ 10% మొత్తం | ₹ 100<br>₹ 11<br>₹ 121 |

రెండు పద్ధతులలో తేడా ₹1. వీటిలో తేడా ఎందుకు వచ్చింది? జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే రెండవ సంవత్సరానికి వడ్డీ లెక్కించడానికి రమేష్ అసలు ₹100 లను తీసుకొనగా శ్రీను రెండవ సంవత్సరానికి వడ్డీ లెక్కించడానికి అసలు ₹110 గా తీసుకున్నాడు. ఇక్కడ రమేష్ లెక్కకట్టగా వచ్చిన వడ్డీని సాధారణ వడ్డీ అంటాము. మరి శ్రీను లెక్కించగా వచ్చిన వడ్డీని ఏమని పిలుస్తారో మీకు తెలుసా? ఇక్కడ వడ్డీని లెక్క కట్టడానికి అప్పటిదాకా జమ అయిన వడ్డీని అసలులో కలిపి దానిని అసలుగా తీసుకొనడం జరిగింది. ఇలా కట్టే వడ్డీనే చక్రవడ్డీ అంటాము. చక్రవడ్డీ అంటే వడ్డీపై వేసే వడ్డీ. మీరు ఈ రెండు రకాల వడ్డీలలో దేనికి ఎప్పుడు ప్రాధాన్యతనిస్తారు?

SCERT, TELANGANA

## 5.8 Deducing a formula for Compound interest

In the above example, we observe that Sreenu calculated compound interest. If it is a year or two, it is easy to do the calculations like that. But if we have more than two years, should we calculate in the same way? Is there a shorter way for finding compound interest? Let us consider an example and try to find out.

When t = 1year Amount (A) = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)$ with simple interest

Let $P_1$ = ₹ 10,000 and R = 12% per annum

| Sreenu's method | | | Generalisation of same method | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^{st}$ year | Principal $P_1$ | ₹ 10,000 | $1^{st}$ year | Principal | $P_1$ |
| | Amount $A_1$ | $10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$<br>$= 10000\left(\frac{112}{100}\right)$<br>= ₹ 11,200 | | Amount $A_1$ | $A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$ |
| $2^{nd}$ year | Principal $P_2$ | ₹ 11,200 | $2^{nd}$ year | Principal | $P_2 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$ |
| | Amount $A_2$ | $11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$<br>$= 11200\left(\frac{112}{100}\right)$<br>= ₹ 12,544 | | Amount $A_2$ | $A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$<br>$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$<br>$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$ |

Proceeding in this way the amount at the end of 'n' years will be $A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

Thus the amount on compound interest $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

But by using this we get only the amount to be paid at the end of 'n' years. How do we get compound interest? Yes it is so simple. From the final amount subtract principal to get compound interest.

$$\therefore \text{C.I} = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

So what is the difference between simple interest and compound interest? Simple interest remains the same every year . But compound interest increases over time.

SCERT, TELANGANA

## 5.8 చక్రవడ్డీకి సూత్రమును రాబట్టుట

పై ఉదాహరణలో శ్రీను చక్రవడ్డీని లెక్కించడాన్ని మనము చూశాము. 1, 2 సంవత్సరాలకు ఇలా లెక్కించడం సులభం, కాని చాలా సంవత్సరాలకు ఇలా లెక్కించడానికి ఏమి చేయాలి? దానికి ఏదైనా సులభ పద్ధతి వుందా, ఒక ఉదాహరణ ద్వారా దానిని ప్రయత్నిద్దాము.

T=1సంవత్సరం అయినపుడు సాధారణ వడ్డీతో మొత్తంనకు సూత్రం మొత్తం $A = A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$P_1 =$ ₹10,000, మరియు $R =$ సంవత్సరమునకు 12% అనుకొనుము.

| శ్రీను చేసిన పద్ధతి | | | అదే పద్ధతి సాధారణీకరించుట | | |
|---|---|---|---|---|---|
| మొదటి సంవత్సరం | అసలు $P_1$<br>మొత్తం $(A_1)$ | ₹ 10,000<br>$10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$<br>$= 10000\left(\frac{112}{100}\right)$<br>= ₹ 11,200 | మొదటి సంవత్సరం | అసలు<br>మొత్తం $(A_1)$ | $P_1$<br>$A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$ |
| రెండవ సంవత్సరం | అసలు $P_2$<br>మొత్తం $(A_2)$ | ₹ 11,200<br>$11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$<br>$= 11200\left(\frac{112}{100}\right)$<br>= ₹ 12,544 | రెండవ సంవత్సరం | అసలు<br>మొత్తం $(A_2)$ | $P_2 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$<br>$A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$<br>$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$<br>$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$ |

ఇదే పద్ధతిని కొనసాగించగా 'n' సంవత్సరాల తరవాత మొత్తమునకు సూత్రము $A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

చక్రవడ్డీ ప్రకారం మొత్తం $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ అని రాస్తాము.

ఈ సూత్రమును ఉపయోగించడం వలన మనం 'n' సంవత్సరాల చివర కట్టవలసిన మొత్తం మాత్రమే తెలుస్తుంది. మరి చక్రవడ్డీ ఎంతో ఎలా తెలుస్తుంది? దానిని చాలా సులభంగా తెలుసుకోవచ్చును. వచ్చిన మొత్తం నుండి అసలును తీసివేసిన చక్రవడ్డీ ఎంతో తెలుస్తుంది.

$$\therefore C.I = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

సాధారణ వడ్డీకి, చక్రవడ్డీకి తేడా ఏమిటో తెలుసునా? సాధారణ వడ్డీ ప్రతి సంవత్సరం ఒకేలా వుంటుంది. కానీ చక్రవడ్డీ కాలంతో పాటు పెరుగుతూ వుంటుంది.

SCERT, TELANGANA

**Example:12** What will be the amount and compound interest, if ₹ 5000 is invested at 8% per annum 2 years?

**Solution:** P = ₹ 5000; R = 8% and n = 2 years

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = ₹\ 5832.$$

Interest earned = Amount – Principal

= ₹ 5832 – ₹ 5000

= ₹ 832

### Do These

1. How much compound interest is earned by investing ₹ 20 000 for 6 years at 5% per annum compounded annually. ?
2. Find compound interest on ₹ 12600 for 2 years at 10% per annum compounded annually.

## 5.9 Interest compounded annually or Half yearly (Semi Annually)

You may observe that in the previous problems we are using the word 'compounded' annually. Does it have any significance? Yes, it has. Because we can also have interest rates compounded half yearly or quarterly.

When interest is not compounded annually what do we call the time period after which interest is added to principal? It is called **Conversion period**. When interest is compounded half yearly, there are two conversion periods in a year each after 6 months. In such a case, the interest will be half of the annual rate and the number of times that interest is compounded is twice the number of years.

**Example:13** Calculate Compound interest on ₹ 1000 over a period of 1 year at 10% per annum if interest is compounded half yearly.

**Solution:** As interest is compounded half yearly, so there will be 2 conversion periods in a year.

So n=2

Rate of interest for 6 months rate = $\frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 12:** ₹5000 లను సంవత్సరమునకు 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున 2 సంవత్సరములకు పొదుపు చేసిన వచ్చు చక్రవడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

**సాధన:** P=₹5000; R=8% మరియు n=2 సంవత్సరములు

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = ₹\ 5832.$$

చక్రవడ్డీ = మొత్తం – అసలు

$= ₹\ 5832 - ₹\ 5000$

$= ₹\ \ 832$

**ఇవి చేయండి**

1. ₹ 20000 లపై 5% వడ్డీ రేటు చొప్పున 6 సంవత్సరాలకు వడ్డీ సంవత్సరమునకొకసారి తిరిగి లెక్కకట్టగా వచ్చే చక్రవడ్డీ ఎంత?
2. ₹ 12600 లపై 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున 2 సంవత్సరాలకు వడ్డీ సంవత్సరమునకొకసారి తిరిగి లెక్కకట్టగా వచ్చే చక్రవడ్డీ ఎంత?

## 5.9 సంవత్సరమునకు లేదా అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టుట

పైన ఇచ్చిన లెక్కలను గమనించగా వడ్డీ సంవత్సరమునకు ఒకసారి లెక్కకట్టగా అని వున్నది. దీనికి ఏదైనా ప్రత్యేకత వున్నదా? వున్నది. ఎందుకంటే చక్రవడ్డీ అర్ధ సంవత్సరమునకు (6 నెలలకు), మూడు నెలలకు కూడా లెక్కించబడును.

చక్రవడ్డీని సంవత్సరమునకొక్కసారి లెక్కకట్టునపుడు వడ్డీని అసలుకు కలిపే కాలాన్ని ఏమంటారో మీకు తెలుసునా? దీనిని మనం వడ్డీని తిరిగి కట్టెడి కాలవ్యవధి అంటారు. వడ్డీని 6 నెలలకొకసారి లెక్కకట్టునపుడు మనకు సంవత్సరంలో రెండు కాల వ్యవధులు వుంటాయి. అపుడు వడ్డీ రేటును సంవత్సర వడ్డీ రేటులో సగము తీసుకోవాలి. కాల వ్యవధి సంవత్సరానికి రెండుగా తీసుకోవాలి.

**ఉదాహరణ 13:** ₹ 1000 పై సంవత్సరమునకు వడ్డీ రేటు 10% చొప్పున అర్ధ సంవత్సరమనకొకసారి చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టగా 1 సంవత్సరంలో వచ్చే చక్రవడ్డీ ఎంత?

**సాధన:** చక్రవడ్డీ 6 నెలలకొకసారి లెక్క కట్టుచున్నాము. కావున 1 సంవత్సర కాలంలో 2 కాల వ్యవధులు ఉంటాయి.

అనగా n=2

కావున అర్ధ సంవత్సర వడ్డీ రేటు $= \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

SCERT, TELANGANA

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

$$= ₹\ 1102.50$$

Compound interest = A – P = 1102.50 – 1000 = ₹ 102.50

### Do These

Find the number of conversion times the interest is compounded and rate for each

1. A sum taken for $1\frac{1}{2}$ years at 8% per annum is compounded half yearly.
2. A sum taken for 2 years at 4% per annum compounded half yearly.

### Think, Discuss and Write

What will happen if interest is compounded quarterly? How many conversion periods will be there? What about the quarter year rate- how much will it be of the annual rate? Discuss with your friends.

**Example 14:** What amount is to be repaid on a loan of ₹ 12000 for $1\frac{1}{2}$ year at 10% per annum if interest is compounded half yearly.

**Solution:** As interest is compounded half yearly, so number of conversion periods in $1\frac{1}{2}$ years is 3, So n = 3

rate for half year $= \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= ₹\ 13891.50$$

SCERT, TELANGANA

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

$$= ₹\ 1102.50$$

చక్రవడ్డీ = A – P = 1102.50 – 1000 = ₹ 102.50

### ఇవి చేయండి

ఒక సంవత్సరములో చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టు కాల వ్యవధులను, వడ్డీ రేటును లెక్కకట్టుము.

1. కొంత మొత్తం 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ 6 నెలలకు చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టుచూ $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములకు అప్పు తెచ్చెను.
2. కొంత మొత్తంను 4% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ 6 నెలలకు చక్రవడ్డీ లెక్కకట్టుచూ 2 సంవత్సరములకు అప్పు తెచ్చెను.

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ప్రతీ మూడు నెలలకు వడ్డీని లెక్కకట్టిన చక్రవడ్డీ ఎలా మారును? ఒక సంవత్సరంలో ఎన్ని కాల వ్యవధులు వస్తాయి? మూడు నెలలకు వడ్డీ రేటు సంవత్సర వడ్డీ రేటులో ఎంత భాగము? మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

**ఉదాహరణ 14:** ₹12000 లను 10% సంవత్సర వడ్డీ రేటు చొప్పున 6 నెలలకొకసారి చక్రవడ్డీ తిరిగి లెక్కకట్టే పద్ధతిలో అప్పు తెచ్చిన 1 సంవత్సరంలో చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?

**సాధన:** వడ్డీ 6 నెలలకొకసారి తిరిగి లెక్కకట్టే పద్ధతి కావున $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరంలో వడ్డీని తిరిగి లెక్కకట్టే కాల వ్యవధులు 3, కావున n=3

$$\text{వడ్డీరేటు} = \frac{1}{2}\times 10\% = 5\%$$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= ₹\ 13891.50$$

SCERT TELANGANA

Compound interest $= A - P$

$= 13891.50 - 12000$

$= ₹\ 1891.50$

**Example:15** Yadaiah for his family needs borrowed ₹ 5120 at $12\frac{1}{2}$ % per annum compounded annually. How much amount he has to pay to clear the debt at the end of two year nine months? Also find total how much interest he has paid?

**Solution**: Reshma tried to solve the problem like this

She first converted the time in years.

2 year 9 months = $2\frac{9}{12}$ year = $2\frac{3}{4}$ years

She tried to substitute this in the known formula $A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^{2\frac{3}{4}}$

Now she was stuck. She asked her teacher, how would she find a power which is fractional? The teacher gave her a hint. First find the amount for the whole part.

Then use this as principal to get simple interest for $\frac{3}{4}$ year

So $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$

$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$

$= ₹\ 6480$

Interest for remaining 9 months $= 6480 \times \frac{25}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} = ₹\ 607.50.$

So Yadaiah has to pay at the end of 2 year 9 months

$= 6480 + 607.50 = ₹\ 7087.50$

So total compound interest $= 7087.50 - 5120 = ₹\ 1967.50$

## 5.10 Application of Compound

Where do we use this compound interest formula? Not only for calculating interest, but it can also be used in different cases . For example,

- Increase (or decrease) in population
- The growth of bacteria if the rate of growth is known
- The value of an item, if its price increases (or decreases) in the intermediate years.

SCERT TELANGANA

చక్రవడ్డీ $= A - P$

$= 13891.50 - 12000$

$= ₹\ 1891.50$

**ఉదాహరణ 15:** యాదయ్య తన కుటుంబ అవసరాల నిమిత్తం ₹5120 లను $12\frac{1}{2}$% వడ్డీతో సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ లెక్కకట్టు చొప్పున అప్పు తెచ్చుకొనెను. 2 సంవత్సరముల 9 నెలల తరువాత అతను అప్పు తీర్చుటకు ఎంత సొమ్ము చెల్లించవలెను. అతను చెల్లించిన వడ్డీ సొమ్ము ఎంత?

**సాధన:** రేష్మ ఈ సమస్యను క్రింది పద్ధతిలో సాధించుటకు ప్రయత్నించినది.

ఆమె మొదటి 2 సంవత్సరాల 9 నెలలను సంవత్సరములలోనికి మార్చినది.

2 సంవత్సరముల 9 నెలలు = $2\frac{9}{12}$ సంవత్సరములు $2\frac{3}{4}$ సంవత్సరములు.

ఆమెకు తెలిసిన చక్రవడ్డీ సూత్రమును ఉపయోగించి దీనిని సాధించుటకు ప్రయత్నించినది.

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^{2\frac{3}{4}}$$

ఆమెకు ఇక్కడ సమస్య ఏర్పడినది. ఆమె తన ఉపాధ్యాయురాలిని ఘాతాంకములో భిన్నము ఉన్నప్పుడు ఎలా లెక్కకట్టాలని అడిగినది. ఆ ఉపాధ్యాయురాలు వడ్డీ కట్టే పద్ధతిని ఇలా చెప్పినది. మొదటి పూర్ణాంకములకు అనగా 2 సంవత్సరములు చక్రవడ్డీ సూత్ర ప్రకారం లెక్కకట్టగా వచ్చే ఆ మొత్తమును అసలుగా తీసుకొని $\frac{3}{4}$ సంవత్సరములకు వడ్డీ లెక్కకట్టమని సలహా ఇచ్చినది.

కావున $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

$$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$$

$= ₹\ 6480$

మిగిలిన 9 నెలల కాలానికి వడ్డీ $= 6480 \times \frac{25}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} = ₹\ 607.50.$

కావున యాదయ్య 2 సంవత్సరముల 9 నెలల తరవాత చెల్లించవలసిన మొత్తం

$= 6480 + 607.50 = ₹\ 7087.50$

కావున చెల్లించిన చక్రవడ్డీ $= 7087.50 - 5120 = ₹\ 1967.50$

## 5.10 చక్రవడ్డీ సూత్రము అనువర్తనములు

మనము ఈ చక్రవడ్డీ సూత్రమును ఎక్కడ ఉపయోగించవచ్చును? కేవలం వడ్డీ లెక్కకట్టుటకే కాక వివిధ సందర్భాలలో దీనిని ఉపయోగించుకోవచ్చును. ఉదాహరణకు

- జనాభా పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల
- బ్యాక్టీరియా పెరుగుదల రేటు తెలిసిన బాక్టీరియా పెరుగుదల తెలుసుకొనుటకు
- సంవత్సరాల మధ్యలో ఒక వస్తువు వెల పెరుగుతూ లేదా తగ్గుతూ వున్నపుడు ఆ వస్తువు విలువ తెలుసుకొనుటకు

**Example 16:** The population of a village is 6250. It is found that the rate of increase in population is 8% per annum. Find the population after 2 years.

**Solution:** Here P = 6250  R = 8%  T = 2 years

$$\text{Population after 2 years } A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 7290$$

**Example 17:** A rubber ball is dropped from a certain height. It is found to rebounce only 90% of its previous height. If it is dropped from the top of a 25m tall building, to what height would it raise after bouncing on the ground two times.

**Solution:** The ball rises to a height of 90% at the first bounce. So at each bounce the loss in height is 10%

So taking R = -10% the problem can be solved.

P = 25 m and n = 2

The height to which it raises after bouncing two times on the ground

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2$$

$$= 20.25 \text{ m}$$

## Exercise - 5.3

1. Sudhakar borrows ₹ 15000 from a bank to renovate his house. He borrows the money at 9% p.a. simple interest over 8 years. What are his monthly repayments?
2. A TV was bought at a price of ₹ 21000. After 1 year the value of the TV was depreciated by 5% (Depreciation means reduction of the value due to use and age of the item). Find the value of the TV after 1 year.

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 16:** ఒక గ్రామ జనాభా 6250. ఆ గ్రామ జనాభా పెరుగుదల రేటు సంవత్సరమునకు 8% గా గుర్తించబడినది. అయిన రెండు సంవత్సరముల తరువాత ఆ గ్రామ జనాభా ఎంత?

**సాధన:** ఇక్కడ $P = 6250$ $R=8\%$ $T=2$ సంవత్సరములు

2 సంవత్సరముల తరువాత ఆ గ్రామ జనాభా

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 7290$$

**ఉదాహరణ 17:** ఒక రబ్బరు బంతిని కొంత ఎత్తు నుండి నేల మీదకు విడిచిన అది ప్రతిసారి ముందు ఎగిరిన ఎత్తులో 90% మాత్రమే పైకి ఎగురును. అది ఒక 25 మీ. ఎత్తయిన భవంతిపై నుండి క్రిందకు వేయబడిన నేల మీద రెండుసార్లు పడి పైకి ఎగిరిన ఎంత ఎత్తు వరకు ఎగురును?

**సాధన:** బంతి మొదటిసారి పైకి ఎగిరిన మొదట వేసిన ఎత్తులో 90% మాత్రమే పైకి ఎగురును. అనగా ప్రతిసారి పైకి ఎగిరిన 10% ఎత్తు తగ్గును.

కావున $R=-10\%$ తీసుకొని ఈ సమస్యను సాధన చేయవచ్చును.

$P=25$ మీ. మరియు $n=2$ అయిన

నేలపై రెండుసార్లు పడి పైకి ఎగిరిన అది చేరు ఎత్తు

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2$$

$= 20.25$ మీటర్లు

## అభ్యాసం - 5.3

1. సుధాకర్ తన ఇంటి మరమ్మతుల కొరకు బ్యాంకు నుండి ₹ 15,000 అప్పు తీసుకొన్నాడు. అతడు సంవత్సరమునకు 9% వడ్డీ రేటు చొప్పున 8 సంవత్సరముల కాలానికి అప్పు తీసుకొనిన, అతడు ప్రతీ నెల ఎంత మొత్తము చెల్లించాలి?

2. ఒక టెలివిజన్‌ని ₹21,000 లకు కొన్నారు. ఒక సంవత్సరం తరువాత దాని విలువ 5% తగ్గినది (వస్తువుల వాడకము, కాలమును బట్టి వాటి విలువ తగ్గును). ఒక సంవత్సరం తరువాత ఆ టెలివిజన్ విలువ ఎంత?

SCERT, TELANGANA

3. Find the amount and the compound interest on ₹ 8000 at 5% per annum, for 2 years compounded annually.
4. Find the amount and the compound interest on ₹ 6500 for 2 years, compounded annually, the rate of interest being 5% per annum during the first year and 6% per annum during the second year.
5. Prathibha borrows ₹ 47000 from a finance company to buy her first car. The rate of simple interest is 17% and she borrows the money over a 5 year period. Find: (a) How much amount Prathibha should repay the finance company at the end of five years. (b) her equal monthly repayments.
6. The population of Hyderabad was 68,09,000 in the year 2011. If it increases at the rate of 4.7% per annum. What will be the population at the end of the year 2015.
7. Find Compound interest paid when a sum of ₹ 10000 is invested for 1 year and 3 months at $8\frac{1}{2}$% per annum compounded annually.
8. Arif took a loan of ₹ 80,000 from a bank. If the rate of interest is 10% per annum, find the difference in amounts he would be paying after $1\frac{1}{2}$ years, if the interest is compounded annually and compounded half yearly.
9. I borrowed ₹ 12000 from Prasad at 6% per annum simple interest for 2 years. Had I borrowed this sum at 6% per annum compounded annually, what extra amount would I have to pay?
10. In a laboratory the count of bacteria in a certain experiment was increasing at the rate of 2.5% per hour. Find the bacteria at the end of 2 hours if the count was initially 5, 06,000
11. Kamala borrowed ₹ 26400 from a bank to buy a scooter at a rate of 15% per annum compounded yearly. What amount will she pay at the end of 2 years and 4 months to clear the loan?
12. Bharathi borrows an amount of ₹ 12500 at 12% per annum for 3 years at a simple interest and Madhuri borrows the same amount for the same time period at 10% per annum, compounded annually. Who pays more interest and by how much?
13. Machinery worth ₹ 10000 depreciated by 5%. Find its value after 1 year.
14.. Find the population of a city after 2 years which is at present 12 lakh, if the rate of increase is 4%.
15. Calculate compound interest on ₹ 1000 over a period of 1 year at 10% per annum, if interest is compounded quarterly?

SCERT, TELANGANA

3. ₹ 8000 లపై 5% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ తిరగ కట్టబడిన రెండు సంవత్సరములకు అయ్యే చక్రవడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

4. ₹6500 లపై మొదటి సంవత్సరము 5% చొప్పున, రెండవ సంవత్సరము 6% వడ్డీ రేటు చొప్పున ప్రతీ సంవత్సరం వడ్డీ తిరగకట్టబడిన 2 సంవత్సరములకు అయ్యే చక్రవడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

5. ప్రతిభ ఒక ఋణ సంస్థ (ఫైనాన్స్ కంపెనీ) నుండి కారును కొనడానికి ₹47000 లను 17% వడ్డీ రేటుతో 5 సంవత్సరములకు సాధారణ వడ్డీకి అప్పు తీసుకొన్నది. అయిన (a) ఆమె ఋణ సంస్థకు ఎంత మొత్తం చెల్లించాలి, (b) ఆ మొత్తాన్ని సమాన వాయిదాలలో చెల్లించాలంటే ఆమె ప్రతీ నెల ఎంత మొత్తము చెల్లించాలి.

6. 2011వ సంవత్సరములో హైదరాబాదు నగర జనాభా 68,09,000. ప్రతీ సంవత్సరము 4.7% చొప్పున జనాభా పెరిగిన, 2015వ సంవత్సరము చివరి నాటికి హైదరాబాదు జనాభా ఎంత అవుతుంది?

7. ₹10000 లను $8\frac{1}{2}$% చొప్పున సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ తిరిగి లెక్కకట్టు పద్ధతిలో పొదుపు చేసిన 1 సంవత్సరము 3 నెలల కాలంలో వచ్చే చక్రవడ్డీని కనుగొనండి.

8. ఆరిఫ్ ఒక బ్యాంక్ నుండి ₹80,000 లను వడ్డీ రేటు 10% చొప్పున అప్పు తీసుకొనెను. (i) సంవత్సరము మరియు (ii) 6 నెలల తిరిగి వడ్డీ కట్టు కాలవ్యవధులుగా తీసుకొని $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములకు వడ్డీ కట్టిన ఆ రెండు మొత్తముల భేదమును కనుగొనుము.

9. నేను ప్రసాద్ వద్ద నుండి ₹12000 లను 6% వడ్డీ రేటు చొప్పన సాధారణ వడ్డీకి 2 సంవత్సరముల కాలానికి అప్పు తీసుకొన్నాను. నేను అదే మొత్తమును 6% వడ్డీ రేటు చొప్పున సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన చక్రవడ్డీ అప్పు తీసుకొన్నచో ఎంత సొమ్ము అదనంగా చెల్లించవలసి వస్తుంది.

10. ఒక ప్రయోగశాలలో, ప్రయోగమును నిర్వహించి బ్యాక్టీరియాలో పెరుగుదల రేటు గంటకు 2.5% అని గుర్తించినారు. ప్రారంభంలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య 5,06,000లు వున్నచో రెండు గంటల తరువాత ఆ బ్యాక్టీరియా సంఖ్య ఎంత?

11. కమల బ్యాంకు నుండి స్కూటరు కొనే నిమిత్తం ₹26400లను 15% వడ్డీ రేటు చొప్పున సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిలో చక్రవడ్డీ అప్పు తెచ్చుకొన్నది. 2 సంవత్సరముల 4 నెలల తరువాత అప్పు మొత్తము తీర్చి వేయవలెనన్న ఆమె చెల్లించవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.

12. భారతి ₹12500 లను 12% వడ్డీ రేటు చొప్పున 3 సంవత్సరముల కాలానికి సాధారణ వడ్డీకి అప్పు తీసుకొన్నది. మాధురి అదే మొత్తాన్ని అదే కాలానికి 10% వడ్డీ రేటుతో సంవత్సరమునకొకసారి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన చక్రవడ్డీ అప్పు తెచ్చినది. ఆ ఇద్దరిలో ఎవరు ఎక్కువ వడ్డీని చెల్లించెదరు? ఎంత ఎక్కువ వడ్డీని చెల్లించెదరు?

13. ₹ 10000 ల విలువ గల యంత్ర సామగ్రిలో తరుగుదల రేటు 5%. అయిన 1 సంవత్సరము తరువాత దాని విలువ ఎంత?

14. ఒక పట్టణ ప్రస్తుత జనాభా 12 లక్షలు. సంవత్సరమునకు 4% చొప్పున జనాభా పెరుగుతూ వుంటే 2 సంవత్సరముల తరువాత ఆ పట్టణ జనాభా ఎంత?

15. ₹ 1000 లను 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున త్రైమాసికంగా తిరిగి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన 1 సంవత్సర కాలానికి అయ్యే చక్రవడ్డీని కనుగొనండి.

SCERT, TELANGANA

## What we have discussed

1. Two simple ratios are expressed like a single ratio as the ratio of product of antecedents to product of consequents and we call it Compund ratio of the given two simple ratios. a:b and c:d are any two ratios, then their compound ratio is $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ i.e. $ac : bd$.
2. A percentage (%) compares a number to 100. The word percent means "per every hundred" or "out of every hundred". 100% = $\frac{100}{100}$ it is also a fraction with denominator 100.
3. Discount is a decrease percent of marked price.

   Price reduction is called Rebate or discount. It is calculated on marked price or List Price.
4. Profit or loss is always calculated on cost price. Profit is an example of increase percent of cost price and loss is an example of decrease percent of cost price.
5. VAT will be charged on the Selling Price of an item and will be included in the bill.

   VAT is an increase percent on Selling Price.
6. Simple interest is an increase percent on the Principal
7. Simple interest (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ where P = principal T = Time in years R = Rate of interest.
8. Amount = Principal + Interest = P + $\frac{P \times T \times R}{100}$ $= P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$
9. Compount interest allows you to earn interest on interest.
10. Amount at the end of 'n' years using compound interest is $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$
11. The time period after which interest is added to principal is called conversion period. When interest is compounded half yearly, there are two conversion periods in a year, each after 6 months. In such a case, half year rate will be half of the annual rate.

W6X8A9

SCERT, TELANGANA

## మనం ఏమి చర్చించాం

1. రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా తెలపడానికి ఆ రెండు నిష్పత్తుల పూర్వపదముల లబ్ధము మరియు పరపదముల లబ్ధముల నిష్పత్తి కనుగొంటాము. దీనినే మనం బహుళ నిష్పత్తి అంటాము. $a:b$, $c:d$ లు రెండు నిష్పత్తులైన వాటి బహుళ నిష్పత్తి $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ లేదా $a:b$, $c:d$.

2. శాతము అనగా ఒక సంఖ్యను 100తో పోల్చడం. శాతము అనగా ప్రతీ వందకు లేదా ప్రతీ వందలో అని అర్థము. $100\% = \frac{100}{100}$ శాతము అనేది హారము 100గా గల భిన్నము.

3. డిస్కౌంట్ అనేది ప్రకటన వెలపై తగ్గుదల శాతము. వస్తువు ప్రకటన వెలలో తగ్గింపును తగ్గింపు లేదా డిస్కౌంట్ అంటారు. దీనిని మనం వస్తువు ప్రకటన వెల లేదా జాబితా వెలపై లెక్కిస్తాము.

4. లాభము లేదా నష్టము అనేది ఎల్లప్పుడూ కొన్నవెలపై లెక్కిస్తారు. లాభము అనేది కొన్నవెలపై పెరుగుదల శాతము. నష్టము అనేది కొన్నవెలపై తగ్గుదల శాతము.

5. VAT ను వస్తువు అమ్మకం వెలపై లెక్కిస్తారు. దీనిని బిల్లులో కలిపి లెక్కిస్తారు.

   VAT అనేది అమ్మకం వెలపై పెరుగుదల శాతము.

6. సాధారణ వడ్డీ అనేది అసలుపై పెరుగుదల శాతము.

7. సాధారణ వడ్డీ (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$. దీనిలో P=అసలు, T=కాలము (సంవత్సరములలో) R=వడ్డీ రేటు.

8. మొత్తము = అసలు + వడ్డీ = $P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$

9. చక్రవడ్డీ అనేది వడ్డీపై వడ్డీని లెక్కిస్తుంది.

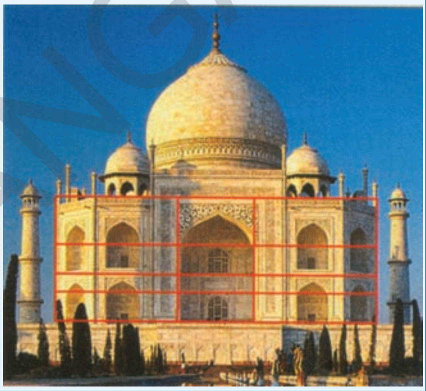
10. సంవత్సరముకొకసారి తిరిగి వడ్డీ కట్టు పద్ధతిన చక్రవడ్డీ ప్రకారం 'n' సంవత్సరములకు అయ్యే మొత్తము $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$

11. ఎంత కాలం తరువాత వడ్డీని అసలుకు కలుపుతామో దానిని తిరిగి వడ్డీ కట్టెడి కాలవ్యవధి అంటారు. 6 నెలలకొకసారి చక్రవడ్డీని కనుగొనేటపుడు సంవత్సరంలో తిరిగి వడ్డీ కట్టెడి కాల వ్యవధులు రెండు వుంటాయి. అప్పుడు అర్ధ సంవత్సర వడ్డీరేట్లు సంవత్సర వడ్డీ రేటులో సగముంటుంది.

SCERT, TELANGANA

## Do you Know?

In ancient Greece, artists and architects believed there was a particular rectangular shape that looked very pleasing to the eye. For rectangles of this shape, the ratio of long side to the short side is roughly **1.615:1**. This ratio is very close to what is known as Golden ratio. The famous Greek temple the Parthenon, made entirely of white marble in the 5th century C.E. was built according to the Golden Ratio.



The Taj Mahal in India is also an example of architecure for Golden ratio.

SCERT TELANGANA

### Addition of Equal Ratios

1. What is the sum of $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots, \frac{100}{200}$?

   can we add like this?

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots\ldots = \frac{100}{200} = \frac{1+2+3+4+\ldots\ldots+100}{2+4+6+8+\ldots\ldots+200}$$

$$= \frac{5050}{2 \times 5050} = \frac{1}{2}$$

If $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \ldots\ldots = \frac{p_n}{q_n}$ then $\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots. + p_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots + q_n} = \frac{p_1}{q_1}$

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ iff $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\quad (b, d > 0)$

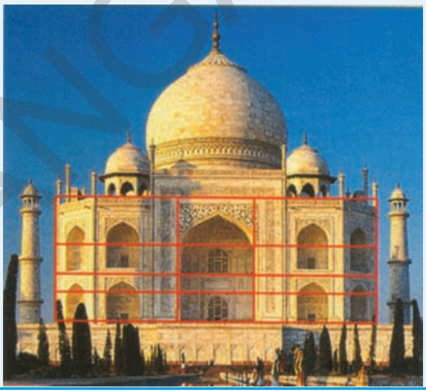
   $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ iff $\frac{1+2}{2} = \frac{3+6}{6}$

   $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ again this can be written as $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} \ldots\ldots$

## మీకు తెలుసా?

ప్రాచీన గ్రీసులో, చిత్రకారులు, వాస్తు శిల్పులు (ఆర్కిటెక్ట్స్) ఒక ప్రత్యేకమైన దీర్ఘచతురస్ర ఆకృతి కంటికి ఇంపుగా కనిపిస్తుందని భావించేవారు. ఇటువంటి దీర్ఘ చతురస్రాలకు పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తి సుమారుగా **1.615 : 1** గా ఉంటుంది. ఇది మనకు తెలిసిన 'గోల్డెన్‌రేషియో'కి చాలా దగ్గరగా ఉంది. క్రీ.పూ. 5వ శతాబ్దిలో గ్రీసులో నిర్మించిన ప్రఖ్యాత 'పార్థెనాన్ దేవాలయం' ఈ 'గోల్డెన్‌రేషియో'కి అనుగుణంగా నిర్మించబడినది.

భారతదేశంలో గల తాజ్‌మహల్ కూడా 'గోల్డెన్‌రేషియో'తో నిర్మించబడిన నిర్మాణానికి ఉదాహరణ.



### సమాన నిష్పత్తుల సంకలనము

1. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots, \frac{100}{200}$ ల మొత్తం ఎంత?

మనం ఎలా సంకలనం చేయవచ్చా?

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots\ldots = \frac{100}{200} \quad = \frac{1+2+3+4+\ldots\ldots+100}{2+4+6+8+\ldots\ldots+200}$$

$$= \frac{5050}{2 \times 5050} = \frac{1}{2}$$

$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \ldots\ldots = \frac{p_n}{q_n}$ అయితే $\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots. + p_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots.. + q_n} = \frac{p_1}{q_1}$

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయితే $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\quad (b, d > 0)$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ అయితే $\frac{1+2}{2} = \frac{3+6}{6}$

$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ గా మరియు $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$......గా రాయవచ్చును.

SCERT, TELANGANA

CHAPTER

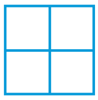
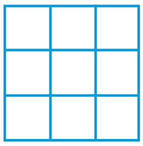
# 6 Square Roots and Cube Roots

B3K2Z1

## 6.0 Introduction

Let us make square shapes using unit squares and observe the number of unit squares used.

A unit square is a square whose side is 1 unit

| S.No. | Figure | Length of the side in units | No.of unit squares used |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 |
| 2 |  | 2 | 4 |
| 3 |  | 3 | 9 |

Similarly make next two squares.

Can you guess how many unit squares are required for making a square whose side is 6 units?

From the above observations we could make square shapes with 1, 4, 9, 16, 25 … unit squares.

These numbers 1, 4, 9, 16, 25, … can be expressed as

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

$25 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$36 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$

……………………………………

……………………………………

$m = n \times n = n^2$ where m, n are integers.

Observe the pattern of factors in each case

You might have observed in the given pattern that the numbers are expressed as the product of two equal factors. Such numbers are called perfect squares.

SCERT, TELANGANA

అధ్యాయం

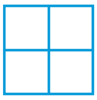
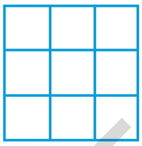
# 6 వర్గమూలాలు, ఘన మూలాలు

Q3M1P1

## 6.0 పరిచయం

ప్రమాణ చతురస్రాలను ఉపయోగించి కొన్ని చతురస్రాకారాలను తయారు చేద్దాము.

ఒక చతురస్రంలోని భుజం పొడవు '1' ప్రమాణం అయిన అది ప్రమాణ చతురస్రం.

| క్ర.సం. | పటం | భుజం పొడవు ప్రమాణాలు | ఉపయోగించిన ప్రమాణ చతురస్రాల సంఖ్య |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 |
| 2 |  | 2 | 4 |
| 3 |  | 3 | 9 |

ఇదే క్రమంలో తరువాత వచ్చే రెండు చతురస్రాలను తయారు చేయండి.

భుజం పొడవు 6 ప్రమాణాలు గల చతురస్రాన్ని తయారు చేయుటకు ఎన్ని ప్రమాణ చతురస్రాలు అవసరమో ఊహించగలవా?

పైన తెలిపిన పట్టికను పరిశీలించిన 1, 4, 9, 16, 25 .... ప్రమాణ చతురస్రాలతో చతురస్రాలను ఏర్పరచగలిగినాము. 1, 4, 9, 16, 25, .... సంఖ్యలను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

25 = …… × …… = ……..

36 = ……. × …… = ……..

…………………………………..

…………………………………...

$m = n \times n = n^2$ (ఇక్కడ m, n లు పూర్ణసంఖ్యలు)

ప్రతి సందర్భంలో సంఖ్యల కారణాంకాలను పరిశీలించండి.

పై అమరికలో ప్రతి సంఖ్య రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్దంగా వ్రాయబడిందని మీరు గమనించి ఉంటారు. ఇటువంటి సంఖ్యలను పరిపూర్ణ వర్గాలు అంటాము.

SCERT, TELANGANA

Observe the following perfect square numbers

Ex: (i) $9 = 3 \times 3$ (ii) $49 = 7 \times 7$ (iii) $1.44 = 1.2 \times 1.2$

(iv) $2.25 = 1.5 \times 1.5$ (v) $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{4}{12.25} = \frac{2}{3.5} \times \frac{2}{3.5}$

In case (i) and (ii) we have noticed the perfect square numbers 9 and 49 are integers. The general form of such perfect square numbers is $m = n \times n$ (where m and n are integers).

In case (iii), (iv) and (v), (vi) the perfect square numbers are not integers. Hence, they are not square numbers.

If an integer 'm' is expressed as $n^2$ where n is an integer then 'm' is a square number or 'm' is a square of 'n'.

**Perfect square :** A rational number that is equal to the square of another rational number.

**Square number :** An integer that is a square of another integer. Thus

"All square numbers are perfect squares" but all perfect squares may not be square numbers.

**Ex:** 2.25 is a perfect square number because it can be expressed as $2.25 = (1.5)^2 = 1.5 \times 1.5$, it is not square of an integer. Therefore, it is not a square number.

Is 42 a square number?

We know that $6^2 = 36$ and $7^2 = 49$, if 42 is a square number it must be the square of an integer. Which should be between 6 and 7. But there is no such integer between 6 and 7.

Therefore 42 is not a square number.

Observe the perfect squares in the given table

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Are there any other square numbers that exist other than the numbers shown in the table.

SCERT, TELANGANA

క్రింది కొన్ని పరిపూర్ణ వర్గాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా: (i) $9 = 3 \times 3$ (ii) $49 = 7 \times 7$ (iii) $1.44 = 1.2 \times 1.2$

(iv) $2.25 = 1.5 \times 1.5$ (v) $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{4}{12.25} = \frac{2}{3.5} \times \frac{2}{3.5}$

(i) మరియు (ii) సందర్భాలలో పరిపూర్ణ వర్గాలైన 9 మరియు 49 లు పూర్ణసంఖ్యలు. ఇటువంటి సంఖ్యలను $m = n \times n$ అని (దీనిలో m, n లు పూర్ణసంఖ్యలు) పరిపూర్ణ వర్గాలుగా వ్రాస్తాము.

(iii), (iv) మరియు (v), (vi) లలో పరిపూర్ణ వర్గాలు పూర్ణసంఖ్యలు కావు. అందుచే వీటిని వర్గ సంఖ్యలుగా పరిగణించుము.

ఒక పూర్ణసంఖ్య 'm' ను '$n^2$' (మరొక పూర్ణసంఖ్య)గా వ్రాయగలిగితే అప్పుడు m ను వర్గ సంఖ్య అనియూ లేదా n యొక్క వర్గము 'm' అని వ్రాస్తాము.

**ఖచ్చిత వర్గము:** ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరొక అకరణీయ సంఖ్య వర్గానికి సమానము.

**వర్గ సంఖ్య:** ఒక పూర్ణసంఖ్య మరొక పూర్ణసంఖ్య వర్గానికి సమానము.

అందుచే అన్ని వర్గ సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గాలే, కాని అన్ని ఖచ్చిత వర్గాలు వర్గసంఖ్యలు కావు.

**ఉదా:** 2.25 అనేది ఖచ్చిత వర్గము, ఎందువలన అంటే $2.25 = (1.5)^2 = 1.5 \times 1.5$, ఇది ఒక పూర్ణసంఖ్య కాదు అందుచే ఇది వర్గ సంఖ్య కాదు.

42 ఒక వర్గ సంఖ్య అగునా?

మనకు $6^2 = 36$ మరియు $7^2 = 49$ అని తెలుసు. ఒకవేళ 42 వర్గ సంఖ్య అయితే అది తప్పనిసరిగా ఒక పూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గము మరియు 6, 7 ల మధ్య ఉండాలి. కాని 6 మరియు 7 ల మధ్య ఎటువంటి పూర్ణసంఖ్య లేనందున 42 వర్గ సంఖ్య కాదు.

క్రింది పట్టికలోని వర్గ సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 2 | 3 | (4) | 5 | 6 | 7 | 8 | (9) | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | (16) | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | (25) | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | (36) | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | (49) | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | (64) | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| (81) | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | (100) |

పట్టికలో చుట్టబడిన సంఖ్యలు కాకుండా ఇంకా ఏమైనా వర్గ సంఖ్యలు కలవా?

SCERT, TELANGANA

### Do This

1. Find the perfect squares between (i) 100 and 150 (ii) 150 and 200
2. Is 56 a perfect square? Give reasons?

## 6.1 Properties of square numbers

Observe and fill the following table.

| Number | Square | Number | Square | Number | Square |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 121 | 21 | 441 |
| 2 | 4 | 12 | 144 | 22 | ......... |
| 3 | 9 | 13 | ......... | 23 | 529 |
| 4 | 16 | 14 | 196 | ........ | 576 |
| 5 | 25 | 15 | 225 | 25 | 625 |
| 6 | ......... | 16 | ......... | .......... | .......... |
| 7 | 49 | 17 | 289 | .......... | .......... |
| 8 | 64 | 18 | 324 | .......... | .......... |
| ........ | 81 | 19 | 361 | .......... | .......... |
| 10 | 100 | 20 | 400 | .......... | .......... |

Observe the digits in the units place of the square numbers in the above table. Do you observe all these numbers end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9 at units place, none of these end with 2, 3, 7 or 8 at units places?

"The numbers that have 2, 3, 7 or 8 in the units place are not perfect squares."

Can we say that all numbers end with 0, 1, 4, 5, 6 or 9, at unit place are square numbers? Think about it.

SCERT, TELANGANA

### Try These

1. Guess and give reason which of the following numbers are perfect squares. Verify from the above table.

   (i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

Write the squares of 1, 9, 11, 19, 21

Have you noticed any relationship between the units digit of numbers and their squares?

We observe that if a number has 1 or 9 in the units place, then the units digit in its square number is only 1.

If a number has 4 or 6 in the units place, then the units digit in its square is always 6

Similarly, explore the units digit of squares of numbers ending with 0,2,3, 5, 7 and 8.

### ఇవి చేయండి

1. ఈ సంఖ్యల మధ్యనున్న వర్గ సంఖ్యలు ఏవి (i)100 మరియు 150 (ii) 150 మరియు 200.
2. 56 పరిపూర్ణ వర్గమా? కారణాలు తెలపండి.

## 6.1 వర్గసంఖ్యల ధర్మాలు

క్రింది పట్టికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

| సంఖ్య | వర్గం | సంఖ్య | వర్గం | సంఖ్య | వర్గం |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 121 | 21 | 441 |
| 2 | 4 | 12 | 144 | 22 | ......... |
| 3 | 9 | 13 | ......... | 23 | 529 |
| 4 | 16 | 14 | 196 | ........ | 576 |
| 5 | 25 | 15 | 225 | 25 | 625 |
| 6 | ......... | 16 | .......... | .......... | .......... |
| 7 | 49 | 17 | 289 | .......... | .......... |
| 8 | 64 | 18 | 324 | .......... | .......... |
| ........ | 81 | 19 | 361 | .......... | .......... |
| 10 | 100 | 20 | 400 | .......... | .......... |

పై పట్టికలోని వర్గ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలను గమనించండి. వాటన్నింటి ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 ఉండును. ఏది కూడా ఒకట్ల స్థానంలో 2, 3, 7 లేదా 8 తో అంతం కాలేదు.

కావున ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 2, 3, 7 లేదా 8 ఉంటే అవి వర్గ సంఖ్యలు కావు.

మరి 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 లు ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యలన్నియూ వర్గ సంఖ్యలు అనడం సరియేనా? ఆలోచించండి.

### ప్రయత్నించండి

1. క్రింది వాటిలో ఏవి వర్గ సంఖ్యలు అవుతాయో ఊహించండి. పై పట్టిక ఆధారంగా సరిచూడండి.
   (i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

1, 9, 11, 19, 21 సంఖ్యలకు వర్గాలు వ్రాయండి.

పై సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెకు, దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెకు గల సంబంధాన్ని గుర్తించారా?

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 1 లేదా 9 ఉన్నట్లయితే దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఎల్లప్పుడు 1 ఉంటుంది.

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 4 లేదా 6 ఉన్నట్లయితే దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఎల్లప్పుడు 6 ఉంటుంది.

అదేవిధంగా ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 0, 2, 3, 5, 7 మరియు 8 ఉన్నట్లయితే దాని వర్గంలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె ఏవిధంగా ఉంటుందో అన్వేషించండి.

SCERT TELANGANA

## Try These

1. Which of the following have 1 in its units place?

   (i) $126^2$  (ii) $179^2$  (iii) $281^2$  (iv) $363^2$

2. Which of the following have 6 in the units place?

   (i) $116^2$  (ii) $228^2$  (iii) $324^2$  (iv) $363^2$

## Think, Discuss and Write

Vaishnavi claims that the square of even numbers are even and that of odd are odd. Do you agree with her? Justify.

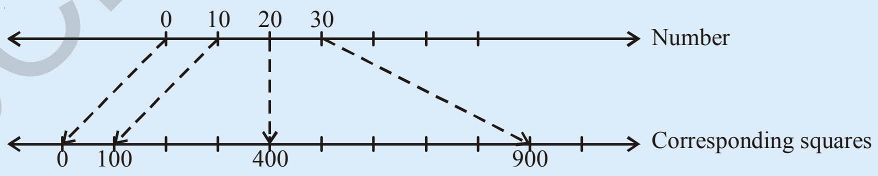
**Observe and complete the table.**

| **Numbers** | **No.of digits in its square** | |
|---|---|---|
| | (Minimum) | (Maximum) |
| 1-9 | 1 | 2 |
| 10-99 | ……. | 4 |
| 100-999 | 5 | ……. |
| 1009-9999 | 7 | 8 |
| n digits | ……. | ……. |

## Try These

1. Guess, How many digits are there in the squares of

   (i) 72  (ii) 103  (iii) 1000

2. 


   27 lies between 20 and 30

   $27^2$ lies between $20^2$ and $30^2$

   Now find what would be $27^2$ from the following perfect squares.

   (i) 329  (ii) 525  (iii) 529  (iv) 729

SCERT, TELANGANA

## ప్రయత్నించండి

1. క్రింది వర్గ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో 1 వచ్చే సంఖ్యలు ఏవి?

   (i) $126^2$ (ii) $179^2$ (iii) $281^2$ (iv) $363^2$

2. క్రింది వర్గసంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానంలో 6 వచ్చే సంఖ్యలు ఏవి?

   (i) $116^2$ (ii) $228^2$ (iii) $324^2$ (iv) $363^2$

## ఆలోచించండి, చర్చించి, రాయండి

"సరిసంఖ్యల వర్గం సరిసంఖ్య మరియు బేసి సంఖ్యల వర్గం బేసిసంఖ్య" అని వైష్ణవి చెప్పింది. దానిని నీవు అంగీకరిస్తావా? కారణం చెప్పండి.

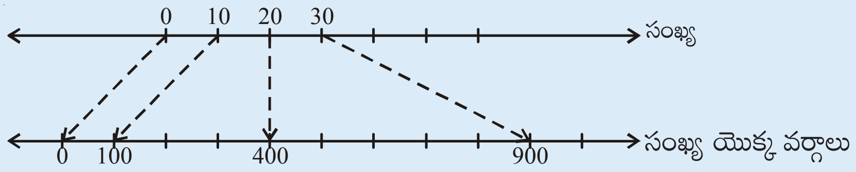
క్రింది పట్టికను పరిశీలించి పూరించండి.

| సంఖ్యలు వర్గంలో | అంకెల సంఖ్య | |
|---|---|---|
| | కనిష్ఠంగా | గరిష్ఠంగా |
| 1-9 | 1 | 2 |
| 10-99 | ....... | 4 |
| 100-999 | 5 | ....... |
| 1009-9999 | 7 | 8 |
| n అంకెలు గల సంఖ్య | ....... | ....... |

## ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలలో ఎన్ని అంకెలు ఉంటాయో ఊహించండి.

   (i) 72 (ii) 103 (iii) 1000

2. 


   27; 20 మరియు 30కి మధ్య ఉంటుంది.

   $27^2$, $20^2$ మరియు $30^2$ కి మధ్య ఉంటుంది.

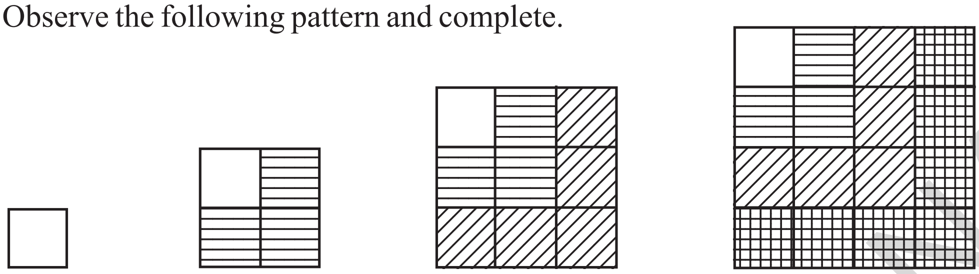
   అయిన క్రింది వాటిలో 272 యొక్క విలువ ఏది?

   (i) 329 (ii) 525 (iii) 529 (iv) 729

SCERT, TELANGANA

## 6.2 Interesting patterns in square

1. Observe the following pattern and complete.



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$ .......... $= (\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$ .......... $= (\ )^2$

From this, we can generalize that the sum of first 'n' odd natural numbers is equal to '$n^2$'.

2. Observe the following pattern and find the missing numbers

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 =$ ..............

$(1000001)^2 =$ ...............

3. Observe the pattern and complete it

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 =$ .......................

$111111^2 =$ .......................

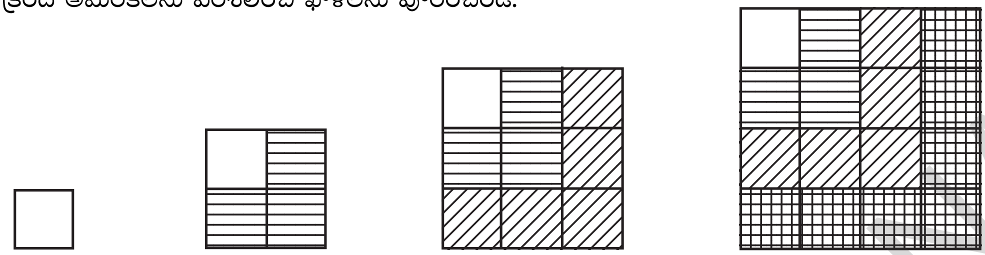
> A palindrome is a word; phrase, a sentence or a numerical that reads the same forward or backward.
> Ex: NOON, MADAM, 15651

These numbers are called palindromic numbers or numerical palindrome.

SCERT, TELANGANA

## 6.2 కొన్ని ఆసక్తికరమైన చతురస్ర అమరికలు

1. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.



$1 = 1^2$ $1+3 = 4 = 2^2$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$ .......... = $(\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$ .......... = $(\ )^2$

పై దాని నుండి మొదటి 'n' బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తం. $n^2$ అని సాధారణీకరించవచ్చు.

2. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 =$ ..............

$(1000001)^2 =$ ...............

3. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

| | | |
|---|---|---|
| $1^2$ | = | 1 |
| $11^2$ | = | 1 2 1 |
| $111^2$ | = | 1 2 3 2 1 |
| $1111^2$ | = | 1 2 3 4 3 2 1 |
| $11111^2$ | = | ....................... |
| $111111^2$ | = | ......................... |

పాలింద్రోమ్ అనగా ఒక పదం, వాక్యం లేదా సంఖ్యను ఎటువైపు నుండి చదివినా ఒకే విధంగా ఉంటుంది. ఉదా: నందసదనం, జలజ, 15651

పై సంఖ్యలను పాలింద్రోమ్ సంఖ్యలు లేదా ద్విముఖ సంఖ్యలు అంటారు.

SCERT, TELANGANA

4. From the following pattern find the missing numbers

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

> Observe the sum of the squares.
> Do you find any relation between the bases of squares ?
> How the base of the third number is related to the base of first and second square numbers?
> How the base of the resultant square number is related to the base of the third square number?

5. Find the missing numbers using the given pattern

$3^2 = 9 = 4 + 5$ $\qquad \left(\frac{3^2-1}{2} + \frac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13$ $\qquad \left(\frac{5^2-1}{2} + \frac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25$ $\qquad (\qquad + \qquad)$

$11^2 = 121 = \ldots.. + \ldots..$ $\qquad \left(\frac{11^2-1}{2} + \frac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = \ldots.. + \ldots..$ $\qquad (\qquad + \qquad)$

From this, we can conclude that the square of any odd number say n can be expressed as the sum of two consecutive numbers as $\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$

**6. Numbers between successive square numbers**

Observe and complete the following table.

| Successive squares | Numbers between the successive square numbers | Relation |
|---|---|---|
| $1^2 = 1;\ 2^2 = 4$ | 2, 3 (2 numbers lies between 1 and 4) | 2×Base of first number 1, (2×1=2) |
| $2^2 = 4;\ 3^2 = 9$ . | 5, 6, 7, 8 (4 numbers lies between 4 and 9) | 2×Base of first number 2, (2×2=4) |
| $3^2 = 9;\ 4^2 = 16$ | 10,11,12,13,14,15 (6 numbers lies) between 9 and 16) | 2×Base of first number 3 (2×3=6) |
| $4^2 = 16;\ 5^2 = 25$ | ............................................. | 2×Base of first number 4, (2×4=8) |
| $5^2 = 25;\ 6^2 = 36$ | ............................................. | ............................................... |
| ........................... | ............................................. | ............................................... |

SCERT TELANGANA

4. క్రింది అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరింపుము.

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

> వర్గాల మొత్తాలను పరిశీలించండి.
>
> వర్గాల భూముల మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని గమనించారా?
>
> మూడవ వర్గం యొక్క భూమికి మరియు మొదటి, రెండవ వర్గాల భూముల మధ్య సంబంధం ఏమిటి?
>
> ఫలిత వర్గం యొక్క భూమి, మూడవ వర్గం భూమికి గల సంబంధం ఏమిటి?

5. అమరికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

$3^2 = 9 = 4 + 5 \qquad \left(\frac{3^2-1}{2} + \frac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13 \qquad \left(\frac{5^2-1}{2} + \frac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25 \qquad (\qquad + \qquad)$

$11^2 = 121 = ..... + ..... \qquad \left(\frac{11^2-1}{2} + \frac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = ..... + ..... \qquad (\qquad + \qquad)$

పై అమరికలను నుండి “ఏదైనా ఒక బేసి సంఖ్య n యొక్క వర్గాన్ని రెండు వరుస సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$$

**6. రెండు వరుస వర్గ సంఖ్యల మధ్య గల పూర్ణసంఖ్యలు**

క్రింది పట్టికను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

| వరుస పూర్ణసంఖ్యల వర్గాలు | వరుస పూర్ణసంఖ్యల వర్గాల మధ్య గల పూర్ణసంఖ్యలు | సంబంధం |
|---|---|---|
| $1^2 = 1;\ 2^2 = 4$ | 2, 3 (1 మరియు 4 ల మధ్యనున్న సంఖ్యలు 2) | 2×మొదటి వర్గ సంఖ్య 1 భూమి, (2×1=2) |
| $2^2 = 4;\ 3^2 = 9$ . | 5, 6, 7, 8 (4 మరియు 9 ల మధ్యనున్న సంఖ్యలు 4) | 2×మొదటి వర్గ సంఖ్య 2 భూమి, (2×2=4) |
| $3^2 = 9;\ 4^2 = 16$ | 10,11,12,13,14,15 (9 మరియు 16 ల మధ్య నుండి పూర్ణసంఖ్యలు 6) | 2×మొదటి వర్గ సంఖ్య 3 భూమి, (2×3=6) |
| $4^2 = 16;\ 5^2 = 25$ | ............................................. | 2×మొదటి వర్గ సంఖ్య 4 భూమి, (2×4=8) |
| $5^2 = 25;\ 6^2 = 36$ | ............................................. | ............................................. |
| ............................. | ............................................. | ............................................. |

SCERT, TELANGANA

From the above table have you observed any relation between the successive square numbers and numbers between them?

With the help of the above table, try to find the number of non square numbers between $n^2$ and $(n + 1)^2$.

There are '2n' non square numbers between $n^2$ and $(n + 1)^2$.

**Do This**

1. How many non perfect square numbers are there between $9^2$ and $10^2$?
2. How many non perfect square numbers are there between $15^2$ and $16^2$?

**Try These**

Rehan says there are 37 non square numbers between $9^2$ and $11^2$. Is he right? Give your reason.

## Exercise - 6.1

1. What will be the units digit of the square of the following numbers?

   (i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

2. Which of the following numbers are perfect squares?

   (i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

3. The following numbers are not perfect squares. Give reasons?

   (i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

4. Find whether the square of the following numbers are even or odd?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

5. How many integers lie between the square of the following numbers.

   (i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

6. Without adding, find the sum of the following numbers

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 =$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 =$

SCERT, TELANGANA

పై పట్టిక నుండి రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల వర్గాలకు, వాటి మధ్యనున్న పూర్ణసంఖ్యకు ఏదైన సంబంధాన్ని గమనించారా?

పట్టిక సహాయంతో $n^2$ మరియు $(n+1)^2$ మధ్యనున్న వర్గసంఖ్యలు కాని పూర్ణసంఖ్యలు ఎన్ని?

$n^2$ మరియు $(n+1)^2$ ల మధ్య '2n' వర్గ సంఖ్యలు కాని పూర్ణసంఖ్యలుంటాయి.

**ఇవి చేయండి**

1. $9^2$ మరియు $10^2$ మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్యలున్నాయి?
2. $15^2$ మరియు $16^2$ మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్యలున్నాయి?

**ప్రయత్నించండి**

$9^2$ మరియు $11^2$ మధ్య 37 పరిపూర్ణ వర్గంలేని సంఖ్యలు ఉన్నాయని రేహాన్ చెప్పాడు. ఇది సరియేనా? కారణం తెల్పండి.

## అభ్యాసం - 6.1

1. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలలో, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు ఏవి?

   (i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

2. క్రింది సంఖ్యలలో పరిపూర్ణ వర్గాలు ఏవి?

   (i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

3. క్రింది సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలు కావు. కారణాలు తెల్పండి.

   (i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

4. క్రింది సంఖ్యల వర్గాలు సరిసంఖ్యలా? లేదా బేసి సంఖ్యలా?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

5. క్రింది సంఖ్యల వర్గాల మధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్యలు ఉంటాయి?

   (i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

6. కూడకుండానే కింది వాటి మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 =$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 =$

SCERT, TELANGANA

## 6.3 Pythagorean triplets

Consider the following

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

The numbers (3, 4, 5) and (5, 12, 13) are some examples for Pythagorean triplets.

Generally a, b, c are three positive integers. If $a^2 + b^2 = c^2$ then (a, b, c) are said to be pythagorean triplet.

If there are no common factors other than '1' among a,b,c then the triplet (a,b,c) is called primitive triplet.

**Do This**

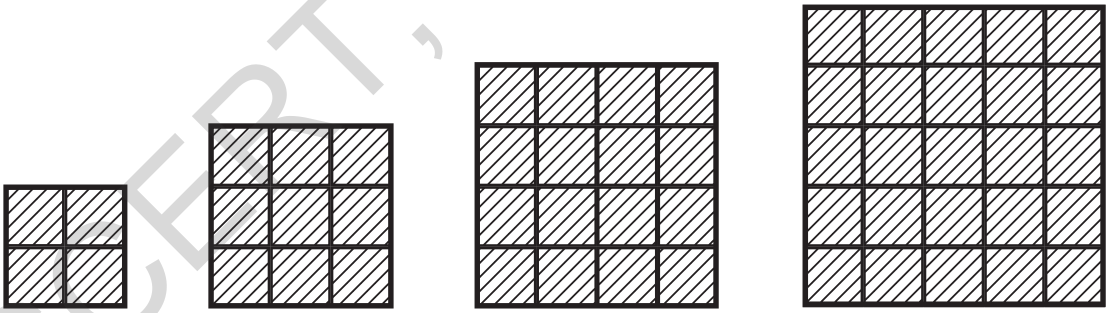
1. Check whether the following numbers form Pythagorean triplet

   (i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17

2. Take a Pythagorean triplet. Write their multiples. Check whether these multiples form a Pythagorean triplet.

## 6.4 Square Roots

Observe the following squares and complete the table.



A = 4 A = 9 A = 16 A = 25

| Area of the square (in cm$^2$) (A) | Side of the square (in cm) (S) |
|---|---|
| $4 = 2 \times 2$ | 2 |
| $9 = 3 \times 3$ | 3 |
| $16 = 4 \times 4$ | ______ |
| $25 = 5 \times 5$ | ______ |

The number of unit squares in a row / column represents the side of a square.

SCERT, TELANGANA

## 6.3 పైథాగోరియన్ త్రికాలు

క్రింది వాటిని గమనించండి.

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

సంఖ్యలు (3, 4, 5) మరియు (5, 12, 13) పైథాగోరియన్ త్రికాలకు ఉదాహరణలు.

a, b, c లు మూడు ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయిన $a^2+b^2=c^2$ అయితే a, b, c లను పైథాగోరియన్ త్రికాలు అంటారు.

a, b, c లకు 1 తప్ప వేరే ఉమ్మడి కారణాంకం లేకపోతే (a, b, c) "ప్రాథమిక త్రికం" అంటాము.

### ఇవి చేయండి

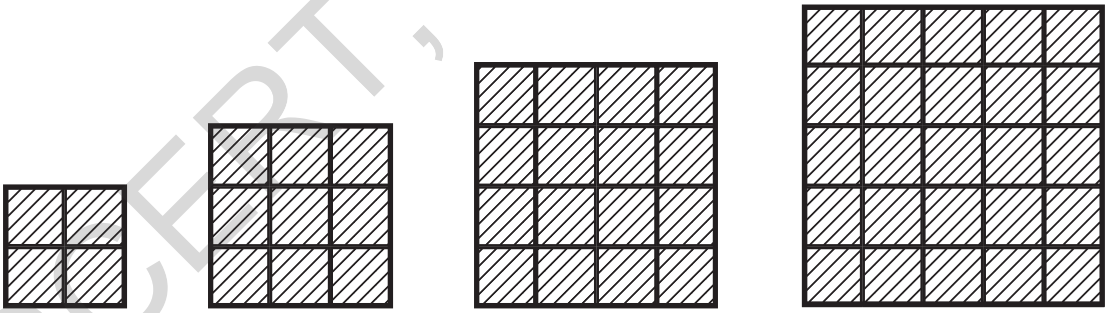
1. క్రింది సంఖ్యలు పైథాగోరియన్ త్రికాలు అవుతాయోమో సరిచూడండి.

   (i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17

2. ఒక పైథాగోరియన్ త్రికాన్ని తీసుకొని వాటి గుణిజాలను వ్రాయండి. గుణిజాలతో ఏర్పడిన త్రికాలు పైథాగోరియన్ త్రికాలు అవుతాయేమో సరిచూడండి.

## 6.4 వర్గమూలాలు

క్రింది చతురస్రాలను పరిశీలించి పట్టికను పూర్తి చేయండి.



A = 4 A = 9 A = 16 A = 25

| చతురస్ర వైశాల్యం (సెం.మీ$^2$లలో) (A) | చతురస్ర భుజం (సెం.మీ) (S) |
|---|---|
| $4 = 2 \times 2$ | 2 |
| $9 = 3 \times 3$ | 3 |
| $16 = 4 \times 4$ | _____ |
| $25 = 5 \times 5$ | _____ |

ఒక చతురస్రంలోని అడ్డు/ నిలువు వరుసలో ఉన్న ప్రమాణ చతురస్రాల సంఖ్యయే; ఆ చతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు.

SCERT, TELANGANA

Do you find any relation between the area of the square and its side?

We know that the area of the square = side × side = side$^2$

If the area of a square is 169 cm$^2$. What could be the side of the square?

Let us assume that the length of the side be '$x$' cm.

$\Rightarrow$ 169 = $x^2$

To find the length of the side, it is necessary to find a number whose square is 169.

We know that 169 = 13$^2$. Then the length of the side = 13 cm.

Therefore, if a square number is expressed, as the product of two equal factors, then one the factors is called the square root of that square number. Thus, the square root of 169 is 13. It can be expressed as $\sqrt{169} = 13$ (symbol used for square root is $\sqrt{\ }$). Thus it is the inverse operation of squaring.

**Example 1:** $3^2 = 9$ therefore square root of 9 is 3($\sqrt{9} = 3$)

$4^2 = 16$ therefore square root of 16 is 4($\sqrt{16} = 4$)

$5^2 = 25$ therefore square root of 25 is 5($\sqrt{25} = 5$)

If $y^2 = x$ then square root of $x$ is $y$ $\left(\sqrt{x} = y\right)$

**Example 2:** 1. $\sqrt{4} = 2$ because $2^2 = 4$

2. $\sqrt{16} = 4$ because $4^2 = 16$

3. $\sqrt{225} = 15$ because $15^2 = 225$ etc.

> 25 is the square of both 5 and –5.
> Therefore, the square root of 25 is 5 or –5.
> But in this chapter we are confined to the positive square root which is also called principal square root.
> It is written as
> $\therefore\ \sqrt{25} = 5.$

Complete the following table.

| Square | Square roots |
|---|---|
| $1^2 = 1$ | $\sqrt{1} = 1$ |
| $2^2 = 4$ | $\sqrt{4} = 2$ |
| $3^2 = 9$ | $\sqrt{9} = 3$ |
| $4^2 = 16$ | $\sqrt{16} = 4$ |
| $5^2 = 25$ | $\sqrt{25} =$ …….. |
| $6^2 = 36$ | $\sqrt{36} =$ …….. |
| $7^2 =$ ……... | $\sqrt{\ \ } =$ ……... |
| $8^2 =$ …….. | $\sqrt{\ \ } =$ ……… |
| $9^2 =$ …….. | $\sqrt{\ \ } =$ ……… |
| $10^2 =$ …….. | $\sqrt{\ \ } =$ ……… |

SCERT, TELANGANA

చతురస్రం వైశాల్యం మరియు దాని భుజముల మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని గమనించావా?

మనకు చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం = $(\text{భుజం})^2$ అని తెలుసు.

ఒకవేళ చతురస్రం వైశాల్యం 169 సెం.మీ$^2$ అయిన దాని భుజమెంత?

చతురస్ర భుజం పొడవు $x$ సెం.మీ అనుకొంటే

$\Rightarrow 169 = x^2$

చతురస్ర భుజం కనుగొనాలంటే, 169 ఏ సంఖ్య యొక్క వర్గమో కనుగొనాలి.

మనకు $169 = 13^2$ అని తెలుసు. కాబట్టి చతురస్ర భుజం పొడవు = 13 సెం.మీ.

ఒక వర్గ సంఖ్యను సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాసిన, ఆ కారణాంకాన్ని వర్గ సంఖ్యకు వర్గమూలం అంటారు. కావున ఒక వర్గ సంఖ్యను రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసినపుడు, అందులో ఒక కారణాంకాన్ని ఆ వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అంటారు. అంటే 169 యొక్క వర్గమూలం 13 అవుతుంది. $\sqrt{169} = 13$ గా రాస్తాం. ($\sqrt{\ }$ వర్గమూలంనకు గుర్తు). కాబట్టి వర్గమూలం అనునది వర్గంనకు వ్యతిరేక పరిక్రియ.

**ఉదాహరణ 1:** $3^2 = 9$ కావున 9 యొక్క వర్గమూలం 3 ($\sqrt{9} = 3$)

$4^2 = 16$ కావున 16 యొక్క వర్గమూలం 4 ($\sqrt{16} = 4$)

$5^2 = 25$ కావున 25 యొక్క వర్గమూలం 5 ($\sqrt{25} = 5$)

$y^2 = x$ అయిన $x$ యొక్క వర్గమూలం $y$ $\left(\sqrt{x} = y\right)$

**ఉదాహరణ 2:**
1. $\sqrt{4} = 2$ ఎందుకనగా $2^2 = 4$
2. $\sqrt{16} = 4$ ఎందుకనగా $4^2 = 16$
3. $\sqrt{225} = 15$ ఎందుకనగా $15^2 = 225$ మొదలగునవి.

> 25 అనేది 5 మరియు −5ల వర్గము. 25 యొక్క వర్గమూలాలు −5 మరియు 5 లు కాని ఈ అధ్యాయంలో ధన వర్గమూలాన్ని మాత్రమే వాడుచున్నాము. ధన వర్గమూలాన్ని ప్రధాన వర్గమూలం అంటాము.
> దీనిని ఈ విధంగా రాస్తాము.
> $\therefore \sqrt{25} = 5.$

క్రింది పట్టికను పూరించండి.

| వర్గం | వర్గమూలం |
|---|---|
| $1^2 = 1$ | $\sqrt{1} = 1$ |
| $2^2 = 4$ | $\sqrt{4} = 2$ |
| $3^2 = 9$ | $\sqrt{9} = 3$ |
| $4^2 = 16$ | $\sqrt{16} = 4$ |
| $5^2 = 25$ | $\sqrt{25} =$ …….. |
| $6^2 = 36$ | $\sqrt{36} =$ …….. |
| $7^2 =$ …...... | $\sqrt{\quad} =$ …….. |
| $8^2 =$ …….. | $\sqrt{\quad} =$ ……… |
| $9^2 =$ …….. | $\sqrt{\quad} =$ ……… |
| $10^2 =$ …….. | $\sqrt{\quad} =$ ……… |

SCERT, TELANGANA

## 6.5 Finding the Square root through subtraction of successive odd numbers

We know that, every square number can be expressed as a sum of successive odd natural numbers starting from 1.

Consider,

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Finding square root is the reverse order of this pattern.

For example, find $\sqrt{49}$

Step 1: $49 - 1 = 48$ (Subtracting of first odd number)

Step 2: $48 - 3 = 45$ (Subtracting of 2nd odd number)

Step 3: $45 - 5 = 40$ (Subtracting of 3rd odd number)

Step 4: $40 - 7 = 33$

Step 5: $33 - 9 = 24$

Step 6: $24 - 11 = 13$

Step 7: $13 - 13 = 0$

> Observe we know
> $1+3+5+7+9+11+13 = 7^2 = 49$
> $49 - [1+3+5+7+9+11+13] = 0$
> Hence 49 is a perfect square.

From 49, we have subtracted seven successive odd numbers starting from 1 and obtained zero (0) at 7th step.

$$\therefore \sqrt{49} = 7$$

Note: If the result of this process is not zero then the given number is not a perfect square.

### Do This

1. By subtraction of successive odd numbers find whether the following numbers are perfect squares or not?

   (i) 55 (ii) 90 (iii) 121

It is easy to find the square roots of any square numbers by the above subtraction process. But in case of bigger numbers such as 625, 729.......... it is time taking process. So, Let us try to find simple ways to obtain the square roots.

SCERT, TELANGANA

## 6.5 వరుస బేసి సంఖ్యల వ్యవకలనం ద్వారా వర్గమూలం కనుగొనుట

ప్రతి వర్గ సంఖ్యను 1 తో మొదలుకొని వరుసగా వచ్చు బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చని మనం తెలుసుకున్నాము.

పరిశీలించుము, $1 + 3 \quad = 4 \quad = 2^2$

$1 + 3 + 5 \quad = 9 \quad = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 \quad = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 \quad = 25 = 5^2$

పై అమరిక యొక్క వ్యతిరేక క్రమంలో వర్గమూలంను కనుగొంటాము.

ఉదా: $\sqrt{49}$ విలువ కనుగొనుట

సోపానం 1 $49 - 1 = 48$ (మొదటి బేసిసంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం 2 $48 - 3 = 45$ (రెండవ బేసిసంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం 3 $45 - 5 = 40$ (మూడవ బేసిసంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం 4 $40 - 7 = 33$

సోపానం 5 $33 - 9 = 24$

సోపానం 6 $24 - 11 = 13$

సోపానం 7 $13 - 13 = 0$

> గమనించండి.
> $1+3+5+7+9+11+13 = 7^2 = 49$
> $49 - [1+3+5+7+9+11+13] = 0$
> $\therefore$ 49 పరిపూర్ణ సంఖ్య

1 నుండి మొదలుకొని 7 వరుస బేసి సంఖ్యలు, 49 నుండి తీసివేయడం ద్వారా 0 వచ్చింది (7వ సోపానం).

**సూచన:** పై పద్ధతిలో చివరగా సున్నా రానట్లయితే ఇచ్చిన సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గం కాదు.

### ఇవి చేయండి

1. వరుస బేసి సంఖ్యల వ్యవకలనం ద్వారా క్రింది సంఖ్యలు (పరిపూర్ణ) వర్గ సంఖ్యలు అవుతాయో, లేదో కనుగొనండి.

(i) 55 (ii) 90 (iii) 121

(పరిపూర్ణ) వర్గ సంఖ్యల వర్గమూలాలను పునరావృత వ్యవకలనం ద్వారా సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతి 625, 729.......... లాంటి పెద్ద సంఖ్యల వర్గ మూలాలు కనుగొనడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. ఇటువంటి పెద్ద సంఖ్యల వర్గమూలాలు కనుగొనడానికి కొన్ని సులభమైన పద్ధతులను తెలుసుకుందాం.

SCERT, TELANGANA

There are two methods of finding the square root of the given numbers. They are

(i) Prime factorization method

(ii) Division method

## 6.6 Finding the Square Root Through Prime Factorisation Method

Let us find the square root of 484 by prime factorization method.

| | |
|---|---|
| 2 | 484 |
| 2 | 242 |
| 11 | 121 |
| 11 | 11 |
| | 1 |

**Step 1:** Resolve the given number 484 into prime factors, we get

$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$

**Step 2:** Make pairs of equal factors, we get

$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$

**Step 3:** Choosing one factor out of every pair

By doing so, we get

$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$

Therefore, the square root of 484 is 22.

Now we will see some more examples

> $484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$
>
> $\sqrt{484} = \sqrt{(2\times11)^2}$
>
> $= 2 \times 11$
>
> $= 22$

**Example 3 :** Find the square root of 1296 by Prime Factorization

**Solution :** Resolving 1296 into Prime factors, we get

$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$

$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

| | |
|---|---|
| 2 | 1296 |
| 2 | 648 |
| 2 | 324 |
| 2 | 162 |
| 3 | 81 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

**Example 4 :** Find the square root of 2025

**Solution :** Resolving 2025 into Prime factors, we get

$2025 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (5 \times 5)$

$\sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 5$

$\therefore \sqrt{2025} = 45$

| | |
|---|---|
| 5 | 2025 |
| 5 | 405 |
| 3 | 81 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |



SCERT, TELANGANA

ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనడానికి ప్రధానంగా రెండు పద్ధతులు కలవు. అవి

(i) ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి

(ii) భాగాహార పద్ధతి

## 6.6 ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలాలు కనుగొనుట

| | |
|---|---|
| 2 | 484 |
| 2 | 242 |
| 11 | 121 |
| 11 | 11 |
| | 1 |

484 యొక్క వర్గమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొందాము.

**సోపానం 1:** 484 ని ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించి

$$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$$

**సోపానం 2:** సమాన కారణాంకాలను జతలుగా వ్రాయండి.

$$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$$

**సోపానం 3:** ప్రతి జత సమానకారణాంకాల నుండి ఒక కారణాంకాన్ని తీసుకొనగా

$$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$$

కావున 484 యొక్క వర్గమూలం 22.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

$$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$$

$$\sqrt{484} = \sqrt{(2\times11)^2}$$

$$= 2 \times 11$$

$$= 22$$

**ఉదాహరణ 3:** 1296 వర్గమూలాన్ని ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

**సాధన:** 1296 ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించగా

$$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$

$$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

| | |
|---|---|
| 2 | 1296 |
| 2 | 648 |
| 2 | 324 |
| 2 | 162 |
| 3 | 81 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

**ఉదాహరణ 4:** 2025 వర్గమూలం కనుగొనండి.

**సాధన:** 2025 ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించిన

$$2025 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (5 \times 5)$$

$$\sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 5$$

$$\therefore \sqrt{2025} = 45$$

| | |
|---|---|
| 5 | 2025 |
| 5 | 405 |
| 3 | 81 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

SCERT, TELANGANA

**Example 5:** Find the smallest number by which 720 should be multiplied to get a perfect square.

**Solution :** Resolving 720 into Prime factors, we get

| | |
|---|---|
| 2 | 720 |
| 2 | 360 |
| 2 | 180 |
| 2 | 90 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

We see that 2, 2, 3 exist in pairs, while 5 is alone

So, we should multiply the given number by 5 to get a perfect square.

Therefore, the perfect square so obtained is

$720 \times 5 = 3600$

**Example 6:** Find the smallest number by which 6000 should be divided to get a perfect square and also find the square root of the resulting number.

**Solution :** Resolving 6000 into Prime factors, we get

| | |
|---|---|
| 2 | 6000 |
| 2 | 3000 |
| 2 | 1500 |
| 2 | 750 |
| 3 | 375 |
| 5 | 125 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$6000 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{5 \times 5} \times 5$

We can see that, 2, 2, and 5 exists in pairs while 3 and 5 do not exists in pairs

So, we must divide the given number by $3 \times 5 = 15$

Therefore perfect square obtained $= 6000 \div 15 = 400$

| | |
|---|---|
| 2 | 400 |
| 2 | 200 |
| 2 | 100 |
| 2 | 50 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

The square root of 400 is

$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$

$= 2 \times 2 \times 5$

$= 20$

## Exercise - 6.2

1. Find the square root of the following numbers by Prime factorization method.

(i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 5:** 720 ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

**సాధన:** 720 ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించిన

| | |
|---|---|
| 2 | 720 |
| 2 | 360 |
| 2 | 180 |
| 2 | 90 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

2, 2, 3 లకు జతలు ఉన్నాయి. కాని 5 కి జత లేదు.

కావున ఇచ్చిన సంఖ్యను 5 చే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

పరిపూర్ణ వర్గం $= 720 \times 5 = 3600$

$\therefore$ పరిపూర్ణ వర్గం $720 \times 5 = 3600$

**ఉదాహరణ 6:** 6000ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును. ఫలిత సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం కనుగొనుము.

**సాధన:** 6000 ని ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించిన

| | |
|---|---|
| 2 | 6000 |
| 2 | 3000 |
| 2 | 1500 |
| 2 | 750 |
| 3 | 375 |
| 5 | 125 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$6000 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{5 \times 5} \times 5$

పై విభజనలో 2, 2, 5 లు జతలుగా కారణాంకాలు ఉన్నాయి. 3 మరియు 5 లు అవే కారణాంకాలు జతలుగా లేవు.

కావున $3 \times 5 = 15$ చే 6000 నిభాగించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

పరిపూర్ణ వర్గం $= 6000 \div 15 = 400$

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

| | |
|---|---|
| 2 | 400 |
| 2 | 200 |
| 2 | 100 |
| 2 | 50 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

కావున 400 యొక్క వర్గమూలం

$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$

$= 2 \times 2 \times 5$

$= 20$

## అభ్యాసం - 6.2

1. ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింది వాటి వర్గమూలాలు కనుగొనుము.
   (i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

SCERT, TELANGANA

2. Find the smallest number by which 3645 must be multiplied to get a perfect square.

3. Find the smallest number by which 2400 is to be multiplied to get a perfect square and also find the square root of the resulting number.

4. Find the smallest number by which 7776 is to be divided to get a perfect square.

5. 1521 trees are planted in a garden in such a way that there are as many trees in each row as there are rows in the garden. Find the number of rows and number of trees in each row.

6. A school collected ₹ 2601 as fees from its students. If fee paid by each student and number students in the school were equal, how many students were there in the school?

7. The product of two numbers is 1296. If one number is 16 times the other, find the two numbers?

8. 7921 soldiers sat in an auditorium in such a way that there are as many soldiers in a row as there are rows in the auditorium. How many rows are there in the auditorium?

9. The area of a square field is 5184 $m^2$. Find the area of a rectangular field, whose perimeter is equal to the perimeter of the square field and whose length is twice of its breadth.

## 6.7 Finding square root by division method

We have already discussed the method of finding square root by prime factorisation method. For large numbers, it becomes lengthy and difficult. So, to overcome this problem we use division method.

Let us find the square root of 784 by division method.

$$\left| 7\,\overline{84} \right|$$

Step 1 : Pair the digits of the given number, starting from units place to the left. Place a bar on each pair.

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & 7\,\overline{84} & 2 \end{array}$$

Step 2 : Find the largest number whose square is less than or equal to the first pair or single digit from left (i.e. 2). Take this number as the divisor and the quotient.

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & 7\,\overline{84} & 2 \\ & 4 & \\ \hline & 3 & \end{array}$$

Step 3 : Subtract the product of the divisor and quotient (2 × 2 = 4) from first pair or single digit (i.e. 7 – 4 = 3)

$$\begin{array}{r|r|l} 2 & 7\overline{84} & 2 \\ & -4 & \\ \hline & 384 & \end{array}$$

Step 4 : Bring down the second pair (i.e. 84) to the right of the Remainder (i.e. 3). This becomes the new dividend (i.e. 384).

$$\begin{array}{r|r|l} 2 & 7\overline{84} & 2 \\ & -4 & \\ \hline 4\square & 384 & \end{array}$$

Step 5 : From the next possible divisor double the quotient (i.e 2 × 2 = 4) and write a box on its right.

SCERT TELANGANA

2. 3645 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.
3. 2400 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును. వచ్చిన ఫలిత సంఖ్య వర్గమూలం కనుగొనుము.
4. 7776 ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును.
5. ఒక తోటలో కొన్ని వరుసలలో 1521 చెట్లు కలవు. ప్రతి వరుసలో ఉన్న చెట్ల సంఖ్య, వరుసల సంఖ్యకు సమానం. అయిన ప్రతి వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య, తోటలోని వరుసల సంఖ్య కనుక్కోండి.
6. ఒక పాఠశాలలో విద్యార్థుల నుండి ఫీజు రూపంలో ₹2601 వసూలు చేశారు. పాఠశాలలోని విద్యార్థుల సంఖ్య, ప్రతి విద్యార్థి చెల్లించిన ఫీజుకి సమానం అయిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?
7. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 1296. వాటిలో మొదటి సంఖ్య, రెండవ సంఖ్యకు 16 రెట్లు అయిన ఆ రెండు సంఖ్యలు ఏవి?
8. 7921 మంది సైనికులు ఒక సమావేశ మందిరం (ఆడిటోరియం) లో కొన్ని వరుసలలో కూర్చొని ఉన్నారు. ప్రతి వరుసలోని సైనికుల సంఖ్య వారు కూర్చున్న వరుసల సంఖ్యకు సమానం. అయిన ప్రదర్శన శాలలో ఉన్న వరుసల సంఖ్య ఎంత?
9. ఒక చతురస్ర పొలం వైశాల్యం 5184 మీ$^2$. చతురస్రపు చుట్టుకొలతకు సమాన చుట్టుకొలత గల దీర్ఘచతురస్రం కలదు. దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు అయిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం ఎంత?

## 6.7 భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలం కనుగొనుట

మనం ప్రధాన కారణాంకాల విభజన పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలాన్ని కనుగొనడం నేర్చుకొన్నాము. పెద్ద సంఖ్యలకు ఈ పద్ధతి దీర్ఘమైనది మరియు కష్టమైనది. అందువలన ఈ సమస్యను అధిగమించడానికి వర్గమూలాలు కనుగొనుటలో భాగాహార పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు.

ఇప్పుడు మనం 784 వర్గమూలాన్ని భాగహార పద్ధతిలో కనుగొందాం.

$|7\overline{84}|$

సోపానం 1: ఇచ్చిన సంఖ్యను ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని, రెండేసి సంఖ్యల సమూహాలుగా విభజించండి. ఆ జతపైన (అడ్డుగీత లేదా బార్) ప్రక్కన చూపినట్లు వ్రాయండి.

$2\,|\,7\overline{84}\,|\,2$

సోపానం 2: మొదటి జత లేదా అంకెకు (ఎడమ నుండి కుడికి) సమానమైన లేదా తక్కువైన పరిపూర్ణ వర్గసంఖ్యల నుండి గరిష్ట సంఖ్యను ఎన్నుకోండి. దాని వర్గమూలాన్ని విభాజకంలో, భాగఫలంలో వ్రాయండి.

```
2 | 784 | 2
  |  4  |
  |-----|
  |  3  |
```

సోపానం 3: విభాజకం మరియు భాగఫలాల లబ్ధాన్ని $(2 \times 2 = 4)$ మొదటి జత లేదా అంకె నుండి తీసివేయండి. (అనగా $7 - 4 = 3$)

```
2 |  784 | 2
  | -4   |
  |------|
  |  384 |
```

సోపానం 4: శేషానికి కుడివైపున రెండవ జతను వ్రాయాలి. (384) ఇది కొత్త విభాజ్యం అవుతుంది.

```
 2 |  784 | 2
   | -4   |
---|------|
4□ |  384 |
```

సోపానం 5: విభాజ్యానికి సరిపోయే కొత్త విభాజకం కొరకు, భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేసి దాని ప్రక్క ఖాళీగా ఒక గడిని వ్రాయండి. (అనగా $2 \times 2 = 4$)

SCERT, TELANGANA

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $\overline{7}\,\overline{84}$ | 28 |
| | −4 | |
| 4[8] | 384 | |
| | 384 | |
| | 0 | |

Step 6 : Guess the largest possible digit to fill the box in such a way that the product of the new divisor and this digit is equal to or less than the new dividend (i.e. 48 × 8 = 384).

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $\overline{7}\,\overline{84}$ | 28 |
| | −4 | |
| 48 | 384 | |
| | −384 | |
| | 0 | |

Step 7 : By subtracting, we get the remainder zero. The final quotient 28, is the square root of 784

$\therefore \sqrt{784} = 28$

### Think, Discuss and Write

Observe the following divisions, give reasons why 8 in the divisor 48 is considered in the above example?

| | | |
|---|---|---|
| 4) 384 (9 | 4) 384 (8 | 4) 384 (7 |
| 36 | 32 | 28 |
| 24 | 64 | 104 |
| 81 $= 9^2$ | 64 $= 8^2$ | 49 $= 7^2$ |

Now, we will see some more examples.

**Example 7:** Find the square root of 1296

**Solution:** Step 1

$\overline{12}\,\overline{96}$

Step 2

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 3 |
| | 9 | |

Step 3

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 3 |
| | -9 | |

Step 4

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 3 |
| | -9 | |
| 6 | 396 | |

Step 5

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 36 |
| | -9 | |
| 66 | 396 | |
| | - 396 | |
| | 0 | |

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

| Observe |
|---|
| 6) 396 (6 |
| 36 |
| 36 |
| 36 $= 6^2$ |
| 0 |

SCERT TELANGANA

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $\overline{7}\,\overline{84}$ | 28 |
| | −4 | |
| 4[8] | 384 | |
| | 384 | |
| | 0 | |

సోపానం 6: ఖాళీగడిలో వ్రాయడానికి ఒక అంకెను ఊహించండి. ఈ అంకెతో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకం మరియు అనుకున్న అంకెల లబ్ధం, విభాజ్యానికి సమానంగా లేదా తక్కువగా ఉండేటట్లు ఒక అంకెను ఎన్నుకోండి. భాగించి శేషాన్ని రాబట్టండి (48×8=384).

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $\overline{7}\,\overline{84}$ | 28 |
| | −4 | |
| 48 | 384 | |
| | −384 | |
| | 0 | |

సోపానం 7: తీసివేసిన వచ్చు శేషం 0.

తుది భాగఫలం 28, 784 యొక్క వర్గమూలం.

$$\therefore \sqrt{784} = 28$$

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

క్రింది భాగాహారాలను పరిశీలించండి. పై ఉదాహరణలో విభాజకంలో 48 లో 8 ఎందుకు తీసుకున్నామో సకారణంగా తెలపండి.

| | | |
|---|---|---|
| 4) 384 (9 | 4) 384 (8 | 4) 384 (7 |
| 36 | 32 | 28 |
| 24 | 64 | 104 |
| 81 $= 9^2$ | 64 $= 8^2$ | 49 $= 7^2$ |

మరిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

**ఉదాహరణ 7:** 1296 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?

**సాధన:**

సోపానం 1: $\overline{12}\,\overline{96}$

సోపానం 2:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 3 |
| | 9 | |

సోపానం 3:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 3 |
| | -9 | |

సోపానం 4:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1296 | 3 |
| | -9 | |
| 6 | 396 | |

సోపానం 5:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{12}\,\overline{96}$ | 36 |
| | -9 | |
| 66 | 396 | |
| | - 396 | |
| | 0 | |

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

**పరిశీలించండి**

| |
|---|
| 6) 396 (6 |
| 36 |
| 36 |
| 36 $= 6^2$ |
| 0 |

SCERT TELANGANA

**Example 8:** Find the square root of 8281

**Solution:**

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\overline{82}\ \overline{81}$ | 91 |
| | -81 | |
| 181 | 181 | |
| | -181 | |
| | 0 | |

Therefore $\sqrt{8281} = 91$

**Observe**

| | |
|---|---|
| 18 | 181 (1 |
| | 18 |
| | 1 |
| | $1 = 1^2$ |
| | 0 |

**Example 9:** Find the greatest four digit number which is a perfect square

**Solution:** Greatest four digit number is 9999

We find square root of 9999 by division method.

The remainder 198 shows that it is less than 9999 by 198

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\overline{99}\ \overline{99}$ | 99 |
| | -81 | |
| 189 | 18 99 | |
| | -17 01 | |
| | 1 98 | |

This means if we subtract 198 from 9999, we get a perfect square.

$\therefore$ 9999 – 198 = 9801

$\therefore$ 9801 is the required perfect square.

**Example 10:** Find the least number which must be subtracted from 4215 to make it a perfect square?

**Solution:** We find by division method that

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\overline{42}\ \overline{15}$ | 64 |
| | -36 | |
| 124 | 6 15 | |
| | -4 96 | |
| | 1 19 | |

The remainder is 119

This means, if we subtract 119 from 4215. We get a perfect square.

Hence, the required least number is 119.

## 6.8 Square root of decimal numbers using division method

Let us begin with the example $\sqrt{17.64}$.

Step 1: Place the bars on the integral part of the number i.e. 17 in the usual manner. Place the bars on every pair of decimal part from left to right

$\overline{17}.\overline{64}$

Step 2: Find the largest number (i.e. 4) whose square is less than or equal to the first pair of integral part (i.e. 17).

Take this number 4 as a divisor and the first pair 17 as the dividend. Get the remainder as 1 (By doing division).

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4 |
| | -16 | |
| | 1 | |

Step 3: Write the next pair (i.e. 64) to the right of the remainder to get 164, which becomes the new dividend.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4 |
| | -16 | |
| | 1.64 | |

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 8:** 8281 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనుము.

**సాధన:**

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\overline{82}\ \overline{81}$ | 91 |
| | -81 | |
| 181 | 181 | |
| | -181 | |
| | 0 | |

$\therefore \sqrt{8281} = 91$

**పరిశీలించండి**

| | | |
|---|---|---|
| 18 | $\overline{181}$ | (1 |
| | 18 | |
| | 1 | |
| | 1 $= 1^2$ | |
| | 0 | |

**ఉదాహరణ 9:** నాలుగు అంకెలు గల అతి పెద్ద వర్గసంఖ్యను వ్రాయండి.

**సాధన:** నాలుగు అంకెలు గల అతి పెద్ద సంఖ్య 9999

భాగహార పద్ధతిని 9999 వర్గమూలం కనుగొనగా

శేషం =198 అనగా 9999 కంటే 198 తక్కువగానున్న సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

అనగా 9999 నుండి 198 తీసివేయగా, పరిపూర్ణ వర్గం వచ్చును.

$\therefore$ 9999 – 198 = 9801 పరిపూర్ణ వర్గం.

$\therefore$ 9801 మనకు కావలసిన పరిపూర్ణ వర్గం.

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\overline{99}\ \overline{99}$ | 99 |
| | -81 | |
| 189 | 18 99 | |
| | -17 01 | |
| | 1 98 | |

**ఉదాహరణ 10:** 4215 నుండి ఏ, కనిష్ఠ సంఖ్యను తీసివేసిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

**సాధన:** భాగహార పద్ధతిన వర్గమూలం కనుగొనిన

శేషం = 119

అనగా 4215 నుండి 119 తీసివేయగా వర్గ సంఖ్య వస్తుంది.

అందువలన, తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య =119.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\overline{42}\ \overline{15}$ | 64 |
| | -36 | |
| 124 | 6 15 | |
| | -4 96 | |
| | 1 19 | |

## 6.8 భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి దశాంశాల వర్గమూలం కనుగొనుట

ఒక ఉదాహరణ $\sqrt{17.64}$ ద్వారా చూద్దాం.

సోపానం 1: ఇంతకు ముందు చర్చించిన విధంగానే పూర్ణాంక భాగం అయిన 17 పై బార్ గీయండి. దశాంశ భాగంలో రెండేసి సంఖ్యల సమూహం (ఎడమ నుండి కుడికి) బార్‌ని గీయండి.

$\overline{17}.\overline{64}$

సోపానం 2: ఏ గరిష్ఠ సంఖ్య (అనగా 4) వర్గం పూర్ణాంక భాగం (అనగా 17) నకు సమానంగా లేదా అంతకన్నా తక్కువగా ఉంటుందో ఆ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

4 ను విభాజకంగా, 17ను విభాజ్యంగా తీసుకొని శేషాన్ని (అనగా 1ని) రాబట్టండి.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}\ .\ \overline{64}$ | 4 |
| | -16 | |
| | 1 | |

సోపానం 3: తరువాత రెండంకెల జత (64) ను శేషంనకు కుడివైపున వ్రాయగా వచ్చు కొత్త విభాజ్యం 164.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4 |
| | -16 | |
| | 1.64 | |

SCERT, TELANGANA

Step 4: Double the quotient ($2 \times 4 = 8$) and write it as 8 in the box on its right. Since 64 is the decimal part so, put a decimal point in the quotient (i.e. 4)

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4 |
| | -16 | |
| 8☐ | - 164 | |

Step 5: Guess the digit to fill the box in such a way that the product of the new divisor and the digit is equal to or less than the new dividend 164. In this case the digit is 2. Divide and get the remainder.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4.2 |
| | -16 | |
| 8[2] | 164 | |
| | -164 | |
| | 0 | |

Step 6: Since the remainder is zero and no pairs left.

$\sqrt{17.64} = 4.2$

Now, let us see some more examples.

**Example 11:** Find the square root of 42.25 using division method.

**Solution:** Step 1 : $\overline{42}\ .\ \overline{25}$

Step 2 :

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\overline{42}.\overline{25}$ | 6 |
| | -36 | |
| | 6 | |

Step 3 :

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\overline{42}.\overline{25}$ | 6.5 |
| 6 | -36 | |
| 125 | 625 | |
| | -625 | |
| | 0 | |

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

**Example 12:** Find $\sqrt{96.04}$.

**Solution:**

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\overline{96}.\overline{04}$ | 9.8 |
| 9 | -81 | |
| 188 | 1504 | |
| | -1504 | |
| | 0 | |

Therefore $\sqrt{96.04} = 9.8$

SCERT TELANGANA

సోపానం 4: భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేయగా వచ్చు 8కి కుడివైపున ఖాళీ గడిని ఉంచండి. 64 అనునది దశాంశ భాగం కావున భాగఫలంలో దశాంశాన్ని ఉంచండి. (అనగా 4)

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4 |
| | -16 | |
| 8□ | - 164 | |

సోపానం 5: ఖాళీలో వ్రాయడానికి ఒక అంకె ఊహించండి. ఈ అంకెతో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకం మరియు ఆ అంకె లబ్ధం విభాజ్యానికి సమానంగా (164) లేదా అంతకన్నా తక్కువగా ఉండేటట్లు ఎన్నుకోండి.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\overline{17}.\overline{64}$ | 4.2 |
| | -16 | |
| 8[2] | 164 | |
| | -164 | |
| | 0 | |

సోపానం 6: శేషం "0" మరియు ఇంకా అంకెల జతలు లేవు.

కావున $\sqrt{17.64} = 4.2$

ఇప్పుడు మరిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

**ఉదాహరణ 11:** 42.25 వర్గమూలంను భాగాహార పద్ధతిలో కనుగొనుము.

**సాధన:** సోపానం 1: $\overline{42}.\overline{25}$

సోపానం 2:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\overline{42}.\overline{25}$ | 6 |
| | -36 | |
| | 6 | |

సోపానం 3:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\overline{42}.\overline{25}$ | 6.5 |
| 6 | -36 | |
| 125 | 625 | |
| | -625 | |
| | 0 | |

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

**ఉదాహరణ 12:** $\sqrt{96.04}$ ను కనుగొనుము.

సాధన:

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\overline{96}.\overline{04}$ | 9.8 |
| 9 | -81 | |
| 188 | 1504 | |
| | -1504 | |
| | 0 | |

$\therefore \sqrt{96.04} = 9.8$

SCERT, TELANGANA

## 6.9 Estimating square roots of non perfect square numbers

So far we have learnt the method for finding the square roots of perfect squares. If the numbers are not perfect squares, then we will not be able to find the exact square roots. In all such cases we atleast need to estimate the square root.

Let us estimate the value of $\sqrt{300}$ to the nearest whole number.

300 lies between two perfect square numbers 100 and 400

$\therefore \quad 100 < 300 < 400$

$10^2 < 300 < 20^2$

i.e. $\quad 10 < \sqrt{300} < 20$

But still we are not very close to the square number. we know that $17^2 = 289,\ 18^2 = 324$

Therefore $\quad 289 < 300 < 324$

$17 < \sqrt{300} < 18$

As 289 is more closer to 300 than 324.

The approximate value of $\sqrt{300}$ is 17.

### Exercise - 6.3

1. Find the square root of the following numbers by division method.
   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025
2. Find the square root of the following decimal numbers.
   (i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64
3. Find the least number that is to be subtracted from 4000 to make it perfect square
4. Find the length of the side of a square whose area is 4489 sq.cm.
5. A gardener wishes to plant 8289 plants in the form of a square and found that there were 8 plants left. How many plants were planted in each row?
6. Find the least perfect square with four digits.
7. Find the least number which must be added to 6412 to make it a perfect square?
8. Estimate the value of the following numbers to the nearest whole number
   (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

SCERT, TELANGANA

## 6.9 పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యల వర్గమూలాలను అంచనా వేయుట

ఇంతవరకు మనం పరిపూర్ణ వర్గాల వర్గమూలాలను కనుగొనుట నేర్చుకొన్నాం, పరిపూర్ణ వర్గాలు కాని సంఖ్యలకు ఖచ్చితమైన వర్గమూలాలు ఉండవు.

అటువంటి సందర్భాలలో వాటి వర్గమూలాలను ఏవిధంగా అంచనా వేస్తామో చూద్దాం.

ఇప్పుడు $\sqrt{300}$ యొక్క విలువకి దగ్గర పూర్ణాంకాన్ని అంచనా వేద్దాం.

300, వర్గ సంఖ్యలైన 100 మరియు 400 మధ్య ఉంటుంది.

$\therefore \quad 100 < 300 < 400$

$10^2 < 300 < 20^2$

$10 < \sqrt{300} < 20$

ఇంకా ఈ సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలకు దగ్గరగా లేవు. $17^2 = 289$, $18^2 = 324$

కావున $\quad 289 < 300 < 324$

$17 < \sqrt{300} < 18$

300, 324 కంటే 289 కి దగ్గరగా ఉంది.

కావున $\sqrt{300} = 17$ గా అంచనా వేయవచ్చు.

## అభ్యాసం - 6.3

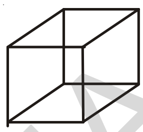
1. భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలాలను కనుక్కోండి.
   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025
2. క్రింది దశాంశాలకు వర్గమూలాలను కనుక్కోండి.
   (i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64
3. 4000 నుండి ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను తీసివేసిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.
4. ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 4489 సెం.మీ$^2$ అయిన భుజం పొడవు ఎంత?
5. ఒక తోటమాలి 8289 మొక్కలను చతురస్రాకారంలో కొన్ని వరుసలలో నాటాడు. నాటిన తర్వాత 8 మొక్కలు మిగిలిన, ప్రతి వరుసలో నాటిన మొక్కలు ఎన్ని?
6. నాలుగు అంకెల కనిష్ఠ పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనుము.
7. 6412 కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను కలిపిన పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య అగును.
8. క్రింది వాటి వర్గమూలాలను దగ్గరి పూర్ణాంకానికి అంచనావేసి చెప్పండి.
   (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

SCERT TELANGANA

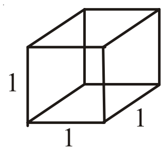
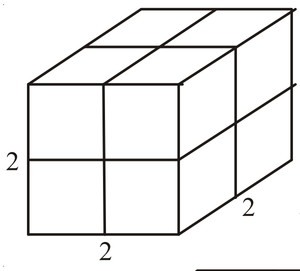
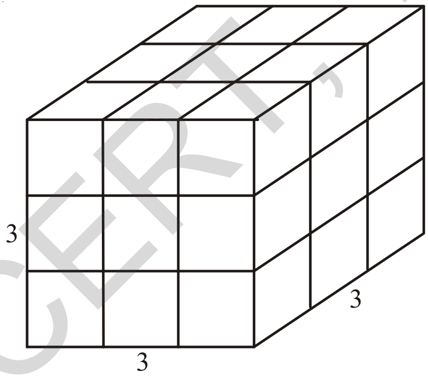
## Cubes and Cube Roots

### 6.10 Cubic Numbers

We know that a cube is a solid figure with six identical squares as its faces.



Now let us make cubic shapes using these unit cubes

| S.No. | Figure | Length of the side | No.of unit cubes used |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 1 | 1 |
| 2 |  | 2 | 8 |
| 3 |  | 3 | 27 |

Can you make next cube?

Guess how many unit cubes are required to make a cube whose side is 5 units?

So, we require 1, 8, 27, 64 …….. unit cubes to make cubic shapes.

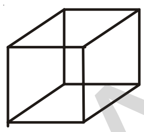
These numbers 1, 8, 27, 64 …… are called cubic numbers or perfect cubes.

SCERT, TELANGANA

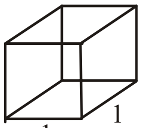
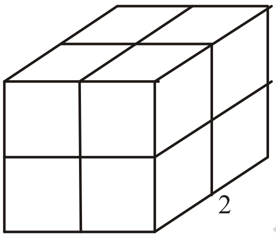
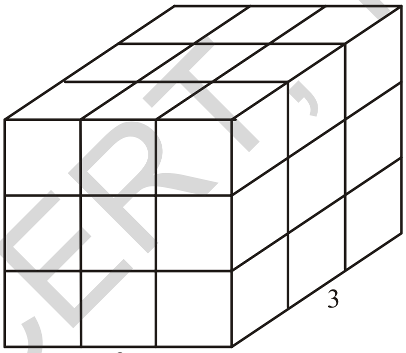
## ఘనాలు మరియు ఘనపరిమాణం

### 6.10 ఘన సంఖ్యలు

ఆరు సమాన చతురస్ర తలాలు గల ఘనాకారాన్ని సమఘనం అంటారని మనకు తెలుసు.



కొన్ని ప్రమాణ ఘనాలను తీసుకొని వాటిని వివిధ పరిమాణములు గల ఘనాకారాన్ని తయారు చేద్దాము.

| క్ర.సం. | పటం | అంచు పొడవు | ప్రమాణ ఘనాల సంఖ్య |
|---|---|---|---|
| 1 |   | 1 | 1 |
| 2 |   | 2 | 8 |
| 3 |   | 3 | 27 |

ఈ క్రమంలో తరువాత రావలసిన సమ ఘనాన్ని తయారు చేయగలవా?

5 ప్రమాణాల భుజం పొడవు గల సమఘనాకారాన్ని తయారు చేయుటకు ఎన్ని ప్రమాణ ఘనాలు కావలెనో ఊహించగలవా?

కావున సమ ఘనాకారాలు తయారుచేయుటకు 1, 8, 27, 64, ....... ప్రమాణ సమ ఘనాలు కావాలి.

1, 8, 27, 64, ....... లను ఘన సంఖ్యలు లేదా పరిపూర్ణ ఘనాలు అంటాము. వీటిని క్రింది విధంగా వ్రాయగా

SCERT, TELANGANA

As $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = \ldots\ldots.. \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots =$

So, a cube number is obtained when a number is multiplied by itself for three times.

That is, cube of a number '$x$' is $x \times x \times x = x^3$

Is 49 a cube number ?

No, as $49 = 7 \times 7$ and there is no natural number which when multiplied by itself three times gives 49. We can also see that $3 \times 3 \times 3 = 27$ and $4 \times 4 \times 4 = 64$. This shows that 49 is not a perfect cube.

**Try These**

1. Is 81 a perfect cube?
2. Is 125 a perfect cube?

Observe and complete the following table.

| Number | Cube |
|---|---|
| 1 | $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ |
| 2 | $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ |
| 3 | $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ |
| 4 | $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ |
| 5 | $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ |
| 6 | $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = \ldots\ldots\ldots$ |
| 7 | $7^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$ |
| 8 | $8^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$ |
| 9 | $9^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$ |
| 10 | $10^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$ |

**Think, Discuss and Write**

(i) How many perfect cube numbers are present between 1 and 100, 1 and 500, 1 and 1000?

(ii) How many perfect cubes are there between 500 and 1000 ?

SCERT, TELANGANA

$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 =$ …….. × …… × …… =

కావున ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చు సంఖ్యను దాని ఘనము అంటాము.

కావున యొక్క ఘన సంఖ్య $x^3 = x \times x \times x$

49 ఒక ఘన సంఖ్య అగునా?

కాదు, ఎందుకనగా $49 = 7 \times 7$ మాత్రమే మరియు ఇది ఏ సహజ సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించిన 49 కాదు. ఎందుకనగా $3\times 3\times 3 = 27$ మరియు $4 \times 4 \times 4 \times 64$. 49 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు.

### ప్రయత్నించండి

1. 81 ఘనసంఖ్య అగునా ?
2. 125 ఘన సంఖ్య అగునా?

క్రింది పట్టికను పరిశీలించి పూర్తి చేయుము.

| సంఖ్య | ఘనం |
|---|---|
| 1 | $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ |
| 2 | $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ |
| 3 | $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ |
| 4 | $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ |
| 5 | $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ |
| 6 | $6^3 = 6 \times 6 \times 6 =$ ……… |
| 7 | $7^3 =$ ……………… = ………….. |
| 8 | $8^3 =$ ……………… = ………….. |
| 9 | $9^3 =$ ……………… = ………….. |
| 10 | $10^3 =$ ……………… = ………….. |

### ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

(i) 1, 100 ల మధ్య 1, 500 ల మధ్య; 1 మరియు 1000 ల మధ్య ఎన్ని (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్యలు కలవు?

(ii) 500, 1000 ల మధ్య ఎన్ని (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్యలు కలవు?

SCERT, TELANGANA

Following are the cubes of numbers from 11 to 20

| Number | Cube |
|---|---|
| 11 | 1331 |
| 12 | 1728 |
| 13 | 2197 |
| 14 | 2744 |
| 15 | 3375 |
| 16 | 4096 |
| 17 | 4913 |
| 18 | 5832 |
| 19 | 6859 |
| 20 | 8000 |

Do you find anything interesting in the sum of the digits in the cubes of 17 and 18 ?

From the table, we can see that cube of an even number is always an even number. Do you think the same is true for odd numbers also?

We can also observe that, if a number has 1 in the units place, then its cube ends with 1.

Similarly, what can you say about the units digit of the cube of a number having 0, 4, 5, 6 or 9 as the units digit?

### Try These

1. Find the digit in units place of each of the following numbers.

   (i) $75^3$ (ii) $123^3$ (iii) $157^3$ (iv) $198^3$ (v) $206^3$

## 6.11 Some interesting patterns

1. Adding consecutive odd numbers

   Observe the following patterns.

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = \ldots\ldots = \ldots\ldots.$

Can you guess how many next consecutive odd numbers will be needed to obtain the sum as $5^3$?

SCERT, TELANGANA

దిగువ 11 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యల ఘనాలు ఇవ్వబడినవి.

| సంఖ్య | ఘనం |
|---|---|
| 11 | 1331 |
| 12 | 1728 |
| 13 | 2197 |
| 14 | 2744 |
| 15 | 3375 |
| 16 | 4096 |
| 17 | 4913 |
| 18 | 5832 |
| 19 | 6859 |
| 20 | 8000 |

17 మరియు 18 ల ఘనాలలోని అంకెల మొత్తంలో ఏదైనా ఆసక్తి గల అంశాన్ని గమనించావా?

పై పట్టికలో సరిసంఖ్య యొక్క ఘనము ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది? అయితే బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనము కూడా బేసి సంఖ్యయేనా? ఆలోచించండి.

అదేవిధంగా గమనిస్తే, ఒక సంఖ్య ఒకట్ల స్థానంలో 1 అంటే దాని యొక్క ఘనము 1 తో అంతమవుతుంది. అదేవిధంగా 0, 4, 5, 6 లేదా 9 ఒకట్ల స్థానంలో గల ఘన సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో ఏ సంఖ్య ఉంటుంది?

**ప్రయత్నించండి**

1. క్రింది సంఖ్యల (విస్తరణలో) ఒకట్ల స్థానంలో ఉండే సంఖ్యలను కనుగొనుము.

(i) $75^3$ (ii) $123^3$ (iii) $157^3$ (iv) $198^3$ (v) $206^3$

## 6.11 కొన్ని ఆసక్తికర అమరికలు

1. వరుస బేసి సంఖ్యలను కూడగా వచ్చే మొత్తాలను గమనించుము.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | = | 1 | = | $1^3$ |
| 3 + 5 | = | 8 | = | $2^3$ |
| 7 + 9 + 11 | = | 27 | = | $3^3$ |
| 13 + 15 + 17 + 19 | = | ...... | = | ....... |

$5^3$ వచ్చుటకు ఎన్ని వరుస బేసి సంఖ్యలను కూడవలెనో ఊహించగలరా?

SCERT, TELANGANA

2. Consider the following pattern

$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$

$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$

$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$

$5^3 - 4^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Using the above pattern find the values of the following

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3. Observe the following pattern and complete it

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = (\ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (_____)^2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (1 + 2 + 3 + .... + 10)^2$

Hence we can generalize that the sum of the cubes of first 'n' natural numbers is equal to the square of their sum.

i.e. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + .... + n)^2$.

## 6.12 Cubes and their Prime Factors

Consider the numbers 64 and 216

Resolving 64 and 216 into prime factors

$64 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$

$216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

In both these cases each factor appears three times. That is the prime factors can be grouped in triples.

Thus, if a number can be expressed as a product of three equal factors then it is said to be a perfect cube or cubic number.

SCERT, TELANGANA

2. దిగువ అమరికను గమనించండి.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$$

$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$$

$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$$

$$5^3 - 4^3 = \text{..................} = \text{..............}$$

పై అమరికలను ఉపయోగించి దిగువ వాని విలువలు వ్రాయుము.

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3. దిగువ అమరికలను పరిశీలించి పూర్తి చేయండి.

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = (3)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 = (\ )^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (\underline{\qquad})^2$$

$$\text{......................} = (1 + 2 + 3 + .... + 10)^2$$

వీటిని ఈ విధంగా సాధారణీకరించవచ్చును. మొదటి 'n' సంఖ్యల ఘనాల మొత్తము ఆ సంఖ్యల మొత్తం యొక్క వర్గముగా వ్రాయవచ్చును.

అనగా $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots. + n)^2$.

## 6.12 ఘన సంఖ్యలు మరియు వాటి ప్రధాన కారణాంకాలు

64 మరియు 216 (సంఖ్య)లను ప్రధాన కారణంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా

$$64 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2}$$

$$216 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3}$$

రెండు సందర్భాలలోను ప్రతి కారణాంక సంఖ్య మూడుసార్లు వచ్చినది. కావున ప్రధాన కారణాంకాలను త్రికములుగా సమీకరించవచ్చును.

కావున ఒక సహజ సంఖ్య యొక్క ఘనముగా వ్రాయగలుగే సంఖ్య ఘన సంఖ్య అనగా మూడు సమాన సహజ సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్రాయగలుగు సంఖ్య.

SCERT, TELANGANA

Is 540 a perfect cube?

| | |
|---|---|
| 2 | 540 |
| 2 | 270 |
| 3 | 135 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

Resolving 540 into prime factors, we get

$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

Here, 2 and 5 do not appear in groups of three. Hence 540 is not a perfect cube.

### Do These

1. Which of the following are perfect cubes?

   (i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

**Example 13:** What is a smallest number by which 2560 is to be multiplied so that the product is a perfect cube?

| | |
|---|---|
| 2 | 2560 |
| 2 | 1280 |
| 2 | 640 |
| 2 | 320 |
| 2 | 160 |
| 2 | 80 |
| 2 | 40 |
| 2 | 20 |
| 2 | 10 |
| | 5 |

**Solution :** Resolving 2560 into prime factors, we get

$2560 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

The Prime factor 5 does not appear in a group of three.

So, 2560 is not a perfect cube.

Hence, the smallest number by which it is to be multiplied to make it a perfect cube is $5 \times 5 = 25$

**Example 14:** What is the smallest number by which 1600 is to be divided. so that the quotient is a perfect cube?

| | |
|---|---|
| 2 | 1600 |
| 2 | 800 |
| 2 | 400 |
| 2 | 200 |
| 2 | 100 |
| 2 | 50 |
| 5 | 25 |
| | 5 |

**Solution :** Resolving 1600 into prime factors, we get

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

The prime factor 5 does not appear in a group of three factors. So, 1600 is not a perfect cube.

Hence, the smallest number which is to be divided to make it a perfect cube is $5 \times 5 = 25$

SCERT, TELANGANA

540 ఘన సంఖ్యయేనా?

540 ని దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం వ్రాయగా

$540 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 5$

ఇందులో, 2 మరియు 5 లు త్రికములుగా లేవు, కావున 540 (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్య కాదు.

| | |
|---|---|
| 2 | 540 |
| 2 | 270 |
| 3 | 135 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

### ప్రయత్నించండి

1. దిగువ వానిలో ఏవి (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్యలు ?

(i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

**ఉదాహరణ 13:** 2560 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన వచ్చు లబ్ధము సంపూర్ణ ఘనము అగును ?

**సాధన:** 2560 ని ప్రధాన కారణాంకాలు లబ్ధంగా రాయగా.

$2560 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

దానిలో 5 త్రికముగా లేదు కావున లబ్ధము సంపూర్ణ ఘనము కాదు.

కావున, 2560 సంపూర్ణ ఘనం కాదు.

కాబట్టి, ఇచ్చిన సంఖ్య సంపూర్ణఘనం కావడానికి గుణించవలసిన

కనిష్ఠ సంఖ్య $5 \times 5 = 25$

| | |
|---|---|
| 2 | 2560 |
| 2 | 1280 |
| 2 | 640 |
| 2 | 320 |
| 2 | 160 |
| 2 | 80 |
| 2 | 40 |
| 2 | 20 |
| 2 | 10 |
| | 5 |

**ఉదాహరణ 14:** 1600 ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము సంపూర్ణ ఘనము అగును?

**సాధన:** 1600 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా విడగొట్టి వ్రాయగా

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

దానిలో 5 త్రికముగా లేదు

కావున 1600 సంపూర్ణ ఘనము కాదు.

కావున భాగఫలము సంపూర్ణ ఘనము అగుటకు

భాగించవలసిన కనిష్ఠసంఖ్య $5 \times 5 = 25$.

| | |
|---|---|
| 2 | 1600 |
| 2 | 800 |
| 2 | 400 |
| 2 | 200 |
| 2 | 100 |
| 2 | 50 |
| 5 | 25 |
| | 5 |

SCERT, TELANGANA

## Exercise - 6.4

1. Find the cube of the following numbers
   (i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30
2. Test whether the given numbers are perfect cubes or not.
   (i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700
3. Find the smallest number by which 8788 must be multiplied to obtain a perfect cube?
4. What smallest number should 7803 be multiplied with so that the product becomes a perfect cube?
5. Find the smallest number by which 8640 must be divided so that the quotient is a perfect cube?
6. Ravi made a cuboid of plasticine of dimensions 12cm, 8cm and 3cm. How many minimum number of such cuboids will be needed to form a cube?
7. Find the smallest prime number dividing the sum $3^{11} + 5^{13}$.

## 6.13 Cube roots

We know that, we require 8 unit cubes to form a cube of side 2 units ($2^3 = 8$)

Similarly, we need 27 unit cubes to form a cube of side 3 units ($3^3 = 27$)

Suppose, a cube is formed with 64 unit cubes. Then what could be the side of the cube?

Let us assume, the length of the side to be '$x$'

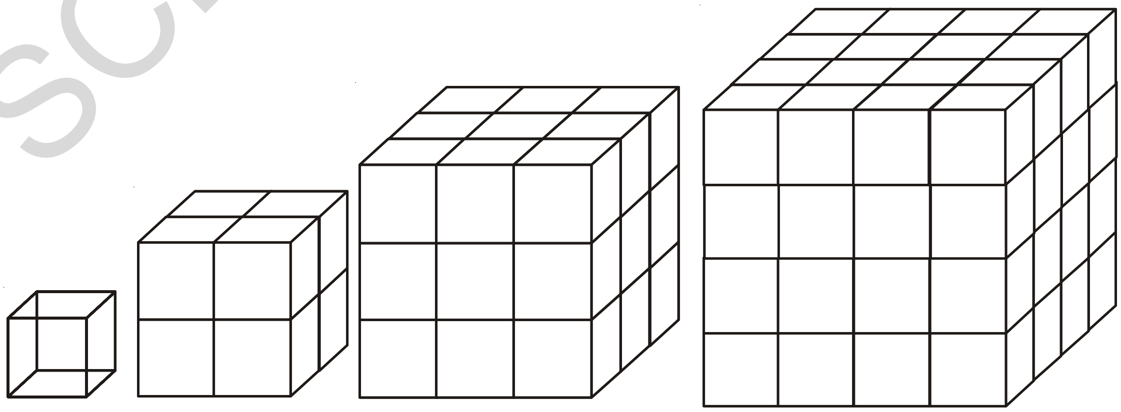
$$\therefore \quad 64 = x^3$$

To find the side of a cube, it is necessary to find a number whose cube is 64. Therefore, finding the number whose cube is known is called finding the cube root.

It is the inverse operation of cubing.

As, $4^3 = 64$ then 4 is called cube root of 64. We write $\sqrt[3]{64} = 4$. The symbol $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ denotes cube root.

Hence, a number '$x$' is the cube root of another number y, if $y = x^3$ then $x = \sqrt[3]{y}$.



(1 unit cube) (2 unit cube) (3 unit cube) (4 unit cube)

SCERT, TELANGANA

## అభ్యాసం - 6.4

1. క్రింది సంఖ్యల ఘనాలు కనుగొనుము.
   (i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30
2. క్రింది సంఖ్యలు సంపూర్ణ ఘనాలా? కాదా? పరీక్షించండి.
   (i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700
3. 8788 ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య అగును?
4. 7803 ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన వచ్చు లబ్ధము సంపూర్ణ ఘనము అగును?
5. 8640 ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించిన వచ్చు భాగఫలము సంపూర్ణ ఘనము అగును?
6. రవి ప్లాస్టసీన్ (మైనము)తో చేసిన ప్రమాణ ఘనాలను ఉపయోగించి 12 సెం.మీ, 8 సెం.మీ మరియు 3సెం.మీ. కొలతలు గల దీర్ఘ ఘనాన్ని తయారు చేసెను. అతడు తయారీకి కనీసం ఎన్ని ప్రమాణ ఘనాలను ఉపయోగించెను?
7. $3^{11} + 5^{13}$ మొత్తాన్ని భాగించగలిగే కనిష్ఠ ప్రధాన సంఖ్యను కనుగొనండి.

## 6.13 ఘనమూలాలు

2 ప్రమాణాల భుజము గల (సమ) ఘనాన్ని తయారు చేయుటకు ప్రమాణ ఘనాలు 8 ($2^3 = 8$) కావలెనని మనకు తెలుసు.

అదే విధంగా 3 ప్రమాణాల భుజము (అంచు) గల ఘనానికి 27 ($3^3 = 27$) ప్రమాణ ఘనాలు కావాలి.

ఒక ఘనం 64 ప్రమాణ ఘనాలచే తయారు చేయబడిన ఆ ఘనపు పొడవు ఎంత ఉండవచ్చును?

ఘనపు భుజము పొడవు '$x$' ప్రమాణాలు అనుకొనిన

$$\therefore\ 64 = x^3$$

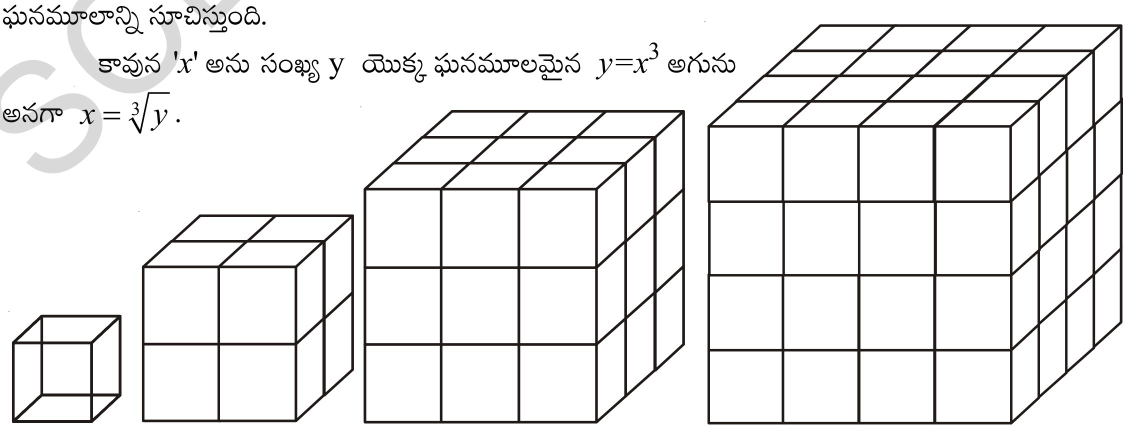
ఘనం భుజము పొడవు కనుగొనవలెనన్న 64 ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో కనుగొనవలెను. కావున దత్త సంఖ్య ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో కనుగొను ప్రక్రియను ఘనమూలమును కనుగొను ప్రక్రియ అంటాం.

ఇది ఘనము చేయు ప్రక్రియకు విలోమము.

$4^3 = 64$ కావున 4 ను $\sqrt[3]{64} = 4$ యొక్క ఘనమూలము అంటాం. దీనిని మనం అని వ్రాస్తాము. $\sqrt[3]{\ }$ గుర్తు ఘనమూలాన్ని సూచిస్తుంది.

కావున '$x$' అను సంఖ్య y యొక్క ఘనమూలమైన $y = x^3$ అగును

అనగా $x = \sqrt[3]{y}$.



(1 ప్రమాణ ఘనం) (2 ప్రమాణాల ఘనం) (3 ప్రమాణాల ఘనం) (4 ప్రమాణాల ఘనం)

SCERT, TELANGANA

Complete the following table.

| Cubes | | | Cube roots | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^3$ | = | 1 | $\sqrt[3]{1}$ | = | 1 |
| $2^3$ | = | 8 | $\sqrt[3]{8}$ | = | 2 |
| $3^3$ | = | 27 | $\sqrt[3]{27}$ | = | 3 |
| $4^3$ | = | 64 | $\sqrt[3]{64}$ | = | 4 |
| $5^3$ | = | 125 | $\sqrt[3]{125}$ | = | 5 |
| $6^3$ | = | …... | $\sqrt[3]{\phantom{0}}$ | = | 6 |
| $7^3$ | = | ……. | $\sqrt[3]{\phantom{0}}$ | = | 7 |
| $8^3$ | = | …… | $\sqrt[3]{\phantom{0}}$ | = | 8 |
| …… | = | ……….. | …….. | = | ……….. |
| …… | = | ……….. | ………… | = | ……... |

## 6.14 Finding cube root through Prime Factorization method

Let us find the cube root of 1728 by prime factorization method.

| | |
|---|---|
| 2 | 1728 |
| 2 | 864 |
| 2 | 432 |
| 2 | 216 |
| 2 | 108 |
| 2 | 54 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| | 3 |

Step1 : Resolve the given number 1728 into prime factors.

$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

Step2 : Make groups of three equal factors:

$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

Step 3: Choose one factor from each group and multiply by doing so, we get

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

Let us see some more examples

| | |
|---|---|
| 2 | 4096 |
| 2 | 2048 |
| 2 | 1024 |
| 2 | 512 |
| 2 | 256 |
| 2 | 128 |
| 2 | 64 |
| 2 | 32 |
| 2 | 16 |
| 2 | 8 |
| 2 | 4 |
| | 2 |

**Example 15:** Find the cube root of 4096 ?

**Solution :** Resolving 4096 into Prime Factors, we get

$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$

SCERT, TELANGANA

క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయాలి.

| ఘనాలు | | | ఘనమూలాలు | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^3$ | = | 1 | $\sqrt[3]{1}$ | = | 1 |
| $2^3$ | = | 8 | $\sqrt[3]{8}$ | = | 2 |
| $3^3$ | = | 27 | $\sqrt[3]{27}$ | = | 3 |
| $4^3$ | = | 64 | $\sqrt[3]{64}$ | = | 4 |
| $5^3$ | = | 125 | $\sqrt[3]{125}$ | = | 5 |
| $6^3$ | = | …… | $\sqrt[3]{\ }$ | = | 6 |
| $7^3$ | = | ……. | $\sqrt[3]{\ }$ | = | 7 |
| $8^3$ | = | …… | $\sqrt[3]{\ }$ | = | 8 |
| …… | = | ……….. | …….. | = | ……….. |
| …… | = | ……….. | ………… | = | ……… |

## 6.14 ప్రధాన కారణంక పద్ధతిన ఘనమూలాలు కనుగొనుట

1728 యొక్క ఘనమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిన కనుగొందాము.

| | |
|---|---|
| 2 | 1728 |
| 2 | 864 |
| 2 | 432 |
| 2 | 216 |
| 2 | 108 |
| 2 | 54 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| | 3 |

సోపానం 1: 1728 ప్రధాన కారణకాల లబ్ధంగా విడగొట్టగా

$$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

సోపానం 2: త్రికములుగా వర్గీకరించగా

$$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

సోపానం 3: ప్రతి త్రికము నుండి ఒక కారణాంకమును తీసుకొని లబ్ధంగా వ్రాయగా

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

మరొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాము.

**ఉదాహరణ 15:** 4096 యొక్క ఘనమూలాన్ని కనుగొనుము.

**సాధన:** 4096 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా

| | |
|---|---|
| 2 | 4096 |
| 2 | 2048 |
| 2 | 1024 |
| 2 | 512 |
| 2 | 256 |
| 2 | 128 |
| 2 | 64 |
| 2 | 32 |
| 2 | 16 |
| 2 | 8 |
| 2 | 4 |
| | 2 |

$$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$$

SCERT, TELANGANA

## 6.15 Estimating the cube root of a number

If we know, the given number is a cube number then to find its cube root the following method can be used.

Let us find the cube root of 9261 through estimation.

Step1: Start making groups of three digits starting from the unit place.

| i.e. | 9 | 261 |
|---|---|---|
| | second group | first group |

Step 2: First group i.e. 261 will give us the units digit of the cube root. As 261 ends with 1, its cube root also ends with 1. So, the units place of the cube root will be 1.

Step 3: Now, take second group i.e. 9.

We know that $2^3 < 9 < 3^3$. As the smallest number is 2, it becomes the tens place of the required cube root

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$

### Exercise - 6.5

1. Find the cube root of the following numbers by prime factorization method.

   (i) 343 (ii) 729 (iii) 1331 (iv) 2744

2. Find the cube root of the following numbers through estimation?

   (i) 512 (ii) 2197 (iii) 3375 (iv) 5832

3. State true or false?

   (i) Cube of an even number is an odd number

   (ii.) A perfect cube may end with two zeros

   (iii) If a number ends with 5, then its cube ends with 5

   (iv) Cube of a number ending with zero has three zeros at its right

   (v) The cube of a single digit number is a single digit number.

   (vi) There is no perfect cube which ends with 8

   (vii) The cube of a two digit number may be a three digit number.

4. Find the two digit number which is a square number and also a cubic number.

SCERT, TELANGANA

## 6.15 ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుట

ఇచ్చిన సంఖ్య సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య అయిన దాని ఘనమూలాన్ని దిగువ పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేయవచ్చును.

9261 యొక్క ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయడం ద్వారా కనుగొందాము.

సోపానం 1: దత్త సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానం నుండి ఎడమవైపుకు పోవుచు మూడు మూడు అంకెలు ఉండునట్లు గుంపులుగా విభజించి వ్రాయాలి.

| | | |
|---|---|---|
| అనగా | 9 | 261 |
| | రెండవ | మొదటి |
| | గుంపు | గుంపు |

సోపానం 2: మొదటి గుంపులోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకె అనగా 261 లోని చివరి అంకె 1 దత్త సంఖ్య యొక్క ఘనమూలపు ఒకటవ స్థానపు అంకెను సూచించును. కావున ఘనమూలములో ఒకటవ స్థానంలో 1 ఉండును.

సోపానం 3: ఇప్పుడు రెండవ గుంపులో గల 9 ని గమనించుము. అది

$2^3 < 9 < 3^3$. కావున 2 కనిష్ఠ సంఖ్య. కావున ఘన మూలపు పదుల స్థానములు '2' ఉండాలి.

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$

### అభ్యాసము - 6.5

1. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా దిగువ సంఖ్యల ఘనమూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 343 (ii) 729 (iii) 1331 (iv) 2744

2. క్రింది వాని ఘనమూలాలను అంచనా వేసి కనుగొనుము?

   (i) 512 (ii) 2197 (iii) 3375 (iv) 5832

3. దిగువ వాక్యములు సత్యములా? అసత్యములా? వ్రాయండి.

   (i) సరిసంఖ్య యొక్క ఘనము బేసిసంఖ్య

   (ii) సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య చివర రెండు స్థానాలు సున్నాలతో అంతమవుతాయి.

   (iii) ఒక సంఖ్య చివరి అంకె '5' అయిన దాని ఘనము చివరి అంకె కూడ 5 అవును.

   (iv) ఒక సంఖ్య సున్నా (0)తో అంతమైన దాని ఘనములో మూడు సున్నాలు ఉంటాయి.

   (v) ఒక అంకెగల సంఖ్య యొక్క ఘనము కూడ ఒక అంకె సంఖ్య అవుతుంది.

   (vi) '8' తో అంతం అగు సంపూర్ణ ఘనసంఖ్య లేదు.

   (vii) రెండంకెల సంఖ్య ఘనములో మూడంకెలు ఉండవచ్చు.

4. వర్గ సంఖ్యయు మరియు ఘన సంఖ్యయు అగు రెండంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము.

SCERT, TELANGANA

## What we have discussed

X8I1K3

- Estimating number of digits in square of a number.
- Square numbers written in different patterns.
- a, b, c are positive integers and if $a^2 + b^2 = c^2$ then (a, b, c) are said to be Pythagorean triplets.
- Finding the square roots by prime factorisation and division method.
- Square root is the inverse operation of squaring.
- Estimating square roots of non perfect square numbers.
- If a number is multiplied three times by itself is called cube number.
- Finding cube root by prime factorisation method.
- Estimating cube roots of a number.
- The square of integer is an integer and a square number, where as square of rational number is a perfect square, not a square number.

### Eternal triangle

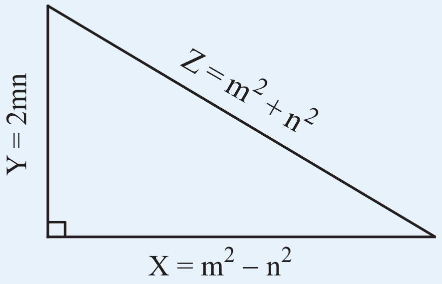
The formulau that give sides of a right - angled triangle have been known since the time of Diophantus and the early Greeks. They are

one side $X = m^2 - n^2$

second side $Y = 2mn$

Hypotenuse $Z = m^2 + n^2$

The numbers m & n are integers which may be arbitarily selected.




Example

| m | n | $X = m^2 - n^2$ | $Y = 2mn$ | $Z = m^2 + n^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 5 | 12 | 13 |
| 5 | 2 | 21 | 20 | 29 |
| 4 | 3 | 7 | 24 | 25 |
| 4 | 1 | 15 | 8 | 17 |

SCERT, TELANGANA

F7Q7G2

## మనము ఏమి చర్చించాం

- ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గంలోని అంకెల సంఖ్యను అంచనా వేయుట.
- వర్గ సంఖ్యలను వివిధ అమరికలతో వ్రాయవచ్చును.
- a, b, c లు ధన పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $a^2 + b^2 = c^2$ అయితే

  (a, b, c) లను పైథాగరస్ త్రికాలు అంటాం.
- ప్రధాన కారణాంకల పద్ధతి మరియు భాగహార పద్ధతులతో వర్గమూలములను కనుగొనుట
- వర్గసంఖ్యలు కాని సంఖ్యల వర్గమూలాలు అంచనా వేయుట.
- ప్రధాన కారణాంకల పద్ధతిలో ఘనమూలాలు కనుగొనుట
- ఘనసంఖ్యల ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుట
- పూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గము వర్గసంఖ్య, కాని అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వర్గము పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య కాదు.
- వర్గమూలములు కనుగొనుట వర్గము చేయుటకు విలోమ ప్రక్రియ
- ఒకే పూర్ణసంఖ్యను మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చు పూర్ణసంఖ్యను ఘనసంఖ్య అంటాం.

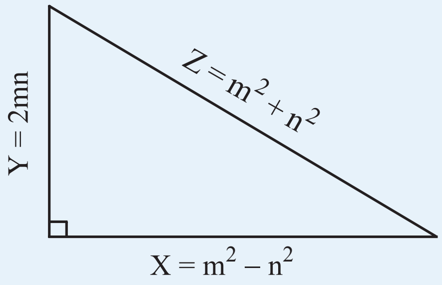
### నిత్య త్రిభుజం

ఒక లంబకోణ త్రిభుజపు అన్ని భుజాల కొలతలు పూర్ణాంకాలుగా ఇచ్చే సూత్రము డైఫాంటెస్ కాలానికే గ్రీకులకు తెలుసు. m మరియు n లు యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకున్న ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయితే

ఒక భుజము $X = m^2 - n^2$

రెండవ భుజము $Y = 2mn$

కర్ణం $Z = m^2 + n^2$ లుగా వచ్చును.




ఉదాహరణ

| m | n | $X = m^2 - n^2$ | $Y = 2mn$ | $Z = m^2 + n^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 5 | 12 | 13 |
| 5 | 2 | 21 | 20 | 29 |
| 4 | 3 | 7 | 24 | 25 |
| 4 | 1 | 15 | 8 | 17 |

SCERT TELANGANA

CHAPTER 7

# Frequency Distribution Tables and Graphs

D6D5U4

## 7.0 Introduction

Jagadeesh watching T.V. A visual appeared on the T.V. screen showing the details of medals won by different countries in Olympics 2012.

**Olympics 2012 - Medals Tally**

| Rank | Country | Gold | Silver | Bronze | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | United States of America | 46 | 29 | 29 | 104 |
| 2 | China | 38 | 27 | 23 | 88 |
| 3 | Britain | 29 | 17 | 19 | 65 |
| 4 | Russia | 24 | 26 | 32 | 82 |
| 5 | Korea | 13 | 8 | 7 | 28 |

The above table provides data about the top five countries that got the highest number of medals in the olympics 2012 as well as the number of medals they won.

Information, available in the numerical form or verbal form or graphical form that helps in taking decisions or drawing conclusions is called **Data**.

- Which country has got the highest number of medals ?
- Which country has got the highest number of bronze medals ?
- Write three more questions based on data provided in the table .

### Try This

Give any three examples of data which are in situations or in numbers.

SCERT, TELANGANA

అధ్యాయం

7

# పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు

F9T9U8

## 7.0 పరిచయం

ఒక రోజు జగదీష్ T.V. చూస్తున్నాడు. 2012 ఒలంపిక్ క్రీడలలో ప్రపంచంలోని ఏయే దేశములు, ఎన్నెన్ని పతకాలను గెలుచుకున్నాయి అనే వివరాలను T.V. నందు క్రింది పట్టిక వలె చూపుతున్నారు.

**2012 ఒలంపిక్స్ - పతకాల పట్టిక**

| స్థానం | దేశము | బంగారు పతకాలు | వెండి పతకాలు | కాంస్య పతకాలు | మొత్తం |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | అమెరికా సం.రా | 46 | 29 | 29 | 104 |
| 2 | చైనా | 38 | 27 | 23 | 88 |
| 3 | బ్రిటన్ | 29 | 17 | 19 | 65 |
| 4 | రష్యా | 24 | 26 | 32 | 82 |
| 5 | కొరియా | 13 | 8 | 7 | 28 |

పై పట్టిక 2012 ఒలంపిక్ క్రీడలలో మొదటి ఐదు స్థానములలోని దేశములు, అవి గెలుచుకొన్న పతకాల వివరాల గురించి తెలుపుతున్నది.

ఈ విధంగా సమాచారమును సంఖ్యాత్మకంగా, వివరణాత్మకంగా లేక రేఖాచిత్రముల ద్వారా తెలుపు వివరాలను 'దత్తాంశము' అంటారు. దత్తాంశం నుండి వివిధ రకాల వివరాలను తెలుసుకొనవచ్చును. ఉదాహరణకు

- ఏ దేశము అత్యధిక సంఖ్యలో పతకాలను సాధించింది?
- ఏ దేశము అత్యధిక సంఖ్యలో కాంస్య పతకాలను సాధించింది?
- పై పట్టిక నుండి మూడు ప్రశ్నలను రాబట్టండి.

**ఇవి చేయండి**

ఏవైనా మూడు సంఖ్యాత్మక దత్తాంశములను, మూడు వివరణాత్మక దత్తాంశములను వ్రాయండి.

SCERT, TELANGANA

## 7.1 Basic measures of central tendency

Usually we collect data and draw certain conclusions based on the nature of data. Understanding its nature, we do certain computations like mean, median and mode which are referred as measures of central tendency. Let us recall.

### 7.1.1 Arithmetic Mean

It is the most commonly used measure of central tendency. For a set of numbers, the mean is simply the average, i.e., sum of all observations divided by the number of observations.

Arithmetic mean of $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots. x_n$ is

$$\text{Arithmetic mean} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{(short representation)}$$

> $\sum x_i$ represents the sum of all $x_i$ where i takes the values from 1 to n. And N is the total number of observations.

**Example 1:** Ashok got the following marks in different subjects in a unit test. 20, 11, 21, 25, 23 and 14. What is arithmetic mean of his marks?

**Solution:** Observations = 20, 11, 21, 25, 23 and 14

Arithmetic mean $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$

$= \frac{20+11+21+25+23+14}{6} = \frac{114}{6}$

$\bar{x} = 19$

**Example 2:** Arithmetic mean of 7 observations was found to be 32. If one more observation 48 was to be added to the data what would be the new mean of the data?

**Solution:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mean of 7 observations | $\bar{x}$ | = 32 | | |
| Sum of 7 observations is | $\sum x_i$ | = $32 \times 7$ | = 224 | |
| Added observation | | = 48 | | |
| Sum of 8 observations | $\sum x_i$ | = $224 + 48$ | = 272 | |

$\therefore$ Mean of 8 observations $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{272}{8} = 34$

**Example 3:** Mean age of 25 members of a club was 38 years. If 5 members with mean age of 42 years have left the club, what is the present mean age of the club members?

**Solution:** Mean age of 25 members of the club = 38 years

SCERT, TELANGANA

## 7.1 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు

మనం సాధారణంగా సమాచారాన్ని సేకరించి, విశ్లేషించి ఆ దత్తాంశ స్వరూపం గురించి నిర్ణయానికి వస్తాము. ఆ దత్తాంశాన్ని అవగాహన చేసుకొనడానికి మనకు అంక మధ్యమం, మధ్యగతం మరియు బాహుళకము కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. వీటినే కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అంటారు. వీటిని గుర్తు చేసుకొందాం.

### 7.1.1 అంకగణిత మధ్యమము

ఇది అతి సాధారణంగా ఉపయోగించే కేంద్రస్థాన కొలత. దీనిని సరాసరి, సగటు అని కూడా అంటారు. ఒక దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు ఫలితమును అంకగణిత మధ్యమము అంటారు.

ఒక దత్తాంశములోని రాశులు $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots . x_n$ అయిన ఆ దత్తాంశపు

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{(సంక్షిప్తంగా)}$$

> $\sum x_i$ అనగా దత్తాంశంలో గల అన్ని రాశుల ($x_i$ లు) మొత్తం. $x_i$ లో $i$ విలువలు 1 నుండి n వరకు తీసుకుంటాం. N అనేది రాశుల సంఖ్య.

**ఉదాహరణ 1:** ఒక యూనిట్ పరీక్షలో వివిధ విషయములలో అశోక్ సాధించిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నవి. 20, 11, 21, 25, 23 మరియు 14. ఈ దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమము ఎంత?

**సాధన:** దత్తాంశములోని రాశులు = 20, 11, 21, 25, 23, 14

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$= \frac{20+11+21+25+23+14}{6} = \frac{114}{6}$$

$$\bar{x} = 19$$

**ఉదాహరణ 2:** ఒక దత్తాంశములోని 7 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 32. ఆ దత్తాంశమునకు 48 అను మరొక రాశిని కూడగా ఫలిత అంకగణిత మధ్యమము ఎంత?

**సాధన:**

| | | |
|---|---|---|
| 7 రాశుల అంకమధ్యమము | $\bar{x}$ | $= 32$ |
| 7 రాశుల మొత్తం | $\sum x_i$ | $= 32 \times 7 = 224$ |
| కలిపిన 8వ రాశి | | $= 48$ |
| 8 రాశుల మొత్తం | $\sum x_i$ | $= 224 + 48 = 272$ |

$\therefore$ 8 రాశుల అంక మధ్యమం $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{272}{8} = 34$

**ఉదాహరణ 3:** ఒక క్లబ్‌నందలి 25 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు 38 సం॥లు అందులో నుండి 42 సంవత్సరాలు సరాసరి వయస్సు గల 5 మంది సభ్యులు క్లబ్‌ను విడిచి వెళ్ళినచో మిగిలిన సభ్యుల సరాసరి వయస్సు ఎంత?

**సాధన:** 25 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు = 38 సం॥లు

SCERT, TELANGANA

Total age of 25 members = $38 \times 25 = 950$ years

Mean age of 5 members = 42 years

Total age of 5 members = $42 \times 5$ = 210 years

Total age of remaining 20 members = $950 - 210$ = 740 years

$\therefore$ Present mean age of club members $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{740}{20} = 37$ years

**Example 4:** Arithmetic mean of 9 observations was calculated as 45. In doing so an observation was wrongly taken as 42 for 24. What would be the correct mean?

**Solution:** Mean of 9 observations = 45

Sum of 9 observations = $45 \times 9 = 405$

When computing mean 42 was taken instead of 24

$\therefore$ Correct sum of 9 observations = $405 - 42 + 24$ = 387

Actual mean of 9 observations = $\frac{\sum x_i}{N} = \frac{387}{9}$ = 43

**We observe,**

- From the above examples we can see that Arithmetic Mean is a representative value of the entire data.
- Arithmetic mean depends on both number of observations and value of each observation in a data.
- It is unique value of the data.
- When all the observations of the data are increased or decreased by a certain number, the mean also increases or decreases by the same number.
- When all the observations of the data are multiplied or divided by a certain number, the mean also multiplied or divided by the same number.

### 7.1.2 Arithmetic Mean by Deviation Method

There are five observations in a data, 7, 10, 15, 21, 27.When the teacher asked to estimate the Arithmetic Mean of the data without actual calculation, some students are estimated as follows:

Kamal estimated that it lies exactly between minimum and maximum values, i.e. 17,

Neelima estimated that it is the middle value of the ordered (ascending or descending) data; 15,

Lekhya added all the observations and divided by their number, i.e. 16.

We call each of these estimations as 'estimated mean' or 'assumed mean' is represented with 'A'.

Let us verify which of the estimations coincides with the actual mean of the above three students.

SCERT, TELANGANA

మొత్తం 25 మంది వయస్సు = 38 × 25 = 950 సం॥

5 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు = 42 సం॥

మొత్తం వయస్సు = 42 × 5 = 210 సం॥

మిగిలిన 20 మంది సభ్యుల మొత్తం వయస్సు = 950 – 210 = 740 సం॥

∴ ప్రస్తుతం క్లబ్ సభ్యుల యొక్క సరాసరి వయస్సు $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{740}{20} = 37$ సం॥

**ఉదాహరణ 4:** ఒక దత్తాంశములోని 9 రాశుల సగటు 45 అని లెక్కించ బడినది. అట్లు చేయుటలో ఒకరాశి 24 ను 42 గా పొరపాటుగా లెక్కించినచో 9 రాశులు అసలు సగటు ఎంత?

**సాధన:** 9 రాశుల సగటు = 45

9 రాశుల మొత్తము = 45 × 9 = 405

ఈ మొత్తమును గణించుటలో 24 ను 42 గా పొరపాటుగా తీసుకోవడం జరిగినది. కావున

9 రాశుల అసలు మొత్తము = 405 – 42 + 24 = 387

9 రాశుల అసలు సగటు $= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{387}{9} = 43$

**పై అంశాలను పరిశీలించగా,**

- అంకగణిత మధ్యమము దత్తాంశమంతటికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.
- ఏది అన్ని రాశుల విలువలపైన, రాశుల సంఖ్యపైన ఆధారపడుతుంది.
- ఏది ఒక దత్తాంశమునకు ఏకైకము.
- దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులకు ఒక సంఖ్యను కూడినా లేక అన్ని రాశుల నుండి ఒక సంఖ్యను తీసివేసినా ఆ దత్తాంశం యొక్క అంకగణిత మధ్యమం కూడా అదే విధంగా మార్పు చెందుతుంది.
- దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులను ఒకే సంఖ్యచే గుణించినా లేక భాగించినా ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము కూడా అదే సంఖ్యచే గుణింపబడుతుంది లేక భాగింపబడుతుంది.

### 7.1.2. విచలన పద్ధతి ద్వారా అంకగణిత మధ్యమము

ఒక దత్తాంశములో 7, 10, 15, 21, 27 అను ఐదు రాశులు కలవు. ఉపాధ్యాయుడు ఈ దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమమును లెక్కించకుండా అంచనా వేయమని కోరగా కొందరు విద్యార్థులు క్రింది విధంగా చెప్పారు.

కమల్ : ఇది దత్తాంశంలోని అత్యల్ప, అత్యధిక రాశుల మధ్య విలువ 17 అవుతుంది.

నీలిమ : ఇది ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్య విలువ 15 కు సమానం అవుతుంది.

లేఖ్య : ఇది రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చిన 16 అవుతుంది.

ఈ ఒక్కొక్క అంచనాను "అంచనా వేసిన అంక గణిత మధ్యమము" లేదా "ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమము" (assumed mean) అంటారు. దీనిని 'A' తో సూచిస్తారు.

పై ముగ్గురు విద్యార్థులు చెప్పిన అంకగణిత మధ్యమములలో ఏది అసలైన అంక గణిత మధ్యమమునకు దగ్గరగా ఉందో పరిశీలిద్దాము.



SCERT TELANGANA

**Case 1:** Consider Kamal's estimated arithmetic mean $A = 17$

Their actual arithmetic mean is $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5} = \frac{80}{5} = 16$

If each observation is written in terms of deviation from assumed mean A, we have

| Score | A | in Terms of Deviations |
|---|---|---|
| 7 | 17 | 7 = 17 – 10 |
| 10 | 17 | 10 = 17 – 7 |
| 15 | 17 | 15 = 17 – 2 |
| 21 | 17 | 21 = 17 + 4 |
| 27 | 17 | 27 = 17 + 10 |

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5\times17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

$\therefore$ Arithmetic mean = Estimated mean + Average of deviations

**Case 2:** Consider Neelima's estimated arithmetic mean $A = 15$

Their arithmetic mean is $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

$\Rightarrow \bar{x}$ in terms of deviations $= \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$

$$= \frac{(5\times15)}{5} + \frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

**Case 3:** Consider Lekhya's estimated arithmetic mean $A = 16$

Their arithmetic mean is $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

$\Rightarrow \bar{x}$ in terms of deviations $= \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$

$$= \frac{(5\times16)}{5} + \frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

### Try These

Prepare a table of estimated mean, deviations of the above cases. Observe the average of deviations with the difference of estimated mean and actual mean. What do you infer?

[**Hint:** Compare with average deviations]

SCERT, TELANGANA

**సందర్భం 1:** కమల్ చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము $A = 17$

కాని అసలు అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5} = \frac{80}{5} = 16$

అన్ని రాశులను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము (A) నుండి విచలనములతో సూచించినచో

| రాశులు | A | విచలనాలలో |
|---|---|---|
| 7 | 17 | 7 = 17 – 10 |
| 10 | 17 | 10 = 17 – 7 |
| 15 | 17 | 15 = 17 – 2 |
| 21 | 17 | 21 = 17 + 4 |
| 27 | 17 | 27 = 17 + 10 |

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5\times17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

∴ అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం + విచలనముల సరాసరి

**సందర్భం 2:** నీలిమ చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము $A = 15$

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

రాశులను విచలనాల రూపంలో వ్రాయగా

$$\bar{x} = \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$$

$$= \frac{(5\times15)}{5} + \frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

**సందర్భం 3:** లేఖ్య చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము $A = 16$

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

రాశులను విచలనాల రూపంలో వ్రాయగా

$$\bar{x} = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$$

$$= \frac{(5\times16)}{5} + \frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

### ప్రయత్నించండి

పై సందర్భాలకు ఊహించిన అంక మధ్యమము, విచలనాల పట్టికను తయారు చేయండి. విచలనాల సరాసరి ఊహించిన అంక మధ్యమము మరియు నిజమైన అంక గణిత మధ్యమము విలువలను గమనించండి. ఏమి గమనించారు?

[**సూచన:** విచలనాల సరాసరితో పోల్చి చూడండి.]

SCERT, TELANGANA

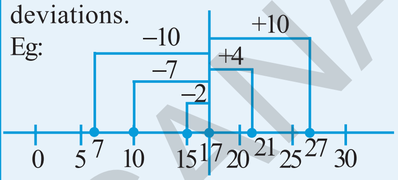
It is clear that the estimated mean becomes the actual arithmetic mean if the sum (or average) of deviations of all observations from the estimated mean is 'zero'.

We may use this verification process as a mean to find the Arithmetic Mean of the data.

From the above cases, it is evident that the arithmetic mean may be found through the estimated mean and deviation of all observations from it.

The difference between any score of data and assumed mean is called deviations.

Eg:




Assumed mean = 17

Arithmetic mean = Estimated mean + Average of deviations

$$= \text{Estimated mean} + \frac{\text{Sum of deviations}}{\text{Number of observations}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$

**Example 5:** Find the arithmetic mean of 10 observations 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 by assuming mean as 40. Also find mean by regular formula. Do you find any difference.

**Solution:** Observations of the data = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

Let the assumed mean A = 40

$$\therefore \text{Arithmetic mean} = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

By usual formula $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

In both the methods we got the same mean.

This way of computing arithmetic mean by deviation method is conveniently used for data with large numbers and decimal numbers.

SCERT, TELANGANA

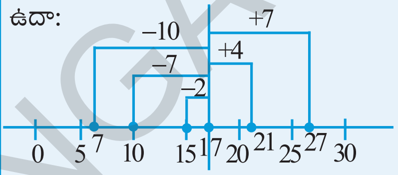
పై సాధనల నుండి, అన్ని రాశుల విచలనముల మొత్తం (లేక సరాసరి) సున్నకు సమానం అయినప్పుడు, ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమమే అసలు అంక గణిత మధ్యమము అవుతుందని తెలియుచున్నది.

ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమమును సరిచూచే పద్ధతిని ఉపయోగించి, అంక గణిత మధ్యమమును లెక్కించుట కూడా చేయవచ్చును.

అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము + విచలనముల సరాసరి

$$= \text{ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము} + \frac{\text{విచలనాల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

$$\bar{x} = \mathrm{A} + \frac{\sum(x_i - \mathrm{A})}{\mathrm{N}}$$

> దత్తాంశంలోని రాశులకు, ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమమునకు గల తేడాను విచలనం అంటారు.
>
> ఉదా:
>
> 
> 
>
> ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము=17

**ఉదాహరణ 5:** 10 రాశుల గల దత్తాంశము 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 యొక్క అంకగణిత మధ్యమము 40 అని ఊహించి దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనండి. సాధారణ పద్ధతిలో కూడా లెక్కించండి. ఏమి గమనించారు?

**సాధన:** దత్తాంశంలోని రాశులు = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం A = 40 అనుకొనుము.

$$\therefore \text{ అంకగణిత మధ్యమము} = \mathrm{A} + \frac{\sum(x_i - \mathrm{A})}{\mathrm{N}}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

సాధారణ పద్ధతి ద్వారా అంకగణిత మధ్యమము

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{\mathrm{N}} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

పై రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఫలితాలు సమానం.

పెద్ద సంఖ్యలు లేక దశాంశ సంఖ్యలు రాశులుగా గల దత్తాంశములకు అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనుటకు ఈ పద్ధతి అనువుగా ఉంటుంది.

SCERT TELANGANA

Consider the following example.

**Example 6:** Market value (in rupees) of a share through a week is changing as 3672, 3657, 3673, 3665, 3668. Find the arithmetic mean of the market value of the share.

**Solution:** Observations of the data = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

Estimated mean = 3668

Arithmetic mean $\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{[(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)]}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = ₹\ 3667.$$

**Try These**

1. Estimate the arithmetic mean of the following data
   (i) 17, 25, 28, 35, 40
   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20
   Verify your answers by actual calculations.

**Project work**

1. Collect marks of 10 of your classmates in different subjects in the recent examinations. Estimate the arithmetic mean of marks in each subject and verify them by actual calculations. How many of your estimations represent exact mean?
2. Measure the heights of students of your class and estimate the mean height. Verify their mean from records of your physical education teacher. Do you notice any difference?

### 7.1.3 Median

Median is another frequently used measure of central tendency. The median is simply the middle term of the distribution when it is arranged in either ascending or descending order, i.e. there are as many observations above it as below it.

If $n$ number of observations in the data arranged in ascending or descending order

When **n** is odd, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ observation is the median.

SCERT, TELANGANA

క్రింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

**ఉదాహరణ 6:** ఒక షేరు యొక్క మార్కెట్ విలువ ఒక వారములో క్రింది విధంగా మార్పు చెందినది (రూపాయలలో) 3672, 3657, 3673, 3665, 3668. ఆ వారములో షేర్ యొక్క సరాసరి విలువను కనుగొనండి.

దత్తాంశములోని షేర్ విలువలు = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము = 3668

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{\left[(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)\right]}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = ₹\,3667.$$

**ప్రయత్నించండి**

1. క్రింది దత్తాంశములకు అంకగణిత మధ్యమాలను అంచనావేసి వ్రాయండి.
   (i) 17, 25, 28, 35, 40
   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20

పై సమస్యలను సాధారణ పద్ధతిలో సాధించుట ద్వారా పై సమాధానములను సరిచూడండి.

**ప్రాజెక్టు పని**

1. ఇటీవల జరిగిన పరీక్షలలో మీ తరగతిలోని 10 మంది విద్యార్థులు వివిధ విషయాలలో పొందిన మార్కులను సేకరించండి. విషయం వారీగా అంకగణిత మధ్యమములను ఊహించి వ్రాయండి. సాధారణ పద్ధతిలో లెక్కించి, సరిచూడండి. మీరు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమాలు, ఎన్ని లెక్కించిన అంకగణిత మధ్యమాలతో సరిపోలినవో తెల్పండి.
2. మీ తరగతిలోని అందరు విద్యార్థుల ఎత్తులకు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం వ్రాయండి. మీ వ్యాయామ ఉపాధ్యాయుని రికార్డుల ప్రకారం సరిపోల్చి చూడండి. ఏదైనా తేడాను గమనించారా?

### 7.1.3 మధ్యగతము

కేంద్ర స్థాన కొలతలలో మధ్యగతము మరొక ప్రముఖ విలువ. ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్యన గల రాశి విలువను ఆ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము అంటారు. అనగా దత్తాంశంలో మధ్యగతము కన్నా ఎక్కువ విలువల రాశులు ఎన్ని ఉన్నవో, తక్కువ విలువ గల రాశులు అన్ని ఉంటాయి.

n రాశులు గల దత్తాంశ విలువలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయగా

n బేసి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశివిలువ

SCERT TELANGANA

When **n** is even, arithmetic mean of two middle observations $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ and $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ is the median of the data.

**Example 7:** Find the median of 9 observations 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50.

**Solution:** Ascending order of the data = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

No of observations n = 9 (odd number)

Median of the data $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ observation

$= 5^{th}$ observation $= 35$

$\therefore$ Median $= 35$

**Example 8:** If another observation 61 is also included to the above data what would be the median?

**Solution:** Ascending order of the data = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

No of observations $n = 10$ (even number)

Then there would be two numbers at the middle of the data.

Median of the data = arithmetic mean of $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ and $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ observations

= arithmetic mean of $5^{th}$ and $6^{th}$ observations

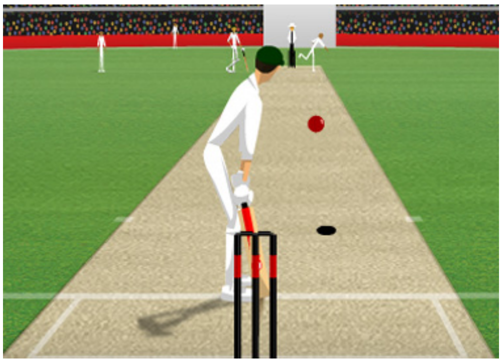
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

## Do This

Here are the heights of some of Indian cricketers. Find the median height of the team.

| S.No. | Players Name | Heights |
|---|---|---|
| 1. | VVS Laxman | 5'11" |
| 2. | Parthiv Patel | 5'3" |
| 3. | Harbhajan Singh | 6'0" |
| 4. | Sachin Tendulkar | 5'5" |
| 5. | Gautam Gambhir | 5'7" |
| 6. | Yuvraj Singh | 6'1" |
| 7. | Robin Uthappa | 5'9" |
| 8. | Virender Sehwag | 5'8" |
| 9. | Zaheer Khan | 6'0" |
| 10. | MS Dhoni | 5'11" |

5' 10" means 5 feet 10 inches



SCERT, TELANGANA

n సరిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\frac{n}{2}$ మరియు $\frac{n}{2}+1$ రాశుల సరాసరి.

**ఉదాహరణ 7:** 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50 రాశులు గల దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

**సాధన:** ఆరోహణ క్రమంలోని రాశులు = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

రాశుల సంఖ్య n = 9 (బేసిసంఖ్య)

$\therefore$ మధ్యగతము $= \frac{n+1}{2}$ వ రాశి

= 5వ రాశి = 35

$\therefore$ మధ్యగతము = 35

**ఉదాహరణ 8:** పై దత్తాంశమునకు మరొక రాశి 61 కలుపగా క్రొత్త దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము ఎంత?

**సాధన:** రాశులు యొక్క క్రమము = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

రాశుల సంఖ్య n = 10 (సరిసంఖ్య)

రాశుల సంఖ్య సరిసంఖ్య కావున దత్తాంశము మధ్యలో రెండు రాశులు కలవు.

$\therefore$ మధ్యగతము M = $\left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి

= 5, 6వ రాశుల సరాసరి

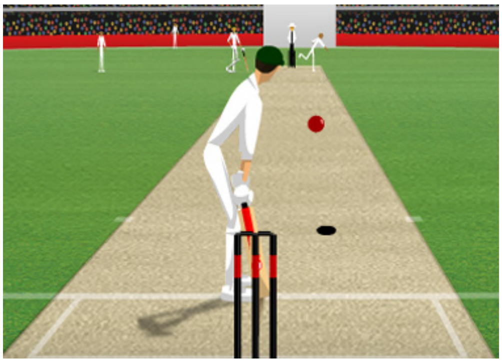
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

## ఇది చేయండి

కొందరు భారతీయ క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ ఎత్తులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనండి.

| క్ర.సం. | ఆటగాని పేరు | ఎత్తు |
|---|---|---|
| 1. | వివిఎస్ లక్ష్మణ్ | 5'11" |
| 2. | పార్థివ్ పటేల్ | 5'3" |
| 3. | హర్భజన్ సింగ్ | 6'0" |
| 4. | సచిన్ టెండూల్కర్ | 5'5" |
| 5. | గౌతమ్ గంభీర్ | 5'7" |
| 6. | యువరాజ్ సింగ్ | 6'1" |
| 7. | రాబిన్ ఉతప్ప | 5'9" |
| 8. | వీరేంద్ర సెహ్వాగ్ | 5'8" |
| 9. | జహీర్ ఖాన్ | 6'0" |
| 10. | ఎం.ఎస్. ధోని | 5'11" |

5' 10" అనగా 5 అడుగుల 10 అంగుళాలు



SCERT, TELANGANA

**Note:**

- Median is the middle most value in ordered data.
- It depends on number of observations and middle observations of the ordered data. It is not effected by any change in extreme values.

### Try These

1. Find the median of the data 24,65,85,12,45,35,15.
2. If the median of $x$, $2x$, $4x$ is 12, then find mean of the data.
3. If the median of the data 24, 29, 34, 38, x is 29 then the value of '$x$' is

   (i) $x > 38$ (ii) $x < 29$ (iii) x lies in between 29 and 34 (iv) none

## 7.1.4 Mode

When we need to know what is the favourite uniform colour in a class or most selling size of the shirt in shop ,we use mode. The mode is simply the most frequently occurring value.Consider the following examples.

**Example 9:** In a shoe mart different sizes (in inches) of shoes sold in a week are; 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7. Which size of the shoes must be kept more in number for next week to sell? Give the reasons.

**Solution:** If we write the observations in the data in order we have

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

From the data it is clear that 7 inch size shoes are sold more in number. Thus the mode of the given data is 7. So 7 inch size shoes must be kept more in number for sale.

**Example 10:** The blood group of 50 donors, participated in blood donation camp are A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. Find the mode of the above verbal data.

**Solution:** By observing the data we can find that A group is repeated for 12, B group is repeated for 7, AB group is repeated for 12, O group is repeated for 19 times.

$\therefore$ Mode of the data is 'O' group.

### Think, Discuss and Write

Is there any change in mode, if one or two more observations, equal to mode are included in the data?

SCERT, TELANGANA

**గమనిక:**

- ఆరోహణ / అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశములోని రాశులలో మధ్యమరాశి విలువయే ఆ దత్తాంశపు మధ్యగతము.
- దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్యపై మరియు క్రమంగా వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్యమరాశుల విలువలపై మాత్రమే ఆధారపడుతుంది. కానీ అత్యల్ప అత్యధిక విలువలపై ఆధారపడదు.

**ప్రయత్నించండి**

1. 24,65,85,12,45,35,15 యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.
2. $x$, $2x$, $4x$ రాశుల మధ్యగతము 12 అయిన ఆ రాశుల సరాసరి ఎంత?
3. 24, 29, 34, 38, $x$ అనే దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము 29 అయిన $x$ విలువ

   (i) $x > 38$ (ii) $x < 29$ (iii) 29, 34 ల మధ్య (iv) ఏదీకాదు

### 7.1.4 బాహుళకము

ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు ఇష్టపడే ఏకరూప దుస్తులు (uniform) రంగు ఏది? అత్యధికంగా అమ్ముడయ్యే రెడీమేడ్ దుస్తుల పరిమాణం (size) ఏది?.... మొదలగు వివరాలు రాబట్టుటకు బాహుళకము అనే కేంద్ర స్థాన కొలతను ఉపయోగిస్తారు. క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

**ఉదాహరణ 9:** ఒక చెప్పుల దుకాణంలో ఒక వారంలో అమ్మబడిన బూట్ల కొలతలు అంగుళాలలో 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7. అయితే తరువాత వారం అమ్మకానికై ఏ కొలత బూట్లు ఎక్కువ సంఖ్యలో సిద్ధపరుచుకొనవలెను.

**సాధన:** దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయగా

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

పై దత్తాంశము పరిశీలించగా 7 (అంగుళాలు) అనే పరిమాణం ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అవుతుంది. కావున దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము 7 అనగా వచ్చే వారం అమ్మకమునకై 7 (అంగుళాలు) పరిమాణం గల బూట్లను ఎక్కువగా సిద్ధపరచుకోవాలి.

**ఉదాహరణ 10:** ఒక రక్తదాన శిబిరంలో రక్తదానం చేసిన 50 మంది దాతల రక్తము గ్రూపులు ఈ విధంగా ఉన్నవి A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము కనుగొనండి.

**సాధన:** దత్తాంశమును పరిశీలించినపుడు పరిశీలించినపుడు A గ్రూపు దాతల సంఖ్య 12, B గ్రూపు దాతల సంఖ్య 7, AB గ్రూపు దాతల సంఖ్య 12, O గ్రూపు దాతల సంఖ్య 19.

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము = 'O' గ్రూపు.

**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి**

ఒక దత్తాంశము యొక్క బాహుళకమునకు సమానమైన రాశులను కొన్నింటిని చేర్చగా దత్తాంశపు బాహుళకము ఎట్లు మారును?

SCERT TELANGANA

**Note:**

- Mode is the most frequent observation of the given data.
- It depends neither on number of observations nor values of all observations.
- It is used to analyse both numerical and verbal data.
- There may be 2 or 3 or many modes for the same data.

## Exercise - 7.1

1. Find the arithmetic mean of the sales per day in a fair price shop in a week.

   ₹10000, ₹.10250, ₹.10790, ₹.9865, ₹.15350, ₹.10110

2. Find the mean of the data;10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35

3. Mean of eight observations is 25. If one observation 11 is excluded, find the mean of the remaining.

4. Arithmetic mean of nine observations is calculated as 38. But in doing so, mistakenly the observation 27 is taken instead of 72. Find the actual mean of the data.

5. Five years ago mean age of a family was 25 years. What is the present mean age of the family?

6. Two years ago the mean age of 40 people was 11 years. Now a person left the group and the mean age has changed to 12 years. Find the age of the person who left the group.

7 Find the sum of deviations of all observations of the data 5, 8, 10, 15, 22 from their mean.

8. If sum of the 20 deviations from the mean is 100, then find the mean deviation.

9. Marks of 12 students in a unit test are given as 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14. Assume a mean and calculate the arithmetic mean of the data. Assume another number as mean and calculate the arithmetic mean again. Do you get the same result? Comment.

10. Arithmetic mean of marks (out of 25) scored by 10 students was 15. One of the student, named Karishma enquired the other 9 students and find the deviations from her marks are noted as $-8$, $-6$, $-3$, $-1$, 0, 2, 3, 4, 6. Find Karishma's marks.

11. The sum of deviations of '$n$' observations from 25 is 25 and sum of deviations of the same 'n' observations from 35 is $-25$. Find the mean of the observations.

12. Find the median of the data; 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8

13. The median of the following observations, arranged in ascending order is 15.

    10, 12, 14, x $-$ 3, x, x + 2, 25.Then find $x$.

14. Find the mode of 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10.

SCERT, TELANGANA

**గమనిక:**

- ఒక దత్తాంశములో ఎక్కువసార్లు పునరావృతమగు రాశిని బాహుళకము అంటారు.
- దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్యపై గాని, ప్రతిరాశి విలువపై గాని ఆధారపడదు.
- సంఖ్యాత్మక, వివరణాత్మక దత్తాంశములు, రెండింటిని విశ్లేషణ చేయుటలో బాహుళకమును ఉపయోగిస్తారు.
- కొన్ని దత్తాంశములకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ బాహుళకములు ఉండవచ్చు. కొన్నింటికి ఒక్క బాహుళకము కూడా లేక పోవచ్చును.

## అభ్యాసం - 7.1

1. ఒక దుకాణంలో వారంలో జరిగిన అమ్మకాలు రోజువారీగా ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనండి. ₹10000, ₹ 10250, ₹ 10790, ₹ 9865, ₹ 15350, ₹ 10110
2. 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 రాశుల అంకగణిత మధ్యమమెంత ?
3. 8 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 25. వాని నుండి 11 అను రాశిని తొలగించగా మిగిలిన రాశుల అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి.
4. 9 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 38 గా లెక్కింపబడినది. కానీ అట్లు లెక్కించుటలో 72 ను 27 గా పొరపాటుగా తీసుకున్నారు. అయిన సరియైన అంకగణిత మధ్యమమును లెక్కించండి.
5. ఐదు సంవత్సరముల క్రిందట ఒక కుటుంబ సభ్యుల సరాసరి వయస్సు 25 సంవత్సరాలు, ప్రస్తుతం ఆ కుటుంబ సభ్యుల సరాసరి వయస్సు ఎంత? (సభ్యుల సంఖ్యలో మార్పులేదు)
6. రెండు సంవత్సరాల క్రిందట ఒక సమూహంలోని 40 మంది వయస్సుల సగటు వయస్సు 11 సంవత్సరాలు, ప్రస్తుతం ఆ సమూహము నుండి ఒక వ్యక్తి బయటకు వెళ్ళిపోగా మిగిలిన సభ్యుల సగటు వయస్సు 12 సంవత్సరాలు. అయిన వెళ్ళిపోయిన వ్యక్తి వయస్సు ఎంత?
7. ఒక దత్తాంశములోని 5, 8, 10, 15, 22 అనురాశుల యొక్క అంకగణిత మధ్యమము నుండి వాని విచలనాల మొత్తమును కనుగొనండి.
8. 20 రాశుల సరాసరి నుండి వాని విచలనాల మొత్తము 100 అయిన, విచనలముల సరాసరి ఎంత?
9. ఒక యూనిట్ పరీక్షలో 12 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14 అయిన ఒక విలువను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమంగా తీసుకొని దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి. మరొక సంఖ్యను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమముగా తీసుకొని మరలా సరాసరిని కనుగొండి. రెండుసార్లు సమాన ఫలితాలు వచ్చినవా? మీ అభిప్రాయం ఏమిటి?
10. ఒక తరగతిలో 10 మంది విద్యార్థుల మార్కుల సరాసరి 15 (25 మార్కులకు). వారిలో కరిష్మా అనే విద్యార్థి మిగిలిన 9 మంది విద్యార్థులను అడిగి తన కన్నా ఎన్ని మార్కులు ఎక్కువ లేక తక్కువ అనే వివరాలను సేకరించింది. ఆ విచలనాలు $-8, -6, -3, -1, 0, 2, 3, 4, 6$. అయిన ఆమెకు వచ్చిన మార్కులెన్ని?
11. 25 అను విలువ నుండి ఒక దత్తాంశములోని $n$ రాశుల విచలనముల మొత్తము 25 మరియు 35 అనే విలువ నుండి అవే రాశుల విచలనాల మొత్తం $-25$ అయిన ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత సగటు ఎంత?
12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 రాశుల యొక్క మధ్యగతము ఎంత?
13. ఆరోహణ క్రమంలోనున్న రాశులు $10, 12, 14, x-3, x, x+2, 25$ ల మధ్యగతము 15 అయిన “ విలువ ఎంత?
14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10 రాశుల యొక్క బాహుళకము ఎంత?

SCERT, TELANGANA

15. Mode of certain scores is $x$. If each score is decreased by 3, then find the mode of the new series.
16. Find the mode of all digits used in writing the natural numbers from 1 to 100.
17. Observations of a raw data are 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24. Add four more numbers so that mean and median of the data remain the same, but mode increases by 1.
18. If the mean of a set of observations $x_1, x_2, ...., ...., x_{10}$ is 20. Find the mean of $x_1 + 4$, $x_2 + 8$, $x_3 + 12$, .... ...., $x_{10} + 40$.
19. Six numbers from a list of nine integers are 7, 8, 3, 5, 9 and 5. Find the largest possible value of the median of all nine numbers in this list.
20. The median of a set of 9 distinct observations is 20. If each of the largest 4 observations of the set is increased by 2, find the median of the resulting set.

## 7.2 Organisation of Grouped Data

We have learnt to organize smaller data by using tally marks in previous class. But what happens if the data is large? We organize the data by dividing it into convenient groups. It is called grouped data. Let us observe the following example.

A construction company planned to construct various types of houses for the employees based on their income levels. So they collected the data about monthly net income of the 100 employees, who wish to have a house. They are (in rupees) 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250................. 75000.

This is a large data of 100 observations, ranging from ₹ 15000 to ₹ 75000. Even if we make frequency table for each observation the table becomes large.

Instead the data can be classified into small income groups like 10001 – 20000, 20001 – 30000, . . . , 70001 – 80000.

These small groups are called 'class intervals' .The intervals 10001 – 20000 has all the observations between 10001 and 20000 including both 10001 and 20000. This form of class interval is called 'inclusive form', where 10001 is the 'lower limit', 20000 is the 'upper limit'.

### 7.2.1 Interpretation of Grouped frequency distribution

**Example 11:** Marks of 30 students in mathematics test are given in the adjacent grouped frequency distribution.

(i) Into how many groups the data is classified?

| Sl. No. | Marks | No. of Students |
|---|---|---|
| 1 | 0 – 5 | 5 |
| 2 | 5 – 10 | 7 |
| 3 | 10 – 15 | 10 |
| 4 | 15 – 20 | 6 |
| 5 | 20 – 25 | 2 |

SCERT, TELANGANA

15. కొన్ని రాశుల బాహుళకము $x$, దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల నుండి 3 తీసివేయగా, క్రొత్త దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఎంత?

16. 1 నుండి 100 వరకు సహజ సంఖ్యలను వ్రాయడంలో ఉపయోగించు అంకెలన్నింటి యొక్క బాహుళకము ఎంత?

17. ఒక దత్తాంశములోని రాశులు 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24. నాలుగు రాశులను కలుపగా దత్తాంశము యొక్క సరాసరి, మధ్యగతములో మార్పులేదు కానీ బాహుళకము 1 పెరిగినది. అయిన కలిపిన ఆ నాలుగు సంఖ్యలేవి.

18. $x_1, x_2, ...., ...., x_{10}$ రాశుల సరాసరి 20. అయిన "$x_1+4, x_2+8, x_3+12, ........, x_{10}+40$ రాశుల సరాసరి కనుగొనుము.

19. 9 పూర్ణసంఖ్యల జాబితాలో 6 పూర్ణసంఖ్యలు 7, 8, 3, 5, 9 మరియు 5 లు అయిన ఆ 9 పూర్ణసంఖ్యలకు గల గరిష్ఠ మధ్యగతము కనుగొనండి.

20. 9 వేర్వేరు రాశుల మధ్యగతము 20. అందు గల నాలుగు మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలకు ప్రతి రాశికి 2 కలుపగా వచ్చు కొత్త రాశుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

## 7.2 దత్తాంశ నిర్వహణ వర్గీకృత దత్తాంశము

తక్కువ రాశుల గల దత్తాంశమును గణన చిహ్నాలు వినియోగిస్తూ ఎట్లు సూక్ష్మరూపంలో అమర్చవచ్చునో క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొని ఉన్నాము. కానీ ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు దత్తాంశమును ఎట్లు నిర్వహించవలెను (అమర్చవలెను) అని పరిశీలించుదాం. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఒక గృహ నిర్మాణ సంస్థ ఉద్యోగుల కొరకు వారివారి ఆదాయములకు అనుగుణంగా ఇండ్లు నిర్మించి ఇవ్వవలెనని ప్రణాళిక చేస్తున్నది. అందుకొరకై ఇండ్లు కావాలనుకొన్న 100 మంది ఉద్యోగుల నెలసరి ఆదాయములను సేకరించగా అవి (రూపాయలలో) 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250, .............., 75000.

ఈ దత్తాంశంలోని 100 రాశులు ₹ 15000 నుండి ₹ 75000 మధ్యన విస్తరించి ఉన్నవి. ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు ఈ రాశులకు పౌన్ఃపున్య విభాజనము తయారు చేసినా అది పెద్ద పట్టిక అవుతుంది.

అందువల్ల దత్తాంశంలోని రాశులను కొన్ని అనువైన సమూహములుగా విభజించుకొని అనగా ఆదాయ సమూహాలు ₹10001 నుండి 20000, ₹ 20001 నుండి 30000, . . . . . , వరకు

₹ 70001 నుండి 80000 వరకు విభజించుకొని పౌన్ఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారు చేయుట అనువుగా ఉంటుంది. ఇటువంటి సమూహములను 'తరగతి అంతరం' అంటారు. ఉదాహరణకు 10001 - 20000 ఒక తరగతి అంతరం, ఈ సమూహంలోని రాశులు 10001 నుండి 20000 వరకు విలువలు కలిగి ఉంటాయి. ఇందులో 10001 ని 'దిగువ అవధి' అని, 20000 ని 'ఎగువ అవధి' అని అంటారు. దిగువ, ఎగువ అవధులు రెండూ 'తరగతి అంతరాని'కి చెందుతాయి. కావున దీనిని 'విలీన తరగతి అంతరం' (Inclusive class inverval) అంటారు.

### 7.2.1 వర్గీకృత పౌన్ఃపున్య విభాజనము అవగాహన

**ఉదాహరణ 11:** గణిత పరీక్షలో 30 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ప్రక్క పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన

(i) దత్తాంశం ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపబడినది?

| క్ర. సం. | మార్కులు | విద్యార్థుల సంఖ్య |
|---|---|---|
| 1 | 0 – 5 | 5 |
| 2 | 5 – 10 | 7 |
| 3 | 10 – 15 | 10 |
| 4 | 15 – 20 | 6 |
| 5 | 20 – 25 | 2 |

SCERT, TELANGANA

(ii) How many students are there in the third group?

(iii) If a student gets 10 marks, should he be included in which class?

(iv) What are the marks of 6 students who are in 4$^{th}$ class interval?

(v) What are the individual marks of 2 students in the 5$^{th}$ class interval?

**Answers**

(i) The data is classified into 5 groups or 5 classes.

(ii) There are 10 students in the 3$^{rd}$ class interval.

(iii) Here 10 is the upper limit of 2$^{nd}$ class and lower limit of 3$^{rd}$ class. In such case upper limit is not included in the class. So 10 is included in the 3rd class interval.

(iv) Marks of 6 students in 4$^{th}$ class interval varies from 15 and below 20.

(v) Individual marks of students can't be identified from this frequency distribution, they may be from 20 and below 25.

**Do This**

Ages of 90 people in an apartment are given in the adjacent grouped frequency distribution

(i) How many Class Intervals are there in the table?

(ii) How many people are there in the Class Interval 21-30?

(iii) Which age group people are more in the apartment?

(iv) Can we say that both people the last age group are of 61, 70 or any other age?

| Ages | No of People |
|---|---|
| 1 – 10 | 15 |
| 11 – 20 | 14 |
| 21 – 30 | 17 |
| 31 – 40 | 20 |
| 41 – 50 | 18 |
| 51 – 60 | 4 |
| 61 – 70 | 2 |

### 7.2.2 Limits and Boundaries

Suppose we have to organize a data of marks in a test. We make class intervals like 1-10, 11-20 ,...... If a student gets 10.5 marks, where does it fall? In class 1-10 or 11-20 ? In this situation we make use of real limits or boundaries.

Consider the class intervals shown in the table.

SCERT, TELANGANA

(ii) 3వ తరగతి అంతరంలో ఎంత మంది విద్యార్థులు కలరు?

(iii) 10 మార్కులు పొందిన విద్యార్థి ఏ తరగతి అంతరంలో ఉంటాడు?

(iv) 4వ తరగతి అంతరంలోని 6 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ఎన్నెన్ని?

(v) 5వ తరగతి అంతరంలోని ఇద్దరు విద్యార్థుల మార్కులు ఒక్కొక్కరివి ఎంతెంత?

**జవాబులు**

(i) ఈ దత్తాంశం 5వ తరగతి అంతరాలుగా విభజించబడినది.

(ii) 3వ తరగతి అంతరంలో 10 మంది విద్యార్థులు కలరు.

(iii) ఇచ్చట 10 రెండవ తరగతి అంతరం యొక్క ఎగువ అవధి మరియు 3వ తరగతి అంతరం యొక్క దిగువ అవధి, ఇటువంటి సందర్భములలో ఎగువ అవధి తరగతికి చెందదు మరియు ఈ తరగతులను 'మినహాయింపు తరగతులు' అంటారు. కావున 10 మార్కులు మూడవ తరగతి అంతరంకు చెందుతుంది.

(iv) 4వ తరగతి అంతరంలోని 6 మంది మార్కులు 15 నుండి 20లోపు విస్తరించి ఉంటాయి.

(v) ఒక్కొక్క విద్యార్థి మార్కులను (విలువలను) ఈ విభాజన పట్టిక నుండి కనుగొనలేము. అవి 20 నుండి 25 మధ్యలో ఉండవచ్చు.

**ఇవి చేయండి**

ఒక అపార్ట్‌మెంట్ భవన సముదాయంలోని 90 మంది వ్యక్తుల వయస్సులు ప్రక్క వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశము నుండి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.

| వయస్సు | వ్యక్తుల సంఖ్య |
|---|---|
| 1 – 10 | 15 |
| 11 – 20 | 14 |
| 21 – 30 | 17 |
| 31 – 40 | 20 |
| 41 – 50 | 18 |
| 51 – 60 | 4 |
| 61 – 70 | 2 |

(i) దత్తాంశము ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపబడినది?

(ii) 21-30 తరగతిలో ఎంత మంది కలరు?

(iii) ఏ తరగతి వయస్సు వారు ఎక్కువ మంది కలరు?

(iv) చివరి తరగతిలోని ఇద్దరి వయస్సులు 61, 70 లేదా మరి ఏదైనా వయస్సు వారిని చెప్పవచ్చా?

### 7.2.2 అవధులు మరియు హద్దులు

కొంత మంది విద్యార్థుల మార్కుల దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును నిర్మిస్తున్నాము అనుకుందాము. తరగతులు 1-10, 11-20, ...... ఉండి, ఒక విద్యార్థి మార్కులు 10.5 అయిన అది 1-10 లేదా 11-20 తరగతికి చెందుతుందా? చెందదు. కనుక ఇటువంటి సందర్భంలో అవధులను కాకుండా 'నిజ తరగతి అవధులు' లేక 'హద్దులను" ఉపయోగిస్తాము.

పట్టికలోని తరగతి అంతరాలను పరిగణించండి.

SCERT, TELANGANA

| Class Intervals | |
|---|---|
| Limits | Boundaries |
| 1 – 10 | 0.5 - 10.5 |
| 11 – 20 | 10.5 – 20.5 |
| 21 – 30 | 20.5 – 30.5 |
| 31 – 40 | 30.5 – 40.5 |

- Average of Upper Limit (UL) of first class and Lower Limit (LL) of second class becomes the Upper Boundary (UB) of the first class and Lower Boundary (LB) of the second class.

  i.e., Average of 10, 11; $\frac{10+11}{2}$ = 10.5 is the boundary.
- Now all the observations below 10.5 fall into group 1-10 and the observations from 10.5 to below 20.5 will fall into next class i.e 11-20 having boundaries 10.5 to 20.5. Thus 10.5 falls into class interval of 11-20.
- Imagine the UL of the previous class interval (usually zero) and calculate the LB of the first class interval. Average of 0, 1 is $\frac{0+1}{2}$ = 0.5 is the LB. Similarly imagine the LL of the class after the last class interval and calculate the UB of the last class interval. Average of 40, 41 is $\frac{40+41}{2}$ = 40.5 is the UB. These boundaries are also called "true class limits".

Observe limits and boundaries for the following class intervals.

| Class interval | Limits | | Boundaries | |
|---|---|---|---|---|
| Inclusive classes | Lower limit | Upper limit | Lower boundary | Upper boundary |
| 1-10 | 1 | 10 | 0.5 | 10.5 |
| 11-20 | 11 | 20 | 10.5 | 20.5 |
| 21-30 | 21 | 30 | 20.5 | 30.5 |

| Class interval | Limits | | Boundaries | |
|---|---|---|---|---|
| Exclusive classes | Lower limit | Upper limit | Lower boundary | Upper boundary |
| 0-10 | 0 | 10 | 0 | 10 |
| 10-20 | 10 | 20 | 10 | 20 |
| 20-30 | 20 | 30 | 20 | 30 |

In the above illustration, we can observe that in case of discrete series (Inclusive class intervals) limit and boundaries are different. But in case of continuous series (exclusive class intervals) limits and boundaries are the same.

SCERT, TELANGANA

- ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి మరియు తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరియే మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు, రెండవ తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది. అనగా 10, 11ల సరాసరి; $\frac{10+11}{2}$=10.5 ఎగువ హద్దు అవుతుంది.

| తరగతి హద్దులు | |
|---|---|
| అవధులు | హద్దులు |
| 1 – 10 | 0.5 - 10.5 |
| 11 – 20 | 10.5 – 20.5 |
| 21 – 30 | 20.5 – 30.5 |
| 31 – 40 | 30.5 – 40.5 |

- ఇప్పుడు 0.5 నుండి 10.5 లోపు (10.5 తప్ప) అన్ని రాశులు మొదటి తరగతికి చెందుతాయి. 10.5 నుండి 20.5 లోపు (20.5 తప్ప) రాశులన్నీ 11-20 తరగతికి చెందుతాయి. అనగా 11-20 తరగతి హద్దులు 10.5 నుండి 20.5 అందువలన 10.5 అనేది 11-20 తరగతికి చెందును.

- మొదటి తరగతి కన్నా ముందు ఒక తరగతిని ఊహించి దాని ఎగువ అవధి సహాయంతో (సాధారణంగా '0' ఉంటుంది) మొదటి తరగతి యొక్క దిగువ హద్దును లెక్కించాలి. అనగా 0, 1 ల సరాసరి $\frac{0+1}{2}=0.5$ అదే విధంగా చివరి తరగతి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధి సహాయంతో చివరి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దును లెక్కిస్తారు. అనగా 40, 41 ల సరాసరి $\frac{40+41}{2}=40.5$. ఇదే చివరి తరగతి ఎగువ హద్దు. ఈ హద్దులను తరగతి యొక్క 'నిజ అవధులు' అని కూడా అంటారు.

క్రింది తరగతుల అవధులు మరియు హద్దులను పరిశీలించండి.

| తరగతి అంతరాలు (విలీన తరగతులు) | అవధులు | | హద్దులు | |
|---|---|---|---|---|
| | దిగువ అవధి | ఎగువ అవధి | దిగువ హద్దు | ఎగువ హద్దు |
| 1-10 | 1 | 10 | 0.5 | 10.5 |
| 11-20 | 11 | 20 | 10.5 | 20.5 |
| 21-30 | 21 | 30 | 20.5 | 30.5 |

| తరగతి అంతరాలు (మినహాయింపు తరగతులు) | అవధులు | | హద్దులు | |
|---|---|---|---|---|
| | దిగువ అవధి | ఎగువ అవధి | దిగువ హద్దు | ఎగువ హద్దు |
| 0-10 | 0 | 10 | 0 | 10 |
| 10-20 | 10 | 20 | 10 | 20 |
| 20-30 | 20 | 30 | 20 | 30 |

పై పట్టికలను పరిశీలించినట్లయితే విభాజిత శ్రేఢి (విలీన తరగతులు)లో, తరగతి అవధులు, హద్దులు వేరు వేరుగా ఉంటాయి. అవిభాజిత శ్రేఢిలో (మినహాయింపు తరగతులు) తరగతి అవధులు, హద్దులు సమానం అని తెలియుచున్నది.

SCERT, TELANGANA

Difference between upper and lower boundaries of a class is called '**length of the class**', represented by 'C'.

**Do These**

1. Long jump made by 30 students of a class are tabulated as

| Distance (cm) | 101 – 200 | 201 – 300 | 301 – 400 | 401 – 500 | 501 – 600 |
|---|---|---|---|---|---|
| No of students | 4 | 7 | 15 | 3 | 1 |

   I. Are the given class intervals inclusive or exclusive?

   II. How many students are in second class interval?

   III. How many students jumped a distance of 3.01m or more ?

   IV. To which class interval does the student who jumped a distance of 4.005 m belongs?

2. Calculate the boundaries of the class intervals in the above table.
3. What is the length of each class interval in the above table?

### 7.2.3 Construction of grouped frequency Distribution

Consider the marks of 50 students in Mathematics secured in Summative assessment I as 31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

After observing the data, you might be thinking, into how many intervals the data could be classified? How frequency distribution table could be constructed?

The following steps help in construction of grouped frequency distribution.

Step1: Find the range of the data.

Range = Maximum value – Minimum value

= 47 – 0 = 47

Step2: Decide the number of class intervals. (Generally number of class intervals are 5 to 8)

If no of class intervals = 6

$\Rightarrow$ Length of the class interval = $\frac{47}{6} \approx 8$ (approximately)

| Class Intervals (Marks) | Tally Marks | Frequency (No. of students) |
|---|---|---|
| 0 – 7 | \|\|\|\| | 4 |
| 08 – 15 | 卌 \| | 6 |
| 16 – 23 | 卌 \|\|\|\| | 9 |
| 24 – 31 | 卌 卌 \|\|\| | 13 |
| 32 – 39 | 卌 卌 \|\|\|\| | 14 |
| 40 – 47 | \|\|\|\| | 4 |

SCERT, TELANGANA

ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల యొక్క భేదమును 'తరగతి అంతరము' లేక 'తరగతి పొడవు' అంటారు. దీని 'C' తో సూచిస్తారు.

**ఇవి చేయండి**

1. ఒక తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులు దుమికిన దూరాలు ఈ విధంగా ఉన్నవి.

| దూరం (సెం.మీ.లతో) | 101 – 200 | 201 – 300 | 301 – 400 | 401 – 500 | 501 – 600 |
|---|---|---|---|---|---|
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 4 | 7 | 15 | 3 | 1 |

I. ఇచ్చిన తరగతి అంతరాలు విలీన తరగతి అంతరాలా? మినహాయింపు తరగతి అంతరాలా?

II. రెండవ తరగతి అంతరంలో ఎంతమంది విద్యార్థులు కలరు?

III. 3.01మీ లేక అంతకన్నా ఎక్కువ దూరం దుమికిన వారెందరు?

IV. 4.005 మీ. దూరం దుమికిన విద్యార్థి ఏ తరగతికి చెందుతాడు?

2. పై దత్తాంశములోని తరగతులకు హద్దులు వ్రాయండి.
3. పై దత్తాంశములోని ఒక్కొక్క తరగతి అంతరమెంత?

### 7.2.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను నిర్మించుట

మొదటి సంగ్రహణాత్మక పరీక్షలో గణితములో 50 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశమును ఎన్ని తరగతులుగా విభజించాలి? దత్తాంశంలోని రాశులను తరగతుల వారీగా ఎట్లు విభజించవలెను? ఇవి తెలుసుకోవడానికై క్రింది సోపానములను పరిశీలించండి.

సోపానం 1: దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనండి.

వ్యాప్తి = గరిష్టరాశి – కనిష్ట రాశి

= 47 – 0 = 47

సోపానం 2: విభజించవలసిన తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయించుకోవలెను.

(సాధారణంగా 5 నుండి 8 తరగుతులుగా విభజిస్తాము)

తరగతుల సంఖ్య = 6 అయిన

తరగతి అంతరము = $\frac{47}{6} \approx 8$ (సుమారుగా)

| తరగతులు (మార్కులు) | గణన చిహ్నాలు | పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|
| 0 – 7 | IIII | 4 |
| 08 – 15 | 卌 I | 6 |
| 16 – 23 | 卌 IIII | 9 |
| 24 – 31 | 卌 卌 III | 13 |
| 32 – 39 | 卌 卌 IIII | 14 |
| 40 – 47 | IIII | 4 |

SCERT TELANGANA

Step 3: Write inclusive class intervals starting from minimum value of observations.
i.e 0-7 ,8-15 and so on...

Step 4: Using the tally marks distribute the observations of the data into respective class intervals.

Step 5: Count the tally marks and write the frequencies in the table.

Now construct grouped frequency distribution table for exclusive classes.

**Think, Discuss and Write**

1. Make a frequency distribution of the following series. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7.
2. Construct a frequency distribution for the following series of numbers.

   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (Hint: Use inclusive classes)
3. What are the differences between the above two frequency distribution tables?
4. From which of the frequency distributions we can write the raw data again?

### 7.2.4 Characteristics of Grouped Frequency Distribution

1. It divides the data into convenient and small groups called 'class intervals'.
2. In a class interval 5-10, 5 is called lower limit and 10 is called upper limit.
3. Class intervals like 1-10, 11-20, 21-30 .... are called inclusive class intervals, because both lower and upper limits of a particular class belong to that particular class interval.
4. Class intervals like 0-10, 10-20, 20-30 ... are called exclusive class intervals, because only lower limit of a particular class belongs to that class, but not its upper limit.
5. Average of upper limit of a class and lower limit of the next class is called upper bound of the first class and lower bound of the next class.
6. In exclusive class intervals, both limits and boundaries are equal but in case of inclusive class intervals limits and boundaries are not equal.
7. Difference between upper and lower boundaries of a class is called 'length of the class'.
8. Individual values of all observations can't be identified from this table, but value of each observation of a particular class is assumed to be the average of upper and lower boundaries of that class. This value is called 'class mark' or 'mid value' ($x$).

SCERT, TELANGANA

సోపానం 3: దత్తాంశములోని కనిష్ఠ రాశితో ప్రారంభించి, లెక్కించిన తరగతి అంతరం ఉండునట్లుగా సమ్మిళిత తరగతులను వరుసగా వ్రాయవలెను. అనగా 0-7 ,8-15, 16-23 .....

సోపానం 4: గణన చిహ్నాలను వినియోగిస్తూ ఒక్కొక్క తరగతికి చెందు రాశులను గుర్తిస్తూ దత్తాంశమును విభజించాలి.

సోపానం 5: ఒక్కొక్క తరగతిలోని గణన చిహ్నాలను లెక్కించి ఆ తరగతి పౌనఃపున్యముగా వ్రాయాలి.

పై దత్తాంశమునకు మినహాయింపు తరగతులు ఉపయోగించి పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయండి.

### ఆలోచించండి, చర్చించి, రాయండి

1. క్రింది రాశుల దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను వ్రాయండి. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7.
2. క్రింది సంఖ్యల దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను వ్రాయండి.
   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (**సూచన:** వీలైన తరగతులను తీసుకోండి.)
3. పై రెండు దత్తాంశములలో భేదమేమి? వాని పౌనఃపున్య విభాజనములను ఏమంటారు?
4. పై సమస్యల యొక్క పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలలో దేని నుండి మరలా దత్తాంశములోని రాశులను విడివిడిగా వ్రాయగలము?

### 7.2.4 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క లక్షణాలు

1. ఇది దత్తాంశమును కొన్ని అనువైన చిన్నచిన్న సమూహాలుగా (తరగతులుగా) విభజిస్తుంది.
2. 5-10 అను తరగతిలో 5 ను తరగతి యొక్క దిగువ అవధి అని 10 ని ఎగువ అవధి అంటారు.
3. 1-10, 11-20, 21-30 ..... వంటి తరగతులలో ప్రతి తరగతి యొక్క ఎగువ దిగువ అవధులు రెండును అదే తరగతికి చెందుతాయి. కావున వీటిని సమ్మిళిత తరగతులు అంటారు.
4. 0-10, 10-20, 20-30 ..... వంటి తరగతులలో ప్రతి తరగతి యొక్క దిగువ అవధి అదే తరగతికి చెందుతుంది. కానీ ఎగువ అవధి చెందదు. కావున వీటిని మినహాయింపు తరగతులు అంటారు.
5. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి, తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరి మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు అవుతుంది. అదే రాశి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది.
6. మినహాయింపు తరగతులలో అవధులు, హద్దులు సమానములు కానీ సమ్మిళిత తరగతులలో అవధులు, హద్దులు సమానము కాదు.
7. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల బేధమును ఆ తరగతి యొక్క 'అంతరము' లేక 'పొడవు' (C) అంటారు.
8. ఈ పట్టిక నుంచి అన్ని రాశులను విడివిడిగా వ్రాయలేము. అందువల్ల ఒక తరగతిలోని ప్రతి రాశి యొక్క విలువ ఆ తరగతి యొక్క దిగువ, ఎగువ హద్దుల సరాసరికి సమానంగా తీసుకొంటారు. ఈ సరాసరిని 'తరగతి మార్కు' లేక 'తరగతి మధ్య విలువ' ($x$) అంటారు.

SCERT TELANGANA

**Example 12:** The following marks achieved by 30 candidates in mathematics of SSC examination held in the year 2010.

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. Construct the frequency distribution table with the class intervals ; failed (0 – 34), third class (35 – 49), second class (50 – 60), first class (60 – 74) and distinction (75 – 100).

**Solution:** Class intervals are already given.

Step 3: Write class intervals as given.

Step 4: These are inclusive class intervals. Recall that upper limits also belong to the class. Using the tally marks, distribute the observations of the data into different class intervals.

Step 5: Count the tally marks and write the frequencies in the table.

| Class Intervals (Marks) | Tally Marks | Frequency (No of students) |
|---|---|---|
| 0 – 34 | \|\|\| | 3 |
| 35 – 49 | ~~\|\|\|\|~~ \|\| | 7 |
| 50 – 59 | ~~\|\|\|\|~~ | 5 |
| 60 – 74 | ~~\|\|\|\|~~ \| | 6 |
| 75 – 100 | ~~\|\|\|\|~~ \|\|\|\| | 9 |

(**Note:** The lengths of class intervals are not same in this case)

**Example 13:** A grouped frequency distribution table is given below with class mark (mid values of class intervals) and frequencies. Find the class intervals.

| Class marks | 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequency | 5 | 11 | 19 | 21 | 12 | 6 |

**Solution:** We know that class marks are the mid values of class intervals. That implies class boundaries lie between every two successive class marks.

Step 1: Find the difference between two successive class marks; h = 15 - 7 = 8.

(Find whether difference between every two successive classes is same)

Step 2: Calculate lower and upper boundaries of every class with class mark 'x', as $x - h/2$ and $x + h/2$

For example, the upper and lower boundaries of the first class are $7 - \frac{8}{2} = 3$ and $7 + \frac{8}{2} = 11$

SCERT, TELANGANA

**ఉదాహరణ 12:** మార్చి 2010, SSC పరీక్షలలో గణితంలో 30 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల శాతములు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి. 0–34 ఉత్తీర్ణులు కాని వారు, 35–49 మూడవ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులైనవారు 50–60 రెండవ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులైన వారు, 60–74 మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులైనవారు, 75–100 విశిష్ట శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులైనవారు అనే తరగతులుగా విభజించండి.

**సాధన:** సమస్యలోనే తరగతులు కూడా సూచించబడ్డాయి. కావున

సోపానం 3: తరగతులు ఇచ్చిన విధంగా రాయాలి.

సోపానం 4: ఇచ్చిన తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులు కావున ఎగువ, దిగువ అవధులు రెండునూ తరగతికి చెందుతాయి అని గుర్తించండి. గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి దత్తాంశము లేని రాశులను విభజించి గుర్తించండి.

సోపానం5 : ప్రతి తరగతిలో గణన చిహ్నాలను లెక్కించి ఆ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యంగా వ్రాయండి.

| తరగతులు (మార్కులు) | గణన చిహ్నాలు | పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య) |
|---|---|---|
| 0 – 34 | \|\|\| | 3 |
| 35 – 49 | ~~\|\|\|\|~~ \|\| | 7 |
| 50 – 59 | ~~\|\|\|\|~~ | 5 |
| 60 – 74 | ~~\|\|\|\|~~ \| | 6 |
| 75 – 100 | ~~\|\|\|\|~~ \|\|\|\| | 9 |

(**గమనిక:** తరగతి అంతరాల పొడవులు సమానంగా లేవని గమనించవచ్చు).

**ఉదాహరణ 13:** క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు తరగతి మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి నుండి తరగతులను వ్రాయండి.

| తరగతి మార్కులు | 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం | 5 | 11 | 19 | 21 | 12 | 6 |

**సాధన:** తరగతి మార్కు అనగా తరగతి మధ్య విలువ, దిగువ ఎగువ హద్దుల సరాసరి. కావున సమాన తరగతి అంతరాలు గల తరగతులలో వరుస తరగతి మార్కుల మధ్య (సరాసరి) వరుస హద్దులు ఉంటాయి.

సోపానం 1: వరుస తరగతి మార్కుల మధ్య భేదమును కనుక్కోండి $h = 15 - 7 = 8$.

(ప్రతి రెండు వరుస తరగతుల మార్కుల భేదము సమానమేనా?)

సోపానం 2: ఒక్కొక్క తరగతి మార్కు (x) అయిన, ఆ తరగతి హద్దులు

$x - h/2,\ x+h/2$ అని లెక్కించండి.

ఉదాహరణకు మొదటి తరగతి ఎగువ మరియు దిగువ హద్దులు = $7-\frac{8}{2}=3$ మరియు $7+\frac{8}{2}=11$.

SCERT, TELANGANA

| Class Marks | Class intervals | Frequency |
|---|---|---|
| 7 | (7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11 | 5 |
| 15 | (15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19 | 11 |
| 23 | (23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27 | 19 |
| 31 | (31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35 | 21 |
| 39 | (39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43 | 12 |
| 47 | (47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51 | 6 |

## 7.3 Cumulative Frequency

In a competitive examination 1000 candidates appeared for a written test. Their marks are announced in the form of grouped frequency distribution as shown in the adjacent table. Two candidates are looking at the table and discussing like …

| Class Interval (Marks) | No of Candidates |
|---|---|
| 0 – 10 | 25 |
| 10 – 20 | 45 |
| 20 – 30 | 60 |
| 30 – 40 | 120 |
| 40 – 50 | 300 |
| 50 – 60 | 360 |
| 60 – 70 | 50 |
| 70 – 80 | 25 |
| 80 – 90 | 10 |
| 90 – 100 | 5 |

Sarath: How many candidates have appeared for the test?

Sankar: It seems 1000 candidates appeared for the test.

Sarath : See, 360 candidates achieved 50-60 marks.

Sankar: If 60 is the cut off mark, how many candidates are eligible to get call letter?

Sarath : Do you mean how many got 60 and above marks in altogether?

Sankar : It is 50 + 25 + 10 + 5, that is 90 candidates will be eligible.

Sarath : But there are only 105 jobs. How many candidates are eligible, if cut off mark as 50.

Sankar : In that case, 360 + 50 + 25 + 10 + 5, that is totally 450 candidates are eligible to get call letter for interview.

Similarly we can make some more conclusions.

Number of candidates, who got equal or more than 90 (Lower boundary) = 5

Number of candidates, who got equal or more than LB of ninth CI = 10 + 5 = 15

Number of candidates, who got equal or more than LB of eighth CI = 25 + 15 = 40

Number of candidates, who got equal or more than LB of seventh CI = 50 + 40 = 90

SCERT, TELANGANA

| తరగతి మార్కు | తరగతి అంతరాలు | పౌనఃపున్యము |
|---|---|---|
| 7 | (7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11 | 5 |
| 15 | (15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19 | 11 |
| 23 | (23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27 | 19 |
| 31 | (31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35 | 21 |
| 39 | (39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43 | 12 |
| 47 | (47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51 | 6 |

## 7.3 సంచిత పౌనఃపున్యము

ఒక పోటీ పరీక్షలో 1000 మంది అభ్యర్థులు పాల్గొనగా వారి ఉత్తీర్ణతా వివరాలను ప్రక్క పటములో వలె నోటీసు బోర్డు ప్రకటించినారు. ఈ బోర్డును పరిశీలిస్తున్న ఇద్దరు అభ్యర్థుల మధ్య సంభాషణ గమనించండి.

| తరగతి అంతరం (మార్కులు) | విద్యార్థుల సంఖ్య |
|---|---|
| 0 – 10 | 25 |
| 10 – 20 | 45 |
| 20 – 30 | 60 |
| 30 – 40 | 120 |
| 40 – 50 | 300 |
| 50 – 60 | 360 |
| 60 – 70 | 50 |
| 70 – 80 | 25 |
| 80 – 90 | 10 |
| 90 – 100 | 5 |

శరత్ : పరీక్షకు ఎంత మంది అభ్యర్థులు పోటీపడ్డారు?

శంకర్: ఈ సమాచారం ప్రకారం 1000 మంది పోటీ పరీక్షను వ్రాశారు.

శరత్ : ఇది చూశావా? 50 నుండి 60 లోపు మార్కులు సాధించిన వారే 360 మంది ఉన్నారు.

శంకర్: ఆహా! ఉత్తీర్ణతా మార్కులు 60 గా నిర్ణయిస్తే ఎంతమందికి ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలువు వస్తుందనుకొంటున్నావు?

శరత్ : అంటే, 60 మార్కులు, అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు ఎంతమంది అభ్యర్థులు అని నీ ఉద్దేశ్యమా?

శంకర్ : అవును, గమనిస్తే 50 + 25 + 10 + 5, అంటే 90 మందికి ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలుపు వస్తుంది కదా.

శరత్ : కానీ 105 ఖాళీలను భర్తీ చేయాలి కదా, అంటే 50 మార్కులను ఉత్తీర్ణతా మార్కులుగా తీసుకుంటారో ఏమో.

శంకర్: అయితే, 360 + 50 + 25 + 10 + 5 అయితే 450 మంది అభ్యర్థులకు ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలువు రావచ్చును.

అదే విధంగా మనము కూడా మరికొన్ని అంచనాలను చేయవచ్చును.

| | | |
|---|---|---|
| 90 మార్కులు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన అభ్యర్థులు (దిగువ హద్దు) | = 5 | |
| 9వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు | = 10 + 5 | = 15 |
| 8వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు | = 25 + 15 | = 40 |
| 7వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు | = 50 + 40 | = 90 |



SCERT, TELANGANA

We are getting these values by taking progressive total of frequencies from either the first or last class to the particular class. These are called cumulative frequencies. The progressive sum of frequencies from the last class to the lower boundary of particular class is called 'Greater than Cumulative Frequency' (G.C.F.).

| Class Interval (Marks) | LB | Frequency (No of Candidates) | Greater than cumulative frequency |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 0 | 25 | 25+975 = 1000 |
| 10 – 20 | 10 | 45 | 45+930 = 975 |
| 20 – 30 | 20 | 60 | 60+870 = 930 |
| 30 – 40 | 30 | 120 | 120+750 = 870 |
| 40 – 50 | 40 | 300 | 300+450 = 750 |
| 50 – 60 | 50 | 360 | 360+ 90 = 450 |
| 60 – 70 | 60 | 50 | 50 + 40 = 90 |
| 70 – 80 | 70 | 25 | 25 + 15 = 40 |
| 80 – 90 | 80 | 10 | 10 + 5 = 15 |
| 90 – 100 | 90 | 5 | 5 |

Watch out how we can write these greater than cumulative frequencies in the table.

1. Frequency in last class interval itself is greater than cumulative frequency of that class.
2. Add the frequency of the ninth class interval to the greater than cumulative frequency of the tenth class interval to give the greater than cumulative frequency of the ninth class interval
3. Successively follow the same procedure to get the remaining greater than cumulative frequencies.

The distribution that represent lower boundaries of the classes and their respective Greater than cumulative frequencies is called Greater than Cumulative Frequency Distribution .

Similarly in some cases we need to calculate less than cumulative frequencies.

For example if a teacher wants to give some extra support for those students, who got less marks than a particular level, we need to calculate the less than cumulative frequencies.

Thus the progressive total of frequencies from first class to the upper boundary of a particular class is called Less than Cumulative Frequency (L.C.F.).

| Class Interval (Marks) | UB | No. of Candidates frequency | Less than cumulative frequency |
|---|---|---|---|
| 0 – 5 | 5 | 7 | 7 |
| 5 – 10 | 10 | 10 | 10+7 = 17 |
| 10 – 15 | 15 | 15 | 15+17 = 32 |
| 15 – 20 | 20 | 8 | 8+32 = 40 |
| 20 – 25 | 25 | 3 | 3+40 = 43 |

Consider the grouped frequency distribution expressing the marks of 43 students in a unit test.

1. Frequency in first class interval is directly written into less than cumulative frequency.
2. Add the frequency of the second class interval to the less than cumulative frequency of the first class interval to give the less than cumulative frequency of the second class interval.

SCERT, TELANGANA

ఈ ఫలితాలన్నీ ఎగువ నుండి ఆయా తరగతుల వరకు ఉండే మొదటి లేదా చివరి తరగతి నుండి వరుస పౌనఃపున్యముల మొత్తమునకు సమానం. కావున వీటిని సంచిత పౌనఃపున్యము అంటారు. చివరి తరగతి నుండి ఒక నిర్దుష్ట దిగువ హద్దు కలిగిన తరగతి వరకు వచ్చే వరుస పౌనఃపున్యాల మొత్తంను అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు (అ.స.పౌ) అంటారు. దత్తాంశంలోని అన్ని తరగతులకు ఈ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఎట్లు వ్రాయవచ్చునో పరిశీలిద్దాము.

1. చివరి తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యమును ఆ తరగతి యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యంగా తీసుకొనవలెను.
2. 9వ తరగతి అంతరం యొక్క పౌనఃపున్యంను 10వ తరగతి అంతరం యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యంను కలుపగా 9వ తరగతి అంతరం యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం అవుతుంది.
3. ఇదేవిధంగా వరుసగా క్రింది తరగతులకు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యంలను రాయవచ్చును.

| తరగతులు (మార్కులు) | దిగువ హద్దు | పౌనఃపున్యం (అభ్యర్థుల సంఖ్య) | అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 0 | 25 | 25+975 = 1000 |
| 10 – 20 | 10 | 45 | 45+930 = 975 |
| 20 – 30 | 20 | 60 | 60+870 = 930 |
| 30 – 40 | 30 | 120 | 120+750 = 870 |
| 40 – 50 | 40 | 300 | 300+450 = 750 |
| 50 – 60 | 50 | 360 | 360+ 90 = 450 |
| 60 – 70 | 60 | 50 | 50 + 40 = 90 |
| 70 – 80 | 70 | 25 | 25 + 15 = 40 |
| 80 – 90 | 80 | 10 | 10 + 5 = 15 |
| 90 – 100 | 90 | 5 | 5 |

ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో తరగతుల యొక్క దిగువ హద్దులతో మరియు ఆయా తరగతుల అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములచే సూచించినట్టి విభాజనాన్ని అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం అంటారు.

ఒక విధంగా కొన్ని సందర్భాలలో ఇందుకు వ్యతిరేకంగా ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము లెక్కించవలసి వస్తుంది. ఉదాహరణకు ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతిలో ఒక స్థాయి మార్కులు కన్నా తక్కువ మార్కులు సాధించిన వారికి ప్రత్యేక తరగతులు నిర్వహించవలెనని భావిస్తే, ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం లెక్కించాలి.

మొదటి తరగతి ఎగువ హద్దు నుండి పౌనఃపున్యాలను వరుసగా తరవాత తరగతుల పౌనఃపున్యాల కలుపుగా వచ్చే విలువలను ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం (ఆ.స.పౌ) అంటారు.

| తరగతి అంతరం మార్కులు | ఎగువ హద్దు | విద్యార్థుల సంఖ్య పౌనఃపున్యం | ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|---|
| 0 – 5 | 5 | 7 | 7 |
| 5 – 10 | 10 | 10 | 10+7 = 17 |
| 10 – 15 | 15 | 15 | 15+17 = 32 |
| 15 – 20 | 20 | 8 | 8+32 = 40 |
| 20 – 25 | 25 | 3 | 3+40 = 43 |

43 మంది విద్యార్థుల మార్కులు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు ఆరోహణ సంచిత పౌన్ణపున్యములను ఎట్లు వ్రాయవలెనో పరిశీలిద్దాము.

1. మొదటి తరగతి పౌనఃపున్యము ఆ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.
2. రెండవ తరగతి పౌనఃపున్యముకు 1వ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము కలుపగా అది రెండవ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.

SCERT, TELANGANA

3. Successively follow the same procedure to get remaining less than cumulative frequencies.

The distribution that represents upper boundaries of the classes and their respective less than cumulative frequencies is called Less than Cumulative Frequency Distribution.

## Try These

1. Less than cumulative frequency is related to _______________
2. Greater than cumulative frequency is related to _______________
3. Write the Less than and Greater than cumulative frequencies for the following data

| Class Interval | 1 -10 | 11 - 20 | 21 - 30 | 31 - 40 | 41 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frequency | 4 | 7 | 12 | 5 | 2 |

4. What is total frequency and less than cumulative frequency of the last class in the above problem? What do you infer?

**Example 14:** Given below are the marks of students in a less than cumulativae frequency distribution table.. Write the frequencies of the respective classes. Also write the Greater than cumulative frequencies. How many students' marks are given in the table?

| Class Interval (Marks) | 1 -10 | 11 - 20 | 21 - 30 | 31 - 40 | 41 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| L.C.F. (No of students) | 12 | 27 | 54 | 67 | 75 |

**Solution:**

| Class Interval (Marks) | L.C.F. | Frequency (No of students) | G.C.F. |
|---|---|---|---|
| 1 – 10 | 12 | 12 | 12 + 63 = 75 |
| 11 – 20 | 27 | 27 - 12 = 15 | 15 + 48 = 63 |
| 21 – 30 | 54 | 54 - 27 = 27 | 27 + 21 = 48 |
| 31 – 40 | 67 | 67 - 54 = 13 | 13 + 8 = 21 |
| 41 – 50 | 75 | 75 - 67 = 8 | 8 |

Total number of students mentioned in the table is nothing but total of frequencies or less than cumulative frequency of the last class or greater than cumulative frequency of the first class interval, i.e. 75.

SCERT, TELANGANA

3. ఇదేవిధంగా వరుస పౌనఃపున్యములను కలుపుతూ ఆ వరుస ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయవచ్చును.

> ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు మరియు ఆయా తరగతుల ఆరోహణ సంచిత పౌన్ణపున్యాలచే సూచించినట్టి విభాజనాన్ని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

### ప్రయత్నించండి

1. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ........................తో సంబంధము కలిగి ఉంటుంది.
2. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ........................తో సంబంధము కలిగి ఉంటుంది.
3. క్రింది దత్తాంశమునకు ఆరోహణ, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలు వ్రాయండి.

| తరగతి | 1 -10 | 11 - 20 | 21 - 30 | 31 - 40 | 41 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం | 4 | 7 | 12 | 5 | 2 |

4. పై దత్తాంశములో పౌనఃపున్యముల మొత్తం (రాశుల సంఖ్య) ఎంత? చివరి తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ఎంత? నీవేమి చెప్పగలవు?

**ఉదాహరణ 14:** కొందరు విద్యార్థుల మార్కులు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము రూపంలో ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన వివిధ తరగతుల యొక్క పౌనఃపున్యములు మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి. మొత్తం విద్యార్థులు ఎంత మంది?

| తరగతులు (మార్కులు) | 1 -10 | 11 - 20 | 21 - 30 | 31 - 40 | 41 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| ఆ.సం.పౌ. (విద్యార్థుల సంఖ్య) | 12 | 27 | 54 | 67 | 75 |

**సాధన:**

| తరగతులు (మార్కులు) | ఆరోహన సంచిత పౌనఃపున్యం | పౌనఃపున్యం విద్యార్థుల సంఖ్య | అవరోహణ పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|---|
| 1 – 10 | 12 | 12 | 12 + 63 = 75 |
| 11 – 20 | 27 | 27 - 12 = 15 | 15 + 48 = 63 |
| 21 – 30 | 54 | 54 - 27 = 27 | 27 + 21 = 48 |
| 31 – 40 | 67 | 67 - 54 = 13 | 13 + 8 = 21 |
| 41 – 50 | 75 | 75 - 67 = 8 | 8 |

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య అనగా పౌనఃపున్యముల మొత్తము లేక చివరి తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం లేక మొదటి తరగతి అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము 75 కి సమానం అని గమనించండి.

SCERT TELANGANA

## Exercise - 7.2

1. Given below are the ages of 45 people in a colony.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 8 | 7 | 25 | 31 | 26 | 5 | 50 | 25 | 48 | 56 |
| 33 | 28 | 22 | 15 | 62 | 59 | 16 | 14 | 19 | 24 | 35 |
| 26 | 9 | 12 | 46 | 15 | 42 | 63 | 32 | 5 | 22 | 11 |
| 42 | 23 | 52 | 48 | 62 | 10 | 24 | 43 | 51 | 37 | 48 |
| 36 | | | | | | | | | | |

Construct grouped frequency distribution for the given data with 6 class intervals.

2. Number of students in 30 class rooms in a school are given below. Construct a frequency distribution table for the data with an exclusive class interval of 4 (students).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 30 | 24 | 18 | 21 | 24 | 32 | 34 | 22 | 20 | 22 |
| 32 | 40 | 28 | 30 | 22 | 26 | 31 | 34 | 15 | 38 | 28 |
| 20 | 16 | 15 | 20 | 24 | 30 | 25 | 18 | | | |

3. Class intervals in a grouped frequency distribution are given as 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43. (i) Write the next two class intervals. (ii) Write the class boundaries of all classes.

4. In the following grouped frequency distribution table class marks are given.

| Class Marks | 10 | 22 | 34 | 46 | 58 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequency | 6 | 14 | 20 | 21 | 9 | 5 |

(i) Construct class intervals of the data. (Exclusive class intervals)

(ii) Construct less than cumulative frequencies and

(iii) Construct greater than cumulative frequencies.

5. The marks obtained by 35 students in a test in statistics (out of 50) are as below.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 5 | 1 | 15 | 35 | 45 | 23 | 31 | 40 | 21 | 13 | 15 |
| 20 | 47 | 48 | 42 | 34 | 43 | 45 | 33 | 37 | 11 | 13 |
| 27 | 18 | 12 | 37 | 39 | 38 | 16 | 13 | 18 | 5 | 41 |
| 47 | 43 | | | | | | | | | |

Construct a frequency distribution table with equal class intervals, one of them being 10-20 (20 is not included).

SCERT TELANGANA

## అభ్యాసం - 7.2

1. ఒక కాలనీలోని 45 మంది యొక్క వయస్సులు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 8 | 7 | 25 | 31 | 26 | 5 | 50 | 25 | 48 | 56 |
| 33 | 28 | 22 | 15 | 62 | 59 | 16 | 14 | 19 | 24 | 35 |
| 26 | 9 | 12 | 46 | 15 | 42 | 63 | 32 | 5 | 22 | 11 |
| 42 | 23 | 52 | 48 | 62 | 10 | 24 | 43 | 51 | 37 | 48 |
| 36 | | | | | | | | | | |

6- తరగతులు ఉండునట్లుగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేయండి.

2. ఒక పాఠశాలలోని 30 తరగతులలో విద్యార్థుల సంఖ్యలు ఇవ్వబడ్డాయి. తరగతి పొడవు 4 (విద్యార్థులు) ఉండునట్లుగా ఈ దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 30 | 24 | 18 | 21 | 24 | 32 | 34 | 22 | 20 | 22 |
| 32 | 40 | 28 | 30 | 22 | 26 | 31 | 34 | 15 | 38 | 28 |
| 20 | 16 | 15 | 20 | 24 | 30 | 25 | 18 | | | |

3. ఒక వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడిన తరగతులు. 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43. అయిన (i) తరువాత రెండు తరగతులను వ్రాయండి. (ii) తరగతి హద్దులు వ్రాయండి.

4. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు తరగతి మార్కులు (మధ్య విలువలు) ఇవ్వబడ్డాయి.

| తరగతి మార్కులు | 10 | 22 | 34 | 46 | 58 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం | 6 | 14 | 20 | 21 | 9 | 5 |

(i) దత్తాంశమునకు మినహాయింపు తరగతులను నిర్మించండి.
(ii) ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయండి.
(iii) అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయండి.

5. 35 మంది విద్యార్థులకు సాంఖ్యకశాస్త్ర పరీక్షలో 50 మార్కులకు గాను సాధించిన మార్కులు కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 1 | 15 | 35 | 45 | 23 | 31 | 40 | 21 | 13 | 15 |
| 20 | 47 | 48 | 42 | 34 | 43 | 45 | 33 | 37 | 11 | 13 |
| 27 | 18 | 12 | 37 | 39 | 38 | 16 | 13 | 18 | 5 | 41 |
| 47 | 43 | | | | | | | | | |

పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి. విభాజన చేయు తరగతులలో ఒకటి 10-20 ఉండవలెను. (20 ఆ తరగతికి చెందకూడదు)

SCERT, TELANGANA

6. Construct the class boundaries for the following frequency distribution table. Also construct less than cumulative and greater than cumulative frequency tables.

| Ages | 1 - 3 | 4 - 6 | 7 - 9 | 10 - 12 | 13 - 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of children | 10 | 12 | 15 | 13 | 9 |

7. Cumulative frequency table is given below. Which type of cumulative frequency is given. Try to build the frequencies of respective class intervals.

| Runs | 0 - 10 | 10 - 20 | 20 - 30 | 30 - 40 | 40 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of cricketers | 3 | 8 | 19 | 25 | 30 |

8. Number of readers in a library are given below. Write the frequency of respective classes. Also write the less than cumulative fequency table.

| Number of books | 1-10 | 11-20 | 21-30 | 31-40 | 41-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Greater than Cumulative frequency | 42 | 36 | 23 | 14 | 6 |

## 7.4 Graphical Representation of Data

Frequency distribution is an organised data with observations or class intervals with frequencies. We have already studied how to represent of discrete series in the form of pictographs, bar graphs, double bar graph and pie charts.

Let us recall bar graph first.

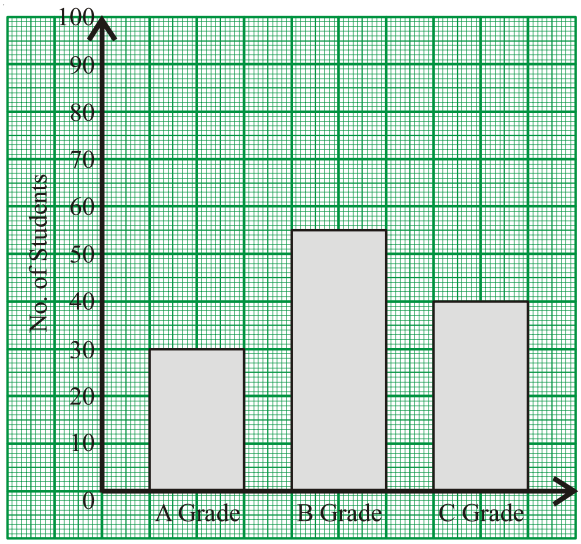
### 7.4.1 Bar Graph

A display of information using vertical or horizontal bars of uniform width and different lengths being proportional to the respective values is called a bar graph.

Let us see what a bar graph can represent. Study the following vertical bar graph.

(i) What does this bar graph represent?

(ii) How many students secured A, B or C grades?




Acheivement in exam

SCERT, TELANGANA

6. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు తరగతి హద్దులు వ్రాయండి. ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు కనుగొనండి.

| వయస్సు | 1 - 3 | 4 - 6 | 7 - 9 | 10 - 12 | 13 - 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| పిల్లల సంఖ్య | 10 | 12 | 15 | 13 | 9 |

7. క్రింది విభాజన పట్టికలో సంచిత పౌనఃపున్యములు ఇవ్వబడ్డాయి. ఎటువంటి సంచిత పౌనఃపున్యమో గుర్తించండి. పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి.

| పరుగులు | 0 - 10 | 10 - 20 | 20 - 30 | 30 - 40 | 40 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ సంఖ్య | 3 | 8 | 19 | 25 | 30 |

8. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు ఇవ్వబడ్డాయి. అయితే అన్ని తరగతులకు పౌనఃపున్యములు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి.

| పుస్తకాల సంఖ్య | 1-10 | 11-20 | 21-30 | 31-40 | 41-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము | 42 | 36 | 23 | 14 | 6 |

## 7.4 రేఖాచిత్రాలతో దత్తాంశ ప్రదర్శన

ఒక దత్తాంశములోని రాశులను పౌనఃపున్యములతో గానీ లేక తరగతులను పౌనఃపున్యములతో గాని అమర్చి వ్రాసిన అమరికను పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక అంటారు.

అవిభాజ్యత దత్తాంశమును పటచిత్రాలు, కమ్మీ రేఖాచిత్రము, రెండు కమ్మీల రేఖాచిత్రము, పై రేఖాచిత్రములుగా చూపుట గురించి క్రింది తరగతులలో చర్చించి ఉన్నాము.

ఇదేవిధంగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము సోపాన చిత్రమును గీయడం గురించి చర్చిద్దాం. ముందుగా కమ్మీ రేఖాచిత్రాల గురించి పునర్విమర్శ చేసుకుందాం.

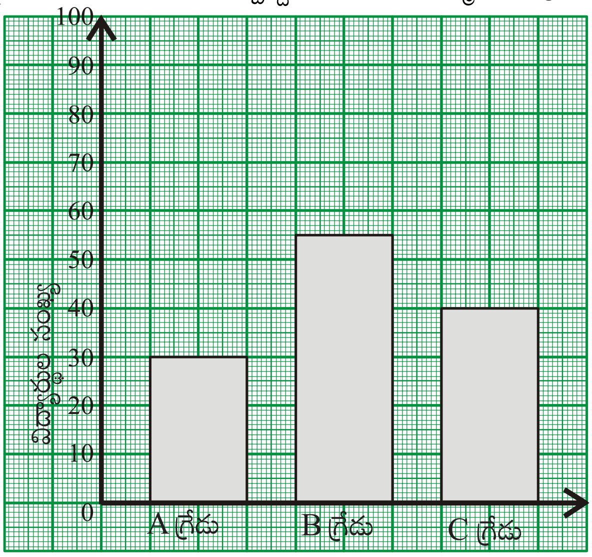
### 7.4.1 కమ్మీ రేఖాచిత్రము

సమాన మధ్యదూరములు కలిగి, సమాన వెడల్పుల, పౌనఃపున్యములకు అనుపాతంలో పొడవులు గల కమ్మీలతో దత్తాంశమును చూపు రేఖా చిత్రమును కమ్మీ రేఖాచిత్రము అంటారు.

క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములను చర్చించడం ద్వారా కమ్మీ రేఖాచిత్రములు యొక్క ఏయే అంశములను గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చునో పునర్విమర్శ చేయండి.

(i) ప్రక్క కమ్మీ రేఖాచిత్రము ప్రకటించు వివరాలేవి?

(ii) ఎంతెంత మంది విద్యార్థులు A, B లేక C గ్రేడులు సాధించారు?

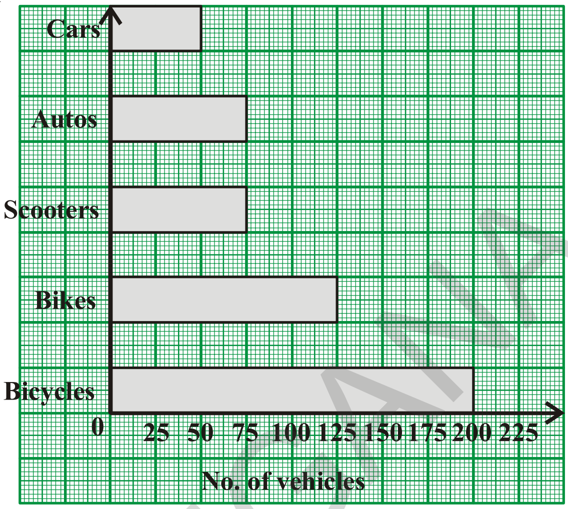



పరీక్షలో సాధన

SCERT TELANGANA

(iii) Which grade is secured by more number of the students?

(iv) How many students are there in the class?




Similarly in some graphs bars may be drawn horizontally. For example observe the second bar graph. It gives the data about number of vehicles in a village Sangam in Nellore district.

## Think, Discuss and Write

1. All the bars (or rectangles) in a bar graph have ____________________.
   (a) same length (b) same width (c) same area (d) equal value
2. Does the length of each bar depend on the lengths of other bars in the graphs?
3. Does the variation in the value of a bar affect the values of other bars in the same graph?
4. Where do we use vertical bar graphs and horizontal bar graphs.

## 7.5 Graphical Representation of Grouped Frequency Distribution

Let us learn the graphical representation of grouped frequency distributions of continuous series i.e. with exclusive class intervals. First one of its kind is histogram.

### 7.5.1 Histogram

#### 7.5.1.1 Interpretation of Histogram

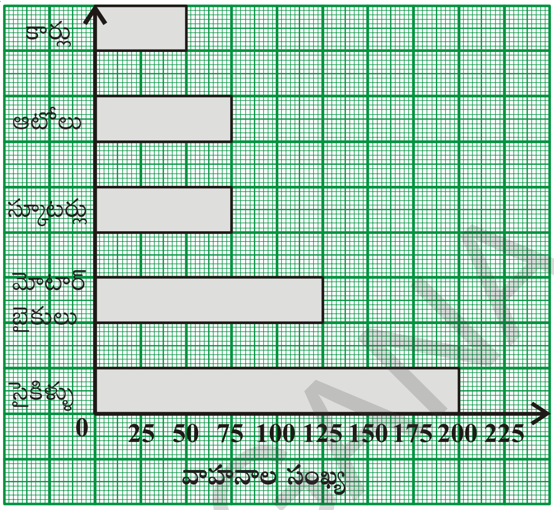
Observe the following histogram for the given grouped frequency distribution and answer the given questions.

SCERT, TELANGANA

(iii) ఎక్కువ మంది సాధించిన గ్రేడు ఏమిటి?

(iv) తరగతిలో ఎంత మంది విద్యార్థులు కలరు?

ఇదేవిధంగా కొన్ని సందర్భములలో అడ్డు కమ్మీ రేఖా చిత్రములు కూడా ఉపయోగిస్తాం. ఉదాహరణకు ప్రక్క పటంలో అడ్డు కమ్మీల ద్వారా నెల్లూరు జిల్లాలోని సంగం గ్రామంలో 2010లో గల వాహనాల వివరాలు తెలుపబడ్డాయి.




### ఆలోచించండి, చర్చించి, రాయండి

1. ఒక కమ్మీ రేఖాచిత్రంలో అన్ని కమ్మీల ______________________

   (a) పొడవులు సమానం (b) వెడల్పులు సమానం (c) వైశాల్యములు సమానం (d) విలువలు సమానం

2. ఒక కమ్మీ రేఖా చిత్రంలో ప్రతి కమ్మీ యొక్క పొడవు మిగిలిన కమ్మీల పొడవుపై ఆధారపడి ఉంటుందా?

3. ఏదైనా ఒక కమ్మీలో చేసిన మార్పు మిగిలిన కమ్మీలలో మార్పును కలుగజేస్తుందా?

4. ఏయే సందర్భాలలో నిలువు కమ్మీ లేక అడ్డు కమ్మీ రేఖ చిత్రాలను ఉపయోగిస్తాము?

## 7.5 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు రేఖా చిత్రములు

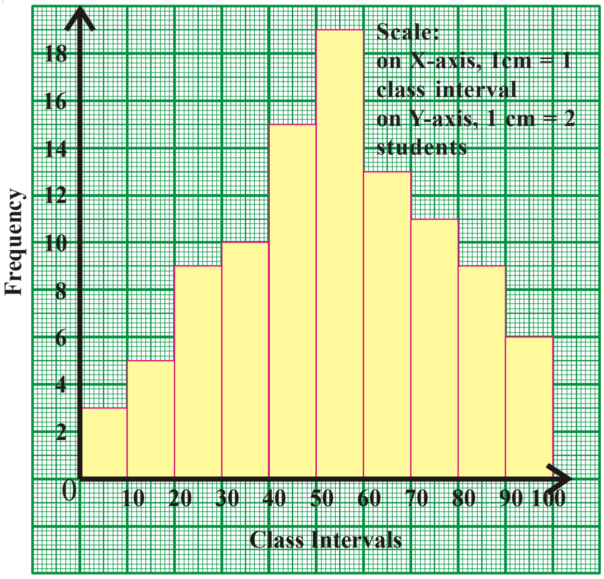
అవిభాజ్య శ్రేఢి (మినహాయింపు తరగతులు) గల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీయు రేఖా చిత్రములలో మొదటిది సోపాన రేఖాచిత్రము.

### 7.5.1 సోపాన రేఖా చిత్రము

#### 7.5.1.1 సోపాన రేఖా చిత్రముపై అవగాహన

ఇవ్వబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖాచిత్రము గీయబడినది. పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాబట్టండి.

SCERT, TELANGANA




| Class Interval (Marks) | Frequency (No of Students) |
|---|---|
| 0 – 10 | 3 |
| 10 – 20 | 5 |
| 20 – 30 | 9 |
| 30 – 40 | 10 |
| 40 – 50 | 15 |
| 50 – 60 | 19 |
| 60 – 70 | 13 |
| 70 – 80 | 11 |
| 80 – 90 | 9 |
| 90 -100 | 6 |

(i) How many bars are there in the graph?

(ii) In what proportion the height of the bars are drawn?

(iii) Width of all bars is same. What may be the reason?

(iv) Shall we interchange any two bars of the graph?

From the graph you might have understood that

(i) There are 10 bars representing frequencies of 10 class intervals.

(ii) Heights of the bars are proportional to the frequencies,

(iii) Width of bars is same because width represents the class interval. Particularly in this example length of all class intervals is same.

(iv) As it is representing a continuous series, (with exclusive class intervals), we can't interchange any two bars.

### Try These

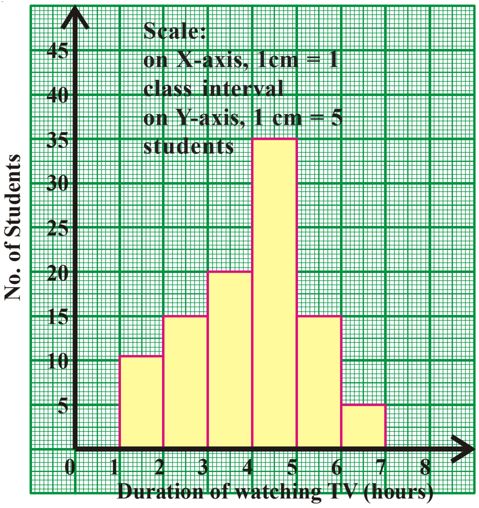
Observe the adjacent histogram and answer the following questions-

(i) What information is being represented in the histogram?

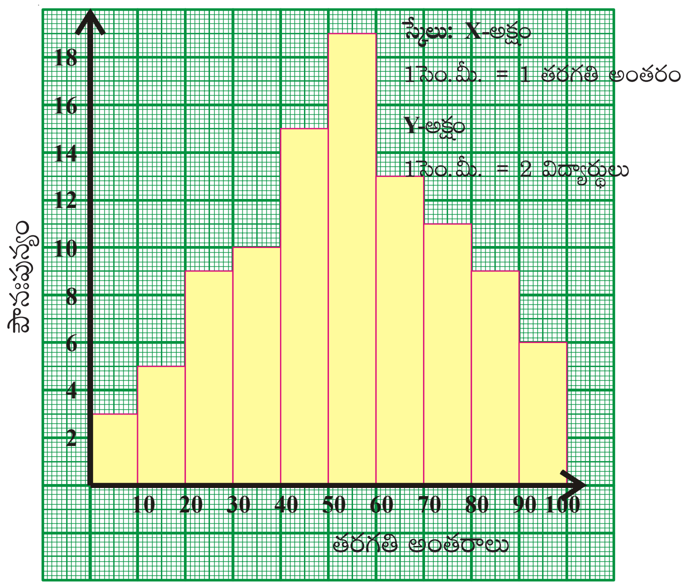
(ii) Which group contains maximum number of students?

(iii) How many students watch TV for 5 hours or more?

(iv) How many students are surveyed in total?




SCERT, TELANGANA




| తరగతి అంతరాలు (మార్కులు) | పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య) |
|---|---|
| 0 – 10 | 3 |
| 10 – 20 | 5 |
| 20 – 30 | 9 |
| 30 – 40 | 10 |
| 40 – 50 | 15 |
| 50 – 60 | 19 |
| 60 – 70 | 13 |
| 70 – 80 | 11 |
| 80 – 90 | 9 |
| 90 -100 | 6 |

(i) రేఖా చిత్రములో ఎన్ని తరగతి అంతరాలు ఉన్నవి ?

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులు దేనికి అనుపాతములో ఉన్నవి?

(iii) అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానం. కారణమేమి?

(iv) రేఖా చిత్రములోని ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు అయినా పరస్పర స్థానభ్రంశం చేయవచ్చునా?

పై రేఖాచిత్రము నుండి నీవు గ్రహించినది:

(i) పౌనఃపున్య విభాజనములోని 10 తరగతులకు రేఖా చిత్రములో 10 దీర్ఘచతురస్రాలు ఉన్నవి.

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క పొడవులు, దీర్ఘచతురస్రాలచే సూచించబడు పౌనఃపున్యములకు అనుపాతములో ఉన్నవి.

(iii) అన్ని తరగతుల అంతరములు సమానములు కావున వాటిని సూచించు దీర్ఘచతురస్రాలు వెడల్పులు సమానములు.

(iv) దత్తాంశము అవిభాజ్య శ్రేఢి కావున వరుస తరగతులు అదే వరుసలో దీర్ఘచతురస్రాలను సూచిస్తాయి. కావున ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలను అయినా పరస్పర స్థానభ్రంశం చేయరాదు.

### ప్రయత్నించండి

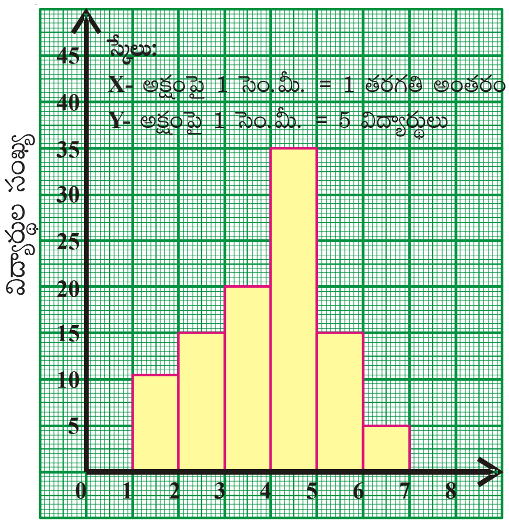
ప్రక్క సోపాన రేఖా చిత్రమును పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

(i) ఈ సోపాన రేఖా చిత్రం ఏ సమాచారంను సూచిస్తున్నది?

(ii) ఏ తరగతి నందు గరిష్ట సంఖ్యలో విద్యార్థులు కలరు?

(iii) ఎంత మంది మంది విద్యార్థులు 5 గంటలు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సమయం TV ను వీక్షిస్తున్నారు?

(iv) ఎంత మంది విద్యార్థులపై సర్వే నిర్వహించబడినది?




టి.వి. ని చూసే సమయం

SCERT, TELANGANA

### 7.5.1.2 Construction of a Histogram

| Class Interval (Age group) | Frequency (No of viewers) | Class Intervals |
|---|---|---|
| 11 – 20 | 10 | 10.5 – 20.5 |
| 21 – 30 | 15 | 20.5 – 30.5 |
| 31 – 40 | 25 | 30.5 – 40.5 |
| 41 – 50 | 30 | 40.5 – 50.5 |
| 51 – 60 | 20 | 50.5 – 60.5 |
| 61 – 70 | 5 | 60.5 – 70.5 |
| Limits | | Boundaries |

A TV channel wants to find which age group of people are watching their channel. They made a survey in an apartment. Represent the data in the form of a histogram.

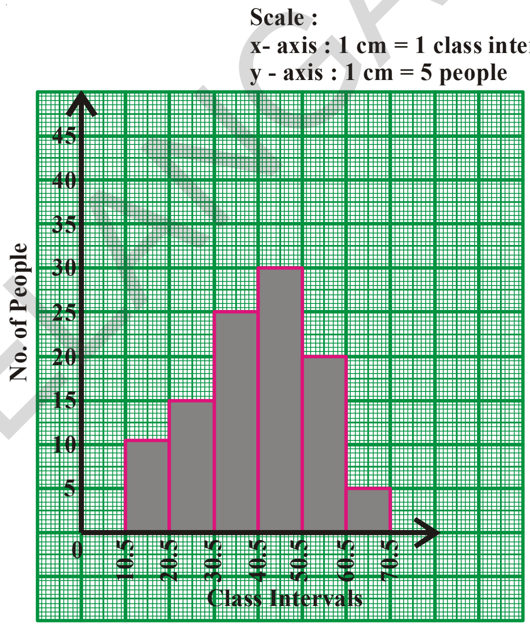
Step 1 : If the class intervals given are inclusive (limits) convert them into the exclusive form (boundaries) since the histogram has to be drawn for a continuous series.

Step 2 : Choose a suitable scale on the X-axis and mark the class intervals on it.

Step 3 : Choose a suitable scale on the Y-axis and mark the frequencies on it. (The scales on both the axes may not be same)

Scale : X-axis 1 cm = one class interval Y-axis 1 cm = 5 people

Step 4 : Draw rectangles with class intervals as bases and the corresponding frequencies as the corresponding heights.




### 7.5.1.3 Histogram with Varying Base Widths

Consider the following frequency distribution table.

| Category | Class Intervals (Marks) | Percentage of Students |
|---|---|---|
| Failed | 0-35 | 28 |
| Third Class | 35-50 | 12 |
| Second Class | 50-60 | 16 |
| First Class | 60-100 | 44 |

You have noticed that for different categories of children performance the range of marks for each category is not uniform. If we observe the table, the students who secured first class is 44 % which spreads over the class length 40 (60 to 100). Where as the student who have secured second class is 16% of the students spread over the class length 10 (50 to 60) only. Therefore to represent the above distribution table into histogram we have take the widths of class intervals also into account.

SCERT, TELANGANA

### 7.5.1.2 సోపాన రేఖాచిత్ర నిర్మాణము

ఒక TV కేంద్రం వారు వారి ప్రసారములను ఎంత మంది తిలకిస్తున్నారో తెలుసుకోవాలని అనుకొన్నారు. ఒక అపార్టుమెంటులో చేసిన సర్వే వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రం నిర్మించుదాం.

| తరగతి అంతరం (వయస్సు) | పౌనఃపున్యం (వీక్షకుల సంఖ్య) | తరగతి అంతరం |
|---|---|---|
| 11 – 20 | 10 | 10.5 – 20.5 |
| 21 – 30 | 15 | 20.5 – 30.5 |
| 31 – 40 | 25 | 30.5 – 40.5 |
| 41 – 50 | 30 | 40.5 – 50.5 |
| 51 – 60 | 20 | 50.5 – 60.5 |
| 61 – 70 | 5 | 60.5 – 70.5 |
| అవధులు | | హద్దులు |

సోపానం 1: ఇచ్చిన దత్తాంశంలో సమ్మిళిత తరగతులు (అవధులు) ఉంటే వాటికి మినహాయింపు తరగతులు (హద్దులు) వ్రాయవలెను.

సోపానం 2: సరియైన సూచికను తీసుకొని X-అక్షంపై తరగతి అంతరాలను గుర్తించవలెను.

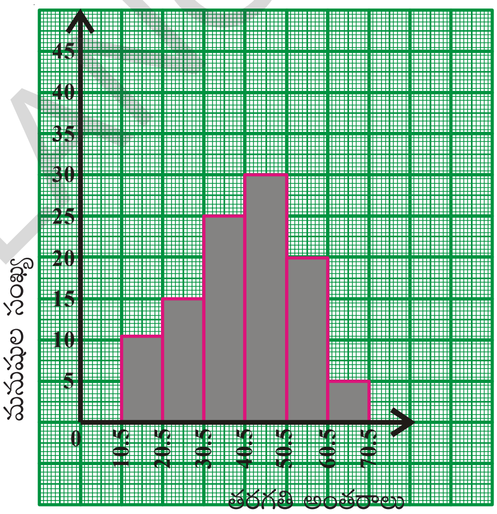
సోపానం 3: సరైన సూచికను తీసుకొని Y-అక్షంపై పౌనఃపున్యములను గుర్తించవలెను.

సూచిక : X-అక్షం 1 సెం.మీ. = 1 తరగతి Y-అక్షం 1 సెం.మీ = 5 మంది

సోపానం 4: తరగతి అంతరం వెడల్పుతో వరుస పౌనఃపున్యములకు అనుపాత పొడవులతో దీర్ఘ చతురస్రాలను నిర్మించవలెను.

**స్కేలు:** X-అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 1 తరగతి అంతరం

Y-అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 5గురు మనుషులు




### 7.5.1.3 విభిన్న వెడల్పులు గల భూములతో సోపాన రేఖాచిత్రము

ఒక పాఠశాలలోని ఎస్.ఎస్.సి. విద్యార్థుల ఉత్తీర్ణతా వివరాలు క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

| కేటగిరీ | తరగతి అంతరాలు (మార్కులు) | విద్యార్థుల సంఖ్య శాతం |
|---|---|---|
| ఉత్తీర్ణుకాని వారు | 0-35 | 28 |
| తృతీయ శ్రేణి విద్యార్థులు | 35-50 | 12 |
| ద్వితీయ శ్రేణి విద్యార్థులు | 50-60 | 16 |
| తృతీయ శ్రేణి విద్యార్థులు | 60-100 | 44 |

పట్టికలో దత్తాంశమును పరిశీలిస్తే తరగతి అంతరములు వేరువేరుగా ఉన్నవి. మొదటి శ్రేణి విద్యార్థులు 44% శాతం అయినను వారి విస్తరణ 40 (60 నుండి 100 వరకు) మాత్రమే. ద్వితీయ శ్రేణి విద్యార్థులు 16% అయినను వారి విస్తరణ 10 (50 నుండి 60 వరకు). కావున ఇటువంటి విస్తరణలకు పౌనఃపున్య సోపాన రేఖాచిత్రం గీయునప్పుడు తరగతి అంతరముల వెడల్పులు పరిగణలోనికి తీసుకోవలెను.

SCERT, TELANGANA

In such cases frequency per unit class length (frequency density) has to be calculated and histogram has to be constructed with respective heights. Any class interval may be taken as unit class interval for calculating frequency density. For convenience least class length is taken as unit class length.

$\therefore$ Modified length of any rectangle is proportional to the corresponding frequency

$$\text{Density} = \frac{\text{Frequency of class}}{\text{Length of that class}} \times \text{Least class length}$$

| Class intervals (Marks) | Percentage of students | Class length | Length of the rectangle |
|---|---|---|---|
| 0 – 35 | 28 | 35 | $\frac{28}{35} \times 10 = 8$ |
| 35 – 50 | 12 | 15 | $\frac{12}{15} \times 10 = 8$ |
| 50 – 60 | 16 | 10 | $\frac{16}{10} \times 10 = 16$ |
| 60 – 100 | 44 | 40 | $\frac{44}{40} \times 10 = 11$ |

With the modified lengths histogram has to be constructed as in the previous example.

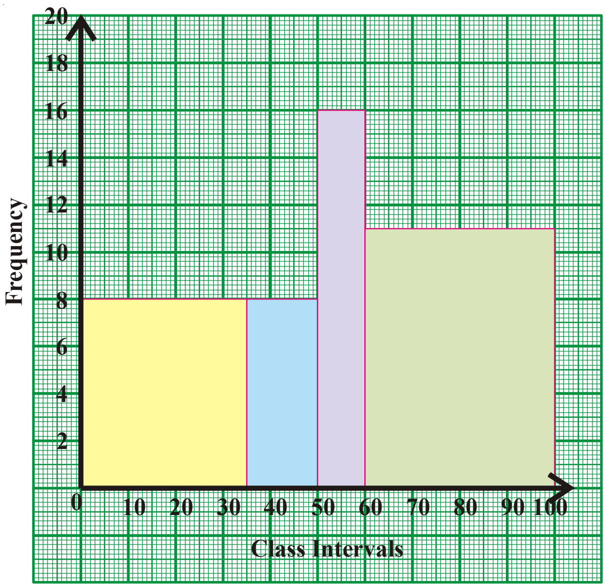
Step 1: Choose a suitable scale on the X-axis and mark the class intervals on it.

Step 2: Choose a suitable scale on the Y-axis and mark the frequencies on it. (The scales on both the axes may not be same)

Scale: X-axis 1 cm = 1 Min. class interval

Y-axis 1 cm = 2 %

Step 3: Draw rectangles with class intervals as bases and the corresponding frequencies as the heights.




SCERT, TELANGANA

రెండు రాశులను పోల్చుటకు వాని మధ్య కనీసం ఒక లక్షణంలో సారూప్యత అవసరం. అందువల్ల 'పౌనఃపున్య సాంద్రత' అనగా ప్రమాణ తరగతి అంతరమునకు పౌనఃపున్యమును లెక్కించి వానితో సోపాన చిత్రమును నిర్మించుట సరియైనది. అనగా సోపాన చిత్రంలోని ఒక్కొక్క సోపానం పొడవు సంబంధిత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్య సాంద్రతకు అనుపాతంలో ఉండవలెను.

$$\text{పౌనఃపున్య సాంద్రత} = \frac{\text{ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం}}{\text{ఆ తరగతి పొడవు}} \times \text{దత్తాంశములో తరగతుల కనిష్ఠ పొడవు}$$

| తరగతి (మార్కులు) | పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల శాతం) | తరగతి పొడవు | దీర్ఘచతురస్రం పొడవు (పౌనఃపున్య సాంద్రత) |
|---|---|---|---|
| 0 – 35 | 28 | 35 | $\frac{28}{35} \times 10 = 8$ |
| 35 – 50 | 12 | 15 | $\frac{12}{15} \times 10 = 8$ |
| 50 – 60 | 16 | 10 | $\frac{16}{10} \times 10 = 16$ |
| 60 – 100 | 44 | 40 | $\frac{44}{40} \times 10 = 11$ |

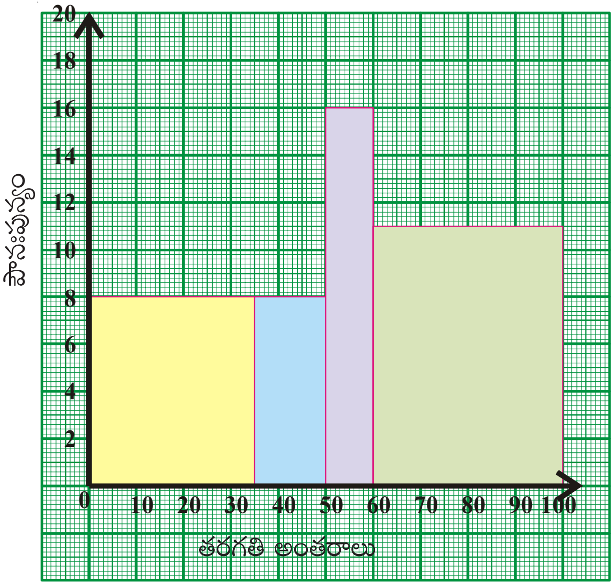
లెక్కించిన పౌనఃపున్యంలతో ముందు ఉదాహరణలో వలె సోపాన చిత్రమును నిర్మించవలెను.

సోపానం 1: సరైన సూచికను గుర్తించి X-అక్షంపై తరగతి అంతరాలు గుర్తించండి.

సోపానం 2: సరైన సూచికను గుర్తించి Y- అక్షంపై పౌనఃపున్యంలు గుర్తించండి.

**స్కేలు:** X-అక్షం 1 సెం.మీ. = కనిష్ఠ తరగతి అంతరం, Y-అక్షం 1 సెం.మీ. = 2%

సోపానం 3: వివిధ తరగతి అంతరాలు భూములుగా (వెడల్పులుగా), సంబంధిత పౌనఃపున్య సాంద్రతలు పొడవులుగా దీర్ఘచతురస్రాలు నిర్మించండి.




SCERT, TELANGANA

### 7.5.1.4 Histogram for grouped frequency distribution with class marks

**Example 15:** Construct a histogram from the following distribution of total marks obtained by 65 students of class VIII.

| Marks (Mid points) | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of students | 8 | 10 | 25 | 12 | 7 | 3 |

**Solution:** As class marks (mid points) are given, class intervals are to be calculated from the class marks.

Step 1: Find the difference between two successive classes. h = 160 -150 = 10.

(Find whether difference between every two successive classes is same)

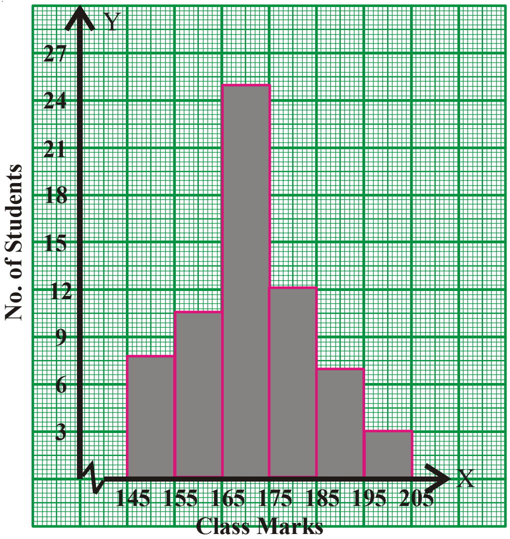
Step 2: Calculate lower and upper boundaries of every class with class mark '$x$', as $x - \frac{h}{2}$ and $x + \frac{h}{2}$.

Step 3: Choose a suitable scale. X-axis 1 cm = one class interval

Y-axis 1cm = 4 students

Step 4: Draw rectangles with class intervals as bases and the corresponding frequencies as the heights.

| Class Marks ($x$) | Class Intervals | Frequency (No of students) |
|---|---|---|
| 150 | 145 – 155 | 8 |
| 160 | 155 – 165 | 10 |
| 170 | 165 – 175 | 25 |
| 180 | 175 – 185 | 12 |
| 190 | 185 – 195 | 7 |
| 200 | 195 – 205 | 3 |




**Think, Discuss and Write**

1. Class boundaries are taken on the 'X'- axis. Why not class limits?
2. Which value decides the width of each rectangle in the histogram?
3. What does the sum of heights of all rectangles represent?

SCERT, TELANGANA

### 7.5.1.4 తరగతి మధ్య విలువలతో ఇవ్వబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన చిత్రము

**ఉదాహరణ 15:** 8వ తరగతిలోని 65 మంది విద్యార్థులు పొందిన మొత్తం మార్కుల వివరాలు క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి. సోపాన చిత్రం నిర్మించండి.

| తరగతి (మధ్య విలువలు) | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య) | 8 | 10 | 25 | 12 | 7 | 3 |

**సాధన:** ఇవ్వబడిన తరగతి మార్కు (మధ్య విలువ)ల నుండి తరగతులను తయారు చేసుకొనవలెను.

సోపానం 1: రెండు వరుస తరగతుల మధ్య విలువల మధ్య భేదం లెక్కించవలెను. $h = 160 - 150 = 10$.

(ప్రతి రెండు వరుస తరగతుల మధ్య భేదం సమానమేనా?)

సోపానం 2: తరగతుల యొక్క దిగువ, ఎగువ హద్దులను తరగతి మధ్య విలువ $x$ గా తీసుకొని $x - \frac{h}{2}$ నుండి $x + \frac{h}{2}$ లోపు నిర్ణయించవలెను.

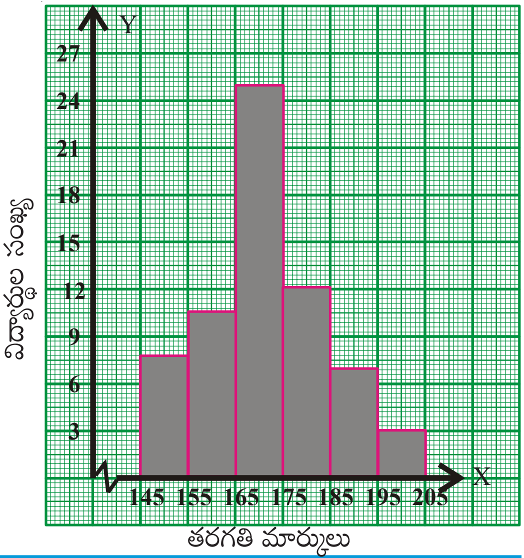
సోపానం 3: సరైన సూచికను ఎన్నుకొనవలెను.

X- అక్షం 1 సెం.మీ. = 1 తరగతి అంతరం

Y- అక్షం 1 సెం.మీ. = 4 విద్యార్థులు

సోపానం 4: తరగతి అంతరాలను వెడల్పులుగా, పౌనఃపున్యములు పొడవులుగా వరుస సోపానాలు నిర్మించవలెను.

| తరగతి మార్కులు ($x$) | తరగతి అంతరాలు | పౌనఃపున్యం విద్యార్థుల సంఖ్య |
|---|---|---|
| 150 | 145 – 155 | 8 |
| 160 | 155 – 165 | 10 |
| 170 | 165 – 175 | 25 |
| 180 | 175 – 185 | 12 |
| 190 | 185 – 195 | 7 |
| 200 | 195 – 205 | 3 |




**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి**

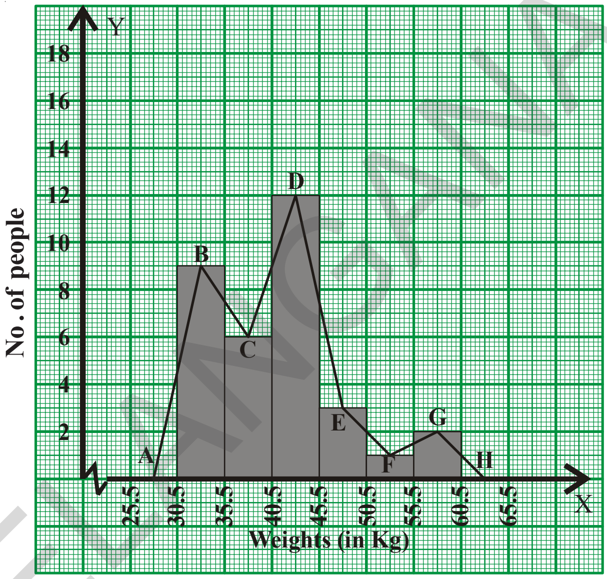
1. సోపాన చిత్రంలో X– అక్షంపై తరగతి యొక్క హద్దులు గుర్తిస్తాం. కాని అవధులు కాదు. ఎందువల్ల?
2. సోపాన చిత్రంలో దీర్ఘచతురస్రాలు వెడల్పులను నిర్ణయించే అంశమేది?
3. అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల పొడవుల మొత్తం దేనిని సూచిస్తుంది?

SCERT, TELANGANA

## 7.5.2 Frequency Polygon

### 7.5.2.1 Interpretation of Frequency Polygon

Frequency polygon is another way of representing a quantitative data and its frequencies. Let us see the advantages of this graph.




Consider the adjacent histogram representing weights of 33 people in a company. Let us join the mid-points of the upper sides of the adjacent rectangles of this histogram by means of line segments. Let us call these mid-points B,C,D,E,F and G. When joined by line segments, we obtain the figure BCDEFG. To complete the polygon, we assume that there is a class interval with frequency zero before 30.5-35.5 and one after 55.5 - 60.5, and their mid-points are A and H, respectively. ABCDEFGH is the frequency polygon.

Although, there exists no class preceding the lowest class and no class succeeding the highest class, addition of the two class intervals with zero frequency enables us to make the area of the frequency polygon the same as the area of the histogram. Why is this so?

**Think, Discuss and Write**

1. How do we complete the polygon when there is no class preceding the first class?
2. The area of histogram of a data and its frequency polygon are same. Reason how.
3. Is it necessary to draw histogram for drawing a frequency polygon?
4. Shall we draw a frequency polygon for frequency distribution of discrete series?

### 7.5.2.2 Construction of a Frequency Polygon

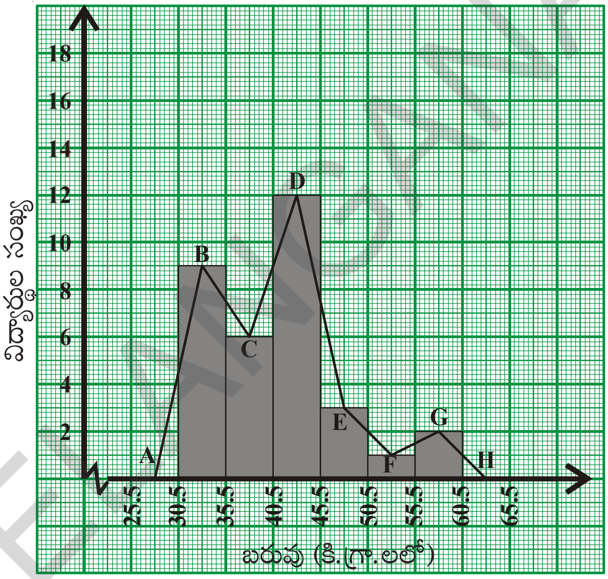
Consider the marks, (out of 25), obtained by 45 students of a class in a test.Draw a frequency polygon corresponding to this frequency distribution table.

## 7.5.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి

### 7.5.2.1 పౌనఃపున్య బహుభుజిపై వ్యాఖ్యానించుట

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును సూచించుటకు సోపాన రేఖాచిత్రము కంటే మెరుగైన రేఖా పటము పౌనఃపున్య బహుభుజి. ప్రక్క సోపాన చిత్రములో ఒక తరగతిలోని 33 మంది విద్యార్థుల బరువుల వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

సోపానముల యొక్క పై వెడల్పు యొక్క మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F, G లు గుర్తించి రేఖా ఖండములతో కలుపబడ్డాయి. ఇచ్చిన తరగతులకు ముందు ఒకటి, తరువాత ఒకటి తరగతులను 'O' పౌనఃపున్యముతో ఊహించి వాని మధ్య బిందువులు కలిపితే BCDEFG పటము వస్తుంది. బహుభుజి పూర్తి చేయడానికి 30.5 - 35.5 తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యం, 55.5 - 60.5 తరగతి తరవాత తరగతి పౌనఃపున్యం సున్నాలుగా తీసుకొని వాటిని A, H బిందువులుగా గుర్తించి కలుపుతాం. అప్పుడు ABCDEFGH పౌనఃపున్య బహుభుజి వస్తుంది.




పరిశీలించినచో సోపాన చిత్ర వైశాల్యము బహుభుజి వైశాల్యము సమానములని తెలియుచున్నది కదా!

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి**

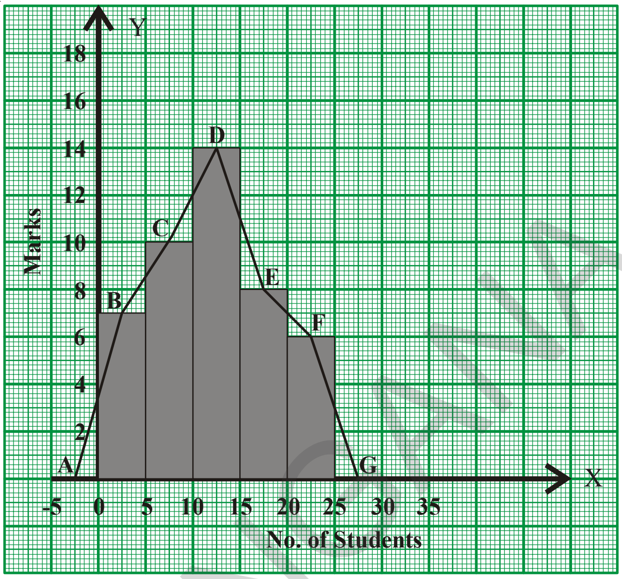
1. దత్తాంశములోని మొదటి తరగతికి ముందు తరగతి లేనిచో బహుభుజిని ఎలా పూరించగలవు?
2. ఒక దత్తాంశము యొక్క సోపాన రేఖా చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానము. ఎలా?
3. పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణమునకు ముందుగా సోపాన చిత్రము నిర్మించవలెనా?
4. విభాజిత శ్రేఢి/ అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు 'పౌనఃపున్య బహుభుజి'ని గీయగలమా?

### 7.5.2.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణము

ఒక తరగతిలోని 45 మంది విద్యార్థులు ఒక పరీక్షలో సాధించిన మార్కులు (గరిష్ఠం 25) క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాము.

SCERT, TELANGANA

| Class Interval (Marks) | Frequency (No. of students) | Mid Values |
|---|---|---|
| 0-5 | 7 | 2.5 |
| 5-10 | 10 | 7.5 |
| 10-15 | 14 | 12.5 |
| 15-20 | 8 | 17.5 |
| 20-25 | 6 | 22.5 |
| Total | 45 | |




**Steps of construction**

Step 1: Calculate the mid points of every class interval given in the data.

Step 2: Draw a histogram for this data and mark the mid-points of the tops of the rectangles (here in this example B, C, D, E, F respectively).

Step 3: Join the mid points successively.

Step 4: Assume a class interval before the first class and another after the last class. Also calculate their mid values (A and H) and mark on the axis. (Here, the first class is $0 – 5$. So, to find the class preceding 0 - 5, we extend the horizontal axis in the negative direction and find the mid-point of the imaginary class-interval $-5 – 0$)

Step 5: Join the first end point B to A and last end point F to G which completes the frequency polygon.

Frequency polygon can also be drawn independently without drawing histogram. For this, we require the midpoints of the class interval of the data.

## Do These

1. Construct the frequency polygons of the following frequency distributions.

(i) Runs scored by students of a class in a friendly cricket match.

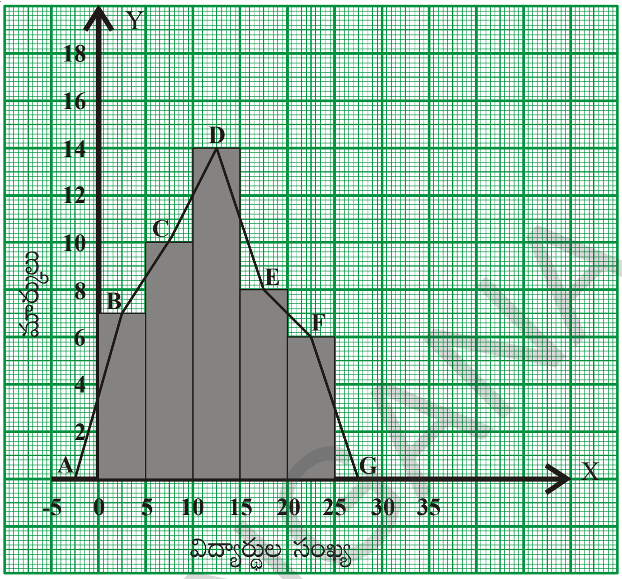
| Runs scored | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of students | 3 | 5 | 8 | 4 | 2 |

(ii) Sale of tickets for drama in an auditorium.

| Rate of ticket | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of tickets sold | 50 | 30 | 60 | 30 | 20 |

SCERT, TELANGANA

| తరగతి అంతరాలు (మార్కులు) | పౌనఃపున్యము (విద్యార్థుల సంఖ్య) | మధ్య విలువలు |
|---|---|---|
| 0-5 | 7 | 2.5 |
| 5-10 | 10 | 7.5 |
| 10-15 | 14 | 12.5 |
| 15-20 | 8 | 17.5 |
| 20-25 | 6 | 22.5 |
| మొత్తం | 45 | |




**నిర్మాణ సోపానములు**

సోపానం 1: తరగతి మధ్య విలువలను గణించవలెను.

సోపానం 2: దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించి ప్రతి సోపానము యొక్క పై వెడల్పుల మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F లను గుర్తించి కలుపవలెను.

సోపానం 3: తరగతుల యొక్క ముందు తరగతి, తరువాత తరగతులను ఊహించి వాని పౌనఃపున్యములు '0' గా తీసుకొని తరగతి మధ్యవిలువలు గుర్తించవలెను.

సోపానం 4: మొదటి తరగతికి ముందు తరగతిని, చివరి తరగతికి తరువాత తరగతులను ఊహించుకోండి. అంటే 0-5 తరగతికి ముందు తరగతి "X-అక్షమునకు ఋణాత్మక దిశలో –5 – 0 గా తీసుకోండి. అదే విధంగా 20-25 తరగతికి తరవాత తరగతి 25-30 గా తీసుకోండి. వీటి మధ్య విలువలను A, G లుగా గుర్తించండి.

సోపానం 5: ఇప్పుడు B బిందువును A తోనూ, F బిందువును G తోనూ కలిపితే పౌనఃపున్య బహుభుజి ఏర్పడుతుంది.

పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించుటకు ప్రతిసారి సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించనవసరం లేదు. దీనికి బదులుగా తరగతి మధ్య విలువలను, పౌనఃపున్యములను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించవలెను.

### ప్రయత్నించండి

1. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు పౌనఃపున్య బహుభుజులు నిర్మించండి.

(i) ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల మధ్య జరిగిన స్నేహపూర్వక క్రికెట్ ఆట నందు వారి పరుగుల వివరాలు

| చేసిన పరుగులు | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 3 | 5 | 8 | 4 | 2 |

(ii) ఒక నాటక ప్రదర్శన కొరకు అమ్మిన టిక్కెట్ల వివరాలు

| టికెట్ రేటు | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| టిక్కెట్ల సంఖ్య | 50 | 30 | 60 | 30 | 20 |

SCERT TELANGANA

### 7.5.2.3 Characteristics of a Frequency Polygon:

1. Frequency polygon is a graphical representation of a frequency distribution (discrete / continuous)
2. Class marks or Mid values of the successive classes are taken on X-axis and the corresponding frequencies on the Y-axis.
3. Area of frequency polygon and histogram drawn for the same data are equal.

**Think, Discuss and Write**

1. Histogram represents frequency over a class interval. Can it represent the frequency at a particular point value?
2. Can a frequency polygon give an idea of frequency of observations at a particular point?

### 7.5.2.4 Construction of a Frequency Polygon for a grouped frequency distribution (without using histogram):

In a study of diabetic patients, the following data were obtained.

| Ages | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of patients | 5 | 9 | 16 | 11 | 3 |

Let us construct frequency polygon for it without using the histogram.

Step 1: Find the class marks of different classes.

Step 2: Select the scale :

X-axis 1 cm = 1 class interval

Y-axis 1 cm = 2 marks

Step 3: If '$x$' denotes the class mark and f denotes the corresponding frequency of a particular class, then plot ('$x$', f) on the graph.

Step 4: Join the consecutive points in order by line segments.

Step 5: Imagine two more classes, one before the first class and the other after the last class each having zero frequency. Mark their mid values on the graph.

Step 6: Complete the polygon.

SCERT, TELANGANA

### 7.5.2.3 పౌనఃపున్య బహుభుజి యొక్క ముఖ్య లక్షణాలు

1. విభాజిత / అవిభాజిత దత్తాంశములను పౌనఃపున్య బహుభుజి వలె సూచించవచ్చును.
2. తరగతి మధ్య విలువలను X- అక్షంపై సంబంధిత పౌన్ఃపున్యములను Y-అక్షంపై గుర్తించి పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించవలెను.
3. ఒకే దత్తాంశమునకు గీయబడిన సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానం.

**ఆలోచించండి, చర్చించి, రాయండి**

1. సోపాన రేఖా చిత్రము నందు ఒక తరగతిలోని విడివిడి రాశులకు పౌనఃపున్యములను విడివిడిగా గుర్తించవచ్చునా?
2. పౌన్ఃపున్య బహుభుజి నుండి ఒక తరగతిలోని ఒక ప్రత్యేక రాశి విలువకు పౌనఃపున్యమును కనుగొనవచ్చునా?

### 7.5.2.4 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించుట (సోపాన రేఖాచిత్రము నిర్మించకుండా)

డయాబెటిస్ వ్యాధిగ్రస్తులపై జరిపిన సర్వేలోని కొన్ని వివరాలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాం.

| వయస్సు | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య | 5 | 9 | 16 | 11 | 3 |

సోపాన చిత్రం నిర్మించకుండానే పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించడం తెలుసుకుందాం.

సోపానం 1: తరగతుల మధ్య విలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2: సూచికను నిర్ణయించవలెను.

X-అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరము

Y-అక్షము 1 సెం.మీ = 2 మార్కులు

సోపానం 3: తరగతి మధ్య విలువలు '$x$' మరియు ఆ తరగతి పౌన్ఃపున్యము f అయిన బిందువు ($x$, f) ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించవలెను.

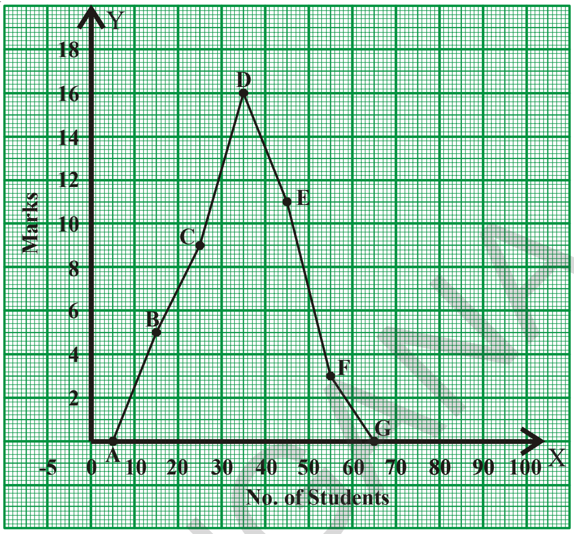
సోపానం 4: అన్ని తరగతులకు బిందువులు గుర్తించి వరుసగా కలుపవలెను.

సోపానం 5: దత్తాంశములోని మొదటి తరగతి కన్నా ఒక తరగతి, చివరి తరగతి తరువాత ఒక తరగతిని 'సున్నా' పౌనఃపున్యములో ఊహించి వాని తరగతి మధ్యవిలువలను గ్రాఫుపై గుర్తించవలెను.

సోపానం 6: అన్ని మధ్య బిందువులను కలిపి బహుభుజి పూర్తి చేయవలెను.

SCERT, TELANGANA

| Class Interval (Ages) | No. of Patients | Class Mark | Points |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 0 | 5 | (5, 0) |
| 10 – 20 | 5 | 15 | (15, 5) |
| 20 – 30 | 9 | 25 | (25, 9) |
| 30 – 40 | 16 | 35 | (35, 16) |
| 40 – 50 | 11 | 45 | (45, 11) |
| 50 – 60 | 3 | 55 | (55, 3) |
| 60 – 70 | 0 | 65 | (65, 0) |




### 7.5.3 Frequency Curve for a grouped frequency distribution

It is another way of representation of the data by a free hand curve.

Let us construct frequency curve for the above data without using the histogram.

Step 1: Find the class marks of different classes.

Step 2: Select the scale :

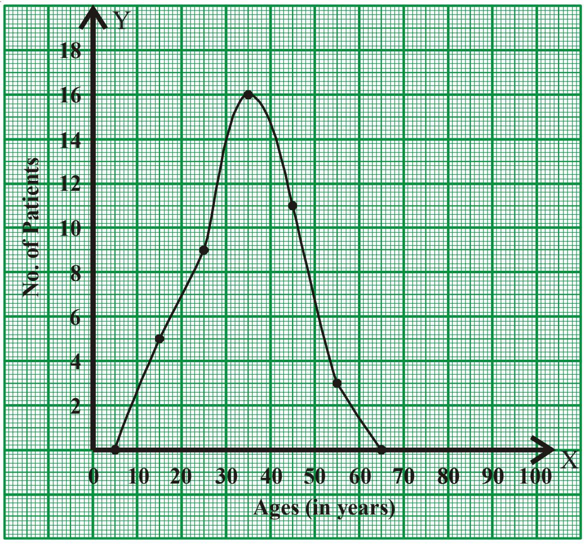
X-axis 1 cm = 1 class interval

Y-axis 1 cm = 2 marks

Step 3: If '$x$' denotes the class mark and f denotes the corresponding frequency of a particular class, then plot ($x$, f) on the graph.

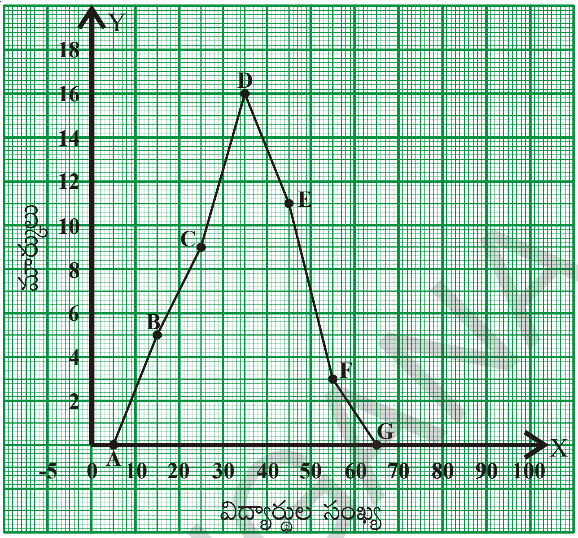
Step 4: Join the consecutive points successively by a free hand curve.

| Class Interval (Ages) | No. of Patients | Class Mark | Points |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 0 | 5 | (5, 0) |
| 10 – 20 | 5 | 15 | (15, 5) |
| 20 – 30 | 9 | 25 | (25, 9) |
| 30 – 40 | 16 | 35 | (35,16) |
| 40 – 50 | 11 | 45 | (45,11) |
| 50 – 60 | 3 | 55 | (55, 3) |
| 60 – 70 | 0 | 65 | (65, 0) |




SCERT TELANGANA

| తరగతి అంతరాలు (వయస్సు) | వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య | తరగతి మధ్యవిలువ | బిందువులు |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 0 | 5 | (5, 0) |
| 10 – 20 | 5 | 15 | (15, 5) |
| 20 – 30 | 9 | 25 | (25, 9) |
| 30 – 40 | 16 | 35 | (35, 16) |
| 40 – 50 | 11 | 45 | (45, 11) |
| 50 – 60 | 3 | 55 | (55, 3) |
| 60 – 70 | 0 | 65 | (65, 0) |




### 7.5.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనంనకు పౌనఃపున్య వక్రము

పౌనఃపున్య విభాజనములోని తరగతి మధ్య బిందువులను ఆ తరగతుల పౌనఃపున్యములను తీసుకొని నిర్మించు వక్రమును పౌనఃపున్య వక్రము అంటారు.

పైన చర్చించిన దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య వక్రము నిర్మించు సోపానములు గమనించండి.

సోపానం 1: తరగతుల మధ్య విలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2: సూచికను నిర్ణయించవలెను.

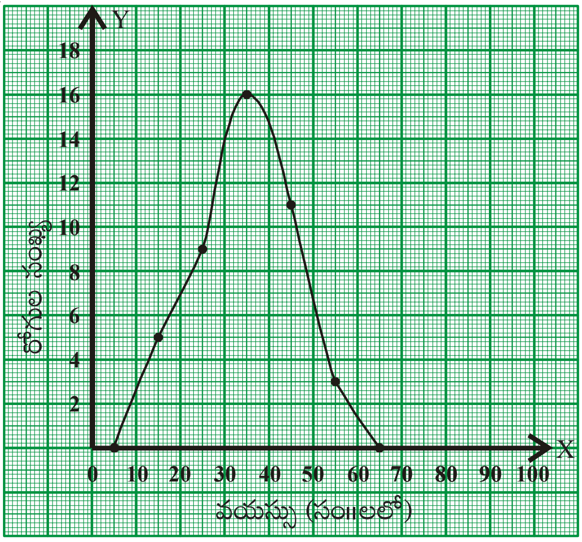
X-అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y-అక్షము 1 సెం.మీ = 2 మార్కులు

సోపానం 3: తరగతి మధ్యవిలువ '$x$' మరియు ఆ తరగతి పౌనఃపున్యం $f$ అయిన బిందువు $(x, f)$ ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించాలి.

సోపానం 4: అన్ని తరగతులకు బిందువులను గుర్తించి, ఆ వరుస బిందువుల గుండా సున్నిత వక్రము గీయాలి.

| తరగతి అంతరం (వయస్సు) | వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య | తరగతి మధ్య విలువ | బిందువులు |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 0 | 5 | (5, 0) |
| 10 – 20 | 5 | 15 | (15, 5) |
| 20 – 30 | 9 | 25 | (25, 9) |
| 30 – 40 | 16 | 35 | (35,16) |
| 40 – 50 | 11 | 45 | (45,11) |
| 50 – 60 | 3 | 55 | (55, 3) |
| 60 – 70 | 0 | 65 | (65, 0) |




SCERT, TELANGANA

## 7.5.4 Graph of a Cumulative Frequency Distribution

A graph representing the cumulative frequencies of a grouped frequency distribution against the corresponding lower / upper boundaries of respective class intervals is called Cumulative Frequency Curve or Ogive Curve. These curves are useful in understanding the accumulation or outstanding number of observations at every particular level of continuous series.

### 7.5.4.1 Less than Cummulative frequency curve

Consider the grouped frequency distribution of number of tenders received by a department from the contractors for a civil work in a course of time.

| Class (days) | 0 – 4 | 4 - 8 | 8 - 12 | 12 – 16 | 16 – 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of tenders | 2 | 5 | 12 | 10 | 3 |

| Class Interval (Days) | No. of Tenders | UB | L.Cu.Fr |
|---|---|---|---|
| 0 – 4 | 2 | 4 | 2 |
| 4 – 8 | 5 | 8 | 7 |
| 8 – 12 | 12 | 12 | 19 |
| 12 – 16 | 10 | 16 | 29 |
| 16 – 20 | 3 | 20 | 32 |

Step 1: If the given frequency distribution is in inclusive form, then convert it into an exclusive form.

Step 2: Construct the less than cumulative frequency table.

Step 3: Mark the upper boundaries of the class intervals along X-axis and their corresponding cumulative frequencies along Y-axis

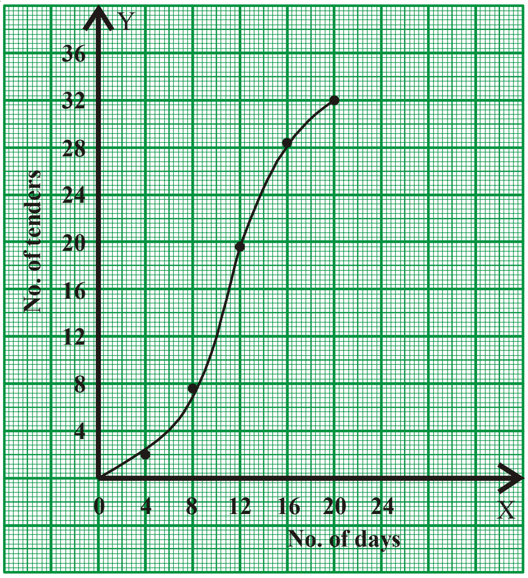
Select the scale :

X-axis 1 cm = 1 class interval

Y-axis 1 cm = 4 tenders

Step 4: Also, plot the lower boundary of the first class (upper boundary of the class previous to first class) interval with cumulative frequency 0.

Step 5: Join these points by a free hand curve to obtain the required ogive.




Similarly we can construct ‘Greater than cumulative frequency curve’ by taking greater than cumulative on Y-axis and corresponding ‘Lower Boundaries’ on the X-axis.

SCERT, TELANGANA

### 7.5.4 సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాల రేఖాచిత్రాలు

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునందలి దిగువ / ఎగువ హద్దులను, సంచిత పౌనఃపున్యములకు గీయు సున్నిత వక్రమును 'సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు. ఒక అవిచ్ఛిన్న శ్రేఢి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము నుండి, దత్తాంశములోని ఏదైనా ఒక హద్దు వరకు లేక ఒక హద్దు నుండి దత్తాంశం చివరి వరకు ఎన్ని రాశులు కలవో తెలుసుకొనవచ్చును.

#### 7.5.4.1 ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

ఒక డిపార్టుమెంటు నందు భవన నిర్మాణ పనులు కొరకై గుత్తేదారులు దరఖాస్తులు (tenders) క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

| తరగతి (రోజులు) | 0 – 4 | 4 - 8 | 8 - 12 | 12 – 16 | 16 – 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| దరఖాస్తులు (tenders) | 2 | 5 | 12 | 10 | 3 |

| తరగతులు (రోజులు) | దరఖాస్తుల సంఖ్య | ఎగువ హద్దు | ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|---|
| 0 – 4 | 2 | 4 | 2 |
| 4 – 8 | 5 | 8 | 7 |
| 8 – 12 | 12 | 12 | 19 |
| 12 – 16 | 10 | 16 | 29 |
| 16 – 20 | 3 | 20 | 32 |

సోపానం 1: ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులయితే, మినహాయింపు తరగతులుగా మార్చవలెను.

సోపానం 2: ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలను గణించవలెను

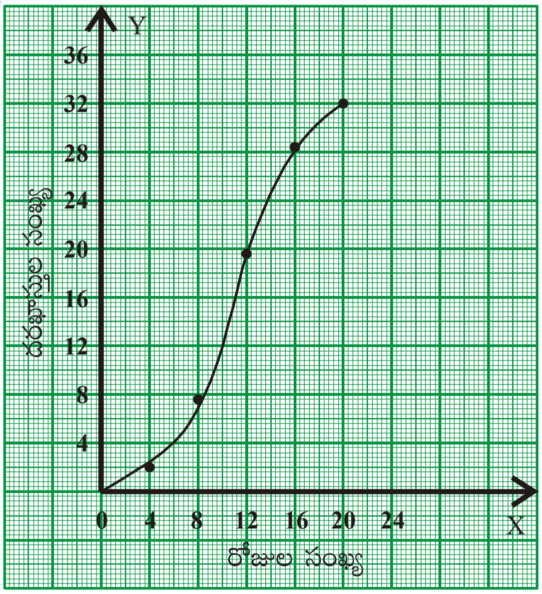
సోపానం 3: X-అక్షంపై ఎగువ హద్దుల, Y-అక్షంపై ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు గుర్తించాలి.

**సూచన:** X-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y-అక్షం 1 సెం.మీ = 4 దరఖాస్తులు

సోపానం 4: మొదటి తరగతి దిగువ హద్దు (ఊహించిన ముందు తరగతి యొక్క ఎగువహద్దు) పౌనఃపున్యము '0' తో బిందువును గుర్తించవలెను.

సోపానం 5: అన్ని బిందువులను వరుసగా సున్నిత వక్రముచే కలుపవలెను. ఈ వక్రమును 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు.




ఇదేవిధంగా తరగతి ఎగువ హద్దులను X-అక్షంపై ఆ తరగతుల అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను Y-అక్షంపై గుర్తించి 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము'ను గీయవచ్చును.

SCERT, TELANGANA

## Exercise - 7.3

1. The following table gives the distribution of 45 students across the different levels of Intelligent Quotient. Draw the histogram for the data.

| Class (IQ) | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 | 100-110 | 110-120 | 120-130 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of students | 2 | 5 | 6 | 10 | 9 | 8 | 5 |

2. Construct a histogram for the marks obtained by 600 students in the VII class annual examinations.

| Marks | 360 | 400 | 440 | 480 | 520 | 560 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of students | 100 | 125 | 140 | 95 | 80 | 60 |

3. Weekly wages of 250 workers in a factory are given in the following table. Construct the histogram and frequency polygon on the same graph for the data given.

| Weekly wage | 500-550 | 550-600 | 600-650 | 650-700 | 700-750 | 750-800 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of workers | 30 | 42 | 50 | 55 | 45 | 28 |

4. Ages of 60 teachers in primary schools of a Mandal are given in the following frequency distribution table. Construct the Frequency polygon and frequency curve for the data without using the histogram. (Use separate graph sheets)

| Ages | 24 – 28 | 28 – 32 | 32 – 36 | 36 – 40 | 40 – 44 | 44 – 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of teachers | 12 | 10 | 15 | 9 | 8 | 6 |

5. Construct class intervals and frequencies for the following distribution table. Also draw the ogive curves for the same.

| Marks obtained | Less than 5 | Less than 10 | Less than 15 | Less than 20 | Less than 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| No. of students | 2 | 8 | 18 | 27 | 35 |

SCERT, TELANGANA

## అభ్యాసం - 7.3

1. 45 మంది విద్యార్థుల యొక్క ప్రజ్ఞా సూచిక (IQ) స్థాయిలు ఇవ్వబడినవి క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించండి.

| తరగతి (IQ స్థాయి) | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 | 100-110 | 110-120 | 120-130 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 2 | 5 | 6 | 10 | 9 | 8 | 5 |

2. 7వ తరగతి వార్షిక పరీక్షలలో 600 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి. సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించండి.

| మార్కులు | 360 | 400 | 440 | 480 | 520 | 560 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 100 | 125 | 140 | 95 | 80 | 60 |

3. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు 250 మంది శ్రామికుల ఒక వారపు వేతనాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిలను ఒకే గ్రాఫు నందు నిర్మించండి.

| వారపు వేతనం | 500-550 | 550-600 | 600-650 | 650-700 | 700-750 | 750-800 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| శ్రామికుల సంఖ్య | 30 | 42 | 50 | 55 | 45 | 28 |

4. ఒక మండలంలోని 60 మంది ప్రాథమిక పాఠశాల ఉపాధ్యాయుల వయస్సులు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రములను వేరువేరు గ్రాఫులపై నిర్మించండి.

| వయస్సు | 24 – 28 | 28 – 32 | 32 – 36 | 36 – 40 | 40 – 44 | 44 – 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య | 12 | 10 | 15 | 9 | 8 | 6 |

5. క్రింది దత్తాంశమునకు తరగతులు, పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి. ఆ దత్తాంశమునకు ఓజివ్ వక్రములను రెండింటిని గీయండి.

| మార్కులు | 5 కన్నా తక్కువ | 10 కన్నా తక్కువ | 15 కన్నా తక్కువ | 20 కన్నా తక్కువ | 25 కన్నా తక్కువ |
|---|---|---|---|---|---|
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 2 | 8 | 18 | 27 | 35 |

SCERT, TELANGANA

## What we have discussed

1. Arithmetic mean of the ungrouped data = $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ...... + x_n}{n}$ or $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$ (short representation) where $\sum x_i$ represents the sum of all $x_i$ s where '$i$' takes the values from 1 to n

2. Arithmetic mean = Estimated mean + Average of deviations

   Or $\overline{x} = A + \dfrac{\sum (x_i - A)}{N}$

3. Mean is used in the analysis of numerical data and is represented by a unique value.

4. Median represents the middle value of the distribution arranged in either ascending or descending order.

5. The median is used to analyse the numerical data, particularly useful when there are a few observations that are unlike mean, it is not affected by extreme values.

6. Mode is used to analyse both numerical and verbal data.

7. Mode is the most frequent observation of the given data. There may be more than one mode for the given data.

8. Representation of classified distinct observations of the data with frequencies is called 'Frequency Distribution' or 'Distribution Table'.

9. Difference between upper and lower boundaries of a class is called length of the class denoted by 'C'.

10. In a a class the initial value and end value of each class is called the lower limit and upper limit respectively of that class.

11. The average of upper limit of a class and lower limit of successive class is called upper boundary of that class.

12. The average of the lower limit of a class and uper limit of preceeding class is called the lower boundary of the class.

13. The progressive total of frequencies from the last class of the table to the lower boundary of particular class is called Greater than Cumulative Frequency (G.C.F).

14. The progressive total of frequencies from first class to the upper boundary of particular class is called Less than Cumulative Frequency (L.C.F.).

A1Z9P7

SCERT, TELANGANA

## మనం ఏమి చర్చించాం

1. రాశుల అంకగణిత మధ్యమము = $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ...... + x_n}{n}$ లేక

   $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{\text{N}}$ (సూక్ష్మ రూపం) ఇందులో $\sum x_i$ అనేది అన్ని $x_i$ ల మొత్తాన్ని తెలుపుతుంది. $x_i$ లో '$i$' విలువలు 1 నుండి $n$ వరకు తీసుకొంటాం.

2. అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మొత్తం + విచలనముల సరాసరి

   లేక $\bar{x} = \text{A} + \dfrac{\sum (x_i - \text{A})}{\text{N}}$

3. అంకగణిత మధ్యమమును సంఖ్యాత్మక దత్తాంశము విశ్లేషించుటకు ఉపయోగిస్తారు.
4. ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలోని దత్తాంశములో మధ్యమరాశిని మధ్యగతం అంటాం.
5. విశ్లేషణపై ప్రభావం చూపు అత్యల్ప / అత్యధిక (అంత్యరాశులు) రాశులు గల సంఖ్యాత్మక దత్తాంశమును విశ్లేషించుటకు మధ్యగతమును ఉపయోగిస్తారు.
6. సంఖ్యాత్మక, వివరణాత్మక దత్తాంశములు రెండింటిలోనూ బాహుళకములు ఉపయోగిస్తాం.
7. దత్తాంశంలో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయిన రాశిని బాహుళకం అంటాం. ఒక దత్తాంశమునకు ఎక్కువ బాహుళకములు ఉండవచ్చును. అసలే లేకపోవచ్చును.
8. దత్తాంశములోని రాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'పౌనఃపున్య విభాజనము' లేక 'విభాజన పట్టిక' అంటారు.
9. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల భేదమును ఆ తరగతి యొక్క 'తరగతి పొడవు' లేక 'తరగతి అంతరము' అంటారు. దీనిని 'C' తో సూచిస్తారు.
10. ఒక తరగతిలో మొదటి విలువను దిగువ అవధి అని, చివరి విలువను ఎగువ అవధి అని అంటారు.
11. ఒక తరగతిలో ఎగువ అవధి, తరవాత తరగతి దిగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి ఎగువ హద్దు అంటారు.
12. ఒక తరగతిలో దిగువ అవధి, దాని ముందున్న తరగతి ఎగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి దిగువ హద్దు అంటారు.
13. దత్తాంశములో ఏదైనా ఒక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల సంఖ్యను "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము" అంటారు.
14. దత్తాంశములో ఏదైనా ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు కన్నా తక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల సంఖ్యను 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము' అంటారు.

G6Y2B2

SCERT TELANGANA

15. Histogram is a graphical representation of frequency distribution of exclusive class intervals.

16. When the class intervals in a grouped frequency distribution are varying we need to construct rectangles in histogram on the basis of frequency density.

$$\text{Frequency density} = \frac{\text{Frequency of class}}{\text{Length of that class}} \times \text{Least class length in the data}$$

17. Frequency polygon is a graphical representation of a frequency distribution (discrete / continuous)

18. In frequency polygon or frequency curve, class marks or mid values of the classes are taken on X-axis and the corresponding frequencies on the Y-axis.

19. Area of frequency polygon and histogram drawn for the same data are equal.

20. A graph representing the cumulative frequencies of a grouped frequency distribution against the corresponding lower / upper boundaries of respective class intervals is called Cumulative Frequency Curve or "Ogive Curve".

SCERT, TELANGANA

### Thinking Critically

The ability of some graphs and charts to distort data depends on perception of individuals to figures. Consider these diagrams and answer each question both before and after checking.

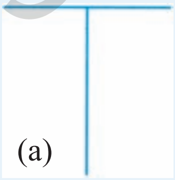
(a) Which is longer, the vertical or horizontal line?

(b) Are lines *l* and *m* straight and parallel?

(c) Which line segment is longer : $\overline{AB}$ or $\overline{BC}$

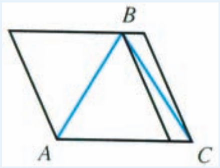
(d) How many sides does the polygon have? Is it a square?

(e) Stare at the diagram below. Can you see four large posts rising up out of the paper? State some and see four small posts.

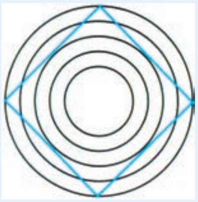


(a)

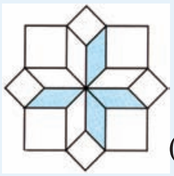
(b)




(c)



(d)



(e)

15. మినహాయింపు తరగతుల ఆధారంగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీచిన రేఖాచిత్రమును పౌనఃపున్య సోపాన చిత్రము అంటారు.

16. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనం నందు తరగతి అంతరాలు వేర్వేరుగా ఉన్నప్పుడు సోపానా రేఖాచిత్రములోని దీర్ఘచతురస్రాలను పౌణ్ణపున్య సాంద్రత ఆధారం చేసుకొని నిర్మించాలి.

$$\text{పౌనఃపున్య సాంద్రత} = \frac{\text{తరగతి పౌనఃపున్యం}}{\text{ఆ తరగతి పొడవు}} \times \text{కనిష్ఠ తరగతి పొడవు}$$

17. విచ్ఛిన్న/అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల యొక్క తరగతి మధ్య విలువలను పౌనఃపున్యములను తీసుకొని నిర్మించిన రేఖాచిత్రాన్ని పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు.

18. పౌనఃపున్య బహుభుజి/ వక్రం నందు X-అక్షంపై తరగతి మధ్య విలువలను Y-అక్షంపై పౌనఃపున్యములను తీసుకోవాలి.

19. ఒకే దత్తాంశమునకు నిర్మించిన సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానం.

20. ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలోని దిగువ లేదా ఎగువ హద్దులకు సంబంధిత సంచిత పౌనఃపున్యాలను గుర్తించి గీచిన సున్నిత వక్రములను 'ఓజివ్ వక్రం' లేదా ఆరోహణ/అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం అంటారు.

### హేతుబద్ధంగా ఆలోచించండి

కొన్ని రేఖాచిత్రాల, పటాల యొక్క దత్తాంశములను పరిశీలించి వ్యక్తుల యొక్క ఆలోచనా విధానం, అంతర్‌దృష్టిపై ఆధారపడి ఉంటాయి. క్రింది పటాలను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలివ్వండి. ఇచ్చిన సమాధానాలను తిరిగి సరిచూసుకోండి.

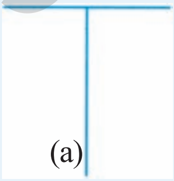
(a) అడ్డరేఖా, నిలువు రేఖలలో ఏది పొడవైనది?

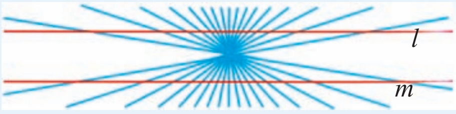
(b) $l$ మరియు $m$ రేఖలు సమాంతర రేఖాలేనా?

(c) $\overline{AB}$ లేదా $\overline{BC}$ లేదా రేఖాఖండాలలో ఏది పెద్దది?

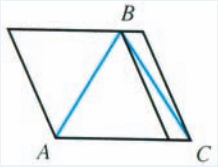
(d) పటంలో బహుభుజికి ఎన్ని భుజాలు ఉన్నాయి? ఇది చతురస్రమేనా?

(e) పటాన్ని క్రింది వైపుగా చూడండి. నాలుగు స్థంభాలు పైకి వస్తున్నట్లు కనిపించాయా? మరి చిన్న స్థంభాలు కూడా ఉన్నాయా? చెప్పండి.

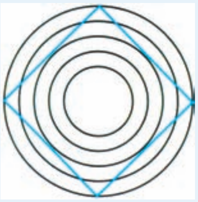

(a)

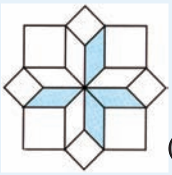


(b)



(c)


(d)


(e)

SCERT, TELANGANA

# Answers

## 1. Rational Numbers

### Exercise - 1.1

1.
   (i) Additive Identity
   (ii) Distributive law
   (iii) Multiplicative identity
   (iv) Multiplicative identity
   (v) Commtative law of addition
   (vi) Closure law in multiplication
   (vii) Additive inverse law
   (viii) Multiplicative inverse
   (ix) Distributive

2. (i) $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$ (ii) $-1, 1$ (iii) Does not exist (iv) $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

   (v) $1, -1$

3. (i) $\frac{-12}{5}$ (ii) 0 (iii) $\frac{9}{11}$ (iv) $\frac{6}{7}$

   (v) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (vi) 0

4. $\frac{-28}{55}$

5. Multiplicative Associative, multiplicative inverse, multiplicative identity, closure with addition.

6. Associative law.

7. $\frac{28}{15}$

8. (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{58}{13}$ (iii) $\frac{45}{7}$

9. $\frac{-7}{8}$

10. $\frac{53}{6}$

11. Not associative Since $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

13. (i) Natural numbers (ii) 0 (iii) Negative

SCERT, TELANGANA

# జవాబులు

## 1. అకరణీయ సంఖ్యలు

**అభ్యాసం - 1.1**

1.

(i) సంకలన తత్సమాంశం

(ii) విభాగ న్యాయం (iii) గుణకార తత్సమాంశం

(iv) గుణకార తత్సమాంశం (v) సంకలన స్థిత్యంతర ధర్మం

(vi) గుణకార సంవృత ధర్మం (vii) సంకలన విలోమం

(viii) గుణకార విలోమం (ix) విభాగ న్యాయం

2. (i) $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$ (ii) $-1, 1$ (iii) వ్యవస్థితం కాదు (iv) $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

(v) $1, -1$

3. (i) $\frac{-12}{5}$ (ii) 0 (iii) $\frac{9}{11}$ (iv) $\frac{6}{7}$

(v) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (vi) 0 4. $\frac{-28}{55}$

5. గుణకార సహచర ధర్మం, గుణకార విలోమం, గుణకార తత్సమాంశం, సంకలన సంవృతం

6. సహచర ధర్మం

7. $\frac{28}{15}$ 8. (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{58}{13}$ (iii) $\frac{45}{7}$

9. $\frac{-7}{8}$ 10. $\frac{53}{6}$

11. సహచరం కాదు. ఎందుకనగా $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

13. (i) సహజ సంఖ్యలు (ii) 0 (iii) ఋణాత్మకం

SCERT , TELANGANA

## Exercise - 1.3

1. (i) $\frac{57}{100}$ (ii) $\frac{22}{125}$ (iii) $\frac{100001}{100000}$ (iv) $\frac{201}{8}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{19}{33}$ (iii) $\frac{361}{495}$ (vi) $\frac{553}{45}$

3. (i) $\frac{7}{13}$ (ii) $\frac{-7}{5}$

4. $\frac{-62}{65}$ 5.140 6. $5\frac{1}{10}$m 7. ₹. 1.66

8. $161\frac{1}{5}\text{m}^2$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. $\frac{16}{9}$m 11. 15

## 2. Linear Equations in one variable

## Exercise - 2.1

1.(i) 2 (ii) −3 (iii) −6 (iv) 6

(v) $\frac{-3}{2}$ (vi) −21 (vii) 27 (viii) 5

(ix) $\frac{7}{3}$ (x) 1 (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) 0

(xiii) $\frac{25}{7}$ (xiv) $\frac{21}{16}$ (xv) $\frac{8}{3}$ (xvi) $\frac{13}{6}$

## Exercise - 2.2

1.(i) $67^0$ (ii) $17^0$ (iii) $125^0$ (iv) $19^0$

(v) $20^0$

2. 5,13 3. 43, 15 4. 27, 29

5. 252, 259, 266 6. 20 km 7. 99g, 106g, 95g 8. 113m, 87m

9. 16m, 12m 10. 21m, 21m, 13m

11. $51^0$ and $39^0$ 12. 20 years, 28 years 13. 126

14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59 ft, 29.5 ft

17. 186, 187.

SCERT, TELANGANA

### అభ్యాసం - 1.3

1. (i) $\frac{57}{100}$ (ii) $\frac{22}{125}$ (iii) $\frac{100001}{100000}$ (iv) $\frac{201}{8}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{19}{33}$ (iii) $\frac{361}{495}$ (vi) $\frac{553}{45}$

3. (i) $\frac{7}{13}$ (ii) $\frac{-7}{5}$

4. $\frac{-62}{65}$ 5. 140 6. $5\frac{1}{10}$ మీ. 7. ₹. 1.66

8. $161\frac{1}{5}$ మీ.$^2$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. $\frac{16}{9}$ మీ. 11. 125

## 2. ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

### అభ్యాసం - 2.1

1.(i) 2 (ii) −3 (iii) −6 (iv) 6

(v) $\frac{-3}{2}$ (vi) −21 (vii) 27 (viii) 5

(ix) $\frac{7}{3}$ (x) 1 (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) 0

(xiii) $\frac{25}{7}$ (xiv) $\frac{21}{16}$ (xv) $\frac{8}{3}$ (xvi) $\frac{13}{6}$

### అభ్యాసం - 2.2

1.(i) $67^0$ (ii) $17^0$ (iii) $125^0$ (iv) $19^0$

(v) $20^0$

2. 5, 13 3. 43, 15 4. 27, 29

5. 252, 259, 266 6. 20 కి.మీ. 7. 99 గ్రా., 106 గ్రా., 95 గ్రా. 8. 113 మీ., 87 మీ.

9. 16 మీ., 12 మీ. 10. 21 మీ., 21 మీ., 13 మీ.

11. $51^0$, $39^0$ 12. 20 సం॥లు, 28 సం॥లు 13. 126

14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59 అడుగులు, 29.5 అడుగులు

17. 186, 187.

SCERT, TELANGANA

## Exercise - 2.3

1. 1
2. 2
3. $\frac{11}{4}$
4. $-1$
5. $\frac{-9}{5}$
6. 1
7. 7
8. $\frac{-4}{7}$
9. $\frac{9}{2}$
10. $\frac{11}{3}$
11. 1
12. $-96$
13. 3
14. 8

## Exercise - 2.4

1. 25
2. 7
3. 63
4. 40, 25, 15
5. 12
6. 4, 2
7. 16
8. 10,000

## Exercise - 2.5

1.(i) $\frac{145}{21}$ (ii) 168 (iii) 12 (iv) 25

(v) $\frac{127}{12}$ (vi) 1 (vii) $\frac{9}{2}$ (viii) $\frac{5}{12}$

(ix) $\frac{9}{23}$ (x) $-1$ (xi) $\frac{-1}{7}$ (xii) $\frac{3}{7}$

2. 30
3. 48,12
4. $\frac{3}{7}$
5. 50, 51, 52
6. 25
7. 5
8. One Rupee coins = 14; 50 paisa coins =42
9. 30 days
10. 20 km
11. 36
12. ₹ 860
13. 16

SCERT, TELANGANA

# 4. Exponents and Powers

## Exercise - 4.1

1.(i) $\frac{1}{64}$ (ii) $-128$ (iii) $\frac{64}{27}$ (iv) $\frac{1}{81}$

2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ (ii) $(-2)^{14}$ (iii) $5^4$ (iv) $5^5$ (v) $(-21)^4$

3.(i) $2^4 \times 3$ (ii) $\frac{1}{2}$

## అభ్యాసం - 2.3

1. 1  2. 2  3. $\frac{11}{4}$  4. $-1$

5. $\frac{-9}{5}$  6. 1  7. 7  8. $\frac{-4}{7}$

9. $\frac{9}{2}$  10. $\frac{11}{3}$  11. 1  12. $-96$

13. 3  14. 8

## అభ్యాసం - 2.4

1. 25  2. 7  3. 63  4. 40, 25, 15

5. 12  6. 4, 2  7. 16  8. 10,000

## అభ్యాసం - 2.5

1.(i) $\frac{145}{21}$  (ii) 168  (iii) 12  (iv)25

(v) $\frac{127}{12}$  (vi) 1  (vii) $\frac{9}{2}$  (viii) $\frac{5}{12}$

(ix) $\frac{9}{23}$  (x) $-1$  (xi) $\frac{-1}{7}$  (xii) $\frac{3}{7}$

2. 30  3. 48, 12  4. $\frac{3}{7}$  5. 50, 51, 52

6. 25  7. 5  8. ఒక రూపాయి నాణెములు=14; 50 పైసల నాణెములు=42

9. 30 రోజులు  10. 20 కి.మీ.  11. 36

12. ₹860  13. 16

# 4. ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు

## అభ్యాసం - 4.1

1.(i) $\frac{1}{64}$  (ii) $-128$  (iii) $\frac{64}{27}$  (iv) $\frac{1}{81}$

2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$  (ii) $(-2)^{14}$  (iii) $5^4$  (iv) $5^5$  (v) $(-21)^4$

3.(i) $2^4 \times 3$  (ii) $\frac{1}{2}$

SCERT, TELANGANA

4.(i) 10 (ii) $40^3$ (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) $\frac{2}{81}$

(v) $\frac{17}{6}$ (vi) $\frac{16}{81}$ 5. (i) 625 (ii) 625

6.(i) 10 (ii) −10 (iii) 2 7. 3

8. $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$ 9. (i) 1 (ii) 72 (iii) −24 (iv) 1

10. $\frac{16}{49}$

**Exercise - 4.2**

1.(i) $9.47 \times 10^{-10}$ (ii) $5.43 \times 10^{11}$ (iii) $4.83 \times 10^{7}$ (iv) $9.298 \times 10^{-5}$

(v) $5.29 \times 10^{-5}$

2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900

(v) 0.03789 (vi) 0.02436

3.(i) $4 \times 10^{-7}$ m (ii) $7 \times 10^{-6}$ mm (iii) $3 \times 10^{8}$ m/sec (iv) $3.84467 \times 10^{8}$

(v) $1.6 \times 10^{-19}$ coulombs (vi) $1.6 \times 10^{-3}$ cm (vii) $5 \times 10^{-6}$ cm

4. $1.0008 \times 10^{2}$ mm

5.(i) No (ii) No (iii) No (iv) No (v) No

## 5. Comparing Quantities using Proportion

**Exercise - 5.1**

1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1:2 2. 168

3. 8 4. 48 5. 20 6. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

7. 3 : 5 8. 4 : 7 9. ₹ 8320

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, yes 11. ₹ 28.5, ₹ 92, ₹ 257.6, ₹ 132, ₹ 88

12. (a) 83 (b) 1992 members 13. 2064 bags 14. 70 cm

SCERT, TELANGANA

4.(i) 10 (ii) $40^3$ (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) $\frac{2}{81}$

(v) $\frac{17}{6}$ (vi) $\frac{16}{81}$ 5. (i) 625 (ii) 625

6.(i) 10 (ii) −10 (iii) 2 7. 3

8. $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$ 9. (i) 1 (ii) 72 (iii) −24 (iv) 1

10. $\frac{16}{49}$

## అభ్యాసం - 4.2

1.(i) $9.47 \times 10^{-10}$ (ii) $5.43 \times 10^{11}$ (iii) $4.83 \times 10^{7}$ (iv) $9.298 \times 10^{-5}$

(v) $5.29 \times 10^{-5}$

2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900

(v) 0.03789 (vi) 0.02436

3.(i) $4 \times 10^{-7}$ మీ. (ii) $7 \times 10^{-6}$ మి.మీ. (iii) $3 \times 10^{8}$ మీ/సెకను (iv) $3.84467 \times 10^{8}$

(v) $1.6 \times 10^{-19}$ కూలుంబ్‌లు (vi) $1.6 \times 10^{-3}$ సెం.మీ. (vii) $5 \times 10^{-6}$ సెం.మీ.

4. $1.0008 \times 10^{2}$ మి.మీ.

5.(i) కాదు (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) కాదు (v) కాదు

# 5. అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట

## అభ్యాసం - 5.1

1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1:2 2. 168

3. 8 4. 48 5. 20 6. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

7. 3 : 5 8. 4 : 7 9. ₹ 8320

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, అవును 11. ₹ 28.5, ₹ 92, ₹ 257.6, ₹ 132, ₹ 88

12. (a) 83 (b) 1992 మంది 13. 2064 బస్తాలు 14. 70 సెం.మీ.

SCERT, TELANGANA

## Exercise - 5.2

1. 81.9 crores
2. ₹ 2756.25
3. ₹ 7.674
4. 3 cm × 6 cm
5. ₹ 127.50
6. $6\frac{1}{4}\%$
7. 17%
8. ₹ 880, 10%, ₹.4,000, 20%, ₹.10,000, 20%, profit, ₹.392, ₹42, ₹. 315, ₹.35.
9. ₹ 2244
10. ₹ 1250
11. 40,000; 12.5%
12. Profit ₹ 30,000, profit % 17.64 %
13. ₹ 1334
14. (i) ₹ 10,000 (ii) ₹ 3,000 (iii) ₹ 200
15. (i) ₹ 540, ₹ 5040 (ii) ₹ 5040
16. 13

## Exercise - 5.3

1. (a) ₹ 268.75
2. ₹.19,950
3. A = ₹ 8820, C.I = ₹ 820
4. ₹734.50, ₹ 7234.50
5. ₹ 86950 ; ₹1449.1
6. 81,82,199
7. ₹1080.56
8. (i)₹ 210
9. ₹43.20
10. 5,31,616
11. ₹. 36659.70
12. Bharathi ; ₹.362.50
13. ₹9500
14. 1297920
15. ₹.103.81

# 6. Square Roots, Cube Roots

## Exercise - 6.1

1.(i) Unit digit in the square of 39 is 1
(ii) Unit digit in the square of 297 is 9
(iii) Unit digit in the square of 5125 is 5
(iv) Unit digit in the square of 7286 is 6
(v) Unit digit in the square of 8742 is 4

2. Perfect squares are
(i) 121 (ii) 256

3.(i) 257 unit digit is 7 and hence not a perfect square
(ii) 4592 unit digit is 2 and hence not a perfect square
(iii) 2433 unit digit is 3 and hence not a perfect square
(iv) 5050 unit digit is 0 and number of zeros at the end is only one and hence not a perfect square
(v) 6098 unit digit is 8 and hence not a perfect square

4. (i) $431^2$ - odd (ii) $2826^2$ - even (iii) $8204^2$ - even
(iv) $17779^2$ - odd (v) $99998^2$ - even

SCERT, TELANGANA

## అభ్యాసం - 5.2

1. 81.9 కోట్లు  2. ₹ 2756.25  3. ₹ 7.674  4. 3 సెం.మీ. × 6 సెం.మీ.

5. ₹ 127.50  6. $6\frac{1}{4}\%$  7. 17%

8. ₹ 880, 10%, ₹ 4,000, 20%, ₹ 10,000, 20%, లాభం, ₹ 392, ₹ 42, ₹ 315, ₹ 35.

9. ₹ 2244  10.₹ 1250  11. 40,000; 12.5%

12. లాభం, ₹ 30,000, లాభ శాతం 17.64%  13. ₹ 1334

14. (i) ₹ 10,000  (ii) ₹ 3,000  (iii) ₹ 200

15. (i) ₹ 540; ₹ 5040 (ii) ₹ 5040  16. 13

## అభ్యాసం - 5.3

1. (a) ₹ 268.75  2. ₹ 19,950  3. A = ₹ 8820, వడ్డీ ₹ 820

4. ₹.734.50, ₹ 7234.50 5. ₹ 86,950; ₹ 1449.1  6. 81,82,199

7. ₹ 1080.56  8. (i) ₹ 210  9. ₹ 43.20

10. 5,31,616  11. ₹ 36659.70  12. ₹ 362.50, భారతి

13. ₹ 9500  14. 1297920  15. ₹ 103.81

# 6. వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు

## అభ్యాసం - 6.1

1.(i) 39 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 1

(ii) 297 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 9

(iii) 5125 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 5

(iv) 7286 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 6

(v) 8742 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 4

2. పరిపూర్ణ వర్గములు

(i) 121  (ii) 256

3.(i) 257 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 7 కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య కాదు

(ii) 4592 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 2 కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య కాదు

(iii) 2433 వర్గములో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 3 కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య కాదు

(iv) 5050 నందు ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 0 మరియు సంఖ్య చివర ఒకే ఒక 0 కలదు; కావున పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య కాదు

(v) 6098 నందలి ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 8 కావున పరిపూర్ణ వర్గము కాదు.

4. (i) $431^2$ - బేసిసంఖ్య  (ii) $2826^2$ - సరిసంఖ్య  (iii) $8204^2$ - సరిసంఖ్య

(iv) $17779^2$ - బేసిసంఖ్య (v) $99998^2$ - సరిసంఖ్య

SCERT, TELANGANA

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

## Exercise - 6.2

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6, 120 4. 6 5. 39

6. 51 7. 144, 9 8. 89 9. 4608 $m^2$

## Exercise - 6.3

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78

   (v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 cm 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

## Excrcise - 6.4

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - Not a perfect cube ii) 516 - Not a perfect cube

   iii) 729 - a perfect cube vi)8000 - a perfect cube

   v) 2700 - Not a perfect cube

3. 2 4. 17 5. 5 6. 288 7. 2

## Exercise - 6.5

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

1. (i) 8 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) False ii) False iii) True iv) True

   v) False vi) False vii) False 4. 64

# 7. Frequency Distribution Tables and Graphs

## Exercise 7.1

1. ₹.11060.83 2. $\overline{x} = 7$ 3. $\overline{x} = 27$ 4. $\overline{x} = 43$

5. $\overline{x} = 30$ years 6. 52 years

7. $\overline{x} = 12$ sum of deviations from $\overline{x} = 0$

SCERT, TELANGANA

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

### అభ్యాసం - 6.2

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6; 120 4. 6 5. 39

6. 51 7. 144; 9 8. 89 9. 4608 మీ$^2$

### అభ్యాసం - 6.3

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78

   (v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 సెం.మీ. 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

### అభ్యాసం - 6.4

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - పరిపూర్ణ ఘనం కాదు ii) 516 - పరిపూర్ణ ఘనం కాదు

   iii) 729 - పరిపూర్ణ ఘనం vi) 8000 - పరిపూర్ణ ఘనం

   v) 2700 - పరిపూర్ణ ఘనం కాదు

3. 2 4. 17 5. 5 6. 288 7. 2

### అభ్యాసం - 6.5

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

2. (i) 8 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) అసత్యం ii) అసత్యం iii) సత్యం iv) సత్యం

   v) అసత్యం vi) అసత్యం vii) అసత్యం 4. 64

## 7. పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు

### అభ్యాసం - 7.1

1. ₹ 11060.83 2. $\overline{x} = 7$ 3. $\overline{x} = 27$ 4. $\overline{x} = 43$

5. $\overline{x} = 30$ సం॥లు 6. 52 సం॥లు

7. $\overline{x} = 12$ విచలనాల మొత్తం నుండి $\overline{x} = 0$

SCERT, TELANGANA

8. 5

9. $\bar{x}$ = 13.67 same in all cases.

10. 15.3 marks

11. $\bar{x} = 30$

12. Median = 3.4

13. $x = 18$

14. Mode = 10

15. Mode = $x - 3$

16. Does not exist

17. 12, 16, 16, 16

18. 42

19. 8

20. 20

## Exercise - 7.2

1.

| Class Interval | 5-14 | 15-24 | 25-34 | 35-44 | 45-54 | 55-64 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequency | 9 | 9 | 9 | 6 | 7 | 5 |

2.

| No of Students | 15-19 | 19-23 | 23-27 | 27-31 | 31-35 | 35-39 | 39-43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequency | 5 | 7 | 6 | 5 | 5 | 1 | 1 |

3.

| Class intervals | 4-11 | 12-19 | 20-27 | 28-35 | 36-43 | 44-51 | 52-59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Boundaries | 3.5-11.5 | 11.5-19.5 | 19.5-27.5 | 27.5-35.5 | 35.5-43.5 | 43.5-51.5 | 51.5-59.5 |

4.

| Class Marks | Frequency cu.f | Class Intervals cu.f | Less than | Greater than |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | 4-16 | 6 | 75 |
| 22 | 14 | 16-28 | 20 | 69 |
| 34 | 20 | 28-40 | 40 | 55 |
| 46 | 21 | 40-52 | 61 | 35 |
| 58 | 9 | 52-64 | 70 | 14 |
| 70 | 5 | 64-76 | 75 | 5 |

5.

| CI (Marks) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Fr(Students) | 2 | 10 | 4 | 9 | 10 |

6.

| Class Interval (Ages) | Frequency (No.of children) | Class Boundries | LEss than Cu.frequency | Greater than Cu.frequency |
|---|---|---|---|---|
| 1 - 3 | 10 | 0.5 - 3.5 | 10 | 59 |
| 4 - 6 | 12 | 3.5 - 6.5 | 22 | 49 |
| 7 - 9 | 15 | 6.5 - 9.5 | 37 | 37 |
| 10 - 12 | 13 | 9.5 - 12.5 | 50 | 22 |
| 13 - 15 | 9 | 12.5 - 15.5 | 59 | 9 |

SCERT, TELANGANA

8. 5 9. $\bar{x}$ = 13.67 అన్ని సందర్భాల్లోను సమానం 10. 15.3 మార్కులు

11. $\bar{x}$ = 30 12. మధ్యగతం = 3.4 13. $x$ = 18

14. బాహుళకం = 10 15. బాహుళకం = $x - 3$ 16. వ్యవస్థితం కాదు

17. 12, 16, 16, 16 18. 42 19. 8 20. 20

## అభ్యాసం - 7.2

1.

| తరగతి అంతరం | 5-14 | 15-24 | 25-34 | 35-44 | 45-54 | 55-64 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం | 9 | 9 | 9 | 6 | 7 | 5 |

2.

| విద్యార్థుల సంఖ్య | 15-19 | 19-23 | 23-27 | 27-31 | 31-35 | 35-39 | 39-43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం | 5 | 7 | 6 | 5 | 5 | 1 | 1 |

3.

| తరగతి అంతరం | 4-11 | 12-19 | 20-27 | 28-35 | 36-43 | 44-51 | 52-59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| హద్దులు | 3.5-11.5 | 11.5-19.5 | 19.5-27.5 | 27.5-35.5 | 35.5-43.5 | 43.5-51.5 | 51.5-59.5 |

4.

| మధ్య విలువ | సంచిత పౌనఃపున్యం | తరగతి అంతరం | ఆరోహణ | అవరోహణ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | 4-16 | 6 | 75 |
| 22 | 14 | 16-28 | 20 | 69 |
| 34 | 20 | 28-40 | 40 | 55 |
| 46 | 21 | 40-52 | 61 | 35 |
| 58 | 9 | 52-64 | 70 | 14 |
| 70 | 5 | 64-76 | 75 | 5 |

5.

| త.అ (మార్కులు) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| పౌనఃపున్యం(విద్యార్థులు) | 2 | 10 | 4 | 9 | 10 |

6.

| తరగతి అంతరం (వయస్సు) | పౌనఃపున్యం (పిల్లల సంఖ్య) | తరగతి హద్దులు | ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం | అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|---|---|
| 1 - 3 | 10 | 0.5 - 3.5 | 10 | 59 |
| 4 - 6 | 12 | 3.5 - 6.5 | 22 | 49 |
| 7 - 9 | 15 | 6.5 - 9.5 | 37 | 37 |
| 10 - 12 | 13 | 9.5 - 12.5 | 50 | 22 |
| 13 - 15 | 9 | 12.5 - 15.5 | 59 | 9 |

SCERT, TELANGANA

7.

| CI | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cu fr | 3 | 8 | 19 | 25 | 30 |
| Frequency | 3 | 5 | 11 | 6 | 5 |

Given frequencies are less than cumilative frequencies.

8.

| CI | 1-10 | 11-20 | 21-30 | 31-40 | 41-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| G.Cu fr | 42 | 36 | 23 | 14 | 6 |
| Frequency | 6 | 13 | 9 | 8 | 6 |

SCERT, TELANGANA

7.

| తరగతి అంతరం | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం | 3 | 8 | 19 | 25 | 30 |
| పౌనఃపున్యం | 3 | 5 | 11 | 6 | 5 |

ఇచ్చినవి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం

8.

| తరగతి అంతరం | 1-10 | 11-20 | 21-30 | 31-40 | 41-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| సం.అ.పౌనఃపున్యం | 42 | 36 | 23 | 14 | 6 |
| పౌనఃపున్యం | 6 | 13 | 9 | 8 | 6 |

SCERT, TELANGANA

# SYLLABUS

**Number System (50 hrs)**

**(i) Rational Numbers**

**(ii) Square numbers, cube numbers, Square roots, Cubes, Cube roots.**

**(iii) Playing with numbers**

**(i) Rational Numbers**

- Properties of rational numbers. (including identities).
- Using general form of expression to describe properties. Appreciation of properties.
- Representation of rational numbers on the number line
- Between any two rational numbers there lies another rational number (Making children see that if we take two rational numbers then unlike for whole numbers, in this case you can keep finding more and more numbers that lie between them.)
- Representation of rational numbers as decimal and vice versa (denominators other than 10, 100, ....)
- Consolidation of operations on rational numbers.
- Word problems on rational numbers (all operations)

**(ii) Square numbers, cube numbers, Square roots, Cubes, Cube roots.**

- Square numbers and square roots.
- Square roots using factor method and division method for numbers containing. no more than 4 digits and b) no more than 2 decimal places.
- Pythagorean triplets and verification of Pythagoras theorem
- Cube numbers and cube roots (only factor method for numbers containing at most 3 digits).
- Estimating square roots and cube roots. Learning the process of moving nearer to the required number.
- Uses of brackets
- Simplification of brackets using BODMAS rule.

**(iii) Playing with numbers**

- Writing and understanding a 2 and 3 digit number in generalized form (100a + 10b + c) where a, b, c can be only digits (0-9) and engaging with various puzzles concerning this. (Like finding the missing numerals represented by alphabets in problems involving any of the four operations)

SCERT, TELANGANA

# పాఠ్య ప్రణాళిక

**సంఖ్యా వ్యవస్థ (50 గంటలు)**

(i) అకరణీయ సంఖ్యలు

(ii) వర్గ సంఖ్యలు, ఘన సంఖ్యలు మరియు వర్గమూలాలు, ఘన మూలాలు

(iii) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం

### (i) అకరణీయ సంఖ్యలు

- అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలు (సర్వ సమీకరణములు).
- ధర్మాలను వర్ణించడానికి వీలుగా సాధారణ రూపము. ధర్మాలను ప్రశంసించటం.
- సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించటం.
- పూర్ణాంకాలలో మాదిరిగా కాకుండా అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మరిచిన అకరణీయ సంఖ్య వుంటుందని, ఇంకా ఇవే రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య చాలా చాలా అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని గుర్తింపజేయటం.
- అకరణీయ సంఖ్యలను, దశాంశ సంఖ్యలుగా సూచించటం, అదేవిధంగా దశాంశ సంఖ్యలకు అకరణీయ సంఖ్యలుగా సూచించండం (హారాలు 10, 100, .... కాకుండా)
- అకరణీయ సంఖ్యలను వివిధ పరిక్రియల దృష్ట్యా ధర్మాలు.
- అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ పరిక్రియలలో పద సమస్యలు.

### (ii) వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు

- వర్గసంఖ్యలు, వర్గమూలాలు
- కారణాంక పద్ధతిన, భాగాహార పద్ధతిన వర్గమూలాలను కనుగొనుట.
- పైథగోరియక్ త్రికాలు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును సరిచూచుట.
- ఘనసంఖ్యలు, ఘనమూలాలు (3 అంకెలు గల సంఖ్యలకు కారణాంక పద్ధతి మాత్రమే)
- వర్గమూలాలను, ఘనమూలాలను అంచనా వేయటం. కావలసిన సంఖ్యకు అతి సమీపంగా అంచనావేసే విధానాన్ని నేర్పించడం
- బ్రాకెట్ల వినియోగం
- BODMAS నియమం అనుసరించి సంఖ్యా సమాసాలను సూక్ష్మీకరించుట

### (iii) సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం!

- రెండంకెలు, మూడు అంకెలు గల సంఖ్యలను వికృత రూపంలో అనగా $(100a + 10b + c)$ (a, b, c లు ఏవైనా అంకెలు) రూపంలో రాయడం, అర్థం చేసుకోవడం, వీనికి సంబంధించిన ప్రహేళికలు. (చతుర్విధ ప్రక్రియలలో, సంఖ్యలలో ఒకటి లేదా రెండంకెల బదులు అక్షరాలు ఇచ్చి వాని విలువను కనుగొనమని అడగటం) మొదలైనవి.

SCERT TELANGANA

| | |
|---|---|
| | • Number puzzles and games<br>• Understanding the logic behind the divisibility tests of 2,3,4,5,6,7,8,9, and 11 for a two or three digit number expressed in the general form. |
| **Algebra (20 hrs)**<br>**(i) Linear Equations in one variable**<br>**(ii) Exponents & Powers**<br>**(iii) Algebraic Expressions**<br>**(iv) Factorisation** | **(i) Linear Equations in one variable**<br>• Solving linear equations in one variable in contextual problems involving multiplication and division<br>• Word problems<br>**(ii) Exponents and Powers**<br>• Standard form of the numbers<br>• Integers as exponents.<br>• Laws of exponents with integral powers<br>**(iii) Algebraic Expressions**<br>• Multiplication algebraic exp. (Coefficient should be integers)<br>• Some common errors (e.g. $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$ )<br>• Identities $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$<br>• Geometric verification of identities<br>**(iv) Factorisation**<br>• Factorisation by taking out common factor.<br>• Factorisation by grouping the terms.<br>• Factorisation by using identities.<br>• Factors of the form $(x + a)(x + a)$<br>• Division of algebraic expressions |

SCERT, TELANGANA

| | |
|---|---|
| | • సంఖ్యలలో ప్రహేళికలు మరియు ఆటలు – ప్రహేళికలను సాధించడం, వానిని తయారు చేయడం.<br>• రెండు లేదా మూడు అంకెల సంఖ్యలకు సంబంధించి 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 మరియు 11 ల భాజనీయతా సూత్రాలు, వీనిలోని తర్కము మరియు శాస్త్రీయతను అర్థం చేసుకోవటము. |
| **బీజగణితం (20 గంటలు)**<br>(i) ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు<br>(ii) ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు<br>(iii) బీజీయ సమాసాలు<br>(iv) కారణాంక విభజన | **(i) ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు (సామాన్య సమీకరణాలు)**<br>• గుణకార, భాగాహార పరిక్రియలో కూడిన సామాన్య సమీకరణాల సాధన – వివిధ సందర్భాలలో సామాన్య సమీకరణాల వినియోగము.<br>• పద సమస్యలు<br><br>**(ii) ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు**<br>• ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు<br>• ఘాతాంకాలుగా పూర్ణసంఖ్యలు<br>• ఘాతాంకాల ధర్మాలు<br><br>**(iii) బీజీయ సమాసాలు**<br>• పూర్ణసంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బీజీయ సమాసాల గుణకారం<br>• సాధారణంగా చేసే తప్పులు (ఉదా: $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$ )<br>• $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ సమీకరణాలు.<br>• సర్వ సమీకరణాలకు జ్యామితీయ నిరూపణ.<br><br>**(iv) కారణాంక విభజన**<br>• సామాన్య సమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన<br>• పదాలను సమూహాలుగా చేయుట ద్వారా కారణాంక విభజన<br>• సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించుట ద్వారా కారణాంక విభజన<br>• $(x + a)(x + a)$ రూపములోని సమాసాల కారణాంక విభజన<br>• బీజీయ సమాసాల భాగాహారము |

SCERT, TELANGANA

| | |
|---|---|
| **Arithmetic (20 hrs)**<br>(i) **Comparing Quantities using proportion**<br>(ii) **Direct and Inverse proportion** | **(i) Comparing Quantities using proportion**<br>• Compound ratio - Word problems.<br>• Problems involving applications on percentages, profit & loss, overhead expenses, Discount, tax. (Multiple transactions)<br>• Difference between simple and compound interest (compounded yearly up to 3 years or half-yearly up to 3 steps only), Arriving at the formula for compound interest through patterns and using it for simple problems. |
| | **(ii) Direct and Inverse proportion**<br>• Direct variation - Simple and direct word problems. Inverse variation -Simple and direct word problems. Mixed problems on direct, inverse variation<br>• Time & work problems- Simple and direct word problems<br>• Time & distance: Simple and direct word problems |
| **Geometry (40 hrs)**<br>(i) **Construction of Quadrilaterals**<br>(ii) **Representing 3-D in 2D**<br>(iii) **Exploring Geometrical Figures** | **(i) Construction of Quadrilaterals**<br>• Review of quadrilaterals and their properties.<br>• Construction of quadrilaterals, given with<br>(i) Four sides and one angle<br>(ii) Four sides and one diagonal<br>(iii) Two adjacent sides, three angles<br>(iv) Three sides and two diagonals.<br>(v) Three sides and two angles in between them are given<br>• Construction of special types of quadrilaterals with two diagonals. |
| | **(ii) Exploring Geometrical Figures**<br>• Congruent figures<br>• Similar figures<br>• Symmetry in geometrical figures w.r.t. to triangles, quadrilaterals and circles. |
| | **(ii) Representing 3-D in 2D**<br>• Identify and Match pictures with objects [more complicated e.g. nested, joint 2-D and 3-D shapes (not more than 2)].<br>• Drawing 2-D representation of 3-D objects (Continued and extended) with isometric sketches. |

SCERT, TELANGANA

| | |
|---|---|
| **అంకగణితం (20 గంటలు)**<br>**(i) అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట**<br>**(ii) అనులోమ, విలోమ నిష్పత్తులు** | **(i) అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట**<br>• బహుళ నిష్పత్తి – పద సమస్యలు<br>• శాతాలు, లాభ–నష్టాలు, ఇతర ఖర్చులు, డిస్కౌంట్, పన్నులు మొదలైన వానికి సంబంధించిన సమస్యలు<br>• వడ్డీ, చక్రవడ్డీల మధ్య గల భేదాలు (చక్రవడ్డీ సమస్యలు 3 సోపానాలకు పరిమితము, అర్ధ సంవత్సరానికి తిరగ గట్టే లెక్కలలో 3 సోపానాలకు మాత్రమే పరిమితి). అమరికల ద్వారా చక్రవడ్డీకి సూత్రమును రాబట్టుట.<br><br>**(ii) అనులోమ, విలోమ నిష్పత్తులు**<br>• సులభమైన పదసమస్యలు, విలోమానుపాతము – సులభమైన పద సమస్యలు, మిశ్రమానుపాతము – సులభ పద సమస్యలు<br>• పని–కాలమునకు సంబంధించిన సులభ పద సమస్యలు<br>• దూరము–కాలమునకు సంబంధించిన సులభ పద సమస్యలు |
| **రేఖాగణితం (40 గంటలు)**<br>**(i) చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు**<br>**(ii) జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ**<br>**(iii) త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట** | **(i) చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు**<br>• చతుర్భుజాల ధర్మాల పునరావలోకనము<br>• చతుర్భుజములు నిర్మించుటలో<br>(i) ఒక కోణము నాలుగు భుజాలు ఇచ్చినపుడు<br>(ii) ఒక కర్ణము నాలుగు భుజాలు ఇచ్చినపుడు<br>(iii) మూడు కోణాలు, రెండు ఆసన్న భుజాలు ఇచ్చినపుడు<br>(iv) మూడు భుజాలు, రెండు కర్ణాలు ఇచ్చినపుడు<br>(v) మూడు భుజాలు, వాని మధ్యలోని రెండు కోణాలు ఇచ్చినపుడు<br>• ప్రత్యేక చతుర్భుజాల నిర్మాణము<br><br>**(iii) త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట**<br>• సర్వ సమాన పటాలు<br>• సరూప పటాలు<br>• త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాల పరంగా జ్యామితీయ పటాలలో సౌష్ఠవము<br><br>**(ii) జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ**<br>• పటాలను గుర్తించటం, పోల్చటం (2D మరియు 3D కలసివున్న పటాలు, వలలు)<br>• త్రిమితీయ వస్తువుల ఆకారాలను తుల్యబిందు రేఖాపటాలుగా ద్విమితీయంలో సూచించుట. |

SCERT, TELANGANA

| | |
|---|---|
| | • Counting vertices, edges & faces & verifying Euler's relation for 3-D figures with flat faces (cubes, cuboids, tetrahedrons, prisms and pyramids) |
| **Mensuration (15 hrs)**<br>**(i) Area of Plane Figures**<br>**(ii) Surface areas and Volumes** | **(i) Area of Plane Figures**<br>• Area of a triangle using Heron's formula (without proof) and its application in finding the area of a quadrilateral.<br>• Area of a trapezium<br>• Area of the quadrilateral and other polygons.<br>• Area of the circle & circular paths.<br><br>**(ii) Surface areas and Volumes**<br>• Surface area of a cube, cuboid<br>• Concept of volume, measurement of volume using a basic unit, volume of a cube, cuboid<br>• Volume and capacity. |
| **Data handling (15 hrs)**<br>**Frequency Distribution Tables and Graphs** | **Frequency Distribution Tables and Graphs**<br>• Revision of Mean, Median and Mode of ungrouped data.<br>• Determination of mean by deviation method.<br>• Scope and necessity of grouped data.<br>• Preparation of frequency distribution tables<br>• Cumulative frequency distribution tables<br>• Frequency graphs (histogram, frequency polygon, frequency curve, cumulative frequency curves) |

SCERT, TELANGANA

| | |
|---|---|
| | • ఘనము, దీర్ఘఘనం, చతుర్ముఖి, పట్టకాలు, పిరమిడ్లు మొదలైన వాటి యొక్క శీర్షాలు, అంచులు, ముఖాలను లెక్కించుట, యూలర్ ఫార్ములాను సరిచూచుట. |
| **క్షేత్రమితి (15 గంటలు)**<br>**(i) సమతల పటాల వైశాల్యములు**<br>**(ii) సమతల వైశాల్యములు మరియు ఘన పరిమాణములు (ఘనం-దీర్ఘఘనం)** | **(i) సమతల పటాల వైశాల్యములు**<br>• త్రిభుజ వైశాల్యానికి హెరాన్ సూత్రము మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుట దీని అన్వయము.<br>• ట్రెపీజియం వైశాల్యము<br>• చతుర్భుజం మరియు దీర్ఘఘనాల ఉపరితల వైశాల్యాలు.<br>• వృత్త వైశాల్యము, వృత్తాకార బాటల వైశాల్యము<br>**(ii) సమతల వైశాల్యములు మరియు ఘన పరిమాణములు (ఘనం-దీర్ఘఘనం)**<br>• సమఘనము మరియు దీర్ఘఘనముల ఉపరితల వైశాల్యములు<br>• ఘనపరిమాణము - భావన, ప్రాథమిక పరిమాణములో ఘనపరిమాణాలను కొలుచుట<br>• ఘనపరిమాణము మరియు సామర్థ్యము |
| **దత్తాంశ నిర్వహణ (15 గంటలు)**<br>**పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు** | **పౌన్నపున్య విభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు**<br>• ముడి దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకముల పునర్విమర్శ<br>• ఆవర్గీకృత దత్తాంశమునకు విచలన పద్ధతిలో అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనుట<br>• వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క పరిధి, ఆవశ్యకతలను చర్చించుట.<br>• పౌన్నపున్య విభాజన పట్టికలను తయారుచేయుట.<br>• పౌన్నపున్య విభాజన పట్టికలకు సంచిత పౌన్నపున్యాలను తయారు చేయుట<br>• పౌన్నపున్య వక్రాలు (సోపాన చిత్రము, పౌన్నపున్య బహుభుజి, వక్రము, ఓజివ్ వక్రములు) గీయుట |

SCERT, TELANGANA

# Academic Standards

*Academic standards are clear statements about what students must know and be able to do. The following are categories on the basis of which we lay down academic standards*

## Problem Solving

Using concepts and procedures to solve mathematical problems

**(a) Kinds of problems**

Problems can take various forms- puzzles, word problems, pictorial problems, procedural problems, reading data, tables, graphs etc.

**(b) Problem Solving**

- Reads problems
- Identifies all pieces of information/data
- Separates relevant pieces of information
- Understanding what concept is involved
- Recalling of (synthesis of) concerned procedures, formulae etc.
- Selection of procedure
- Solving the problem
- Verification of answers of raiders, problem based theorems.

**(c) Complexity**

The complexity of a problem is dependent on

- Making connections( as defined in the connections section)
- Number of steps
- Number of operations
- Context unraveling
- Nature of procedures

## Reasoning Proof

- Reasoning between various steps (involved invariably conjuncture).
- Understanding and making mathematical generalizations and conjectures

SCERT, TELANGANA

# విద్యా ప్రమాణాలు

*విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసియుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది. గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.*

## సమస్యా సాధన

గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

**అ) సమస్యలలో రకాలు**

పజిల్స్, పద సమస్యలు, పట సమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ – పట్టికలు– గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

**ఆ) సమస్యా సాధన**

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం

**ఇ) సంక్లిష్టత**

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలో ఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం

## కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణ చేయడం

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రతిపాదనలు అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.

SCERT, TELANGANA

- Understands and justifies procedures
- Examining logical arguments.
- Understanding the notion of proof
- Uses inductive and deductive logic
- Testing mathematical conjectures

**Communication**

- Writing and reading, expressing mathematical notations (verbal and symbolic forms)

  Ex: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, Sum of angles in a triangle = $180^0$
- Creating mathematical expressions
- Explaining mathematical ideas in her own words like- a square is closed figure having four equal sides and all equal angles
- Explaining mathematical procedures like adding two digit numbers involves first adding the digits in the units place and then adding the digits at the tens place/ keeping in mind carry over.
- Explaining mathematical logic

**Connections**

- Connecting concepts within a mathematical domain- for example relating adding to multiplication, parts of a whole to a ratio, to division. Patterns and symmetry, measurements and space
- Making connections with daily life
- Connecting mathematics to different subjects
- Connecting concepts of different mathematical domains like data handling and arithmetic or arithmetic and space
- Connecting concepts to multiple procedures

**Visualization & Representation**

- Interprets and reads data in a table, number line, pictograph, bar graph, 2-D figures, 3-D figures, pictures
- Making tables, number line, pictograph, bar graph, pictures.
- Mathematical symbols and figures.

SCERT, TELANGANA

- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్చలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం

## వ్యక్తపరచడం

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం – రాయగలగడం.

  ఉదా: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, త్రిభుజంలోని మూడు కోణముల మొత్తం = $180^0$
- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడం. ఉదా: చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా: రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదటి ఒకట్ల స్థానం అంకెలను కూడి తరువాత పదుల స్థానంలోని అంకెలను కూడడం / స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

## అనుసంధానం

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను – భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి – నిష్పత్తికి – భాగహారానికి; అమరికలకు – సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/అంతరాళం
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: దత్తాంశ సేకరణ మరియు అంకగణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

## దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్య పరచడం

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం, 2D-పటాలు, 3D-పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.
- గణితపు గుర్తులు మరియు పటాలు

SCERT, TELANGANA

# LEARNING OUTCOMES

## MATHEMATICS  CLASS 8

## The learner....

- Generalizes properties of addition, subtraction, multiplication and division of rational numbers through patterns.
- Finds desired number of rational numbers in between any two given rational numbers.
- Proves divisibility of 2,3,4,5,6,9 and 11 by using algebraic methods and solves puzzles/ daily life problems.
- Solves problems using exponential laws in daily life.
- Finds squares, cubes, square roots and cube roots using different methods.
- Applies concept of percent in profit-loss, discount, VAT, simple interest, compound interest. And also solves problems involving ratios, direct and indirect variation.
- Solves daily life problems using algebraic expressions and identities. Also solves problems involving linear equations in one variable.
- Identifies similar figures. Calculates the ratio of corresponding parts.
- Constructs the quadrilaterals with given measurements.
- Finds the areas of trapezium, rhombus by using formulae. and finds areas of polygons and scalene quadrilaterals by dividing the region into triangles.
- Finds areas of figures/ designs involving area of circle and area of sector.
- Calculates the surface areas and volumes of cubes and cuboids.
- Finds mean, median and mode a data given in a tabular form.
- Represents the data in bar graphs, frequency curves and pi charts.

© SCERT TELANGANA

# ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాలు

## గణితం

8వ తరగతి

### విద్యార్థులు ఇవన్నీ నేర్చుకుంటారు.....

- అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ ప్రక్రియల ఆధారంగా సంఖ్యల క్రమాలను (patterns) పరిశీలించి ఆ సంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణీకరించగలరు. ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య కోరినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను చెప్పగలరు.
- 2, 3, 4, 5, 6, 9 మరియు 11ల భాజనీయతా సూత్రాలను నిరూపించగలరు. నిజజీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో పజిల్స్‌ను సాధించగలరు.
- ఘాతాంకన్యాయాలను వినియోగించుకొని సమస్యలను పరిష్కరించగలరు. సంఖ్యల వర్గాలు, ఘనాలు, వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు వివిధ ప్రమాణ పద్ధతులనుపయోగించి కనుక్కోగలరు.
- లాభ-నష్టాలు, డిస్కౌంట్, సాధారణ వడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ లకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించుటలో శాతము, నిష్పత్తులను వినియోగించగలరు.
- అనులోమ, విలోమానుపాతములకు సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించగలరు.
- బీజీయ సమాసాలను, బీజీయ సర్వసమీకరణములు (Identities) మరియు ఒక చరరాశిలో బీజీయ సమీకరణములను వినియోగించుకొని నిజజీవితంలోని సమస్యలను సాధించగలరు.
- సరూప పటాలను గుర్తించగలరు. సరూప పటాలలోని భాగాలను సాదృశ్య నిష్పత్తుల ఆధారంగా కనుక్కోగలరు.
- ఇవ్వబడిన విలువల ఆధారంగా చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు చేయగలరు.
- సమలంబ చతుర్భుజం, రాంబస్, చతుర్భుజ వైశాల్యాలను సూత్రాల ఆధారంగా కనుక్కోగలరు. బహుభుజులు, విషమబాహు చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను త్రిభుజాలలో విభజించడం ద్వారా కనుక్కోగలరు.
- వృత్త వైశాల్యం, సెక్టారు వైశాల్యం లకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించగలరు.
- సమఘనం, దీర్ఘ ఘనం ల ఉపరితల వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములు కనుక్కోగలరు.
- పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలలో ఉన్న దత్తాంశానికి సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకంలను కనుక్కోగలరు.
- ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు, పౌనఃపున్య వక్రాలు, పై చిత్రాలు గీయగలరు.

విద్య మా హక్కు
సర్వశిక్షా అభియాన్

పాఠశాల విద్యా శాఖ,
తెలంగాణ ప్రభుత్వం

NCERT

# Textbook - Overview

The Government of Telangana has decided to revise the curriculum of all the subjects based on the State Curriculum Framework (SCF-2011) which recommends that life of children in schools must be linked to their life outside the school. Right to Education (RTE-2009) makes mandatory that every child entering school should acquire the necessary abilities prescribed at each level up to the age of 14 years. Therefore introduction of a syllabus based on National Curriculum Framework-2005 and SCF-2011 was necessary. The position paper on mathematics teaching brought out by the NCERT in 2006 and the position paper on the same subject by SCERT Telangana (and AP) 2011, pointed out that fear of mathematics makes many children drop out of school. It is because of this that it becomes important to make the school and classroom experience especially in mathematics more pertinent and comprehensible. The syllabus and material must be aligned to the national and state perspective on mathematics education and prepare our students with a strong base in mathematics and science without burdening them with too much information and/or memorization.

The strength of a nation lies in its commitment and capacity to prepare its people to meet the needs and aspirations of a progressive technological society. The syllabus in mathematics for three stages i.e. primary, upper primary and secondary is based on structured and spiral approaches. The teachers of secondary school mathematics have to look at the syllabus of classes 8 to 10 with this background. They must widen and deepen the understanding and application of concepts learnt by pupils in primary and upper primary stages. The syllabus of upper primary classes is based on the structural approach, laying emphasis on the discovery and understanding of basic mathematical concepts and generalizations. The text book has been written on the basis of curriculum. It has emerged after a thorough review of the previous books and books of equivalent states. The approach in curriculum, the syllabus, textbooks and hence in classroom processes is to encourage the pupils to participate, discuss and take an active part in the classroom processes.

Being the final stage of the elementary education, mathematics of class 8 is a bridge to mathematics of class 9 which deals with abstraction and more complex mathematical ideas and moving into beginning of formal mathematics.

The textbook attempts to give ample opportunities and space for children to engage in tasks and attempt problems based on the concepts included in the syllabus. For instance tasks like 'Do this' and 'Try this' have been included in between that involves thinking, reflecting and doing. The teacher and the students are supposed to pause and do these before moving forward and only give support, if needed.

The chapters are arranged in a spiral manner that children revisit each set of concepts of different areas at different times in the course of the year.

The syllabus has been divided broadly into six areas namely, (1) Number System (2) Algebra (3) Arithmetic (4) Geometry (5) Mensuration and (6) Data Handling.

**Description of the chapters:**

There are three chapters related to numbers and their properties. The chapter on rational numbers engages with problems dealing with multiplication and division operations on rational numbers. It also generalizes the properties of numbers to include rational numbers. There are four chapters focusing on operations and properties of algebraic expressions and equations to build a base for operations on linear equations with one or more variable. Children will learn to use graphs to analyze the nature of changes in quantities in linear relationships as well as solve contextualized problems represented in the form of tables and equations. In this way children would be able to identify quantitative relationships among variables and constants using mathematical models.

There are two chapters that relate to ratio and proportion and their application. In these the students engage with problems involving comparison of quantities using proportion like percentage, profit and loss, discount, tax, simple and compound interest. These chapters although distinct in the quantities that they use, are conceptually interrelated. They build on each other and hence can be used in a spiral manner to build an understanding of comparing quantities. Children learn about geometrical figures and patterns at an early stage. Now they have to learn to give a logical explanation for relationships in the frame of an argument. To understand the relationship between geometrical figures children have been introduced to the construction of geometrical figures with the help of some operations and their properties. In mensuration, two chapters deal with the areas of plane figures and the surface areas and volumes of 2-Dimensional and 3-Dimensional objects. Areas of some shapes have been calculated as sum of areas of basic shapes like rectangles and triangles. The syllabus discusses about different forms of representation of mathematical data in various ways such as graphs and frequency tables to signify the importance of organization and comprehension of data.

Therefore it is expected that the teachers will bring a paradigm shift in the classroom processes from routinely solving the problems in the exercises to build basic conceptual understanding and solving problems with ingenuity.

**- Textbook Development Committee**

SCERT, TELANGANA

# పాఠ్యపుస్తకం - వివరణ

రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళిక చట్టం (ఎస్.సి.ఎఫ్. 2011) లో సూచించిన అనేక సిఫార్సుల్లో ప్రధానమైనది "పాఠశాలలో విద్యార్థుల అభ్యసనం, పాఠశాల బయట జీవితం (నిజ జీవితంతో) ముడిపడి ఉండాలి. దీనికనుగుణంగా మన రాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని పాఠ్యాంశాలలోనూ విద్యాప్రణాళిక సవరించుటకు నిర్ణయించినారు. విద్యాహక్కు చట్టం (ఆర్.టి.ఇ. 2009) ప్రకారం 14 సం॥ల వయస్సువరకు పాఠశాలలో చేరిన ప్రతి విద్యార్థి అన్ని స్థాయిలలో నిర్దేశించిన నైపుణ్యాలను, ప్రమాణాలను తప్పనిసరిగా పొందాలని సూచిస్తున్నది. అందువల్ల జాతీయ విద్యాప్రణాళిక చట్టం (2005) మరియు రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళిక చట్రం 2011 ఆధారంగా పాఠ్యాంశాలు ప్రవేశపెట్టడం అవసరం. 2006లో ఎన్.సి.ఇ.ఆర్.టి. తీసుకువచ్చిన పొజిషన్ పేపర్స్ మరియు ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ (మరియు ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం) 2011 పొజిషన్ పేపర్స్‌లో గణితం అంటే భయం అనేది చాలా మంది పిల్లలను పాఠశాల నుండి దూరం చేస్తుంది అనే అంశాన్ని ప్రస్తావించాయి. ఈ కారణంగానే పాఠశాల మరియు తరగతి గదుల అనుభవాన్ని ముఖ్యంగా గణితంలో సందర్భోచితంగా మరింత అర్థమయ్యేలా చేయడం చాలా ముఖ్యం. పాఠ్యాంశాలు (సిలబస్ & మెటీరియల్) గణిత విద్యపై జాతీయ మరియు రాష్ట్ర దృక్పథానికి అనుగుణంగా ఉండాలి మరియు విజ్ఞాన శాస్త్రంలో బలమైన పునాదితో సిద్ధం చేయాలి.

ఒక దేశం యొక్క బలం ప్రగతిశీల సాంకేతిక సమాజం యొక్క అవసరాలు మరియు ఆకాంక్షలను తీర్చడానికి తన ప్రజలను సిద్ధంచేసే నిబద్ధత మరియు సామర్థ్యంలో ఉంది. గణిత విద్యాప్రణాళిక ప్రధానంగా మూడు దశలు అంటే ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత మరియు సెకండరీ స్థాయిలో, శీర్షిక సర్పిల విధానాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. సెంకడరీ స్థాయిలో గణిత ఉపాధ్యాయులు ఉన్నత తరగతుల గణిత పాఠ్య ప్రణాళికను ఈ దృష్టిలో అధ్యయనం చేసి విద్యార్థులు ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత దశలలో నేర్చుకున్న గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృతపరచుకోడానికి తోడ్పడాలి. ప్రాథమికోన్నత తరగతుల సిలబస్ నిర్మాణాత్మకంపై ఆధారపడి, ప్రాథమిక గణిత అంశాలు మరియు సాధారణీకరణల యొక్క ఆవిష్కరణ మరియు అవగాహనకు ప్రాధాన్యత ఇస్తుంది. పాఠ్యపుస్తకం పాఠ్యప్రణాళిక ఆధారంగా వ్రాయబడింది. మునుపటి పుస్తకాలు మరియు ఇతర రాష్ట్రాలలోని సమానస్థాయి పుస్తకాలను క్షుణ్ణంగా సమీక్షించిన తరువాత ఇది రూపొందించబడింది. పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తకాలు తరగతి గది ప్రక్రియలలో పాల్గొనడానికి, చర్చించడానికి మరియు చురుకుగా పాల్గొనడానికి విద్యార్థులను ప్రోత్సహించే విధంగా ఉన్నాయి.

ప్రాథమిక విద్య యొక్క చివరి దశ అయిన 8వ తరగతి గణితం, సంగ్రహన మరియు సంక్లిష్టమైన గణిత ఆలోచనలతో కూడిన గణిత ప్రారంభంలోకి ప్రవేశించే 9వ తరగతి గణితానికి ఒక వారధి వంటిది.

పాఠ్యపుస్తకం పిల్లలకు పనులలో పాల్గొనడానికి తగినంత అవకాశాలను ఇవ్వడానికి ప్రయత్నిస్తుంది మరియు పాఠ్యాంశాలలో చేర్చబడిన అంశాల ఆధారంగా విద్యార్థులు సమస్యలను సాధించేటట్లు ప్రయత్నిస్తుంది. ఉదాహరణకు 'దీన్ని చేయండి' మరియు 'దీన్ని ప్రయత్నించండి' వంటి పనులను మధ్య మధ్యలో చేర్చబడ్డాయి. వీటిలో ఆలోచించడం, ప్రతిబింబించడం మరియు చేయడం ఉంటాయి. ఉపాధ్యాయుడు మరియు విద్యార్థులు వీటిని ముందు సాధించిన తరువాత ముందుకుసాగాలి. ఉపాధ్యాయులు అవసరమైనంతవరకు మాత్రమే సహాయపడాలి.

విద్యా సంవత్సరంలో అనేక మార్లు పిల్లలు అనేక విషయాల యొక్క భావనలను పున్ణసమీక్షించే విధంగా అధ్యాయాలు ఒక (స్పైరల్) పద్ధతిలో కూర్చబడి ఉంటాయి. ఈ తరగతికి పాఠ్య ప్రణాళిక ప్రధానంగా ఆరు ప్రధాన భాగాలుగా విభజించారు. అవి 1) సంఖ్యా వ్యవస్థ, 2) బీజగణితం, 3) అంకగణితం, 4) రేఖాగణితం, 5) క్షేత్రగణితం, 6) దత్తాంశ నిర్వహణ.

**అధ్యాయాల వివరణ:**

సంఖ్యలు మరియు వాటి లక్షణాలకు సంబంధించిన మూడు అధ్యాయాలున్నాయి. అకరణీయ సంఖ్యల అధ్యాయం, అకరణీయ సంఖ్యలపై గుణకారం మరియు భాగహార సమస్యలతో కూడి ఉంటుంది. ఇది అకరణీయ సంఖ్యలకు ఉండే లక్షణాలను సాధారణీకరిస్తుంది. ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చరరాశులుగల సమీకరణాల సమస్య సాధనకై బీజగణిత వ్యక్తీకరణలు మరియు సమీకరణాల యొక్క లక్షణాలపై దృష్టిసారించే నాలుగు అధ్యాయాలు ఉన్నాయి. విద్యార్థులు సరళ సంబంధాలతో పరిమాణాల మార్పుల స్వభావాన్ని విశ్లేషించడానికి గ్రాఫ్‌లు ఉపయోగించడం నేర్చుకుంటారు. అలాగే పట్టికలు మరియు సమీకరణ రూపంలో సందర్భోచిత సమస్యలను పరిష్కరించుకుంటారు. ఈ విధంగా పిల్లలు గణిత నమూనాలను ఉపయోగించి చరరాశులు మరియు స్థిరాంకాల మధ్య పరిమాణ సంబంధాలను గుర్తించగలుగుతారు.

నిష్పత్తి మరియు అనుపాతము మరియు వాటి అనువర్తనానికి సంబంధించిన రెండు అధ్యాయాలున్నాయి. వీటిలో విద్యార్థులు రుసుము శాతము, లాభ నష్టాలు, అమ్మకపుపన్ను, బారువడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ వంటి నిష్పత్తిని ఉపయోగించి, పరిమాణాలను పోల్చే సమస్యలను సాధిస్తారు. ఈ అధ్యాయాలు వారు ఉపయోగించే పరిమాణాలు విభిన్నమైనవి అయినప్పటికి, వాటి భావనలు పరస్పర సంబంధం కలిగి ఒకదానిపై ఒకటి ఆధారపడి ఉంటాయి. అందువల్ల పరిమాణాలను పోల్చడంపై అవగాహన పెంచుకోవడానికి సర్పిల పద్ధతిలో వాటిని ఉపయోగించవచ్చు. పిల్లలు ప్రారంభదశలో రేఖాగణిత బొమ్మలు మరియు నమూనాల గురించి తెలుసుకోవడం మరియు వాటిమధ్య సంబంధాలకు తార్కిక వివరణ ఇవ్వడం నేర్చుకోవాలి. రేఖాగణిత బొమ్మల మధ్య సంబంధాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి కొన్ని ప్రక్రియలు మరియు వాటి లక్షణాల సహాయంతో పిల్లలకు రేఖాగణిత నిర్మాణాలను పరిచయం చేశారు. క్షేత్ర గణిత విభాగంలో రెండు అధ్యాయాలు ఉన్నాయి. అవి సమతల పటాల వైశాల్యాలు మరియు 2D మరియు 3D జ్యామితీయ పటాల ఉపరితల వైశాల్యం అలాగే దీర్ఘ చతురస్రాల మరియు త్రిభుజాల వంటి ప్రాథమిక ఆకృతుల వైశాల్యాలు కూడా గణన చేయడమైనది. సేకరించిన సమాచారాన్ని పటాలలో సూచించడానికి గ్రాఫ్స్ మరియు పౌనఃపున్య పట్టికల వంటి వివిధ మార్గాల్లో గణిత సమాచారం యొక్క వివిధ రకాల ప్రాతినిధ్యాల గురించి పాఠ్యప్రణాళిక చర్చిస్తుంది.

కావున ఉపాధ్యాయులు ఒక దృక్పథ మార్పును తీసుకువచ్చి తరగతి గది ప్రక్రియలలో మామూలుగా అభ్యాసాలలోని సమస్యలను సాధించడమేకాక భావనల అవగాహనను పెంపొందిస్తారని మరియు స్వతహాగా సమస్యలను సాధింపచేస్తారని ఆశించడమైనది.

**– పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ**

SCERT, TELANGANA

## George Polya (1887 - 1985)

**George Polya (1887-1985)**

Over the years, many have thought about the question whether the art of problem solving can be taught or is it a talent possessed by only a few? An effective and definite answer was given by the late George Polya. He maintained that the skill of problem solving can be taught.

Polya was born in Hungary in 1887 and received his Ph.D. in mathematics from the University of Budapest. He taught for many years at the Swiss Federal Institute of Technology in Zurich.

Among the numerous books that he wrote he seemed most proud of 'How to Solve It' (1945) which has sold nearly one million copies and has been translated into 17 languages.

Polya's Four principles of Problem solving

### I. Understand the problem

This principle seems so obvious that it need not be mentioned. However students are often stymied in their efforts to solve a problem because they don't understand it fully or even in part. Teachers should ask students such questions as

• Do you understand all the words used in stating the problems? If not, look them up in the index, in a dictionary or wherever they can be found. • What are you asked to find or show can you restate the problem in your own words. • Is there yet another way to state the problem • What does (key word) really mean? • Could you workout some numerical examples that would help make the problem clear? • Could you think of a picture or diagram that might help you to understand the problem. • Is there enough information to enable you to find a solution. • Is there extraneous information? • What do you really need to know to find a solution.

### II. Devise a plan

Devising a plan for solving a problem once it is fully understood may still required substantial effort. But don't be afraid to make start you may be on the right track. There are often many reasonable ways to try to solve a problem and the successful idea may emerge only gradually after several unsuccessful trials. A partial list of strategies include.

• guess and check • look for a pattern • make an orderly list • draw a picture
• think of the problem as particularly solved • think of a similar problem already solved
• eliminate possibilities • solve simpler problem • solve an equivalent problem
• solve an analogous problem • use symmetry • use a model • consider special cases
• work backward • use direct reasoning • use a formula • solve an equation • be ingenious

### III. Carryout the plan

Carrying out the plan is usually easier than devising the plan. In general all you need is care and patience, given that you have the necessary skills. If a plan does not work immediately be persistent. If it still does n't work, discard it and try a new strategy. Don't be misled this is the way mathematics is done, even by professionals.

### IV. Look back

Much can be gained by looking back a completed solution to analyze your thinking and ascertain just what was the key for solving the problem. This is how we gain "Mathematical power", the ability to come up with good ideas for solving problems never encountered before.

SCERT TELANGANA

## జార్జ్ పోల్యా (1887 - 1985)

జార్జ్ పోల్యా
(1887-1985)

'సమస్యాసాధన' అనేది నేర్చుకొనే అంశమా? లేదా ఇది కొంతమంది తెలివైన వారికి గల సహజ సిద్ధమైన సామర్థ్యమా? అనే ప్రశ్న అనేక సంవత్సరాలుగా ప్రపంచవ్యాప్తంగా అందరూ చర్చిస్తున్న ప్రశ్న. దీనికి ఖచ్చితమైన, ఆమోదింపదగిన సమాధానాన్ని ఇచ్చిన మొదటి వ్యక్తి కీ.శే. జార్జ్ పోల్యా. ఈయన దృష్టిలో సమస్యాసాధన నైపుణ్యం అనేది తప్పనిసరిగా నేర్చుకోవలసిన అంశం. దీనికి అనేక సిద్ధాంతాలు ఈయన ప్రతిపాదించాడు. 'పోల్యా' హంగేరీ దేశంలో 1887 సంవత్సరంలో జన్మించాడు. "యూనివర్శిటీ ఆఫ్ బుడాపెస్ట్" నుండి గణితంలో డాక్టరేట్ పట్టా పొందారు. జ్యూరిచ్‌లో గల "స్విస్ ఫెడరల్ ఇన్స్టిట్యూట్ ఆఫ్ టెక్నాలజీ"లో చాలా కాలం ఆచార్యునిగా పనిచేసారు. ఈయన రచించిన అనేక గ్రంథాలలో చెప్పదగినది. 'How to Solve It' (1945). సుమారు 17 భాషలలో తర్జుమా అయి సుమారు ఒక మిలియన్ కాపీలు అమ్మబడినవి.

పోల్యా చెప్పిన నాలుగు "సమస్యాసాధన" నియమాలు

### I. సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం (Understand the problem)

• నియమం గురించి మనము ప్రత్యేంగా చెప్పవలసిన అవసరం లేదు. కాని విద్యార్థులు ఒక సమస్యను సాధించుటలో వారి నైపుణ్యాలను ఎక్కడ కేంద్రీకరించాలో తెలియక తికమక పడుతుంటారు. దీనికి కారణం సమస్యను పూర్తిగానూ, కొంతవరకైననూ సరిగా అవగాహన చేసుకొనకపోవడమే. దీనిని అధిగమించడానికి ఉపాధ్యాయులు క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలను వేయవచ్చు. • సమస్యలో ఇవ్వబడిన పదాలన్నీ అర్థమైనాయా? కాకపోతే తగిన నిఘంటువులో వెతికి తెలుసుకోవాలి. • సమస్యలో ఏమి కనుగొనాలి అని తెలుసుకోవడానికి సమస్యను సొంతమాటలలో వ్రాసుకోవాలి. ఇంకేవిధంగానైనా వ్రాయగలమో పరిశీలించాలి. • అసలు సమస్యలో ప్రధానమైన మాటలకు అర్థమేమిటి? • దీనికొరకు ఏవైనా సంఖ్యానమూనాలను ఉదాహరణలుగా వ్రాసుకోవచ్చా? • లేదంటే పటంగాని, చిత్రంగాని దీని అవగాహనకొరకు గీయవచ్చా? • సమస్య సాధనకొరకు కావల్సిన సమాచారమంతా ఇవ్వబడినదా? • ఇది సరిపోతుందా? • అనవసర సమాచారం ఏమైనా ఉన్నదా? • అసలు సాధన కొరకు కావల్సిన సమాచారం ఏమిటి?

### II. పథకం రూపొందించుకొనుట (Devise a plan )

సమస్యను అవగాహన చేసుకొన్న పిదప సమస్యను సాధించాలంటే మరింత శ్రద్ధతో ఒకపథకం రూపొందించుకోవాలి. దీనికొరకు భయపడవల్సిన అవసరంలేదు. మీరు సక్రమంగానే ఆలోచిస్తున్నారనుకోండి. సమస్య సాధనకొరకు హేతుబద్ధమైన అనేక కారణాలనుబట్టి పద్ధతులు నిర్ణయించుకోవాల్సిన అవసరం ఉన్నది. కొన్ని ప్రయత్నాల అనంతరం తప్పక మనకు సరియైన పద్ధతి ఖచ్చితంగా తెలుస్తుంది. వీటిలో కొన్ని పద్ధతులు ఏమనగా

• ఊహించడం మరియు సరిచూచుకొనుట • అమరిక కొరకు ప్రయత్నించడం • క్రమంలో అంశాలు వ్రాసుకోవడం • పటం వేయడం • కొంతవరకు సాధించిన సమస్యను పరిశీలించడం • కొన్ని సందర్భాలను తొలగించండి. • అదేవిధమైన సమస్యను సాధించడం • సాదృశ్యం గల మరిన్ని సమస్యలు సాధించడం • సౌష్టవాన్ని వినియోగించడం • ఉపకరణాన్ని ఉపయోగించడం • ప్రత్యేక సందర్భాలు పరిశీలించడం • సమస్యను వెనుకకు చూడడం • ప్రత్యక్ష కారణాలు వినియోగించడం

• సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం • సమీకరణాన్ని సాధించడం • చాతుర్యం ప్రదర్శించడం.

### III పథకాలు అమలు చేయడం (Carryout the plan)

పథకాన్ని రూపొందించడం కన్నా పథకాన్ని అమలు చేయడం సులభతరమైన పని. దీనికొరకు జాగ్రత్తతో కూడిన శ్రద్ధ అవసరం. దీనికొరకు ప్రత్యేక నైపుణ్యాలు కలిగి వుండాలి. పథకం వెంటనే అమలు కానప్పటికీ దృఢంగా ఉండాలి. ఇంకనూ పథకం నెరవేరకపోతే దానిని విడిచిపెట్టి కొత్త పథకానికి అమలు చేయడానికి ప్రయత్నించవలెను. ఇది మీరు తప్పుగా భావించనవసరం లేదు. ఎందుకంటే చాలా మంది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు, వృత్తినిపుణులు ఇదే తరహాలో పథకాలను అమలు చేస్తారు.

### IV. తిరిగి చూడడం (Look Back)

ఒక సమస్యను సాధించిన పిదప సమస్యాసాధనను తిరిగి విశ్లేషిస్తే మనం చాలా విషయాలను గ్రహించవచ్చు. సమస్యకు మనం ఇచ్చిన సాధన ఏవిధంగా సత్యమైనదో సరిచూసుకోవచ్చు. ఇదే "గణిత శక్తి"ని పొందడానికి మూలాధారం. దీనినుండి మరిన్ని మంచి ఆలోచనలు రావడమే కాకుండా అపరిష్కృత సమస్యల సాధనకు దోహదపడుతుంది.

SCERT TELANGANA

# పిల్లలూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు...

- పాఠ్యపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉదాహరణలు లేదా సమస్యలు లేదా ఆటలు మొదలగునవి దానికి సంబంధించిన బొమ్మలు/పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బొమ్మతో పాటుచదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమానాలను వెంటనే మీ ఉపాధ్యాయులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- భావన అవగహన అయినది అని తెలుసుకొనుటకు "ఇవి చేయండి"లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేల సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా ఉపాధ్యాయున్ని అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- "ప్రయత్నించండి" శీర్షిక కింద ఉన్న సమస్యలు మీ ఆలోచనలను పదునుపెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. అనగా మీకు ఆలోచన నైపుణ్యాలను పెంపొందిస్తాయి. వీటిని స్వయంగా సాధించలేనపుడు తోటివిద్యార్థులతో కలిసి జట్లలో సాధించడానికి ప్రయత్నించాలి. లేదా ఉపాధ్యాయులతో చర్చించి సాధనను తెలుసుకోవాలి.
- "ఆలోచించండి–చర్చించండి"లోని కృత్యాలు మీరు భావనను మరింత లోతుగా విస్తృతంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కావున వీటిని మీ మిత్రులతో కలిసి చర్చిస్తూ, ప్రశ్నిస్తూ అవగాహన పొందండి.
- అధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావనలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్నీ ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా ఇంటిపనిగా గాని లేదా విరామ సమయంలో గాని సాధించవచ్చు.
- "ఇవి చేయండి" "ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యలు మాత్రం పాఠశాలలోనే ఉపాధ్యాయుల సమక్షంలో తప్పక సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ఎక్కడైతే ప్రాజెక్టులు ఇవ్వబడినవో వాటిని మీరు జట్లలో చేయవలసి ఉంటుంది. అయితే వీటి నివేదికలు మీరు వ్యక్తిగతంగా రాసివ్వవలసి ఉంటుంది.
- భావన అవగాహన కోసం నిర్వహించే కృత్యాలు, అభ్యాసాలలో ఉండే సమస్యలలో మీ ప్రతిస్పందనలను పాఠ్యపుస్తకంలోనే రాయవలసి ఉంటే వాటిని అక్కడే రాయాలి.
- మీరు ఏరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను మరికొన్నింటిని సేకరించి లేదా మీరు స్వయంగా తయారుచేసి గాని మీ ఉపాధ్యాయునికి, తోటి విద్యార్థులకు చూపించండి. అందరు కలిసి వాటిని సాధించండి.
- గణిత భావనలకు సంబంధించి పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చిన ఆటలు, పజిల్స్, ఆసక్తికరమైన విషయాలు అవగాహన చేసుకొని అలాంటివి మరికొన్ని సేకరించి సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికే పరిమితం చేయకుండా జీవితంలో (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం–నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగహనను వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసందానం చేయడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి.
- పై గణిత సామర్థ్యాలను సాధించడంలో భావనల అవగాహన పరంగా ఏవైనా ఇబ్బందులు ఎదురైతే ఎప్పటికప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహకారం తీసుకోవాలి.

SCERT, TELANGANA

# Text Book Development Committee

## Writers

**Sri. Tata Venkata Rama Kumar**
H.M., ZPPHS, Mulumudi, Nellore Dt.

**Sri. Soma Prasad Babu**
PGT. APTWRS, Chandrashekarapuram, Nellore

**Sri. Komanduri Murali Srinivas**
PGT.APTWR School of Excellence, Srisailam.

**Sri. Padala Suresh Kumar**
SA,GHS, Vijayanagar Colony, Hyderabad.

**Sri. P.D.L. Ganapati Sharma**
SA,GHS, Zamisthanpur, Manikeshwar Nagar, Hyd.

**Sri. Duggaraju Venu**
SA,UPS, Allawada, Chevella Mandal, R.R. Dt.

**Sri. P. Anthony Reddy**
H.M.,St. Peter's High School, R.N.Peta, Nellore.

**Sri D. Manohar**
SA, ZPHS, Brahmanpally, Tadwai (Mandal) Nizamabad Dt.

**Sri. Gottumukkala V.B.S.N. Raju**
SA, Mpl. High School, Kaspa, Vizianagaram.

**Sri. K.Varada Sunder Reddy**
SA, ZPHS,Thakkasila, Alampur Mandal Mahabubnagar Dt.

**Sri. Abbaraju Kishore**
SGT, MPUPS,Chamallamudi, Guntur Dt.

**Sri. G. Anantha Reddy**
Retd. Headmaster, Ranga Reddy Dt.

**Sri. M. Ramanjaneyulu**
Lecturer, Govt D.I.E.T., Vikarabad, R.R. Dt.

**Sri. M. Rama Chary**
Lecturer,Govt D.I.E.T., Vikarabad, R.R. Dt.

**Dr. A. Rambabu**
Lecturer, Government CTE, Warangal

**Dr. Poondla Ramesh**
Lecturer, Government IASE, Nellore

## Editors

**Prof. N.Ch.Pattabhi Ramacharyulu** (Retd.)
National Institute of Technology,
Warangal.

**Dr. S Suresh Babu**
Professor, Dept. of Statistics,
SCERT, Hyderabad

**Prof. V. Shiva Ramaprasad** (Retd.)
Dept. of Mathematics,
Osmania University, Hyderabad

**Dr. G.S.N. Murthy**
(Retd.)
Reader in Mathematics
Rajah R.S.R.K.R.R College, Bobbili

**Sri A. Padmanabham**
(Retd.)
H.O.D of Mathematics
Maharani College, Peddapuram

**Sri. K Brahmaiah**
(Retd.)
Prof., SCERT,
Hyderabad

## Co-ordinators

**Sri Kakulavaram Rajender Reddy**
SCERT, Hyderabad

**Sri K.K.V Rayalu**
Lecturer, IASE, Masab Tank, Hyderabad

## Academic Support Group Members

**Sri Inder Mohan** **Sri Yashwanth Kumar Dave** **Sri Hanif Paliwal** **Sri Asish Chordia**
Vidyabhawan Society Resource Centre, Udaipur

**Sri Sharan Gopal** **Kum M. Archana** **Sri P. Chiranjeevi**
Department of mathematics and Statistics, University of Hyderabad

## Illustrations and Design Team

**Sri Prasanth Soni** **Sri Sk. Shakeer Ahmad** **Sri S. M. Ikram**
Vidyabhawan Society Resource Centre, Udaipur.

**Sri D. Kannaiah**
SCERT, TS, Hyderabad.

## Cover Page Designing

**Sri. K. Sudhakara Chary,** HM, UPS Neelikurthy, Mdl.Maripeda, Dist. Warangal

SCERT, TELANGANA

## TEXTBOOK DEVELOPMENT & PUBLISHING COMMITTEE

Chief Production Officer : **Sri A. Satyanarayana Reddy,**
Director, SCERT, Hyderabad.

Executive Chief Organiser : **Sri B. Sudhakar,**
Director, Govt. Text Book Press, Hyderabad.

Organising Incharge : **Dr. Nannuru Upender Reddy,**
Prof. & Head, Curriculum & Text Book Department,
SCERT, Hyderabad.

### Chairperson for Position Paper and Mathematics Curriculum and Textbook Development

**Prof. V.Kannan,**
Department of Mathematics and Statistics,
Hyderabad Central University, Hyderabad

## CHIEF ADVISORS

**Sri Chukka Ramaiah**
Eminent Scholar in Mathematics
Telangana, Hyderabad.

**Dr. H.K.Dewan**
Educational Advisor, Vidya Bhavan Society
Udaipur, Rajasthan

## QR CODE TEAM

E8D8W4

SCERT TELANGANA