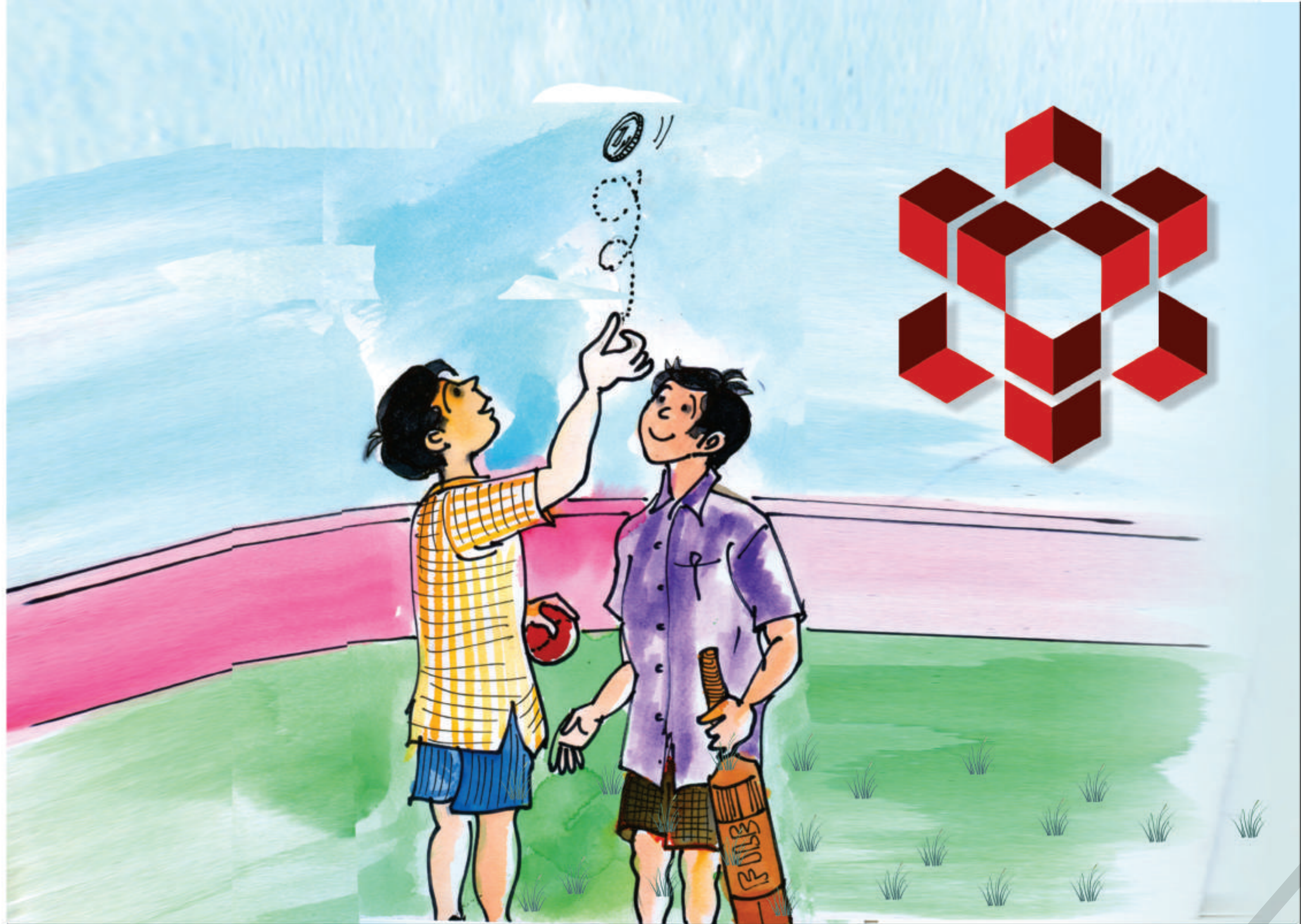


Government of Telangana

Department of Women Development & Child Welfare - Childline Foundation

When abused in or out of school.

To save the children from dangers and problems.

CHILD LINE 1098 NIGHT & DAY

24 HOUR NATIONAL HELPLINE

When the children are denied school and compelled to work.

When the family members or relatives misbehave.

1098 (Ten...Nine...Eight) dial to free service facility.

State Council of Educational Reasearch and Training
Telangana, Hyderabad

கணிதம் 9 வகுப்பு

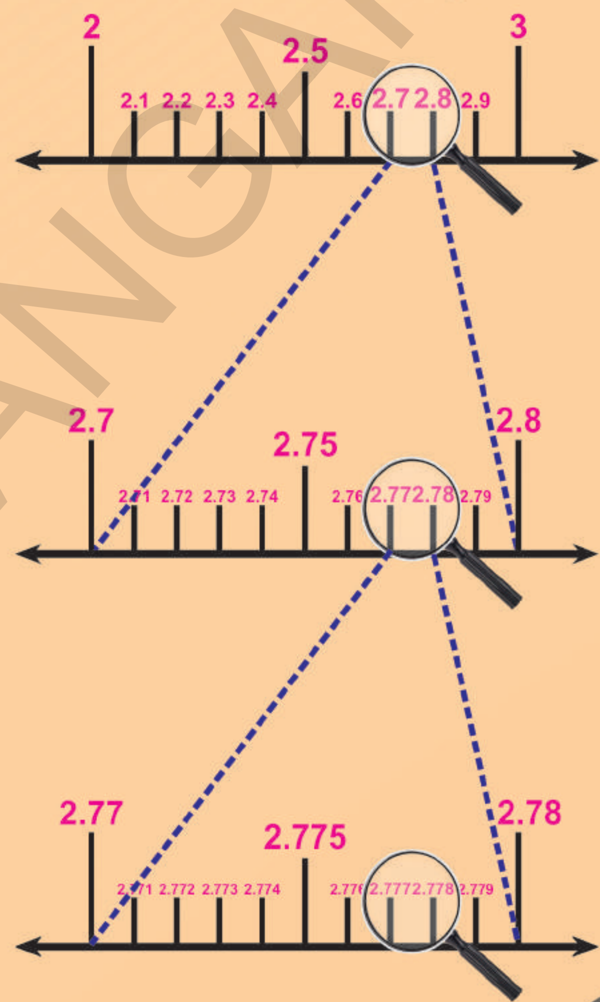
கணிதம் வகுப்பு 9

MATHEMATICS

Class IX

(TAMIL MEDIUM)

FREE



வெளியீடு
தெலங்கானா மாநில அரசு
ஐதராபாத்

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு

CHILDREN! THESE INSTRUCTIONS FOR YOU...

- For each and every conceptual understanding, a real life context with appropriate illustrations are given in the textbook. Try to understand the concept through keen reading of context along with observation of illustration.
- While understanding the concepts through activities, some doubts may arise. Clarify those doubts by through discussion with your friends and teachers, understand the mathematical concepts without any doubts.
- "Do this/Do these" exercises are given to test yourself, how far the concept has been understood. If you are facing any difficulty in solving problems in these exercises, you can clarify them by discussing with your teacher.
- The problems given in "Try this/try these", can be solved by reasoning, thinking creatively and extensively. When you face difficulty in solving these problems, you can take the help of your friends and teachers.
- The activities or discussion points given "Think and disicuss" have been given for extensive understanding of the concept by thinking critically. These activities should be solved by discussions with your fellow students and teachers.
- Different typs of problems with different concepts discussed in the chapter are given in an "Exercise" given at the end of the concept/chapter. Try to solve these problems by yourself at home or leisure time in school.
- The purpose of "Do this"/do these", and "Try this/try these" exercises is to solve problems in the presence of teacher only in the class itself.
- Wherever the "project works" are given in the textbook, you should complete them in groups. But the reports of project works should be submitted individually.
- Try to solve the problems given as homework on the day itself. Clarify your doubts and make corrections also on the day itself by discussions with your teachers.
- Try to collect more problems or make new problems on the concepts learnt and show them to your teachers and fellow students.
- Try to collect more puzzles, games and interesting things related to mathematical concepts and share with your friends and teachers.
- Do not confine mathematical conceptual understanding to only classroom. But, try to relate them with your suroundings outside the classroom.
- Student must solve problems, give reasons and make proofs, be able to communicate mathematically, connect concepts to understand more concepts & solve problems and able to represent in mathematics learning.
- Whenever you face difficulty in achieving above competencies/skills/standards, you may take the help of your teachers.

Wonderful Circle

Constructing the Nine-Point Circle of a triangle

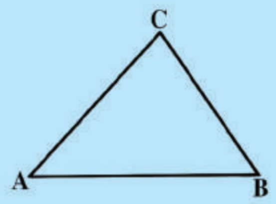
The circle which passes through the feet of the perpendiculars, dropped from the vertices of any triangle on the sides opposite them, passes also through the midpoints of these sides as well as through the midpoints of the segments which join the vertices to the point of intersection of the perpendiculars.

Do you know all that? This circle is called the Nine-Point Circle. This Nine-Point circle result was known to Leonard Euler 1765, but was rediscovered by German Mathematician Karl Feuerbach in 1822.

Constructing the nine-point circle is a good test of your construction skills and your ability.

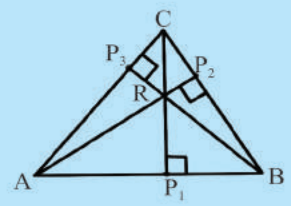
Just follow the instructions and try this

Step 1



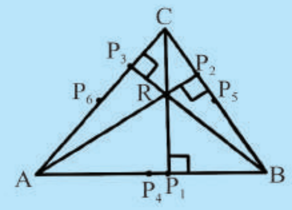
Construct a large scalene triangle on a sheet of white paper. Label it ΔABC

Step 2



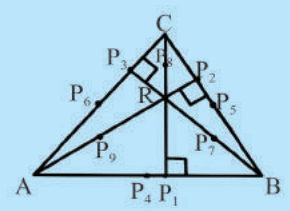
Construct the altitude to each side of the triangle and label the points of intersection with the sides P_1, P_2 and P_3. Name the orthocenter as R.

Step 3



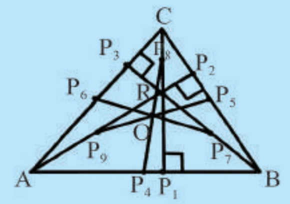
Construct the midpoint of each side of the triangle. Label the points P_4, P_5 and P_6 so that P_4 is the midpoint of $\overline{AB}$ and P_5 is the midpoint of $\overline{BC}$.

Step 4



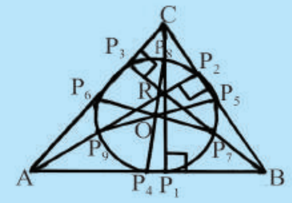
Construct the midpoints of $\overline{BR}$, $\overline{CR}$ and $\overline{AR}$ and label the points P_7, P_8 and P_9 so that P_7 is the midpoint of $\overline{BR}$ and P_8 is the midpoint of $\overline{CR}$.

Step 5



Construct the line segments connecting points P_4 to P_8, P_5 to P_9 and P_6 to P_7. They should all intersect in one point. Mark that point as 'O'.

Step 6



Construct a circle with radius OP_1 and center at point O. It should pass through all nine points: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9.

This is the wonderful circle. You might have observed that how "compass" play a major role in this Geometrical construction.

கணிதம்

ஒன்பதாம் வகுப்பு

MATHEMATICS

CLASS - IX

(TAMIL MEDIUM)

பாடப்புத்தக மேம்பாடு & வெளியிடும் குழு

தலைமை அலுவலர் : **திரு. A. சத்திய நாராயண ரெட்டி**
இயக்குநர், SCERT, ஐதராபாத்.

தலைமை செயலமைப்பாளர் : **திரு. B. சுதாகர்**
இயக்குநர், அரசு பாடப்புத்தக அச்சுக்கூடம்,
ஐதராபாத்.

அமைப்பு பொறுப்பாளர் : **டாக்டர். B. உபேந்திர ரெட்டி**
பேராசிரியர் & தலைவர், பாடத்திட்டம் & நூல் துறை
SCERT, ஐதராபாத்.

வெளியிடு

தெலங்கானா மாநில அரசு, ஹைதராபாத்

சட்டத்தை மதிப்போம்
உரிமைகளைப் பெறுவோம்

கல்வியால் உயர்வோம்
பணிவாய் நடந்துகொள்வோம்

New Edition
New Impression 2019

This Book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு 2019-20

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

பாடநூல் மேம்பாட்டுக்குழு

ஆய்வுத்தாள் மற்றும் பாடத்திட்டம் மற்றும பாடநூல் மேம்பாட்டு அமர்வாளர்

பேராசிரியர். V.கண்ணன்
கணிதம் மற்றும் புள்ளியல் துறை HCU, Hyderabad

தலைமை அறிவுரையாளர்கள்

சுக்கா இராமையா
கணிதத்தின் சிறந்த பண்டிதர்,ஆந்திரப் பிரதேசம், ஐதராபாத்

டாக்டர். H.K.தேவன்
கல்வி அறிவுரையாளர், வித்யா பவன் கழகம்,உதயப்பூர்

எழுத்தாளர்கள்

திரு.டாட்டா வெங்கடராமகுார்
H.M., ZPPHS, முலுமுடி, நெல்லூர் மாவட்டம்

திரு.சோம பிராசாத்பாபு
PGT. APTWRS, சந்திரசேகரபுரம், நெல்லூர்.

திரு.கோமண்டூரி முரளி ஸ்ரீநிவாஸ்
PGT.APTWR சிறப்புப்பள்ளி ஸ்ரீசைலம்.

திரு.பாதாள சுரேஷ்குமார்
SA,GHS, ஜமிஸ்தான்பூர், மணிகேஸ்வர்நகர், ஐதராபாத்.

திரு. துக்கராஜ° வேணு
SA,GHS, அல்லாவாடா,செவல்லா மணடலம், ர.ரெ.மாவட்டம்.

திரு.அந்தோணி ரெட்டி
H.M.புனித பீட்டர் உயர்நிலைப்பள்ளி, R.N.பேட்டை, நெல்லூர்.

திரு.D. மனோகர்
SA, ZPHS,பிராமணபள்ளி, தத்வாய்மண்டலம், நிஜாமாபாத்(மா).

திரு.கொட்டுமுக்கல V.B.S.N. இராஜ°
SA, முனிசிபல் உயர்நிலைப்பள்ளி, கஸ்பா, விஜயநகரம்.

திரு. K.வரதசுந்தர்ரெட்டி
SA, ZPHS,தக்கசீலா, ஆலம்பூர் மண்டலம் மக்பூப்நகர்.

திரு.அப்புராஜ° கிஷோர்
SGT, MPUPS,சீமல்லமுடி, குண்டூர் மாவட்டம்.

திரு.G.ஆனந்தரெட்டி
ஓய்வுபெற்ற தலைமையாசிரியர்,ரங்காரெட்டி,மாவாட்டம்

திரு. M. இராஞ்சநேயலு
விரிவுரையாளர், அரசு D.I.E.T., விகாராபாத், ர.ரெ.(மா)

திரு. M. இமாச்சாரி
விரிவுரையாளர், அரசு D.I.E.T., விகாராபாத், ர.ரெ.(மா)

திரு. A. ராம்பாபு
விரிவுரையாளர், அரசு CTE, வரங்கல்

தொகுப்பாளர்கள்

பேராசியர் V. சிவராமப்பிரசாத்
கணிதத்துறை (ஓய்வு)
உஸ்மானியா பல்கலைக்கழகம், ஐதராபாத்.

டாக்டர் S. சுரேஷ்பாபு
பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,SCERT ஆ,பி.ஐதராபாத்.

பேராசியர் N.C. பட்டாபி ராமாச்சார்யுலு
ஓய்வுபெற்றவர், தேசிய தொழில்நுட்ப நிறுவனம்
வரங்கல்.

திரு. K. பிரம்மய்யா
ஓய்வுபெற்ற பேராசிரியர்,SCERT ஆ,பி.ஐதராபாத்.

ஒருங்கிணைப்பாளர்கள்

திரு. காதுலவரம் ராஜேந்திரரெட்டி
SA, UPS, திம்மாபூர், சம்தம் பேட்டை, நல்கொண்டா (மா)

திரு. K.K.V. ராயுலு
விரிவுரையாளர், IASE, மசப் டேங்க், ஐதராபாத்.

தமிழாக்கம்

மேற்பார்வையாளர் :திரு. **P.S.தங்கமணி,** Faculty in Maths,DIET,கார்வேட்நகர், சித்தூர் மாவட்டம்.

ஆலோசகர் :திரு. **T.ஜான்டல்லஸ்,**SA (சமூக அறிவியல்) ZPHS, புதுப்பேட்டை, நகரி மண்டலம்,

தொகுப்பாளர்:திருமதி. **G.தனசேகரி,** SA (கணிதம்) ZPHS, புதுப்பேட்டை, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.

மொழிப்பெயர்ப்பாளர்கள் :

திருமதி. **C.நாகலட்சுமி,** SA (கணிதம்) ZPHS, புத்தூர், புத்தூர் மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திருமதி. **V.கிரிஜாவதி,** SA, (கணிதம்), GHS, நகரி, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்
திருமதி. **G.தனசேகரி,** SA (கணிதம்) ZPHS, புதுப்பேட்டை, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **S.K.மணி,** SA (கணிதம்), ZPHS, பிச்சாட்டூர், பிச்சாட்டூர் மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **M.M.நடராஜன்,** SA (கணிதம்), ZPHS. சிந்தலப்பட்டடை, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **S.குமார்,** SA (கணிதம்), ZPHS. புதுப்பேட்டை, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **S.குமரவேலு,** SA (கணிதம்), ZPHS. சத்திரவாடா, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **V.S.ஜெகந்நாதன்,** SA (கணிதம்), ZPHS. சத்திரவாடா, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.

முகவுரை

கல்வி என்பது அறிவொளியையும் ஆற்றலையும் வழங்கும் வழிமுறையாகும். கல்வியின் சிறப்புத் தன்மையை உணர்ந்து அனைவருக்கும் தரமான கல்வி வழங்கவேண்டும் என்றும் வெளிப்படையான நோக்கத்தோடு அனைத்து முன்னேற்றக் கழகங்களும் ஆரம்பக் கல்வியின் பொதுமைப் படுத்துதலுக்குத் தங்களை அர்ப்பணித்துக் கொண்டன. அடுத்தபடியாக இடைநிலைக் கல்வியில், கல்வியைப் பொதுமைபடுத்துதல் முக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளது.

இடைநிலைக் கல்வியானது உயர் ஆரம்ப நிலையில், பயின்ற சார்புக் கணிதத்திலிருந்து ஒரு நற்பயிற்சியாக கணிதத்தைப் பயிலும் நிலைக்கு மாற்றமடைவதைக் குறிக்கிறது. இந்நிலையில் கூற்றுகளின் தர்க்க நிருபணங்கள், தேற்றங்கள் போன்றவை அறிமுகம் செய்யப்படுகிறது.

கணிதம் ஒரு சிறப்புப் பாடமாக இருப்பதோடு பகுத்தறிவுடன், பகுப்பாய்வில் ஈடுபடும் எந்த ஒரு பாடத்திற்கும் இணைபிரியாது தொடர்ந்து வரக்கூடிய ஒன்றாகக் கருதப்படுகிறது என்னும் நம்பிக்கை எனக்கு உள்ளது. இந்த நூலைப் பயில்வதால் கணிதத்தை தங்களுடைய வாழ்க்கை அனுபவத்தை, கணிதத்தின் அடிப்படை அமைப்பைப் புரிந்துக்கொள்வர் என்றும் நம்புகின்றேன்.

ஆசிரியர்களுக்கு பாடத்திட்ட மற்றும் கறப்பித்தல் பகுத்தறிவுத்திறன்களை புரிந்துகொள்ளவும் சிக்கலான பிரச்சினைகளை கிரகிக்கவும். மதிப்பெண்களுக்குப் பதிலாக கற்றல் மீது கவனத்தை செலுத்துவதும் தற்போது அவசியமாக உள்ளது. கற்றல் கற்பித்தல் செயல்முறையில் பாடத்திட்டத்தைச் சிறந்த முறையில் பரிமாற்றம் செய்ய ஒரு கலப்படமான வகுப்பறைச் சூழலுடன் தன்னை சரிசெய்துகொள்வது மிகவும் தேவையான ஒன்று. வாழ்க்கை முறையில் வேறுபட்ட கருத்துகளையும் எண்ணங்களையும் கொண்ட குழந்தைகளிடையே தன்னம்பிக்கையை வளர்க்க வகுப்பறை கலாச்சாரத்தை ஏற்படுத்த வேண்டும். கற்பித்தல் பணியில் வாழ்க்கையை அறிவுடன் இணைப்பது கட்டாயமாக உள்ளது.

தெலங்கானா மாநில பாடத்திட்ட வடிவமைப்புப்பணி (TSSCF-2011) ல் மேற்கூறிய கணிதக் கற்பித்தல் கண்ணோட்டமானது கணித ஆய்வுத்தாளில் விரிவாக கூறப்பட்டுள்ளது. அதில் நம் மாநிலத்தில் கணிதத்தைக் கற்பிக்கும் பள்ளியாண்டு திட்டங்கள் தெளிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த பாடநூல் அனைத்து விதமான கருத்துகளையும் வழங்கும் முயற்சியை மேற்கொண்டுள்ளது.

தெலங்கானா மாநில கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் இந்த பாடநூலை உருவாக்குவதில் துணைபுரிந்த மாநிலத்தின் பல ஆசிரியர்களையும் மற்றும் பாடநூல் மேம்பாட்டுக்குழுவின் கடின உழைப்பையும் பாராட்டுகிறது. இதை சாத்தியமாக்கிய மாவட்டக் கல்வி அலுவலர்களுக்கும், மண்டலக்கல்வி அதிகாரிகளுக்கும் தலைமைப்பொறுப்பு வகித்த ஆசிரியர்களுக்கும் நன்றி கூற கடமைப்பட்டுள்ளேன். இப்பாட நூல் உருவாக்குவதில் ஒத்துழைப்பு நல்கிய பள்ளிக்கல்வி குழு மற்றும் இயக்குநகரத்திற்கும் நன்றி கூற கடமைப்பட்டுள்ளேன். தங்களுடைய விமர்சனங்களையும் அறிவுரைகளையும் வரவேற்கிறோம்.

இடம் : ஐதராபாத் — இயக்குநர்

தேதி : 03.12.2012 — SCERT ,ஐதராபாத்

முன்னுரை

மாணவர்களின் பள்ளி வாழ்க்கையானது சுற்றுபுற வாழ்க்கையுடன் கண்டிப்பாக தொடர்புபடுத்தப்படவேண்டும். என தெலங்கானா மாநில பாடத்திட்ட வடிவமைப்புப்பணி (TSSCF) பரிந்துரை செய்தது. இப்பரிந்துரையின்படி ஆந்திர மாநில அனைத்து பாடங்களின் கலைத்திடத்தை புனரமைக்க முடிவு செய்தது. கல்வி உரிமையின் (RTE - 2009) ன்படி 14 வயது வரை பள்ளியில் சேரும் ஒவ்வொரு மாணவனும் ஒவ்வொரு நிலைகளிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள திறன்களை கட்டாயம் பெற வேண்டும். தேசிய கலைத்திட்ட நிர்மாணக் குழு-2005 ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட இப்பாடத்திட்டமானது குறிப்பாக உயர்நிலையில் கணிதம் மற்றும் அறிவியல் பாடங்களின் மூலம் நாட்டின் எதிர்காலத்தை கருத்தில் கொண்டு மாணவர்களிடையே வலிமையான அடித்தளத்தை அமைக்கும்.

ஒரு நாட்டின் வலிமையானது அது தன் மக்களின் தேவைகள் எண்ணங்கள் மற்றும் தொழில்நுட்ப வளர்ச்சி மேம்படுத்த மேற்கொள்ளும் ஈடுபாடு மற்றும் திறனை பொருத்துள்ளது.

ஆரம்பநிலை, இடைநிலை, உயர்நிலை போன்ற மூன்று நிலைகளிலும் கணித பாடத்திட்டமானது அமைப்பு மற்றும் சுருள் அணுகுமுறைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. உயர்நிலையிலுள்ள கணித ஆசிரியர்கள் 8லிருந்து 10 வகுப்பு வரையுள்ள பாடத்திட்டத்தை நன்கு படித்து மாணவர்கள் ஆரம்பநிலை மற்றும் இடைநிலையில் பெற்ற புரிந்துகொள்ளுதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல் திறனை விரிவுபடுத்த வேண்டும்.

கணித கண்டுபிடிப்புகள் மற்றும் கணிதத்திலுள்ள பொதுமைக் கருத்துகள் மற்றும் கருத்துகளை புரிந்துகொள்ளுதல் போன்றவற்றிற்கு முக்கியத்துவம் அளிக்க இப்பாடத்திட்டம் அமைப்பு அணுகுமுறையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வணுகுமுறை மாணவர்களை வகுப்பறை செயல்களில் கலந்து கொள்ள மற்றும் விவாதம் செய்ய ஊக்குவிக்கிறது.

தற்போதுள்ள பாடப்புத்தகமானது TSSCERT கலைத்திட்டத்தை புனராய்வு செய்த பிறகு கலைத்திட்டம் மற்றும் கல்வித்தரங்கள் (Academic Standards) ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாவக்கப்பட்டது.

இப்பாடத்திட்டம் ஆறு விரிவான பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அவை 1..எண்முறை 2.இயற்கணிதம் 3.எண்ணியல் 4.வடிவியல் 5.அளவியல் 6.விவரங்களை கையாளுதல் இவற்றை கற்பிப்பதினால் கல்வித்தரங்களில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள பிரச்சனை தீர்த்தல், தர்க்கவியல் சிந்தனை, கணித தகவலறிதல், விவரங்களை பல்வேறு முறைகளில் வெளிப்படுத்துதல், கணிதத்தை அன்றாட வாழ்வில் வெளிப்படுத்துதல் மற்றும் ஒரு ஒழுக்க நெறியாக படித்தல் போன்ற தரங்கள் மேம்படுத்தப்படும்.

சிந்திப்பதற்கு அதிக முக்கியத்துவமும் மற்றும் வாய்ப்புகளும் வழங்க இப்பாடத்திட்டத்தை மேம்படுத்துவதற்காக மேற்கண்ட முயற்சிகள் எடுக்கப்பட்டது. இதைசெய் மற்றும் முயன்றுபார் போன்றவற்றின் மூலம் சிறு குழுக்களாக விவாதம் செய்ய மற்றும் செயல்முறைகளை செய்ய வாய்ப்புகள் அளிக்கப்பட்டுள்ளது. செயல்முறைகளை செய்ய வாய்ப்புகள் அளிக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே தகுந்த சூழலை உருவாக்க ஆசிரியர்களின் துணை தேவைப்படுகிறது.

இப்பாடப்புத்தகத்தின் சில சிறப்பம்சங்கள் :

- மாணவர்கள் அனைத்து கல்வி சார்ந்த செயல்களிலும் முழுமையாக ஆர்வம் காட்ட அத்தியாயங்கள் பல்வேறு முறைகளில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.
- இடைநிலையில் வடிவியல் கற்பித்தல், அதன் பண்புகளை அளவிடுதல் மற்றும் காகித மடித்தலின் மூலம் கண்டறியும் முறையில் அமைந்திருந்தது. தற்போது நாம் மெய்கூற்று அணுகுமுறைக்கு (Axiomatic approach) செல்ல உள்ளோம். எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் வருவிக்கப்பட்ட மற்றும் வருவிக்கப்படாத உறுப்புகள் மற்றும் உண்மைகளை அறிய ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட உண்மையான தேற்றங்களுக்கு தொடர்புடைய தர்க்கவியல் அமைப்புகள் அறிய பல்வேறு முயற்சிகள் மேற்கொள்ளப்பட்டன.

  தேற்றங்களை நிறுபணம் செய்ய தேவையான செயல்முறைகளை ஒவ்வொரு தேற்றத்தின் தொடக்கத்திலும் அளிக்க தகுந்த எச்சரிக்கைகளை அமைக்க வேண்டும்.
- முயன்று பார் மற்றும் சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது போன்ற சிறு தலைப்புகளின் மூலம் தொடர்ச்சியான மற்றும் முழுமையான மதிப்பீட்டு செயல்களை மேற்கொள்ளலாம். ஒரு அத்தியாயத்தில் முழுமையாக மாணவர்களின் முன்னேற்றத்தை ஆசிரியர்கள் மதிப்பீடு செய்ய ஒவ்வொரு அத்தியாயத்திலும் அதன் ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவுகளின் முடிவில் பயிற்சிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.
- மாணவர்கள் பாடப்பொருளை புரிந்துகொண்டு கணித கற்றலின் மூலம் மகிழச்சியடைய மொத்த பாடத்திட்டம் 15 அத்தியாயங்களாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.
- மாணவர்கள் இப்புத்தகத்தை தங்களின் புத்தகம் என நினைக்க மற்றும் பாடப்பொருளை அமைக்க இப்புத்தகத்திலுள்ள வண்ணப்படங்கள், வரைபடங்கள், படிக்கத் தகுந்த எழுத்தின் அளவு போன்றவை உதவிபுரிகின்றன.

அத்தியாயம் (1)ல் எண்முறையிலுள்ள மெய்எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் விரிவாக விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்கள் எண்கோட்டின் மீது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களை காட்சிப்படுத்த வாய்ப்புள்ளது. மாணவர்களிடையே ஆர்வத்தை உண்டாக்க எண்களின் வரலாறு எடுத்துக்காட்டுகளுடன் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. முடிவுறா சுழல்தசமங்களின் விரிவாக்கத்துடன் மெய்எண்களின் நிலையை காட்சிப்படுத்த எண்கோட்டின் மீது மெய்எண்களை தொடர் உருப்பெருக்க முறையில் குறிப்பிடும் முறையானது பயன்படுகிறது.

அத்தியாயம் (2) பல்லுறுப்புக்கோவைகள் மற்றும் காரணிப்படுத்தலில், இயற்கணிதத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு மாறியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகள் மற்றும் பல்லுறுப்புக்கோவை எவ்வாறு இயற்கணித கோவையிலிருந்து வேறுபட்டுள்ளது என்பது விரிவாக விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. மீதித்தேற்றம் மற்றும் காரணித்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக்கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல் என்பது தகுந்த எடுத்தக்காட்டுகளுடன் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. பல்லுறுப்புக்கோவையின் மத்திய உறுப்பை பிரித்து காரணிப்படுத்தும் முறை விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்கள் பலவகை காரணியாக்கலை செய்ய முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி சில தனிவகை பல்லுறுப்புக்கோவைகளை காரணிப்படுத்தும் முறை விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் (6) இரண்டு மாறிகள் உள்ள நேரியச்சமன்பாடு இயற்கணிதம் தொடர்புடையது. கணித கற்பித்தலின் மிக உயர்ந்த நோக்கமான கணித கட்டமைப்புகளை ஒருங்கிணைத்தலை மாணவர்களிடையே வளர்க்க எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் கண்டறிதல் பயன்படுகிறது. இந்த அத்தியாயம் தெரியாதவற்றை கண்டறியும் திறனுடன் தினந்தோறும் பெறும் அனுபவங்களை தொடர்புப்படுத்துகிறது.

இப்பாடநூலிலுள்ள 7 அத்தியாயங்கள் (3,4,7,8,11,12,13) வடிவியல் தொடர்புடையது. இந்த அத்தியாயங்கள் ஆராய்ந்தறிதல், உள்ளுணர்வுடன் புரிந்துக்கொள்ளுதல் மற்றும் உள்ளார்ந்த சுய அனுபவங்களின் மூலம் பொருளறிதல் ஆகியவற்றின் மூலம் வடிவியலை கற்க முக்கியத்துவமளிக்கிறது. இச்செயல், தகவல்களை தெரிவிக்க, பிரச்சனைகளை

தீர்க்க மற்றும் பல்வேறு சமதளப் படங்களிடையே உள்ள தொடர்பினை அறிய பயன்படுகிறது. பல நூற்றாண்டுகளாக வரலாற்றில் வடிவியலின் வளர்ச்சி விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் சமதள வடிவியலுக்காக யூக்ளிட் அளித்த பங்கு அவரின் தொகுப்பான The Elements மூலம் விரிவாக விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. கோணங்கள், முக்கோணங்கள், நாற்கரங்கள், வட்டங்கள், பரப்பளவுகளின் மீதான செயல்முறைகள் மற்றும் தேற்றங்கள் அளிக்கப்பட்டுள்ளது. இவை மாணவர்களிடையே விதிவரு, விதிவிளக்கு, பகுத்தராய்தல் மற்றும் தர்க்க சிந்தனைகளை வளர்க்கின்றன. செய்முறை வடிவியில் படங்களை வரைய Ungraduated ruler பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதனால் வடிவியல் படங்களை வரைவதில் துல்லியம் ஏற்படுகிறது.

அத்தியாயம் (5) ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதமானது Co-ordinate system மற்றும் இயற்கணித என்ற சாதனங்களின் மூலம் யூக்ளிடின் வடிவியலுக்கு ஒரு மாற்று அணுகுமுறையாக உள்ளது. பல்வேறு எடுத்தக்காட்டுகளின் மூலம் வரிசை ஜோடிகளை கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்க முக்கியத்துவமளிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் (9) புள்ளியியலானது புள்ளியலின் முக்கியத்துவம், புள்ளியியல் விவரங்களை சேகரித்தல் (அதாவது வகைப்படுத்தப்பட்ட மற்றும் வகுப்படுத்தப்படாத) போன்றவற்றை விவரிக்கிறது. மேலும் அன்றாட வாழ்க்கை சூழ்நிலைகளை கருத்தில் கொண்டு சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றம் முகடுகளை கண்டறிவது பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் (10) புறபரப்பளவுகள் மற்றும் கனஅளவுகள், உருளை, கூம்பு, மற்றும் கோளத்தின் பக்கப்பரப்பு, மொத்தபரப்புகளை கண்டறிவதைப் பற்றி விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது. பல்வேறு திண்ம பொருட்களின் கனஅளவுள்ள மற்றும் அவற்றின் சூத்திரங்களை வருவித்தலுக்கான தொடர்பு விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் (14) நிகழ்தகவு பாடமானது பல்வேறு துறைகளில் வெற்றி வாய்ப்புகளை கண்டறிய பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களுக்கு புதிதாக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. மேலும் அன்றாட வாழ்விற்கு தொடர்புடைய பல்வேறு பிரச்சனைகள் தரப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் (15) கணித நிருபணங்கள் பாடமானது மாணவர்கள் கணிதக் கூற்று என்றால் என்ன என்பதை அறியவும் மற்றும் பல்வேறு சூழ்நிலைகளில் அக்கூற்றினை எவ்வாறு தீர்க்க வேண்டும் என்பதற்கும் துணைபுரிகின்றது. எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் வெளிப்படை உண்மைகள், கருதுகோள்கள், ஊகங்கள் மற்றும் தேற்றங்கள் நிருபணம் செய்யும் படிநிலைகள் போன்றவை விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

எந்த ஒரு பாடப்பொருளின் வெற்றியானது அதிகப்படியான பாடத்திட்டத்தினால் அமையாது. அது ஆசிரியர் பயன்படுத்தும் கற்பித்தல் முறைகளின் மீது ஆதாரப்பட்டிருக்கும்.

ஆசிரியர் இப்பாடப்புத்தகத்தில் விவாதிக்கப்பட்ட முறையில் கலைத்திட்டத்தை மாணவர்களுக்கு பரிமாற்றம் (அளித்தல்) செய்தாலொழிய வெறும் பாடப்புத்தகம் தயாரித்தல் மட்டும் தரமான கல்வியை தராது. கற்போர் செயல்முறைகளை செய்வதில் ஈடுபாடு மற்றும் பங்களிப்பு தர வேண்டும். மேலும் பிரச்சனைகளை புரிந்துக்கொள்ள வேண்டும். இதற்கான உறுதியை ஆசிரியர் அளிக்க வேண்டும்.

ஆசிரியர் வகுப்பறை செயலில் கற்பித்தலை சாதாரணமாக பயிற்சிகள் மூலம் பிரச்சனை தீர்த்தல் என்ற செயலில் இருந்து கருத்துகளை புரிந்துகொண்டு பிரச்சனைளை அறிவுக்கூர்மையுடன் தீர்த்தல் என்ற செயலுக்கு மாற்றுவார் என்று எதிர்பார்க்கப்படுகிறது.

பாடநூல் வளர்ச்சிக்குழு.

வரலாற்றில் ஒரு சிறப்பு

"விளையும் பயிர் முளையிலேயே தெரியும்"

ஒரு குழந்தை எவ்வாறு இராமானுஜம் என்ற சிறந்த கணிதமேதையானது?

இராமானுஜம்

சீனிவாச இராமானுஜம் என்பவர் புதியவற்றை கற்பதில் எப்பொழுதும் மகிழ்ச்சியை இழக்காதவர். சிறுவயதிலேயே தனது நுண்ணறிவு மற்றும் உள்ளுணர்வுகளால் தன் வகுப்பு மாணவர்கள், பெரியவர்கள், ஆசிரியர்களை வியக்க வைத்தவர்.

ஒரு நாள் ஆசிரியர் எண்கணிதத்தில் மூன்று வாழைப்பழங்களை மூவருக்கு பங்கிட்டு கொடுத்தால் ஒவ்வொருவருக்கும் ஒரு வாழைப்பழம் கிடைக்கும் எனக்கூறி வகுத்தல் விதியை கூறினார். உடனே இராமானுஜம். ஐயா எந்த ஒரு வாழைப்பழத்தையும் எவருக்கும் பங்கிடாமல் இருந்தால் என்னவாகும்? என வினவினார். அதாவது பூஜ்ஜியத்தை பூஜ்ஜியத்தால் வகுத்தால் என்னவாகும் எனும் வகுத்தலின் குறையை எடுத்துரைத்தார்.

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}$$
$$=\sqrt{1+(2\times 4)}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{16}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+15}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}$$
and so on ...

$$\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2$$
..... and so on.

இராமானுஜத்தின் கணிதத் திறனால் அவருக்கு நிறைய நண்பர்களை கிடைத்தார்கள். ஒரு சமயம் அவரை மூத்த வகுப்பில் படிக்கும் மாணவன். $\sqrt{x}+y=7$ மற்றும் $x+\sqrt{y}=11$, எனில் x, yன் மதிப்புகள் என்ன? எனக் கேட்டார். உடனே இராமானுஜம் $x=9$ மற்றும் $y=4$ என விடையளித்தார். அம்மாணவன் வியப்படைந்து இராமனுஜத்திற்கு ஒரு நல்ல நண்பரானார்.

அவர் பள்ளியில் பயிலும் போது வீட்டுப்பாடங்களுடன் தனக்கு விருப்பமான சில அமைப்புகளையும், கண்டுபிடிப்புகளையும் செய்து பார்ப்பார்.

ஸ்ரீநிவாச ஐய்யங்கார் இராமானுஜம் அனைவராலும் போற்றக்கூடிய ஒரு தலைசிறந்த இந்திய கணித மேதை ஆவார். இவர் 1887ஆம் ஆண்டு டிசம்பர் மாதம் 22ஆம் தேதி தமிழ்நாடு மாநிலத்தில், ஈரோட்டில் ஒரு ஏழைக் குடும்பத்தில் பிறந்தார். இளம் மேதையான இராமானுஜம் தன்னுடைய 13வது வயதில் லோனியின் திரிகோணமிதியை கற்றார். தன்னடைய 15 வயதில் அவரின் நண்பர்கள் ஜார்ஜ் கார் எழுதிய "Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics" புத்தகத்தை கொடுத்தனர். இராமானுஜம் அப்புத்தகத்திலுள்ள பல்வேறு தேற்றங்களை பகுத்தாய்ந்து விளக்கங்களை வெற்றுத் தாள்களில் எழுதினார். இவ்வாறு இராமானுஜம் வெற்றுத்தாள்களில் விளக்கங்களை Ramanujam's Frayed note books என்கின்றனர். அவரிடம் பட்டப்படிப்பு இல்லை ஆயினும் 1913ஆம் ஆண்டு மெட்ராஸ் பல்கலைக்கழகம் அவருக்கு ரூ.75ஐ ஊக்கத்தொகையாக அளித்தது. இவர் 120 தேற்றங்கள் மற்றும் சூத்திரங்கள் அடங்கிய கணிதத்தாள்களை இலண்டனிலுள்ள கேம்ப்ரிட்ஜ் பல்கலைக்கழகத்தில் பணியாற்றி கொண்டிருந்த சிறந்த கணித மேதையான ஜி.எச். ஹார்டிக்கு அனுப்பி வைத்தார். இவற்றை பகுத்தாய்ந்து இவரை இலண்டனுக்கு அழைத்தனர். இவர் ஹார்டி மற்றும் பலருடன் சேர்ந்து பணியாற்றினார். எண்கள் தொடர்புடைய தேற்றங்களை அளித்தார். இத்தேற்றங்களில் எண்கள் தேற்றத்தில் சுழற்சி முறை, இயற்கணித அசமமின்மை, நீள்வட்ட செயல்முறைகள் போன்றவை அடங்கும். 1918ஆம் ஆண்டு Royal Society யின் உறுப்பினராக Fellowshipஐ பெற்ற இரண்டாவது இந்தியர் ஆவார். டிரினிட்டி காலேஜ், கேம்ப்ரிட்ஜ் பல்கலைக்கழகத்தின் Fellowship ஐ பெற்ற முதல் இந்தியர் ஆவார். இவர் நோய்வாய்ப்பட்ட போதும் எண்களைப் பற்றி சிந்திக்க தவறியதில்லை.

ஹார்டி இவரின் உடல்நலத்தை பற்றி அறிய டாக்சியில் வந்தார். அப்பொழுது இராமானுஜம் டாக்சியின் எண்ணான 1729ஐ ஒரு சிறப்பு வாய்ந்த எண் எனக் கூறினார். அதாவது 1729 என்பது இரு வழிகளில் இரண்டு எண்களின் கனங்களின் கூடுதலாக எழுதக் கூடிய மிகச்சிறிய முழு (integer) எனக் கூறினார், $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$. துரதிஷ்டவசமாக, 1920ஆம் ஆண்டு ஏப்ரல் 20ஆம் தேதி மெட்ராஸில் காசநோயால் உயிரிழந்தார். இவரின் சேவையைப் பாராட்டி இந்திய அரசாங்கம் இவரின் அஞ்சல் தலைகளை வெளியிட்டது. மேலும் இருடைய 125வது பிறந்தநாளையொட்டி 2012ஆம் ஆண்டை கணிதஆண்டு "Year of Mathematics" என அறிவித்தது.

பொருளடக்கம்

தாள் 1	மெய்யெண்கள், பல்லுறுப்புக்கோவைகள் மற்றும் காரணிப்படுத்துதல், ஆயத்தொலை வடிவக் கணிதம், இரண்டு மாறிகளில் உள்ள நேரிய சமன்பாடுகள், முக்கோணங்கள், நாற்கரங்கள், பரப்பளவுகள்
தாள் 2	வடிவியல் ஆதாரங்கள், நேர்கோடுகளும் கோணங்களும், புள்ளியியல், புறப்பரப்புகள் மற்றும் கன அளவுகள், வட்டங்கள், செய்முறை வடிவியல், நிகழ்தகவு

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப ஸிந்த் குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ மாகே
காஹே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே ஜய ஹே ஜய ஹே
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

– இரவீந்திரநாத் தாகூர்

உறுதிமொழி

'இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறப்புகள்.

என் நாட்டை நான் பெரிதும் நேசிக்கிறேன். இந்நாட்டின் பழம்பெருமைக்காகவும் பன்முக மரபுச் சிறப்பிற்காகவும் நான் பெருமிதம் அடைகிறேன். இந்நாட்டின் பெருமைக்குத் தகுந்து விளங்கிட என்றும் பாடுபடுவேன்.

என்னுடைய பெற்றோர், ஆசிரியர்கள், எனக்கு வயதில் மூத்தோர் அனைவரையும் மதிப்பேன். எல்லோரிடமும் அன்பும் மரியாதையும் காட்டுவேன். விலங்குகளிடத்தில் கருணை காட்டுவேன்.

என் நாட்டிற்கும் என் மக்களுக்கும் உழைத்திட முனைந்து நிற்பேன். அவர்கள் நலமும் வளமும் பெறுவதிலே நான் என்றும் மகிழ்ச்சி காண்பேன்.'

01

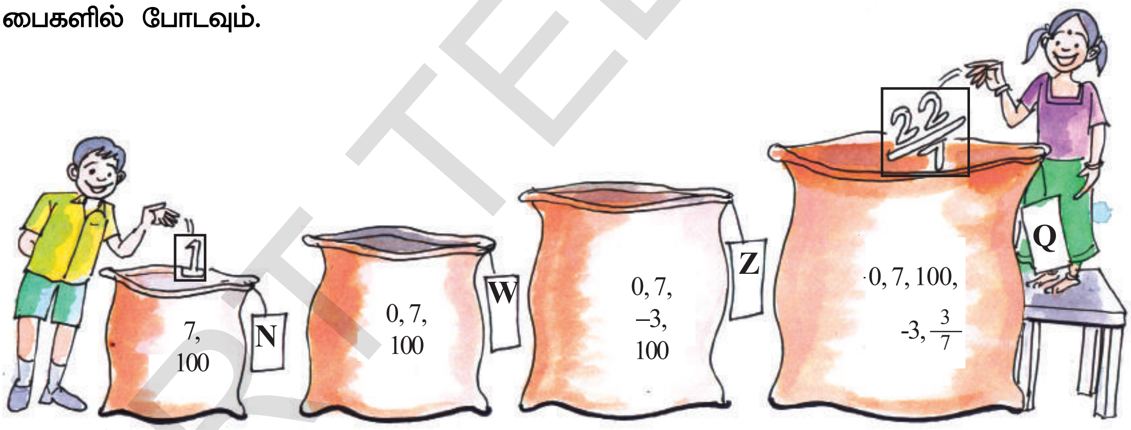
மெய் எண்கள்

1.1 அறிமுகம்

நாம் பல விதமான எண்களை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளலாம். கீழ் உள்ள எண்களை கவனிக்கவும்.

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222..., 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\overline{6}$$

ஜான் மற்றும் சினேகா மேலுள்ள எண்களுக்கு பெயரிட்டு அவற்றிற்கான பைகளில் போட விரும்பினர். சில எண்கள் அவற்றிற்கான பைகளில் இருந்தன. இப்போது மீதமுள்ள எண்களை தேர்ந்தெடுத்து அவற்றிற்கான பைகளில் போடுங்கள். ஒரே எண் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பைகளில் போட வேண்டுமெனில் அந்த எண்ணை நகல் எடுத்து அதற்குரிய பைகளில் போடவும்.



N பையில் இயல் எண்களும், W பையில் முழு எண்களும், Z பையில் முழுக்களும் எண்களும் மற்றும் Q பையில் விகிதமுறு எண்களும் உள்ளன என்பதை நீ காணலாம். Z பையில் குறை எண்கள் மற்றும் முழு எண்களின் தொகுப்பு உள்ளது. இது I அல்லது Z என குறிக்கிறோம் மற்றும்

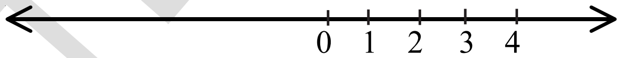
$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ என்று எழுதுகிறோம்.

இதேபோல் Q பையில் $\frac{p}{q}$ வடிவில் உள்ள அனைத்து எண்களும் இருக்கும் இங்கு p மற்றும் q என்பது முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

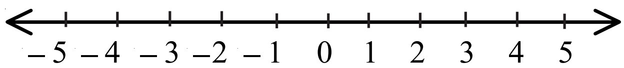
மேலும் இயல் எண்கள், முழு எண்கள், முழுக்கள் மற்றும் விகிதமுறு எண்கள் அனைத்தையும் $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதலாம், இங்கு p, q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டாக -15 ஐ $\frac{-15}{1}$ என எழுதலாம். இங்கு p = -15, q = 1. இந்த எடுத்துக்காட்டை கவனி. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{10}{20}=\frac{50}{100}$ ... இவை சமான விகிதமுறு எண்கள் (அ) பின்னங்கள். அதாவது விகிதமுறு எண்கள் அனைத்தும் ஒரே வகையாக $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் இல்லை இங்கு p, q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$. எப்படி இருப்பினும் நாம் ஒரு விகிதமுறு எண் எனும்போது (அ) $\frac{p}{q}$ ஐ நாம் எண்கோட்டில் குறிக்கும் போது $q \neq 0$ எனக் கொள்கிறோம். மேலும் p மற்றும் q விற்கு பொது காரணி 1ஐ தவிர வேறு பொது காரணிகள் இல்லை. (அதாவது p மற்றும் q சார்பாக எண்கள்) எனவே க்கு சமமான எண்ணற்ற பின்னங்கள் இருந்தாலும் நாம் $\frac{1}{2}$ ஐ அதாவது சுருங்கிய வடிவத்தை எடுத்துக்கொள்கிறோம். இதை புரிந்துகொள்ள நாம் ஒரு எண்கோட்டை குறிப்போம்.

ஒரு எண்கோட்டில் முழு எண்களை எப்படி குறிப்பது என்பது உனக்கு தெரியும். ஒரு எண்கோட்டை வரைந்து அதில் 0 ஐ குறி. 0விற்கு வலப்பக்கம் சமான தூரத்தில் 1,2,3,4,...குறிக்க வேண்டும்

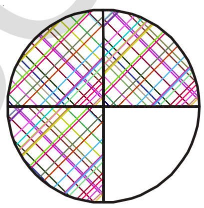


முழுக்கள் எண்கோட்டை கீழ் உள்ளவாறு குறிக்க வேண்டும்.

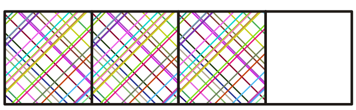


எண்கோட்டின் மேல் விகிதமுறு எண்களை எப்படி குறிப்பது என்பது உனக்கு தெரியுமா?

இதை நினைவுப்படுத்திக்கொள்ள முதலில் $\frac{3}{4}$ ஐ எடுத்துக்கொண்டு படவடிவிலும், எண்கோட்டிலும் குறிக்கலாம். $\frac{3}{4}$ல் 3 என்பது தொகுதி, 4 என்பது பகுதி என்று நமக்குத் தெரியும். $\frac{3}{4}$ என்பது மொத்தம் 4 பாகத்தில் 3 பாகத்தை எடுத்துக்கொள்வது ஆகும். இங்கு $\frac{3}{4}$ சில பட வடிவங்களில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

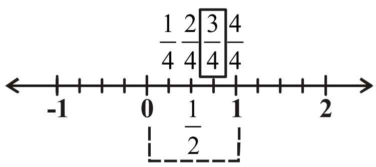


$\frac{3}{4}$



$\frac{3}{4}$

பட வடிவம்



எண்கோட்டு வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு 1: $\frac{5}{3}$ மற்றும் $-\frac{5}{3}$ ஐ எண்கோட்டில் குறி.

தீர்வு : -2, -1, 0, 1, 2 ஐ முழுக்கள் எண்கோட்டில் குறிக்கவும்

$$\frac{-7}{3},\ -2\left(=\frac{-6}{3}\right),\ \frac{-5}{3},\ \frac{-4}{3},\ -1\left(=\frac{-3}{3}\right),\ \frac{-2}{3},\ \frac{-1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\left(=\frac{3}{3}\right),\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2\left(=\frac{6}{3}\right),\ \frac{7}{3}$$

0விற்கு வலதுபுறம் மற்றும் இடதுபுறத்திலும் உள்ள ஒவ்வொரு அலகையும் 3 சமபாகமாக பிரிக்கவும். இதிலிருந்து 5 பாகங்களை எடுத்துக்கொள்ளவும். 0விலிருந்து வலதுபுறத்தில் 5வது புள்ளி $\frac{5}{3}$ மற்றும் இடதுபுறத்தின் 5வது புள்ளி $\frac{-5}{3}$ என குறிக்கவும்.

இதை செய்

1. $\frac{-3}{4}$ ஐ எண்கோட்டில் குறி.
2. 0, 7, 10, -4 ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுது.
3. **நான் நினைத்த எண்ணை கூறுக :** உன் நண்பன் 0விலிருந்து 100வரை உள்ள ஒரு முழுவைத் தேர்ந்தெடுத்தான். நீ அந்த எண்ணை கண்டுபிடிக்க பல வினாக்களை எழுப்ப வேண்டும்.உன் நண்பன் ஆம் அல்லது இல்லை என்று மட்டுமே பதிலளிப்பான்.அதற்கு நீ எந்த முறையை உபயோகப்படுத்துவாய்?

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழுள்ள கூற்றுகள் மெய்யா? உங்கள் பதிலுக்கான காரணங்களை ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.

i. ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு.

ii. ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண்.

iii. பூஜ்ஜியம் ஒரு விகிதமுறு எண்.

தீர்வு : i. தவறு. எடுத்துக்காட்டாக $\frac{7}{8}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆனால் முழுக்கள் அல்ல.

ii. உண்மை : ஏனெனில் எந்த முழுக்களையும் $\frac{p}{q}\ (q \neq 0)$ வடிவில் எழுதலாம். எடுத்துகாட்டாக $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$. எனவே இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(அதாவது எந்த ஒரு முழுக்கள் 'b' ஐ $\frac{b}{1}$ என குறிக்கலாம்)

iii. உண்மை : ஏனெனில் 0 ஐ $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ என எழுதலாம் ($\frac{p}{q}$ வடிவம், p,q ஆகியவை முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$).

(0ஐ $\frac{0}{x}$ ஆக எழுதலாம். இங்கு 'x' என்பது முழுக்கள் மற்றும் $x \neq 0$)

எடுத்துக்காட்டு 3: கூட்டு சராசரி முறையை பயன்படுத்தி 3 மற்றும் 4க்கு இடையே உள்ள இரண்டு விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு :முறை-I : இரண்டு விகிதமுறு எண்கள் a, bக்கு இடையே $\frac{a+b}{2}$ என்னும் விகிதமுறு எண் உள்ளது என நமக்குத் தெரியும்.

இங்கு a = 3 மற்றும் b = 4, (a, b யின் கூட்டு சராசரி $\frac{a+b}{2}$ ஆகும். மேலும் a மற்றும் b இடையே அமையும்)

எனவே, $\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$ என்பது 3 மற்றும் 4க்கு இடையே இருக்கும். $3 < \frac{7}{2} < 4$

மேலுள்ள இதே முறையை நாம் தொடர்ந்தால் 3 மற்றும் $\frac{7}{2}$ க்கு இடையே இன்னும் அதிகமான விகிதமுறு எண்களை காணலாம்.

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

முறை-II : ஒரே படியில் இரண்டு விகிதமுறு எண்களை எளிதான முறையில் கண்டறியலாம். நமக்கு இரண்டு எண்கள் தேவைப்படுவதால் 2 + 1 = 3 ஐ பகுதியை கொண்ட விகிதமுறு எண்களை 3 மற்றும் 4க்கு இடையே எழுதுவோம்.

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} \quad \text{மேலும்} \quad 4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

3 மற்றும் 4க்கு இடையே $\frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ என்ற விகிதமுறு எண்களை காணலாம்.

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

3 மற்றும் 4 இடையே 5 விகிதமுறு எண்களை எழுத நினைத்தால் 5 + 1 = 6 என்ற பகுதியை கொண்ட விகிதமுறு எண்களை 3 மற்றும் 4 இடையே எழுதலாம்.

அதாவது $3 = \frac{18}{6}$ மேலும் $4 = \frac{24}{6}$ $\quad 3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$

இந்த வகையில் 3 மற்றும் 4 இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என நீ தெரிந்துகொள்ளலாம். இதேபோல் ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே முடிவிலி விகிதமுறு எண்கள் உள்ளதா என சரிபார்க்க.

இதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கு மத்தியில் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருக்கும் என அறியலாம்.

இதை செய்

i. கூட்டு சராசரி முறையை பயன்படுத்தி 2 மற்றும் 3 க்கு இடையே உள்ள ஏதாவது ஐந்து விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடி.

ii. $-\frac{3}{11}$ மற்றும் $\frac{8}{11}$ இடையே ஏதாவது 10 விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடி.

எடுத்துக்காட்டு 4: $\frac{7}{16}$, $\frac{2}{3}$ மற்றும் $\frac{10}{7}$ தசம பின்ன வடிவில் எழுதுக.

தீர்வு :

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.00000} \\ 0 \\ \hline 70 \\ 64 \\ \hline 60 \\ 48 \\ \hline 120 \\ 112 \\ \hline 80 \\ 80 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.428571 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0000} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{7}{16} = 0.4375$

முடிவுறு தசமபின்னம்

$\therefore \frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$

முடிவுறா சுழல் தசமபின்னம்

$\therefore \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$

முடிவுறா சுழல் தசமபின்னம்

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம், எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் முடிவுறு தசம பின்னமாக அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம பின்னமாக குறிப்பிடலாம்.

இதை செய்

(i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{19}$ பின்ன வடிவில் குறிப்பிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 5: 3.28ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. (இங்கு p,q என்பவை முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$).

தீர்வு : 3.28 $= \frac{328}{100}$

$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$

$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$ (தொகுதி, பகுதி ஆகியவை சார்பகா எண்கள்)

$\therefore 3.28 = \frac{82}{25}$

எடுத்துக்காட்டு 6: $1.\overline{62}$ ஐ $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. p,q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

தீர்வு : x = 1.626262..... ① எனக் கொள்க.

சமன்பாடு ① ன் இருபுறமும் 100ஆல் பெருக்கினால்

100x = 162.6262... ② எனக் கிடைக்கும்

② லிருந்து ① கழிக்கும் போது நமக்கு கிடைப்பது

$$100x = 162.6262...$$
$$x = 1.6262...$$
$$- \quad -$$
$$99x = 161$$
$$x = \frac{161}{99}$$
$$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$$

இதை செய்

1. கீழ் உள்ளவற்றிற்கு தசம மதிப்புகளை காண்க:

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{2^2}$ iii. $\frac{1}{5}$ iv. $\frac{1}{5\times 2}$

v. $\frac{3}{10}$ vi. $\frac{27}{25}$ vii. $\frac{1}{3}$ viii. $\frac{7}{6}$

ix. $\frac{5}{12}$ x. $\frac{1}{7}$

கீழ் உள்ள தசம பின்னங்களை கவனி

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

முடிவுறு பின்னத்தை உருவாக்கும் பகுதியின் சிறப்பு பண்பு என்னவென்று உன்னால் கூறமுடியுமா?

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணின் பகுதியின் பகா காரணிகளை எழுதுக. இந்த முடிவுகளிலிருந்து நிபந்தனைகளை வருவி.

பயிற்சி - 1.1

1. (a) ஏதாவது 3 விகிதமுறு எண்களை எழுதுக

   (b) விகிதமுறு எண் என்றால் என்ன என்பதை உன்னுடைய சொந்த வார்த்தையில் விவரி.

2. கீழ் உள்ள ஒவ்வொரு கூற்றிற்கும் ஒரு எடுத்துக்காட்டு கொடு.
   - i. முழுக்கள் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண்.
   - ii. இயல் எண் அல்லாத ஒரு முழு எண்.
   - iii. முழு எண் அல்லாத ஒரு முழுக்கள்.
   - iv. இயல் எண், முழு எண், முழுக்கள் மற்றும் விகிதமுறு எண்ணாக உள்ள ஒரு எண்.
   - v. இயல் எண் அல்லாத ஒரு முழுக்கள்.

3. 1 மற்றும் 2க்கு இடையே உள்ள விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடி.

4. $\frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ இடையே 3 விகிதமுறு எண்களை புகுத்துக

5. $\frac{8}{5}$ மற்றும் $\frac{-8}{5}$ ஐ எண்கோட்டில் குறி.

6. கீழ் உள்ள விகிதமுறு எண்களை தசம எண்களாக எழுதுக.

   I. i) $\frac{242}{1000}$ ii) $\frac{354}{500}$ iii) $\frac{2}{5}$ iv) $\frac{115}{4}$

   II. i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{25}{36}$ iii) $\frac{22}{7}$ iv) $\frac{11}{9}$

7. கீழ் உள்ள தசம எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு $q \neq 0$ மேலும் p, q என்பன முழுக்கள்.

   i) 0.36 ii) 15.4 iii) 10.25 iv) 3.25

8. கீழ் உள்ள தசம எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக.

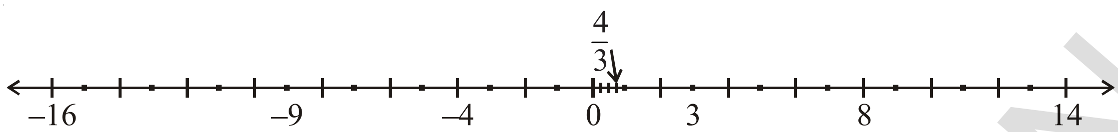
   i) $0.\overline{5}$ ii) $3.\overline{8}$ iii) $0.\overline{36}$ iv) $3.12\overline{7}$

9. கீழ்கண்ட எண்களில் எவை முடிவுறு தசம பின்னங்கள் என்பதை வகுக்காமல் கண்டுபிடி.

   (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{18}$ (iii) $\frac{13}{20}$ (iv) $\frac{41}{42}$

1.2 விகிதமுறா எண்கள்

நாம் மறுபடியும் எண்கோட்டை ஒரு முறை பார்ப்போம். நம்மால் எல்லா எண்களையும் எண்கோட்டில் குறிக்க இயலுமா? உண்மை என்னவென்றால் எண்கோட்டில் எண்ணற்ற எண்கள் விடப்பட்டுள்ளன. (குறிக்கப்படவில்லை)



இதை புரிந்துக்கொள்ள கீழ் உள்ள சமன்பாடுகளை கவனி.

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

சமன்பாடு (i) ல் x ன் மதிப்புகள் 2 மற்றும் –2 என்று நமக்குத் தெரியும். 2 மற்றும் –2 ஐ எண் கோட்டில் குறிக்கலாம்.

சமன்பாடு (ii) $3x = 4$ இரண்டு புறமும் 3ஆல் வகுத்தால் நமக்கு $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ கிடைக்கும். நாம் இதை எண்கோட்டில் குறிக்கலாம். சமன்பாடு (iii)ஐ தீர்க்கும்போது $x^2 = 2$, இருபுறமும் வர்க்கமூலம் எடுத்தால் சமன்பாடானது $\sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ எனக் கொள்வோம்.

நாம் $\sqrt{2}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க முடியுமா?

$\sqrt{2}$ ன் மதிப்பு என்ன? $\sqrt{2}$ எந்த எண்ணைச் சார்ந்தது?

நாம் $\sqrt{2}$ ன் மதிப்பை வகுத்தல் முறை மூலம் காணலாம்.

	1.4142135
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17611775

படி 1 : 2க்கு அடுத்து தசம புள்ளியை வைக்கவும்.

படி 2 : புள்ளியை அடுத்து 0க்களை எழுது.

படி 3 : ‘0’ க்களை ஜதைப்படுத்தி அதன் மேல் கோடிடவும்.

படி 4 : முழுவர்க்கத்தின் வர்க்கமூலத்தைக் காணும் முறையில் அதன் வர்க்கமூலம் காண்க.

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135\ldots$

$\sqrt{2}$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடித்துக்கொண்டே போனால் $\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... முடிவுறு தசமமாகவோ அல்லது சுழற்சி தசமமாகவோ இராது என்பதை நீ காணலாம்.

இதுவரை தசம எண்கள் முடிவுறு தசமமாகவோ (அ) முடிவுறா சுழற்சி தசமமாகவோ $\frac{p}{q}$ வடிவில் உள்ளதை நாம் பார்த்தோம்.

இதையே நாம் விகிதமுறு எண்கள் என்கிறோம். ஆனால் $\sqrt{2}$ ன் தசம எண் என்பது முடிவுறா தசமம் மற்றும் முடிவுறா சுழற்சியற்ற தசம எண் ஆகும். இதை நாம் எண்கோட்டின் மூலம் குறிக்கலாமா? முடியாது. இதையே நாம் விகிதமுறா எண்கள் என்கிறோம். மற்றும் இதை p/q வடிவத்தில் எழுத இயலாது. அதாவது $\sqrt{2} \neq p/q$ (p மற்றும் q எந்த முழுக்களுக்கும், $q \neq 0$).

இவ்வாறே $\sqrt{3}$ = 1.7320508075689.....

$\sqrt{5}$ = 2.2360679774998.....

இவை முடிவுறா, முடிவுறா சுழற்சியற்ற தசம எண்கள் ஆகும். இவையே விகிதமுறா எண்கள் ஆகும். மேலும் இதை 'S' அல்லது 'Q^1' என குறிக்கிறோம்.

விகிதமுறா எண்களுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) 2.1356217528..., (2) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ ....

கி.மு.5ம் நூற்றாண்டில் கிரீஸ் நாட்டைச் சார்ந்த புகழ்பெற்ற கணிதமேதை மற்றும் தத்துவ மேதையான பிதாகரஸின் வழிவந்த பிதாகொரியன்கள் விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத எண்களை முதலில் கண்டுபிடித்தனர். அந்த எண்களையே விகிதமுறா எண்கள் என்கிறோம். பிதோகோரியன்கள் $\sqrt{2}$ ஐ விகிதமுறா எண் என்று நிருபித்தனர். பின்னர் சைரின் நாட்டை சேர்ந்த தியோடரஸ் $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ மற்றும் $\sqrt{17}$ ஆகியவற்றை விகிதமுறா எண்கள் என்று நிருபித்தார். சுல்பசூத்ரா (கி.மு.800)ல் வர்க்க மூலம் கணக்கிடுவதில் விகிதமுறா எண்களின் குறிப்புகள் உள்ளன.

கீழ் உள்ள பட்டியலை கவனிக்கவும்.

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

'n' என்பது முழு வர்க்கம் அல்லாத இயல் எண் எனில் $\sqrt{n}$ விகிதமுறா எண் எனப்படும்.

மேற்கண்ட பட்டிய-ல் நீங்கள் விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களை அடையாளம் காண முடியுமா?

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ - என்பவை விகிதமறு எண்கள்.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ - என்பவை விகிதமுறா எண்கள்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

கீர்த்தி $\sqrt{2}$ ஐ $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ஆக $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதலாம் என்று கூறினாள். எனவே $\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும். இந்த விவாதத்தை நீ ஒப்புக்கொள்கிறாயா?

π பற்றி தெரிந்து கொள்ளுங்கள் :

π என்பது ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவிற்கும் (C) விட்டத்திற்கும் (d) உள்ள விகிதம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது $\pi = \frac{c}{d}$

π என்பது விகித வடிவில் உள்ளதால், π ஒரு விகிதமுறா எண் என்பதற்கு முரண்பாடான கூற்றாக அமைந்துள்ளது. வட்டத்தின் சுற்றளவு (C) மற்றும் விட்டம் (d) ஒன்றுக்கொன்று அளவுகளில் ஒப்பிடமுடியாததாகும். அதாவது அவைகளை அளப்பதற்கான ஒரு பொது அலகு நம்மிடம் இல்லை. எனவே நீ **C** அல்லது **d**ஐ துல்லியமாக அளந்தால் அதில் ஏதேனும் ஒன்று விகிதமுறா எண் என்று தெரியும். எனவே π என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

πன் மதிப்பை கிரேக்க அறிஞர் ஆர்க்கிமெடிஸ் மதிப்பிட்டார். அவர் π ன் மதிப்பு 3.140845 மற்றும் 3.142857 இடையே அமையும் என்று நிருபித்தார் (அதாவது, $3.140845 < \pi < 3.142857$). ஆர்யபட்டா (கி.பி.476-550), சிறந்த இந்திய கணித மேதை மற்றும் வான சாஸ்திர நிபுணர் π ன் மதிப்பை நான்கு தசமஸ்தானத்திற்கு மதிப்பிட்டு 3.1416 என்று விளக்கினார். அதிவேக கணிணி மற்றும் நவின அல்காரிதங்களை பயன்படுத்தி π ஐ 1.24 டிரில்லியன் தசம ஸ்தானத்திற்கு மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

π =3.14159265358979323846264338327950 .....π ன் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறா மற்றும் முடிவுறா சுழற்சியற்ற தசமமாகும்.எனவே π ஒரு விகிதமுறா எண். நாம் எப்போதும் $\frac{22}{7}$ என π ன் மதிப்பை தோராயமாக மதிப்பிடுவோம்.

ஆனால் $\pi \neq \frac{22}{7}$ என்பதை நினைவில் கொள்க. நாம் மார்ச் 14ஐ π நாளாக கொண்டாடுகிறோம். ஏனெனில் 3.14 மற்றும் (π = 3.14159 ....). என்ன ஒரு ஒற்றுமை ஆல்பர்ட் ஐஸ்டின் பிறந்த நாள் மார்ச் 14, 1879!

முயன்று பார்

$\sqrt{3}$ ன் மதிப்பைக் 6 தசமஸ்தானங்கள் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

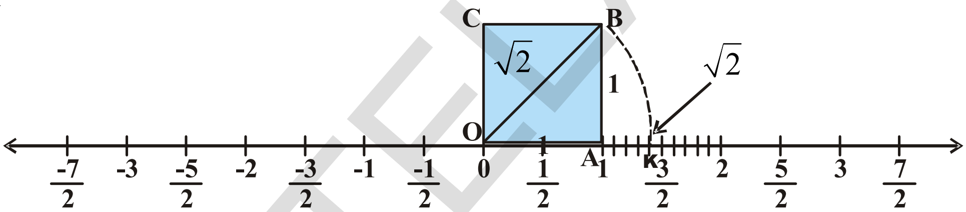
1.3 விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டின் மேல் குறித்துக்காட்டல்

எந்த இரு விகிதமுறு எண்களுக்கும் மத்தியில் ஒரு விகிதமுறு எண் உண்டு என ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். ஆகவே, ஒரு எண்கோட்டின் மேல் இரண்டு விகிதமுறு எண்களை புள்ளியிட்டு காட்டும் போது அவற்றிக்கிடையே உள்ள விகிதமுறு எண்ணையும் புள்ளியிட்டு குறிப்பிட வேண்டும். எனவே விகிதமுறு எண்களை குறிக்கும் எண்ணற்ற புள்ளிகள் உள்ளன. எண்கோடு விகிதமுறு எண்களை மட்டும் குறிக்கின்ற புள்ளிகளை கொண்டதாக இருக்கும். இது சரியா? $\sqrt{2}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க முடியாதா? நாம் இதைப் பற்றி விவாதித்து $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ஆகிய விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டின் மேல் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 7: $\sqrt{2}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க.

தீர்வு : ஒவ்வொரு பக்கமும் 1 அலகு நீளமுள்ள OABC என்னும் சதுரத்தை O என்ற புள்ளியிலிருந்து வரை.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி $OB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

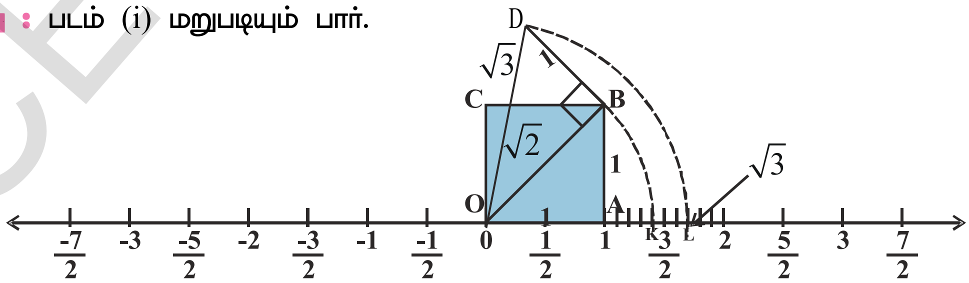


படம் (i)

நாம் $OB = \sqrt{2}$ என பார்த்தோம். O என்ற புள்ளியை மையமாக கொண்டு OBஐ ஆரமாக கொண்டு கவராயத்தின் (Compass) உதவியுடன் ஒரு வில் வரை. அது Oவிற்கு வலது புறத்தில் எண்கோட்டில் K என்ற புள்ளியில் வெட்டும். இப்போது K ன் மதிப்பு $\sqrt{2}$ என எண்கோட்டில் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8: $\sqrt{3}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க.

தீர்வு : படம் (i) மறுபடியும் பார்.



படம் (ii)

1 அலகு நீளமுள்ள BD ஐ OB க்கு செங்குத்தாக வரை. படம் (ii) உள்ளது போல் OD ஐ இணை.

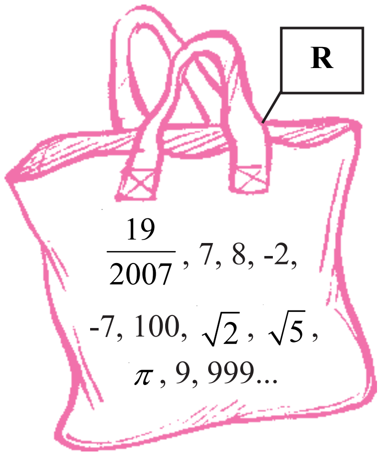
பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

O ஐ மையமாகவும் OD ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு கவராயத்தின் (Compass) உதவியுடன் எண்கோட்டின் மேல் ஒரு வில் வரை. அது Oக்கு வலதுபுறத்தில் L என்ற புள்ளியில் வெட்டும். அதற்கு $\sqrt{3}$ என்று குறி. இதன் மூலம் நாம் அறிவது என்னவென்றால் விகிதமுறா எண்களையும் எண்ணற்ற புள்ளிகளை கொண்டு எண்கோட்டில் குறிக்கலாம். இதேபோல் ஏதேனும் ஒரு மிகைமுழு 'n'எனும் போது நாம் $\sqrt{n}$ ஐ $\sqrt{n-1}$ குறித்தபின் குறிக்கலாம்.

முயன்று பார்

$\sqrt{5}$ மற்றும் $-\sqrt{5}$ ஐ எண்கோட்டில் குறி (குறிப்பு : $5^2 = (2)^2 + (1)^2$)

1.3 மெய் எண்கள் :



எல்லா விகிதமுறு எண்களும் $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதலாம். இங்கு p, q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$. இன்னும் சில எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுத இயலாது. (p மற்றும் q முழுக்கள்) இவை விகிதமுறா எண்கள் எனப்படும். நாம் எல்லா விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டின் மேல் குறித்தால் ஏதேனும் புள்ளி விடுபட்டிருக்குமா? இதற்கு பதில் "இல்லை". விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தொகுப்பு எண்கோட்டை முழுதாக அடைத்துக் கொள்ளும். இந்த சேர்ப்பு புதிய தொகுப்பை உண்டாக்குகிறது. அதை மெய் எண்கள் என்கிறோம். இதை R என்று குறிப்பிடுகிறோம். மெய் எண்கள் எண்கோட்டில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளையும் அடைத்து கொள்கிறது. எண் கோட்டில் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனிபட்ட மெய் எண்ணைக் குறிக்கிறது எனலாம். எனவே இதை மெய்யெண் கோடு எனலாம். இங்கு மெய் எண்களுக்கு சில உதாரணங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}$, 12.5, 12.5123..... இவற்றில் உள்ள மெய் எண்களில் விகிதமுறு எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் சேர்ந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9: $\frac{1}{5}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ க்கு இடையே இரண்டு விகிதமுறா எண்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\frac{1}{5}$ = 0.20 என நமக்குத் தெரியும்

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$\frac{1}{5}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ க்கு இடையே இரண்டு விகிதமுறா எண்களை கண்டுபிடிக்க நாம் அந்த எண்களின் தசம வடிவத்தை பார்வையிட வேண்டியுள்ளது மற்றும் அதை தொடர வேண்டியுள்ளது. இவ்விதமான எண்ணற்ற விகிதமுறா எண்களை நாம் காணலாம். இரண்டு விகிதமுறா எண்களுக்கு எடுத்துக்காட்டு

$$0.201201120111..., 0.24114111411114\ldots, 0.25231617181912..., 0.267812147512\ldots$$

$\frac{1}{5}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ க்கு இடையில் உள்ள நான்கு விகிதமுறா எண்களை காண இயலுமா?

எடுத்துக்காட்டு 10: 3 மற்றும் 4க்கு இடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறா எண்ணைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

> a மற்றும் b என்ற இரு மிகை விகிதமுறு எண்கள். மேலும் ab என்பது அந்த விகிதமுறு எண்களின் முழுவர்கம் இல்லை எனில், $\sqrt{ab}$ என்பது a மற்றும் b இடையே அமையும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

$\therefore$ 3 மற்றும் 4க்கு இடையே உள்ள விகிதமுறா எண் $\sqrt{3\times 4} = \sqrt{3}\times\sqrt{4}$
$= \sqrt{3}\times 2 = 2\sqrt{3}$

எடுத்துக்காட்டு 11: கீழ் உள்ள எண்கள் விகிதமுறு எண்களா (அ) விகிதமுறா எண்களா என பரிசீலித்துப் பார்.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

தீர்வு :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right) = 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

= 6, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ ஒரு முற்றொருமை என்று நமக்குத் தெரியும்.

இவ்வாறாக $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) = 3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 9 - 3 = 6$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $\dfrac{10}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10\div 2}{2\sqrt{5}\div 2}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2+2.\sqrt{2}\ .2+2^2=2+4\sqrt{2}+4$

$= 6+4\sqrt{2}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

பயிற்சி - 1.2

1. கீழ் உள்ள எண்களில் விகிதமுறு (அ) விகிதமுறா எண்களை வகைப்படுத்து.

   (i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…

   (iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. விகிதமுறா எண் எப்படி விகிதமுறு எண்களில் இருந்து வேறுபடுகிறது என்பதை ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்கு?

3. $\dfrac{5}{7}$ மற்றும் $\dfrac{7}{9}$ இடையே உள்ள விகிதமுறா எண்ணை கண்டுபிடி. இன்னும் எத்தனை எண்கள் அவற்றிடையே இருக்கலாம்?

4. 0.7 மற்றும் 0.77க்கு இடையில் 2 விகிதமுறா எண்களை எழுதுக.

5. $\sqrt{5}$ ன் மதிப்பை 3 தசமஸ்தானம் திருத்தமாகக் கண்டுபிடி.

6. $\sqrt{7}$ ன் மதிப்பைக் நீள் வகுத்தல் முறை மூலம் 6 தசமஸ்தானம் திருத்தமாக் கண்டுபிடி.

7. $\sqrt{10}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிப்பிடுக.

8. 2 மற்றும் 3க்கு மத்தியில் குறைந்தது இரண்டு விகிதமுறா எண்களை கண்டுபிடி.

9. கீழ் உள்ள கூற்றுக்கள் சரியா? தவறா? உன் பதிலை நியாயப்படுத்து.

   (i) ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணும் ஒரு மெய் எண்.

   (ii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு மெய் எண்.

   (iii) ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க தேவையில்லை

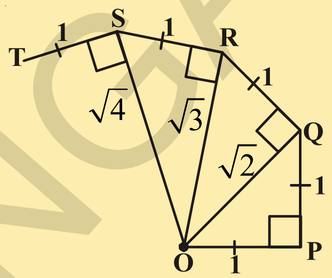
   (iv) n ஒரு முழுவர்க்கம் எனில் $\sqrt{n}$ விகிதமுறா எண் அல்ல.

   (v) n ஒரு முழுவர்க்கம் இல்லை எனில் $\sqrt{n}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

   (vi) எல்லா மெய் எண்களும் விகிதமுறா எண்கள்.

செயல்பாடு – "வர்க்கமூலச் சுருள்" வடிவமைத்தல்.

ஒரு நீண்ட தாளை எடுத்துக்கொண்டு கீழ் உள்ளவாறு வர்க்கமூலச் சுருளை வடிவமைத்தல்.



படி 1 : 'O' ல் தொடங்கி $\overline{OP}$ = 1அலகு நீளத்தில் ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரை.

படி 2 : $\overline{PQ}$ கோட்டுத்துண்டை $\overline{OP}$ க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு நீளத்தில் வரை. $(OP = PQ = 1)$ (படத்தைபார்)

படி 3 : O, Q களை இணை $(OQ = \sqrt{2})$

படி 4 : ஓரலகு நீளமுள்ள $\overline{QR}$ கோட்டுத்துண்டை $\overline{OQ}$ க்கு செங்குத்தாக வரை.

படி 5 : O, Rஐ இணை $(OR = \sqrt{3})$

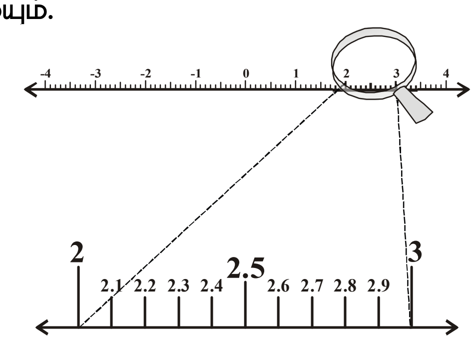
படி 6 : ஓரலகு நீளமுள்ள $\overline{RS}$ கோட்டுத்துண்டை $\overline{OR}$ க்கு செங்குத்தாக வரை.

படி 7 : இன்னும் சில படிகளுக்கு இந்த முறையை தொடர்ந்தால் நீங்கள் $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$... ஆகிய கோட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்டு ஒரு அழகான சுருளை உருவாக்கலாம். $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OT}$, $\overline{OU}$ ... ஆகிய கோட்டுத்துண்டுகள் முறையே $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}$ நீளங்களைக் குறிக்கிறது.

1.4 தொடர்ந்து மிகைப்படுத்துதல் மூலம் மெய் எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்.

முன்பிரிவில் நாம் மெய் எண்களுக்கு தசம விரிவாக்கம் உள்ளதைப் பார்த்தோம். நாம் முதலில் முடிவுறு தசம பின்னத்தை எப்படி எண்கோட்டில் குறிப்பது என்பதைப் பார்க்கலாம்.

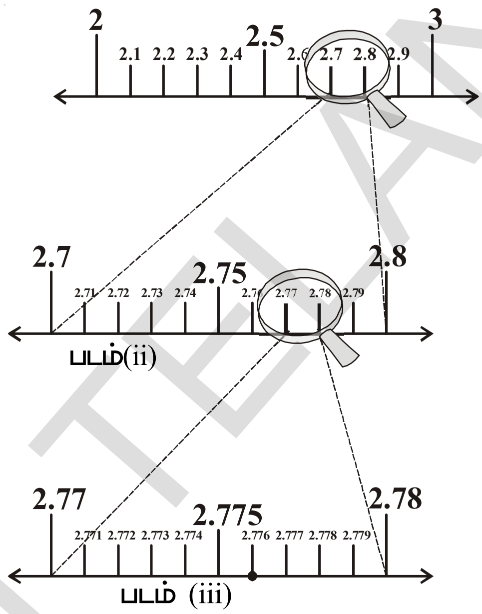
2.776ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க வேண்டுமென்றால் இந்த முடிவுறு தசமம் 2 மற்றும் 3க்கு இடையில் அமையும்.



படம்.(i)

எனவே, 2 மற்றும் 3 உள்ள பகுதியை எண்கோட்டில் உற்று கவனிப்போம். நாம் இதை 10 சம பிரிவுகளாக பிரித்தால் படம்(i) உள்ளபடி, அதன் குறியீடுகள் 2.1, 2.2, 2.3 என இருக்கும். இதை மிக தெளிவாக உற்றுநோக்க வேண்டும் என்றால், நாம் கையில் மிகைபடுத்தும் கண்ணாடியை கொண்டு நிருபிக்கலாம். 2 மற்றும் 3 உள்ள பகுதிகளை பார்த்தால் படம்(i) உள்ளதை போல் இருக்கும்.

ஆகவே 2.776 என்பது 2.7 மற்றும் 2.8க்கு இடையில் அமையும். எனவே 2.7 மற்றும் 2.8 உள்ள பகுதியை உற்று நோக்கு. படம்(ii) உள்ளது போல் மறுபடியும். இதை 10சம பாகங்களாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளதாக நாம் கற்பனை செய்து கொள்ள வேண்டும். முதல் குறியிடு 2.71 இரண்டாவது 2.72.. என குறிக்கப்பட்டிருக்கும். இதை தெளிவாக பார்ப்பதற்காக இதை (ii) ல் மிகைப்படுத்தி காட்டப்பட்டுள்ளது.



மறுபடியும் 2.776 என்பது 2.77 மற்றும் 2.78 இடையே உள்ளது.எனவே இந்த பகுதியை படம்(iii) உள்ளதை போல் எண்கோட்டை உற்று நோக்கி அதை 10-சம பாகங்களாக பிரித்து உள்ளதை போல் கற்பனை செய்து கொள்ள வேண்டும். படம் (iii) உள்ளதை போல் மிகைப்படுத்தி பார்ப்பது நல்லது.

முதல் குறியீடு 2.771, இரண்டாவது குறியீடு 2.772... என்றவாறு 2.776 என்பது 6வது குறியீடாக குறிக்கலாம்.

மிகைபடுத்தும் கண்ணாடி மூலம் இந்த எண்கோட்டின் மேல் உள்ள எண்களை பார்வையிடும் முறையை தொடர் மிகைபடுத்துதல் முறை என்கிறோம்.

கீழ் உள்ள எடுத்துகாட்டைக்கொண்டு நாம் எண்கோட்டின் மேல் முடிவுறா சுழற்தசம பின்னத்தை தொடர் மிகைப்படுத்தும்முறை மூலம் பார்வையிட்டு முயன்று குறித்து காட்டுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 12: தொடர் மிகைப்படுத்தும் முறை மூலம் $3.5\overline{8}$ ஐ எண்கோட்டின் மேல் 4 தசமஸ்தான எண்ணிற்கு குறித்து காட்டுக.

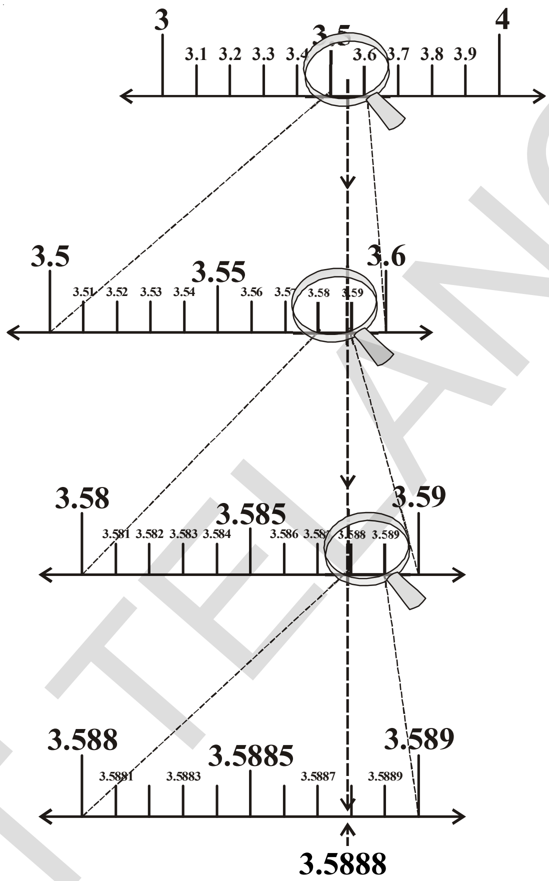
தீர்வு : எண்கோட்டில் 3.5888 ஐ குறிக்க மீண்டும் தொடர் மிகைப்படுத்தும் முறையை செய்யலாம்.

படி 1 :

படி 2 :

படி 3 :

படி 4 :



பயிற்சி - 1.3

1. தொடர் மிகைப்படுத்தும் முறையை பயன்படுத்தி எண்கோட்டில் 2.874 ஐ படத்தின் மூலம் காட்டுக.
2. $5.\overline{28}$ எண்கோட்டில் 3 தசம ஸ்தானம் வரை படத்தின் மூலம் காட்டுக.

1.5 மெய் எண்களின் மேல் செயல்கள்

நாம் முன் வகுப்பில் விகிதமுறு எண்கள், கூட்டல் மற்றும் பெருக்களின் மேல் மாற்று, சேர்ப்பு மற்றும் பங்கீட்டு பண்புகளை திருப்திபடுத்துகிறது என்பதை படித்துள்ளோம். விகிதமுறு எண்கள் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகியவற்றில் மேல் அடைவுப் பண்பை பெற்றுள்ளது என்பதையும் நாம் படித்துள்ளோம். விகிதமுறா எண்கள் கூட நான்கு அடிப்படை செயல்கள் மேல் அடைவுப் பண்பை பெற்றுள்ளதா என்பதை சொல்ல இயலுமா?

கீழ் உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்க்கவும்.

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$. இங்கு 0 என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்.

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$. இங்கு 0 என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$. இங்கு 2 என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1$. இங்கு 1 என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்

நீ என்ன கவனித்தாய்? விகிதமுறா எண்களின் மொத்தம், வேறுபாடு, வகுத்தல்பலன் மற்றும் பெருக்கற்பலன் விகிதமுறா எண்களாக இருக்க வேண்டும் என்று அவசியம் இல்லை.

எனவே விகிதமுறா எண்கள் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலின் மேல் அடைவு பெறவில்லை என்று நாம் சொல்லலாம்.

விகிதமுறா எண்களில் நாம் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 13: இவை விகிதமுறா எண்களா? இல்லையா என சரிபார்க்க. (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi+3$

தீர்வு : $\sqrt{2}=1.414...$, $\sqrt{3}=1.732...$, $\pi=3.1415...$ என்று நமக்குத் தெரியும்

(i) $5\sqrt{2} = 5(1.414\ldots) = 7.070\ldots$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7.070}{2}=3.535\ldots$ (i லிருந்து)

(iii) $21+\sqrt{3} = 21+1.732\ldots = 22.732\ldots$

(iv) $\pi+3 = 3.1415\ldots + 3 = 6.1415\ldots$

> q ஒரு விகிதமுறு மற்றும் s ஒரு விகிதமுறா எண் எனில் q+s, q - s, qs மற்றும் $\frac{q}{s}$ ஆகியவை விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.

இவையாவும் முடிவுறா, முடிவுறா சுழற்சியற்ற தசமமாகும். இவ்வாறாக இவையாவும் விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 14: $3\sqrt{5}-7\sqrt{3}$ லிருந்து $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ ஐ கழி.

தீர்வு : $(3\sqrt{5}-7\sqrt{3}) - (5\sqrt{3}+7\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5}-7\sqrt{3} - 5\sqrt{3}-7\sqrt{5}$

$= -4\sqrt{5}-12\sqrt{3}$

$= -(4\sqrt{5}+12\sqrt{3})$

எடுத்துக்காட்டு 15:. $6\sqrt{3}$ ஐ $13\sqrt{3}$ உடன் பெருக்குக.

தீர்வு : $6\sqrt{3}\times 13\sqrt{3} = 6\times 13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 78\times 3 = 234$

வர்க்கமூலத்திற்கு தொடர்பான பல வழிகளில் பயன்தரும் சில பண்புகள் இங்கு பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. a மற்றும் b என்பவை மிகை மெய் எண்கள் எனில்

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; if $b \neq 0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

(viI) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

இந்த பண்புகளின் சில குறிப்பிட்ட வகைகளைப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 16: கீழ் உள்ள கோவைகளை சுருக்குக.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

தீர்வு : (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5-2 = 3$

எடுத்துக்காட்டு 17: $5+2\sqrt{6}$ ன் வர்க்கமூலத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$ $\because \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}$

1.5.1 பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்குதல்

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க இயலுமா?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ன் மதிப்பு என்ன?

நாம் மதிப்பை எப்படி காண்பது? $\sqrt{2}$ = 1.4142135..... என்பது முடிவுறு தசமும் இல்லை, சுழலும் தசமும் இல்லை. 1 ஐ $\sqrt{2}$ ஆல் வகுக்க முடியுமா?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ன் மதிப்பை காண்பது அவ்வளவு சுலபம் இல்லை.

எனவே இதன் பகுதியை விகிதமுறு வடிவில் மாற்ற முயற்சிப்போம்.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்க அதன் பகுதி மற்றும் தொகுதியை $\sqrt{2}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ ஆம் இது $\sqrt{2}$ ல் பாதியாகும்.

இப்போது $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க முடியுமா? இது 0 மற்றும் $\sqrt{2}$ க்கு இடையே அமையும்.

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ என்பதை கவனி. எனவே நாம் $\sqrt{2}$ ஐ $\sqrt{2}$ ன் விகிதப்படுத்தும் காரணி என சொல்லலாம்.

இவ்வாறாக $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. $\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{8}$ ஒன்றுக்கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகள். மேலும் $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, இவற்றில் $\sqrt{2}$ என்பது $\sqrt{2}$ ன் மிக சுருங்கிய விகிதப்படுத்தும் காரணி ஆகும்.

இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் அந்த இரண்டில் ஒன்று மற்றொன்றிற்கு விகிதப்படுத்தும் காரணி ஆகும் என்பதை குறித்துக்கொள்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விகிதமுறா எண்ணின் விகிதப்படுத்தும் காரணி ஒரே வகையானது அல்ல என்பதை கவனி.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விகிதமுறா எண்ணிற்கு சுருங்கிய வடிவிலான விகிதப்படுத்தும் காரணி பயன்படுத்துவது எளிமையானது.

இதைசெய்

பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கும் காரணிகளை கண்டுபிடி. (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

எடுத்துக்காட்டு 18: $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ ன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு : $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$ என்பது நமக்கு தெரியும்.

$\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ ன் தொகுதி மற்றும் பகுதியை $4-\sqrt{5}$ ஆல் பெருக்கினால்.

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}}\times\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4-\sqrt{5}}{16-5}=\frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

எடுத்துக்காட்டு 19:. $x=7+4\sqrt{3}$ எனில் $x+\frac{1}{x}$ ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :: $x=7+4\sqrt{3}$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7-4\sqrt{3}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}=14$$

எடுத்துக்காட்டு 20: $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ஐ சுருக்குக.

தீர்வு : $7+4\sqrt{3}$ ன் விகிதபடுத்தும் காரணி $7-4\sqrt{3}$ மற்றும் $2+\sqrt{5}$ ன் விகிதபடுத்தும் காரணி $2-\sqrt{5}$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}+\frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}+\frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$=7-4\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

1.5.2 மெய் எண்களின் அடுக்குக் குறியீட்டின் விதிகள்

அடுக்குக் குறிகளின் விதிகளை நினைவுப்படுத்திக்கொள்வோம்.

i) $a^m.a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m > n \\ 1 & \text{if } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } m < n \end{cases}$

iv) $a^m b^m = (ab)^m$ v) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ vi) $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

இங்கு 'a', 'm' மற்றும் 'n' முழுக்கள் மற்றும் $a \neq 0$. a என்பது அடிமானம் m, n என்பவை அடுக்குகள்.

எடுத்துக்காட்டாக,

i) $7^3.7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ iv) $(7)^{-13}.(3)^{-13} = (7\times3)^{-13} = (21)^{-13}$

நாம் கீழ் உள்ளவற்றை கணக்கிட நினைத்தால்,

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

இவற்றை எவ்வாறு செய்யலாம்? மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் அடிமானம் மற்றும் அடுக்குகளை கவனித்தால் அவை விகிதமுறு எண்கள் ஆகும். எனவே அடுக்குக் குறிகளின் விதிகளை மிகை மெய்யெண்களின் அடிமானங்களுக்கும் மற்றும் விகிதமுறுஎண்களின் அடுக்குகளுக்கும் விரிவுபடுத்துவோம். இந்த விதிகளை விளக்குவதற்கு முன், நாம் மெய்எண்களின் n வது மூலம் என்ன என்பதை முதலில் நாம் புரிந்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$3^2 = 9$ எனில் $\sqrt{9} = 3$ என நமக்குத் தெரியும் (9ன் வர்க்கமூலம் 3)

அதாவது, $\sqrt[2]{9} = 3$

$5^2 = 25$ எனில் $\sqrt{25} = 5$ அதாவது, $\sqrt[2]{25} = 5$ அதாவது, $\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

கீழ்கண்டவற்றைக் கவனி.

$2^3 = 8$ எனில் $\sqrt[3]{8} = 2$ (8ன் முப்படி மூலம் 2); $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

$2^4 = 16$ எனில் $\sqrt[4]{16} = 2$ (16ன் 4வது மூலம் 2) $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ எனில் $\sqrt[5]{32} = 2$ (32ன் 5ம் படி மூலம்2); $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ எனில் $\sqrt[6]{64} = 2$ (64ன் 6ம் படி மூலம் 2); $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

....

அதேப்போல், $\mathbf{a^n = b}$ எனில் $\sqrt[n]{\mathbf{b}} = \mathbf{a}$ (**b** ன் **n** படி மூலம் **a**) $\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$

a > 0 என்பது ஒரு மெய் எண் மற்றும் **n** என்பது ஒரு மிகை முழு எனக்கொள்க.

b என்னும் சில மிகை மெய் எண்ணிற்கு $\mathbf{b^n = a}$ எனில் **b** என்பது **a** வின் **n** வது மூலம் எனப்படும். மேலும் இதை $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$ என எழுதுகிறோம். இற்கு முன் அடுக்குக் குறியீடுகளின் விதிகளைப் பற்றிய கலந்துரையாடலில் அவை முழுக்களுக்காக வரையறுக்கப்பட்டன. நாம் அடுக்குக் குறியீடுகளின் விதிகளை மிகை மெய் எண்களின் அடிமானங்களுக்கு மற்றும் விகிதமுறு எண்களின் அடுக்குகளுக்கு விரிவுபடுத்துவோம்.

$a > 0$ ஒரு மெய் எண், **p** , **q** என்பன விகிதமுறுஎண்கள் என்று எடுத்துக்கொண்டால் நமக்கு கிடைப்பது,

i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ iv) $a^p . b^p = (ab)^p$ v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

ஏற்கனவே கேட்கப்பட்ட வினாக்களுக்கு விடையளிக்க இந்த விதிகளை பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 21: சுருக்குக.

i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}}$

தீர்வு : i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \dfrac{1}{3^{2/15}}$

iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}} = (7 \times 11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

இதை செய்

சுருக்குக

i. $(16)^{\frac{1}{2}}$ ii. $(128)^{\frac{1}{7}}$

iii. $(343)^{\frac{1}{5}}$

விகிதமுறா மூலங்கள்

'n' என்பது 1ஐ விட பெரிய மிகை முழு மற்றும் a என்பது மிகை விகிதமுறு எண் ஆனால் எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் n வது அடுக்கு அல்ல எனில் $\sqrt[n]{a}$ அல்லது $a^{1/n}$ என்பது nவது வரிசையைக் கொண்ட விகிதமுறா மூலம் ஆகும். பொதுவாக a வின் மிகை nவது மூலத்தை ஒரு விகிதமுறா மூலம் அல்லது படி மூலம் என சொல்லலாம். இங்கு a என்பது அடிமானம், $\sqrt[n]{\ }$ என்பது மூலக்குறியீடு மற்றும் n என்பது மூலத்தின் வரிசை ஆகும். இங்கு விகிதமுறா மூலத்திற்கான எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, \ldots..$

விகிதமுறா மூலத்தின் வடிவங்கள்

அடுக்கு குறியீட்டு வடிவம் $a^{\frac{1}{n}}$

படிமூல வடிவம் $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt{7}$ என்னும் மெய் எண்ணை எடுத்துக்கொள்.

இதை $7^{\frac{1}{2}}$ எனவும் எழுதலாம். 7 என்பது எந்த ஒரு . விகிதமுறு எண்ணிற்கும் வர்க்கம் அல்ல என்பதால் $\sqrt{7}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா மூலம்.

$\sqrt[3]{8}$ என்னும் மெய் எண்ணை எடுத்துக்கொள். விகிதமுறு எண் 2ன் கணம் 8 என்பதால் $\sqrt[3]{8}$ ஒரு விகிதமுறா மூலம் அல்ல.

$\sqrt{\sqrt{2}}$ என்னும் மெய்யெண்ணை எடுத்துக்கொள். இதை $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ என எழுதலாம். எனவே இது ஒரு விகிதமுறா மூலம்.

இதை செய்

1. கீழ் உள்ள விகிதமுறா மூலங்களை அடுக்குகுறியீட்டு வடிவத்தில் எழுதுக.

i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv $\sqrt[17]{19}$

2. கீழ் உள்ள விகிதமுறா மூலங்களை படிமூல வடிவத்தில் எழுதுக.

i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv $142^{\frac{1}{2}}$

பயிற்சி- 1.4

1. கீழ் உள்ள கோவைகளை சுருக்குக.

i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. கீழ் உள்ள எண்களை விகிதமுறு (அ) விகிதமுறா எண்களாக வகைப்படுத்துக.

i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

3. கீழ் உள்ள சமன்பாட்டில் x, y, z ஆகிய மாறிகள் விகிதமுறு (அ) விகிதமுறா எண்களை குறிக்கின்றதா எனக் காண்க.

i) $x^2 = 7$ ii) $y^2 = 16$ iii) $z^2 = 0.02$

iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ v) $w^2 = 27$ vi) $t^4 = 256$

4. அனைத்து விகிதமுறா மூலங்களும், விகிதமுறா எண்கள். ஆனால் அனைத்து விகிதமுறா எண்களும் விகிதமுறா மூலங்களாக இருக்க தேவையில்லை. உன் விடையை நியாயப்படுத்து.

5. கீழ் உள்ளவற்றில் பகுதிகளை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்று:

i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. கீழ் உள்ளவற்றில் பகுதிகளை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றி சுருக்குக.

i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ ன் மதிப்பை 3 தசமஸ்தானம் வரை கண்டுபிடி. ($\sqrt{2} = 1.414$ $\sqrt{3} = 1.732$ மற்றும் $\sqrt{5} = 2.236$)

8. கீழ் உள்ளவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

i) $64^{\frac{1}{6}}$ ii) $32^{\frac{1}{5}}$ iii) $625^{\frac{1}{4}}$

iv) $16^{\frac{3}{2}}$ v) $243^{\frac{2}{5}}$ vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. சுருக்குக : $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$

10. 'a' மற்றும் 'b' என்பவை விகிதமுறு எண்கள் எனில், கீழ் உள்ள சமன்பாட்டில் a மற்றும் bன் மதிப்பைக் காண்க.

i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{6}$ ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a-b\sqrt{15}$

11. $11+2\sqrt{30}$ ன் வர்க்கமூலம் காண்க.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்கண்ட கருத்துகளை நாம் கற்றுள்ளோம்:

1. ஒரு எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் எழுதினால், p, q ஆகியவை முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$ எனில் அது விகிதமுறு எண்ணாகும்.
2. ஒரு எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் எழுத முடியவில்லை என்றால், எந்த ஒரு முழு p,q, மற்றும் $q \neq 0$ எனில் அது விகிதமுறா எண்ணாகும்.
3. ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம விரிவு முடிவுறு (அ) முடிவுறா சுழல் தசமமாக இருக்கும்.
4. ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழற்சியற்ற தசமமாக இருக்கும்.
5. விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தொகுப்பு மெய் எண்கள் ஆகும்.
6. எண்கோட்டின் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் அதற்கு ஒத்த தனித்த மெய் எண் இருக்கும். அதேபோல ஒவ்வொரு மெய் எண்ணிற்கும் எண்கோட்டின் மேல் அதற்கு ஒத்த தனித்த புள்ளிகள் இருக்கும்.
7. q ஒரு விகிதமுறு மற்றும் s ஒரு விகிதமுறா எண் எனில் q+s, q-s, qs மற்றும் $\frac{q}{s}$ ஆகியவை விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.
8. n என்பது முழு வர்க்கம் அல்லாத ஒரு இயல் எண் எனில், $\sqrt{n}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.
9. கீழ் உள்ள முற்றொருமைகள் a மற்றும் b மிகை மெய் எண்களுக்கு பொருந்தும்.

   i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$

   iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

   v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$ vi) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

10. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ஐ விகிதமுறு பகுதியாக்க அதை நாம் $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

    இங்கு a,b என்பவை முழுக்கள்.

11. $a > 0, b > 0$ ஒரு மெய் எண் மேலும் p மற்றும் q விகிதமுறு எண் எனில்

    i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

    iv) $a^p.b^p = (ab)^p$

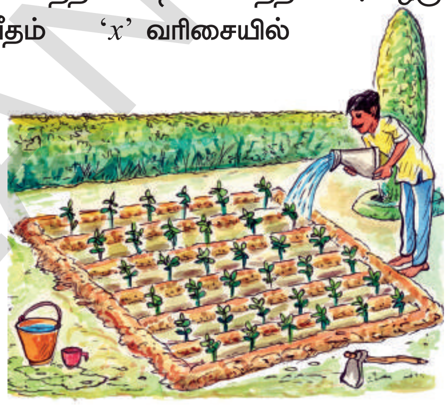
12. 'n' என்பது 1ஐ விட பெரிய மிகைமுழு மேலும் a என்பது மிகை விகிதமுறு எண் ஆனால் எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் n வது அடுக்கு அல்ல எனில் $\sqrt[n]{a}$ அல்லது $a^{\frac{1}{n}}$ என்பது nவது வரிசையைக் கொண்ட விகிதமுறா மூலம் ஆகும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மற்றும் காரணிப்படுத்துதல்

02

2.1 அறிமுகம்

ஒரு தோட்டத்தில் உள்ள ஆறு வரிசையில், ஒவ்வொரு வரிசையிலும் ஆறு செடிகள் வீதம் நடப்பட்டுள்ளன எனில் தோட்டத்தில் உள்ள மொத்த செடிகள் எத்தனை? ஒரு வேளை ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 'x' செடிகள் வீதம் 'x' வரிசையில் நடப்பட்டிருந்தால் மொத்தம் எத்தனை செடிகள் இருக்கும்? தெளிவாக அவை x^2 என தெரிகிறது.



1 கி.கி வெங்காயத்தின் விலை ₹10. ராம் p கி.கி, ராஜி q கி.கி, மற்றும் ரஹிம் r கி.கி.வீதம் வாங்கினார்கள். ஒவ்வொருவரும் எவ்வளவு பணம் செலுத்தினார்கள்? அவர்கள் செலுத்திய பணம் முறையே ₹10p, ₹10q ₹10r ஆகும். இவ்வாறான எடுத்துக்காட்டுகள் இயற்கணித கோவைகளின் பயன்பாட்டை நமக்கு காட்டுகின்றன.

இவ்வாறாகவே நாம் சதுரத்தின் பரப்பளவை காண 's^2' செவ்வகத்தின் பரப்பளவை காண 'lb' கனச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவை காண 'lbh' போன்ற இயற்கணித கோவைகளை பயன்படுத்துகிறோம். இவ்வாறாக நாம் பயன்படுத்தும் மற்ற இயற்கணித கோவைகள் எவை?

$3xy$, x^2+2x, $x^3 - x^2 + 4x + 3$, πr^2, $ax + b$ போன்ற இயற்கணித கோவைகளை பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்பர். நாம் இதுவரை பார்த்த இயற்கணித கோவைகளின் மாறிலிகளின் அடுக்குகள் குறை முழுக்கள் அல்ல என்பதை கவனி.

கீழே உள்ள இயற்கணித கோவைகளில் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எவை? கண்டுபிடி.

$$x^2, \quad x^{\frac{1}{2}} + 3, \quad 2x^2 - \frac{3}{x} + 5; \quad x^2 + xy + y^2$$

மேலே உள்ளவற்றில் $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல. ஏனெனில் இதில் உள்ள $x^{\frac{1}{2}}$ எனும் முதல் உறுப்பின் அடுக்கு மிகை முழுக்கள் அல்ல (அதாவது $\frac{1}{2}$). மேலும் $2x^2 - \frac{3}{x} + 5$ ம் ஓர் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல. ஏனெனில் இதை $2x^2 - 3x^{-1} + 5$ என எழுதலாம். இங்கு இரண்டாவது உறுப்பு $(3x^{-1})$ல் அடுக்குக்குறி குறை முழு. (அதாவது –1) ஒரு இயற்கணித கோவையின் மாறிலிகளின் அடுக்குகள் குறை முழுக்கள் அல்ல எனில் அவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்பர்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

கீழே உள்ளவற்றில் எவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள்? எவை அல்ல? காரணம் கூறு.

(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$

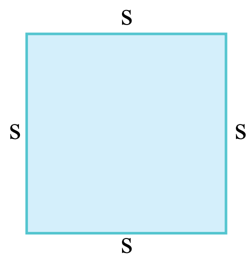
(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x+1}(x \neq 0)$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3\,xyz$

தற்போது பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பல்வேறு வடிவங்களைப் பார்ப்போம். மேலும் இந்த அத்தியாயத்தில் மீதி தேற்றம் மற்றும் காரணித் தேற்றங்களை பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவைளை காரணிப்படுத்துதலை கற்போம்.

2.2 ஒரு மாறியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

ஒவ்வொரு மாறிகளையும் குறிப்பிடுவதற்கு ஒரு குறியீட்டை பயன்படுத்துகிறோம் என்றும், அந்த மாறியானது எந்த மெய் மதிப்பிற்கும் பொருந்தும் எனவும் நமக்கு தெரியும். நாம் பொதுவாக மாறிகளை x, y, z போன்ற எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுகிறோம்.

அதாவது $2x, 3x, -x, \frac{3}{4}x$ .... அகியவை x என்ற ஒரு மாறியை கொண்டுள்ளது. இந்த கோவைகள் அனைத்தும் (மாறிலி) $\times$ (அடுக்கு குறி உள்ள மாறி) எனும் வடிவத்தில் உள்ளது. நாம் தற்போது சதுரத்தின் சுற்றளவை காண, $\text{P} = 4\text{s}$ என்ற சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.



இங்கு 4 ஒரு மாறிலி மற்றும் s ஒரு மாறி. இது சதுரத்தின் பக்கத்தை குறிப்பது. வெவ்வேறான சதுரங்களின் பக்க அளவுகள் மாறக் கூடியது.

கீழே உள்ள அட்டவணையை கவனி:

சதுரத்தின் பக்கம்	சுற்றளவு
(s)	(4s)
4 செ.மீ	P = 4 × 4 = 16 செ.மீ
5 செ.மீ	P = 4 × 5 = 20 செ.மீ
10 செ.மீ	P = 4 × 10 = 40 செ.மீ

இங்கு மாறிலியின் மதிப்பு 4 ஆனது எல்லா நிலைகளிலும் சமம். அதாவது இந்த கணக்கில் மாறிலியின் மதிப்பானது மாறவில்லை. ஆனால் மாறிகளின் (s) மதிப்பானது மாறுகிறது. நாம் ஒரு கோவையை (ஒரு மாறிலி) $\times$ (ஒரு மாறி) வடிவில் எழுத நினைக்கும் போது, மாறிலி தெரியாத நிலையில் நாம் மாறிலிகளை a, b, c ... போன்ற எழுத்துக்களில் குறிக்கலாம். எனவே கோவைகளின் பொதுவான வடிவம் $ax, by, cz,$ .... இங்கு a, b, c ...

என்பவை தன்னிச்சை மாறிலிகள். மற்ற இயற்கணித கோவைகள் $x^2, x^2 + 2x + 1, x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ போன்றவற்றை குறித்து நமக்கு தெரியும். இவை அனைத்தும் ஒரு மாறியை கொண்ட இயற்கணித கோவைகள்.

இதை செய்

- 'x' ஐ மாறியாக கொண்ட இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுதுக.
- 'y' ஐ மாறியாக கொண்ட மூன்று பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுதுக.
- $2x^2 + 3xy + 5y^2$ என்பது ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையா?
- பல்வேறு வகையான கனவடிவ பொருட்களின் பரப்பளவு மற்றும் கனஅளவு காண உதவும் சூத்திரங்களை எழுது. அவற்றில் மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளை கண்டுபிடி.

2.3 பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி :

பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பும், உறுப்பின் குணகம் (மாறிலி) மற்றும் மிகை முழுஎண்ணை அடுக்குகளாகக் கொண்ட மாறியின் பெருக்கற்பலான இருக்கும். ஓர் உறுப்பிலுள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் மொத்தத்தை படி என்பர். மேலும் உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த படி, அந்த பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி எனப்படும்.

கீழ்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் குணகம் மற்றும் படியை கண்டுபிடி

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

$3x^2 + 7x + 5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில், $3x^2, 7x$ மற்றும் 5 என்ற கோவைகள் பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகள். இதன் பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு குணகத்தை கொண்டுள்ளது. $3x^2 + 7x + 5$ல் x^2ன் குணகம் 3, x ன் குணகம் 7, மேலும் x^0ன் குணகம் 5. (x^0 =1 என்பதை நினைவில் கொள்)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என நமக்கு தெரியும்.

இந்த கோவையின் $3x^2$ என்ற உறுப்பு மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பு. எனவே $3x^2 + 7x + 5$ன் படி 2.

தற்போது $3x^2y^3 + 4xy + 7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகம் மற்றும் படியை கண்டுபிடிப்போம்.

x^2y^3 ன் குணகம் 3, xy ன் குணகம் 4, மேலும் x^0y^0 ன் குணகம் 7. $3x^2y^3$ என்ற உறுப்பின் மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் 2+3 = 5. இது மற்ற உறுப்புகளை விட பெரியது. எனவே $3x^2y^3 + 4xy + 7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5.

மாறிலியின் படி என்ன என்பதை சிந்திக்கவும். மாறிலிகள் எந்த மாறியையும் கொண்டிராது. இதை x^0 ன் பெருக்கலாக எழுதலாம். உதாரணமாக 5ன் படி பூச்சியம். இதை நாம் $5x^0$ என எழுதலாம். நாம் இதுவரை படி 1 (அ) 2 (அ) 3 கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை பார்த்தோம்.

எந்த ஒரு இயல் எண் n க்கு இவ்வாறே ஒரே மாறியில் n படிகள் வரை உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுத முடியுமா? ஒரு மாறி x ல் nவது படி உடைய பல்லுறுப்புக் கோவையின் வடிவம்,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

இவற்றில் $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ஆகியவை மாறிலிகள் மற்றும் $a_n \neq 0$.

ஒரு வேளை $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (அதாவது அனைத்து குணகங்களும் பூச்சியம்) எனில் நாம் பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவையை பெறுவோம். இதை '0' என குறித்து காட்டுவோம்.

பூச்சியத்தின் படியை கூற முடியுமா? இது வரையறுக்கப்படவில்லை ஏனெனில் பூச்சியத்தை மாறியின் பெருகற்பலனாக எழுதி எந்த அடுக்காகவும் உயர்த்த முடியாது.

இதை செய்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படியை எழுதுக.
   (i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ (ii) $7 - x + 3x^2$
   (iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2 (v) $-5xy^2$
2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் x^2 ன் குணகங்களை எழுதுக.
   (i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$ (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையை கவனி. மேலும் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(i) படியின் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள் :

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி	பல்லுறுப்புக் கோவையின் பெயர்	எடுத்துக்காட்டு
வரையறுக்கப்பட வில்லை	பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவை	0
பூச்சியம்	மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	$-12;\ 5;\ \frac{3}{4}$ ....
1	....	$x - 12;\ -7x + 8;\ ax + b$ etc.
2	இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	....
3	முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை	$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

பொதுவாக, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி n எனில் அதை n வது படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பர்.

(ii) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை பொறுத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்:

பூச்சிய மற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	பல்லறுப்பு கோவையின் பெயர்	எடுத்துக்காட்டு	உறுப்புகள்
1	ஓருறுப்புக்கோவை	$-3x$	$-3x$
2	ஈருறுப்புக்கோவை	$3x + 5$	$3x, 5$
3	மூவுறுப்புக்கோவை	$2x^2 + 5x + 1$	....
3க்கு மேல்	பலபடிக்கோவை	....	$3x^3, 2x^2, -7x, 5$

குறிப்பு : ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையும் ஒரு பலபடிக் கோவை. ஆனால் ஒவ்வொரு பலபடிக் கோவையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஒரு மாறியை கொண்ட ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்பு அல்லது ஈருறுப்புகளை கொண்டிருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : $3x$ or $2x - 5$

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

ஒரு மாறியை கொண்ட ஒரு கன (படி 3) பல்லுறுப்புக் கோவை எத்தனை உறுப்புக்களை கொண்டிருக்கும்?எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக..

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறி x எனில், அந்த பல்லுறுப்புக் கோவையை $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ என எழுதலாம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$

$r(y) = y^4 - 1$

$t(z) = z^2 + 5z + 3$

முயன்று பார்

1. x ஐ மாறியாக கொண்ட இரண்டு உறுப்புக்களுடைய பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுது.
2. p ஐ மாறியாக கொண்ட 15 உறுப்புகளுடைய பல்லுறுப்புக் கோவையை எவ்வாறு எழுதுவாய்?

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முடிவுறு உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை கொண்டிருக்கும்.

நாம் பொதுவாக ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை பற்றி கலந்தாலோசித்தோம். ஆனால் ஒன்றைவிட அதிகமான மாறிகளை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக : $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ போன்றவை x, y என்ற இரண்டு மாறிகளை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள். இதே போல் $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$ போன்றவை மூன்று மாறிகளை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள். இவ்வாறான பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றி விரிவாக பின்னர் படிப்போம்.

பயிற்சி - 2.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படியை கண்டுபிடி.
   (i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5
   (iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளில் எவை ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள்? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
   (i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$ (iv) $2+\frac{2}{y}(y \neq 0)$
   (v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}, (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் x^3 ன் குணகங்களை எழுதுக.
   (i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$
   (v) $\frac{\pi}{2}x^3 + x$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (viii) 4

4. பின்வருவனவற்றில் எவை நேரிய, இருபடி மற்றும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்று வகைப்படுத்துக.
   (i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$
   (v) $3p$ (vi) πr^2

5. பின்வரும் கூற்றுக்கள் சரியா? தவறா? எழுது. உன்னுடைய விடையை சரிபார்.
   (i) ஈருறுப்புக் கோவையில் அதிகபட்சம் இரண்டு உறுப்புக்கள் இருக்கும்.
   (ii) எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் ஈருறுப்புக் கோவைகள்
   (iii) ஒரு ஈருறுப்பு கோவையின் படி 3 ஆக கூட இருக்கலாம்
   (iv) பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி பூச்சியம்
   (v) $x^2 + 2xy + y^2$ ன் படி 2
   (vi) πr^2 என்பது ஒரு ஓருறுப்புக் கோவை.

6. 10ஐ படியாக கொண்ட ஒரு ஓருறுப்புக்கோவை, மூவுறுப்புகோவைக்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

2.4(a) பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள்

* $p(x) = x^2 + 5x + 4$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை கவனி.

$x = 1$ -ல் $p(x)$ ன் மதிப்பு என்ன?

இதை காண நாம் $p(x)$ல் உள்ள ஒவ்வொரு x க்கும் 1ஐ பிரதியிட வேண்டும்.

அவ்வாறு செய்தால் $p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4,$

$= 1 + 5 + 4 = 10$

எனவே, $x=1$ *எனில்* $p(x)$ ன் மதிப்பு 10 ஆகும்.

இவ்வாறே $p(x)$*ல்* $x=0$ மேலும் $x=-1$ என எடுத்துக்கொண்டால்.

$$\begin{aligned} p(0) &= (0)^2 + 5(0) + 4 \\ &= 0 + 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p(-1) &= (-1)^2 + 5(-1) + 4 \\ &= 1 - 5 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$p(-4)$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடி?

மற்றொரு பல்லுறுப்பு கோவையை எடுத்துக்கொள்

$$\begin{aligned} s(y) &= 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6 \\ s(1) &= 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6 \\ &= 4(1) - 5(1) - 1 + 6 \\ &= 4 - 5 - 1 + 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$s(-1)$ -ன் மதிப்பை உங்களால் காண முடியுமா?

இதை செய்

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையில் மாறியின் மதிப்பை கொண்டு கோவையின் மதிப்பை கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = 4x^2 - 3x + 7,\ x = 1$ எனும் போது

(ii) $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11},\ y = 1$ எனும் போது

(iii) $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6,\ t = p,\ t \in \mathrm{R}$ எனும் போது

(iv) $s(z) = z^3 - 1,\ z = 1$ எனும் போது

(v) $p(x) = 3x^2 + 5x - 7,\ x = 1$ எனும் போது

(vi) $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2},\ z = 2$ எனும் போது

* $r(t) = t - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை கவனி.

$r(1)$ ன் மதிப்பு எவ்வளவு? $r(1) = 1 - 1 = 0$

$r(1) = 0$ எனில் $r(t)$ என்னும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூச்சிய மதிப்பு 1 ஆகிறது.

பொதுவாக நாம் x மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையில் $p(x)=0$ ஆகும் போது x ஐ **பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்** என்கிறோம்.

இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பினை $p(x)$ன் "மூலம்" என்று கூறுவர்.

$f(x) = x + 1$? எனும் போது பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பு எவ்வளவு? இதன் மதிப்பு பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 1$ ஐ பூச்சியத்திற்கு சமம் செய்வதன் மூலம் கிடைக்கும் என்பதை உணரலாம். அதாவது $x + 1 = 0$ எனும் போது $x = -1$ ஆகும். எனவே $f(x)=0$ என்பது x மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $f(x)=0$ ஐ x ன் பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு என்பர். (-1) என்பது $f(x)=0$ பல்லுறுப்பு கோவையின் ஒரு மூலம் என கவனித்தோம். எனவே $x+1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் -1 ஆகும். அல்லது $x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின், மூலம்(root) -1 எனவும் கூறலாம்.

* இப்பொழுது ஒரு மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை 3ஐ எடுத்துக்கொள்க. இதன் பூச்சிய மதிப்பை கூற முடியுமா? இதற்கு பூச்சிய மதிப்பு இல்லை. $3 = 3x^0$ எனவே xன் எந்த மெய் மதிப்பிற்கும் $3x^0$ பூச்சியமாகாது. ஆகையால் மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூச்சியம் இல்லை. ஆனால் பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவையில் மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை அதிகமான பூச்சியங்களை கொண்டிருக்கும்.

இதை செய்

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களை கண்டுபி.

1. $2x - 3$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

எடுத்துக்காட்டு 1: $p(x) = x + 2$ எனும் போது $p(1), p(2), p(-1)$ மேலும் $p(-2)$ஐ கண்டுபிடி. $1, 2, -1, -2$ ஆகிய மதிப்புகளில், எந்த மதிப்புகள் $p(x)$ என்பது பூஜ்ஜியமாகும்?

தீர்வு : $p(x) = x + 2$ ல் x க்கு பதிலாக 1ஐ பிரதியிட்டால்

$$p(1) = 1 + 2 = 3$$

அவ்வாறே x க்கு பதிலாக 2ஐ பிரதியிட்டால்

$$p(2) = 2 + 2 = 4$$

x க்கு பதிலாக -1 ஐ பிரதியிட்டால்

$$p(-1) = -1 + 2 = 1$$

x க்கு பதிலாக -2 ஐ பிரதியிட்டால்

$$p(-2) = -2 + 2 = 0$$

இங்கு 1 , 2, -1 என்பவை பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பு அல்ல. ஆனால் $p(-2)=0$ எனவே -2 என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: $p(x) = 3x + 1$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $p(x)$ ன் பூச்சிய மதிப்பை கண்டுபிடிப்பது என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு $p(x) = 0$ ஐ தீர்ப்பது ஆகும்.

$$\text{அதாவது } p(x) = 0$$
$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

எனவே $3x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பு $-\frac{1}{3}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $2x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $p(x)$ ன் பூச்சியம் காண்பது என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு $p(x) = 0$ஐ தீர்ப்பது ஆகும்.

அதாவது $2x - 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{(எவ்வாறு ?)}$$

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ ன் மதிப்பை பல்லுறுப்புக் கோவையில் பரிசோதித்து பார்.

2.4((b) ஒரு மாறியில் உள்ள நேரிய பல்லுறுப்பு கோவையின் பூச்சியம்.

இப்பொழுது, $p(x) = ax + b, \quad a \neq 0$ என்றால் இதை நேரிய பல்லுறுப்புக்கோவை என்பர். $p(x)$ ன் பூச்சிய மதிப்பை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பாய்?

$p(x)$ன் பூச்சிய மதிப்பை காண்பதற்கு $p(x)$=0 எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை தீர்க்க வேண்டும்.

அதாவது $ax + b = 0, \quad a \neq 0$

எனவே $ax = -b$

$$x = \frac{-b}{a}$$

எனவே, $x = \frac{-b}{a}$ என்பது $p(x) = ax + b$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் ஆகும். **ஒரு மாறியில் உள்ள ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையானது ஒரே ஒரு பூச்சியம் கொண்டிருக்கும்.**

இதை செய்

கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகள்	பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்
$x + a$	$-a$
$x - a$	-------------
$ax + b$	-------------
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

எடுத்துக்காட்டு 4: $x^2 - 3x + 2$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு 2 மற்றும் 1 ஆகியவை பூச்சியங்கள் ஆகின்றனவா? இல்லையா? சரிபார்.

தீர்வு : $p(x) = x^2 - 3x + 2$ என்க

x க்கு பதிலாக 2ஐ பிரதியிட்டால்

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$
$$= 4 - 6 + 2 = 0$$

அவ்வாறே x க்கு பதிலாக 2ஐ பிரதியிட்டால்

$$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$$
$$= 1 - 3 + 2$$
$$= 0$$

எனவே 2 மற்றும் 1 என்பவை இரண்டும் $x^2 - 3x + 2$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

வேறு ஏதாவது முறை உள்ளதா? இதை சோதிக்கவும்.

$x^2 - 3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என்ன? இது ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையா? இல்லை. இது ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை. எனவே இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் இரண்டு பூச்சியங்களை கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5: $x^2 + 2x - a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் 3 எனில் a ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $p(x) = x^2 + 2x - a$ *என்க.*

பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் 3 எனவே $p(3) = 0$.

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$x = 3$ என்ற மதிப்பை பிரதியிட்டால் $(3)^2 + 2\,(3) - a = 0$

$$9 + 6 - a = 0$$
$$15 - a = 0$$
$$-a = -15$$
$$a = 15$$

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

1. $x^2 + 1$ ல் பூச்சியங்கள் இல்லை. ஏன்?
2. n படி கொண்ட பல்லுறுப்பு கோவையில் பூச்சியங்கள் எத்தனை இருக்கும் என்று உன்னால் கூற முடியுமா?

பயிற்சி - 2.2

1. (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$ –ல் $4x^2 - 5x + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

2. பின்வரும் பல்லுறுப்பு கோவையில் $p(0), p(1)$ மற்றும் $p(2)$ ன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t - 1)(t + 1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. கீழ்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் கொடுக்கப்பட்ட xன் மதிப்பிற்கு பல்லுறுப்பு கோவை பூச்சியம் ஆகுமா? இல்லையா? சரிபார்.

(i) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \frac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 2);\ x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2;\ y = 0$ (vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\frac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு பூச்சியங்களை கண்டுபிடி.

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px,\ p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q,\ p \neq 0,\ p\ q$ மெய்யெண்கள்

5. $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$, என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் 2 எனில் a ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

6. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு 0 மற்றும் 1 என்பவை பூச்சியங்கள் எனில் a, b ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

2.5 பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுத்தல்

கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை கவனி.

(i) 25 மற்றும் 3 எனும் எண்களை எடுத்துக்கொள். 25ஐ 3ஆல் வகு. நமக்கு ஈவு 8 மற்றும் மீதி 1 கிடைக்கும்.

வகுபடும் எண் = (வகுக்கும் எண் $\times$ ஈவு) + மீதி

எனவே, 25 = (8 $\times$ 3) + 1

இவ்வாறே 20ஐ 5ல் வகுத்தால் நாம் பெருவது 20 = (4 $\times$ 5) + 0

இதில் மீதி 0 இங்கு 5ஐ 20ன் காரணி என்றும் அல்லது 20ஐ 5ன் மடங்கு என்றும் கூறுவர்.

ஓர் எண்ணை மற்றொரு பூச்சியமற்ற எண்ணால் வகுப்பதை போலவே, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கலாமா? இப்பொழுது பார்ப்போம்.

(ii) $3x^3 + x^2 + x, (x \neq 0)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை x எனும் ஒருறுப்பால் வகு.

$$(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 3x^2 + x + 1$$

இங்கு x என்பது $3x^3 + x^2 + x$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்களுக்கும் பொது காரணி. எனவே நாம்

$3x^3 + x^2 + x$ என்பதை $x(3x^2 + x + 1)$ என்றும் எழுதலாம்.

$3x^3 + x^2 + x$ ன் காரணிகள் யாவை?

(iii) மற்றொரு எடுத்துக்காட்டு $(2x^2 + x + 1) \div x, (x \neq 0)$ ஐ பார்ப்போம்

$$\begin{array}{r|l} & \;\; 2x+1 \\ \hline x & 2x^2 + x + 1 \\ & -2x^2 \\ \hline & \quad\;\; x+1 \\ & \quad\; -x \\ \hline & \qquad\;\; 1 \\ \hline \end{array}$$

இங்கு $(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

இது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையா?

இதில் ஒரு உறுப்பு $\frac{1}{x}$ என்பது குறை முழுவை அடுக்காக கொண்டுள்ளது.

(அதாவது $\frac{1}{x} = x^{-1}$). எனவே, $2x + 1 + \frac{1}{x}$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.

ஆகவே $(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$ என எழுதலாம்.

இதில் 1 ஐ தனியாக எழுதினால் மீதி உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையை இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதலாம்.

இங்கு $2x + 1$ ஐ ஈவு, x ஐ வகுக்கும் எண் மற்றும் 1 ஐ மீதி என்பர். எனவே மீதி 0 அல்லாத போது x என்பது $2x^2 + x + 1$ன் காரணி ஆகாது என்பதை மனதில் கொள்க.

இதை செய்

1. $3y^3 + 2y^2 + y, (y \neq 0)$ ஐ 'y' ஆல் வகுத்து, வகுத்தல் விதியை எழுதுக.
2. $4p^2 + 2p + 2, (p \neq 0)$ ஐ '$2p$' ஆல் வகுத்து, வகுத்தல் விதியை எழுதுக.

எடுத்துக்காட்டு 6: $3x^2 + x - 1, (x \neq 1)$ ஐ $x + 1$ ஆல் வகு.

தீர்வு : $p(x) = 3x^2 + x - 1$ மற்றும் $q(x) = x + 1$ என்க.

$p(x)$ ஐ $q(x)$ ஆல் வகு. கீழ் வகுப்புகளில் கற்ற வகுத்தல் விதிகளை நினைவுகூர்க.

படி 1 : $\frac{3x^2}{x} = 3x$, இது ஈவின் முதல் உறுப்பு.

படி 2 : $(x + 1)\ 3x = 3x^2 + 3x$ ஆக பெருக்கினால்

$3x^2 + 3x$ ல் இருந்து $3x^2 + x$ ஐ கழித்தால் $-2x$ வரும்.

படி 3 : $\dfrac{-2x}{x} = -2$, (வகுத்தால்) இது ஈவின் இரண்டாவது உறுப்பு ஆகும்.

படி 4 : $(x + 1)(-2) = -2x - 2$ ஆக பெருக்கினால்

$-2x - 1$ ல் இருந்து கழித்தால் 1 கிடைக்கும்.

$$\begin{array}{r|l} & 3x-2 \\ \hline x+1 & 3x^2+x-1 \\ & 3x^2+3x \\ & -\quad - \\ \hline & -2x-1 \\ & -2x-2 \\ & +\quad + \\ \hline & +1 \\ \hline \end{array}$$

படி 5 : மாறிலி 1 மீதியாக வந்தவுடன் வகுத்தலை நிறுத்திவிடவும்.

(பல்லுறுப்புக்கோவை ஏன் மாறிலியை வகுக்கவில்லை என்று உன்னால் கூற முடியுமா)

இதிலிருந்து நமக்கு ஈவு $(3x - 2)$ மற்றும் மீதி $(+1)$ கிடைக்கிறது.

குறிப்பு : வகுக்கும் போது மீதி 0 அல்லது மீதியின் படி வகுக்கும் எண்ணின் படியை விட குறைவாகவோ வந்தால் வகுத்தல் முடிவடைந்தது எனலாம். இப்பொழுது வகுத்தல் விதியை எழுதுவோம்.

$$3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$$

அதாவது, வகுபடும் எண் = (வகுக்கும் எண் × ஈவு) + மீதி

$p(x)$ ல் x க்கு பதிலாக -1ஐ பிரதியிட்டு பார்த்தால்

$$p(x) = 3x^2 + x - 1$$
$$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1$$
$$= 3(+1) + (-1) - 1 = 1.$$

> $p(-1)$ ன் மதிப்பு, வகுத்தலில் மீதி 1க்கு சமமாக உள்ளதை கவனி.

எனவே $p(x) = 3x^2 + x - 1$ by $(x + 1)$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி $p(-1)$ ன் மதிப்பு அதாவது $x + 1$ ன் பூச்சிய மதிப்பு $x = -1$ க்கு சமம் ஆகும்.

மீண்டும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை கவனிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 7: $2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$, $(x \neq 1)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - 1)$ ஆல் வகுத்து மீதியை வகுக்கும் எண்ணின் பூச்சிய மதிப்போடு சரிபார்.

தீர்வு : $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

முதலில் $2x^4$ ல் x எத்தனை முறை வந்துள்ளது எனப் பார்ப்போம். $\dfrac{2x^4}{x} = 2x^3$

இப்பொழுது $(x - 1)(2x^3) = 2x^4 - 2x^3$ ஆக பெருக்கு.

இங்கு முதல் உறுப்பின் மீதி $-2x^3$ ஆக வருவதை காணலாம்.

இதேபோன்று தொடர்ந்து செய்க.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^3-2x^2-2x-5 \\ \hline x-1 & 2x^4-4x^3-3x-1 \\ & 2x^4-2x^3 \\ & -\qquad + \\ \hline & -2x^3-3x-1 \\ & -2x^3+2x^2 \\ & +\qquad - \\ \hline & -2x^2-3x-1 \\ & -2x^2+2x \\ & +\qquad - \\ \hline & -5x-1 \\ & -5x+5 \\ & +\quad - \\ \hline & -6 \\ \hline \end{array}$$

இங்கு ஈவு $2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ மற்றும் மீதி -6 ஆகும்.

இப்பொழுது, $(x - 1)$ ன் பூச்சிய மதிப்பு 1.

எனவே, $x = 1$ ஐ $f(x)$ல் பிரதியிடு, $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1 \\ &= 2 - 4 - 3 - 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

வகுத்தலில் கிடைத்த மீதியும் $f(x)$ ன் $(x-1)$ ன் பூச்சிய மதிப்பும் சமமா? மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து நாம் பின்வரும் தேற்றத்தை வருவிக்கலாம். பல்லுறுப்பு கோவையின் வகுத்தல் செய்யாமலேயே ஒரு மாறியில் உள்ள நேரிய பல்லுறுப்பு கோவை மூலம் இதற்கான மீதி கிடைக்கும்.

மீதித் தேற்றம் : $p(x)$ என்பது ஒன்று அல்லது அதைவிட அதிகமான படிகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. 'a' என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் எனக்கொள். $p(x)$ ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

தற்போது இத்தேற்றத்தின் நிருபணத்தை காண்போம்.

நிருபணம் : $p(x)$ என்பது 1 (அ) அதை விட அதிகமான படிகளை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. பின்னர் ஒரு வேளை $p(x)$ ஆனது $g(x) = (x - a)$ எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுபடும் போது, மீதி $q(x)$ மற்றும் ஈவு $r(x)$. வேறுவிதமாக $p(x)$ மற்றும் $g(x)$ இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மற்றும் $p(x)$ ன்படி $\geq g(x)$ ன்படி மேலும் $g(x) \neq 0$ அப்போது $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவையை நாம் கண்டுபிடிப்போம். இங்கு $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ ன் படி $< g(x)$ ன்படி.

வகுத்தல் விதிப்படி,

$$p(x) = g(x) \,.\, q(x) + r(x)$$

$$\therefore\ p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + r(x) \qquad \because\ g(x) = (x - a)$$

இங்கு $(x - a)$ன் படி 1 மேலும் $r(x)$ ன்படி $<$ $(x - a)$ ன்படி.

$\therefore$ $r(x)$ன் படி $0 \Rightarrow r(x)$ ஒரு மாறிலி அதாவது K என்க

எனவே x ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும், $r(x) = \text{K}$.

ஃ $p(x) = (x - a)\, q(x) + \text{K}$

$x = a$, எனில் $p(a) = (a - a)\, q(a) + \text{K}$

$$\begin{aligned} &= 0 + \text{K} \\ &= \text{K} \end{aligned}$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

நாம் இப்பொழுது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கும் போது வரும் மீதியை வகுத்தல் செய்யாமலே மீதித் தேற்றம் கொண்டு எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம் என்பதை எடுத்துக்காட்டுகள் மூலமாக கண்டறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8: $x^3 + 1$ ஐ $(x + 1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு $p(x) = x^3 + 1$

நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையில் $x + 1$ ன் பூச்சிய மதிப்பு -1 $[x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1]$

எனவே x க்கு பதிலாக -1 ஐ பிரதியிடு

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

எனவே மீதித்தேற்றம் படி, $(x^3 + 1)$ ஐ $(x + 1)$ ஆல் வகுத்தால் பூச்சியம் மீதி வரும்.

இதை நாம் $x^3 + 1$ ஐ $x + 1$ ஆல் வகுப்பதன் மூலம் சரிபார்க்கலாம்.

$x^3 + 1$ ன் காரணி $x + 1$ என்று கூறலாமா?

எடுத்துக்காட்டு 9: $x-2$ என்பது $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ ன் காரணி ஆகுமா? சரிபார்.

தீர்வு : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் காரணி $(x - 2)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகுமா என்பதை சரிபார்க்கவும்.

$(x - 2)$ ன் பூச்சிய மதிப்பு 2 ஐ x க்கு மாற்றாக பிரதியிடு (அதாவது $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$)

$$p(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4$$
$$= 8 - 2(4) - 10 + 4$$
$$= 8 - 8 - 10 + 4$$
$$= - 6.$$

மீதி பூச்சியமல்ல. எனவே $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் காரணி $(x - 2)$ அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 10: $p(y) = 4y^3 + 4y^2 - y - 1$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை $(2y + 1)$ க்கு மடங்கு ஆகுமா? சரிபார்.

தீர்வு : $p(y)$ ஐ $(2y + 1)$ மீதியின்றி வகுத்தால், $p(y)$ என்பது $(2y + 1)$ ன் மடங்காகும். என நமக்கு தெரியும்.

எனவே முதலில் $(2y + 1)$ ன் பூச்சிய மதிப்பை கண்டுபிடிப்போம் $2y + 1$, $y = \frac{-1}{2}$,

$p(y)$ ல் $\frac{-1}{2}$ ஐ பிரதியிடு.

$$p\left(\frac{-1}{2}\right)=4\left(\frac{-1}{2}\right)^3+4\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)-1$$

$$=4\left(\frac{-1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2}-1$$

$$= 0$$

எனவே $(2y + 1)$ என்பது $p(y)$க்கு காரணி ஆகும். இதன்படி $p(y)$ என்பது $(2y + 1)$ ன் மடங்கி எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11: $ax^3 + 3x^2 - 13$ மற்றும் $2x^3 - 5x + a$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கும் போது ஒரே மீதியை தந்தால் a ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $p(x) = ax^3 + 3x^2 - 13$ மேலும் $q(x) = 2x^3 - 5x + a$ என்க

$\because$ $p(x)$ மேலும் $q(x)$ ஐ $x - 2$ வகுத்தால் மீதி சமம்.

$\therefore$ $p(2) = q(2)$

$$a(2)^3 + 3(2)^2 - 13 = 2(2)^3 - 5(2) + a$$

$$8a + 12 - 13 = 16 - 10 + a$$

$$8a - 1 = a + 6$$

$$8a - a = 6 + 1$$

$$7a = 7$$

$$a = 1$$

பயிற்சி - 2.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ஐ கீழ்காணும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை கண்டுபிடி.

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$

   (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - px^2 + 6x - p$ ஐ $x - p$ ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதி எவ்வளவு?

3. $2x^2 - 3x + 5$ ஐ $2x - 3$ ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதியை கண்டுபிடி. இது பல்லுறுப்புக் கோவையை முழுமையாக வகுக்கிறதா? காரணம் கூறு.

4. $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ ஐ $x - \frac{2}{3}$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியை கண்டுபிடி.

5. $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 4x + a$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $x - 2$ஆல் வகுக்கும் போது ஒரே மீதிகளை தந்தால் a ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

6. $x^3 + ax^2 + 5$ மற்றும் $x^3 - 2x^2 + a$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $(x + 2)$ஆல் வகுக்கும் போது ஒரே மீதிகளை தந்தால் a ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

7. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ ப ஐ $g(x) = x - 2$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை கண்டுபிடி. விடையை வகுத்து சரிபார்க்கவும்.

8. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ ஐ $g(x) = 1 - 2x$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை கண்டுபிடி. நீள் வகுத்தல் மூலம் விடையை சரிபார்க்கவும்.

9. $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை $(x - 2)$ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 மேலும் $(x + 2)$ல் வகுத்தால் மீதி –2 எனில் a, bன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

2.6 பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிபடுத்துதல்

$p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை $q(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கும் போது மீதி பூச்சியம் கிடைத்தால் $q(x)$ ஐ $p(x)$ ன் காரணி என்பர் என உங்களுக்கு தெரியும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ ஐ $g(x) = 2x + 1$, ஆல் வகுக்கும் போது மீதி பூச்சியம் கிடைத்தால் (சரிபார்),

$$4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\,(2x + 1) + 0$$

எனவே $p(x) = q(x)\,(2x + 1)$

ஆகையால் $g(x) = 2x + 1$ என்பது $p(x)$ ஆகும்

நீங்கள் இப்பொழுது மீதித் தோற்றத்தை அடிப்படையாக கொண்டு ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் காரணிகள் கண்டுபிடிப்பதற்கு தேற்றத்தைக் கொண்டு விளக்க முடியுமா?

காரணித் தேற்றம் : $p(x)$ என்பது $n \geq 1$ படியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. (i) $p(a) = 0$ எனில் $x - a$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி ஆகும். மேலும் இதன் மறுதலையாக (ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ க்கு காரணி எனில் $p(a) = 0$ ஆகும்.

இந்த தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை பார்ப்போம்.

நிரூபணம் : மீதித் தேற்றத்தின் படி,

$$p(x) = (x - a)\; q(x) + p(a)$$

(i) $p(a) = 0$ என்ற கூற்றை எடுத்துக்கொண்டால், $p(x) = (x - a)\, q(x) + 0.$

$= (x - a)\, q(x)$

இதன் படி $p(x)$க்கு $(x - a)$ காரணி என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$க்கு காரணி எனில், $p(x) = (x - a)\, q(x)$ சில பல்லுறுப்பு கோவை $q(x)$ க்கு என்ற கூற்றை எடுத்துக்கொள்க.

$$\therefore\ p(a) = (a - a)\, q(a)$$
$$= 0$$

எனவே $(x - a)$ என்பது $p(x)$ க்கு காரணி ஆனதால் $p(a) = 0$ ஆகும்.

இப்போது சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்:

எடுத்துக்காட்டு 12: $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 2$ க்கு காரணி ஆகுமா?

தீர்வு : $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ மற்றும் $g(x) = x + 2$ என்க.

$g(x)$ ன் பூச்சிய மதிப்பு -2

எனவே $p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 6$

$$= -8 + 2(4) - 6 + 6$$
$$= -8 + 8 - 6 + 6$$
$$= 0$$

எனவே, காரணித் தேற்றம் படி, கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ க்கு $x + 2$ காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 13: $2x^3 - 9x^2 + x + K$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $2x - 3$ காரணி எனில் K ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $(2x - 3)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு காரணி,

$(2x - 3) = 0$ எனில் $x = \dfrac{3}{2}$

$(2x - 3)$ ன் பூச்சிய மதிப்பு $\dfrac{3}{2}$

ஆகையால் $(2x - 3)$ என்பது $p(x)$ க்கு காரணி எனில் $p\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$ ஆகும்.

$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K,$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + K = 0\right) \times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4K = 0$$
$$-48 + 4K = 0$$
$$4K = 48$$
எனவே, $K = 12$

எடுத்துக்காட்டு 14: $(x - 1)$ என்பது $x^{10} - 1$ மற்றும் $x^{11} - 1$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு காரணி என நிரூபிக்க.

தீர்வு : $p(x) = x^{10} - 1$ மேலும் $g(x) = x^{11} - 1$ என்க

$(x - 1)$ இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $p(x)$ மற்றும் $g(x)$க்கு காரணிகள் என காட்ட வேண்டுமானால் $p(1) = 0$ மேலும் $g(1) = 0$ என காட்டினால் போதும்.

இப்பொழுது

$$p(x) = x^{10} - 1 \quad \text{மேலும்} \quad g(x) = x^{11} - 1$$
$$p(1) = (1)^{10} - 1 \quad \text{மேலும்} \quad g(1) = (1)^{11} - 1$$
$$= 1 - 1 \qquad\qquad = 1 - 1$$
$$= 0 \qquad\qquad = 0$$

முயன்றுபார்

$x^n - 1$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x - 1)$ ஒரு காரணி ஆகுமா? காட்டு

காரணித் தேற்றம் படி,
$(x - 1)$ என்பது $p(x)$ மற்றும் $g(x)$க்கு காரணிகள் ஆகும்.

நாம் இப்பொழுது இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ ஐ ($a \neq 0$ மேலும் a, b, c க்கள் மாறிலிகள்) காரணிபடுத்த முயற்சி செய்வோம்.

இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(px + q)$ மேலும் $(rx + s)$ காரணிகள் எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $ax^2 + bx + c = (px + q)\ (rx + s)$
$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2, x ன் குணகங்களை ஒப்பிட்டால், நாம் பெறுவது,

$$a = pr$$
$$b = ps + qr$$
$$c = qs$$

இதிலிருந்து நாம் x குணகம் b என்பது ps மற்றும் qr ன் மொத்தம் என தெரிந்துக்கொண்டோம். இவற்றின் பெருக்கற்பலன்

$$(ps)\,(qr) = (pr)(qs)$$
$= ac$ என எழுதலாம்.

இதன்படி $ax^2 + bx + c$ எனும் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை காரணிப்படுத்துதலில் b என்பது இரண்டு எண்களின் மொத்தம் என்றும் இவற்றின் பெருக்கற்பலன் ac என்றும் தெரிந்துக் கொண்டோம்.

எடுத்துக்காட்டு 15: $3x^2 + 11x + 6$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : p, q என்பவை இரண்டு எண்கள் மேலும் $p + q = 11$ மற்றும் $pq = 3 \times 6 = 18$, எனும் போது p,q ஐ காண வேண்டும் எனில்,

18ஐ காரணியாக கொண்ட ஜோடிகளை காண்போம்.

$(1, 18), (2, 9), (3, 6)$ இந்த ஜோடிகளில் $p + q = 11$ஐ திருப்திபடுத்தும் ஜோடி (2,9)

எனவே $3x^2 + 11x + 6 = 3x^2 + 2x + 9x + 6$

$$= x(3x + 2) + 3(3x + 2)$$

$$= (3x + 2)(x + 3).$$

இதை செய்

பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக.

1. $6x^2 + 19x + 15$ 2. $10m^2 - 31m - 132$ 3. $12x^2 + 11x + 2$

தற்போது மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 16: $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - 3x + 2$ ஆல் வகுபடுமா? காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்தி எவ்வாறு சரிபார்க்க முடியும்?

தீர்வு : வகுத்தி ஓர் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல. இது ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை. இருபடிக் கோவையின் மைய உறுப்பை பிரித்து காரணிப்படுத்தும் முறை நாம் அறிந்ததே. அவ்வாறு செய்வோம்.

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$$

$$= x(x - 2) - 1(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x - 1).$$

$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $x^2 - 3x + 2$ எனும் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை காரணி எனக் காட்ட வேண்டும் எனில் $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ க்கு $(x - 2)$ மற்றும் $(x - 1)$ஐ காரணிகள் எனக் காட்ட வேண்டும்.

$p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ என்க

மேலும், $p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$

$$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$$

$$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$$

$$= 50 - 50$$

$$= 0$$

$p(2) = 0$,எனவே $(x - 2)$ என்பது $p(x)$க்கு காரணி ஆகும்.

$p(x)$க்கு $(x - 1)$ காரணி ஆனால்

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$p(1) = 0$ எனும் போது $(x - 1)$ என்பது $p(x)$க்கு காரணி ஆகிறது.

$(x - 2)$ மற்றும் $(x - 1)$ இரண்டும் $p(x)$ க்கு காரணி ஆகிறது. இவற்றின் பெருக்கற்பலன் $x^2 - 3x + 2$ ம் $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ க்கு காரணி ஆகிறது.

- $(x-y) \mid (x^n - y^n)$, அனைத்து $n \in \mathrm{N}$
- $(x+y) \mid (x^n - y^n)$, இங்கு n –இரட்டை
- $(x+y) \mid (x^n + y^n)$, இங்கு n - ஒற்றை
- $(x-y) \nmid (x^n + y^n)$,அனைத்து $n \in \mathrm{N}$

எடுத்துக்காட்டு 17: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ என்க.

முயற்சித்தல் முறையில் $p(1) = 0$ என்பதை கண்டறிந்தோம் (சரிபார்).

$p(x)$ க்கு $(x - 1)$ ஒருகாரணி ஆகிறது.

பின்னர் $p(x)$ ஐ $(x - 1)$ ஆல் வகுத்தால் நாம் பெறுவது $x^2 - 22x + 120$.

இதனை வேறு முறையில் செய்யலாம்.

$$\begin{aligned} x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(why?)} \\ &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \end{aligned}$$

இப்பொழுது $x^2 - 22x + 120$ என்பது இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை. எனவே மைய உறுப்பை பிரித்து காரணிப்படுத்துவோம்.

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

எனவே, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$.

பயிற்சி - 2.4

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x+1)$ காரணி ஆகுமா?
   (i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
   (iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\, x + \sqrt{3}$
2. காரணித் தேற்றம் பயன்படுத்தி, பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $f(\mathrm{x})$ க்கு $g(x)$ காரணி ஆகுமா? ஆகாதா? சரிபார்க்க:
   (i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1,\ g(x) = x + 1$
   (ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 1$
   (iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 2$
   (iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12,\ g(x) = 3x - 2$
   (v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18,\ g(x) = 2x + 3$
3. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ க்கு $(x - 2), (x + 3)$ மற்றும் $(x - 4)$ காரணிகள் எனக்காட்டு.
4. $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ க்கு $(x + 4), (x - 3)$ மற்றும் $(x - 7)$ காரணிகள் எனக்காட்டு.
5. $px^2 + 5x + r$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x - 2)$ மற்றும் $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ காரணிகள் எனில் $p = r$ எனக்காட்டு.
6. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x^2 - 1)$ காரணிகள் எனில் $a + c + e = b + d = 0$ எனக்காட்டு
7. காரணிப்படுத்துக. (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$
8. $ax^2 + bx + c$ மற்றும் $bx^2 + ax + \mathrm{c}$ எனும் இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு பொதுக் காரணி $x + 1$ எனில் $c = 0$ மேலும் $a = \mathrm{b}$ எனக்காட்டு.
9. $x^2 - x - 6$ மற்றும் $x^2 + 3x - 18$க்கு $(x - a)$ பொதுக்காரணி எனில் a ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.
10. $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ ன் ஒரு காரணி $(y - 3)$ எனில் மற்ற இரு காரணிகளை கண்டுபிடி.

2.6 இயற்கணித முற்றொருமைகள்

மாறி ஏற்கும் எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு இயற்கணித சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் எனில் அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும் என்பதை நினைவு கூறுக.

முற்றொருமை I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

முற்றொருமை II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

முற்றொருமை III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

முற்றொருமை IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$.

வடிவியல் நிரூபணம் :

முற்றொருமை $(x - y)^2$ க்கு

படி -I : x அலகு பக்கம் கொண்ட சதுரத்தை வரை

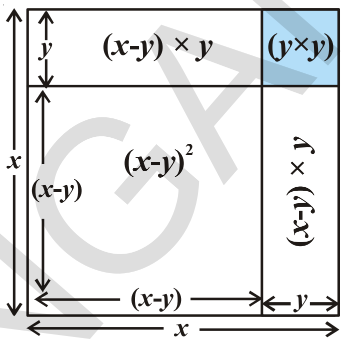
படி -II : x ல் இருந்து y அலகு நீளத்தை கழி

படி -III : $(x - y)^2$ ஐ கணக்கிடுக

$$= x^2 - [(x - y)\, y + (x - y)\, y + y^2]$$

$$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$$

$$= x^2 - 2xy + y^2$$



முயன்று பார்

பின்வரும் முற்றொருமைகளுக்கு வடிவியல் படங்கள் வரைந்து நிரூபிக்க.

(i) $(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x+y)(x-y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$ (iv) $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

இதை செய்

பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் பெருக்கற்பலனை கண்டுபிடி.

(i) $(x + 5)\,(x + 5)$ (ii) $(p - 3)\,(p + 3)$ (iii) $(y - 1)\,(y - 1)$

(iv) $(t + 2)\,(t + 4)$ (v) 102×98 (vi) $(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3)$

இயற்கணித கோவைகளை காரணிப்படுத்துதலுக்கு முற்றொருமைகள் பயனுள்ளதாக உள்ளன. இப்பொழுது சில எடுத்துக்காட்டுகளை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 18: காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

தீர்வு : (i) இங்கு $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)\,(1)$

இதை $(x + a)\,(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$ எனும் முற்றொருமையுடன் ஒப்பிட்டால் நாம் $(x + 4)\,(x + 1)$ ஐ பெறுகிறோம்.

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

இதை $x^2 - y^2 \equiv (x + y)\,(x - y)$ எனும் முற்றொருமையுடன் ஒப்பிட்டால் நாம் பெறுவது, $9x^2 - 25 = (3x + 5)\,(3x - 5)$.

(iii) இங்கு நாம் காண்பது

$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)\,(4b) + (4b)^2$

இந்த கோவையை $x^2 + 2xy + y^2$ உடன் ஒப்பிட்டால்,

$x = 5a$ மற்றும் $y = 4b$ ஆகும்.

இதை $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ எனும் முற்றொருமையுடன் ஒபபிட்டால

நாம் பெறுவது $25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$

$= (5a + 4b)\,(5a + 4b).$

- $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
- $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

(iv) இங்கு $49x^2 - 112xy + 64y^2$ ல் $49x^2 = (7x)^2$, $64y^2 = (8y)^2$ மேலும்

$112\,xy = 2(7x)\,(8y)$

இதை $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$ எனும் முற்றொருமையுடன் ஒப்பிட்டால்

நாம் பெறுவது, $49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)\,(8y) + (8y)^2$

$= (7x - 8y)^2$

$= (7x - 8y)\,(7x - 8y).$

இதை செய்

முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\dfrac{9}{16}x^2 - \dfrac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

இதுவரை நாம் பயன்படுத்திய முற்றொருமைகள் ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன். இப்பொழுது முற்றொருமை Iஐ மூவுறுப்புக் கோவை $x+y+z$ க்கும் பயன்படுத்தி $(x + y + z)^2$ ஐ கணக்கிடலாம்.

$x + y = t$ என்க.இப்போது $(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ (முற்றொருமை I ன் படி)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)\,z + z^2$ ('t' ன் மதிப்பை பிரதியிட்டால்)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

உறுப்புகளை மாற்றி எழுதினால் $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ கிடைக்கிறது.

மாற்று முறை :

$(x + y + z)^2$ ன் உறுப்புகளை குழுக்களாக மாற்றி அமைக்கும் முறையில் நாம் கணக்கிடுவோம்.

$$[(x + y) + z]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)(z) + (z)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad \text{[முற்றொருமை I ன் படி]}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

மேலும் வேறு விதமாக உறுப்புக்களை குழுக்களாக மாற்றி அமைக்கும் முறையில் விரிவாக்க முடியுமா? அவ்வாறு செய்தால் ஒரே விடையை பெற முடியுமா? எனவே, நாம் கீழ்கண்ட முற்றொருமையை பெறுகிறோம்.

முற்றொருமை V : $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

எடுத்துக்காட்டு 19: முற்றொருமையை பயன்படுத்தி $(2a + 3b + 5)^2$ஐ விரிபுப்படுத்துக..

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x + y + z)^2$ உடன் ஒப்பிட்டால்,

$x = 2a,\ y = 3b$ மேலும் $z = 5$ ஐ நாம் பெறுவோம்.

எனவே முற்றொருமை vன் படி நாம் பெறுவது.

$$(2a + 3b + 5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$$

$$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a.$$

எடுத்துக்காட்டு 20: $(5x - y + z)(5x - y + z)$ ன் பெருக்கற்பலனை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு $(5x - y + z)(5x - y + z) = (5x - y + z)^2$

$$= [5x + (-y) + z]^2$$

எனவே முற்றொருமை vன்படி நாம் பெறுவது$\mathbf{(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}$,

$$(5x + (-y) + z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$$

$$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx.$$

எடுத்துக்காட்டு 21: $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : நாம் பெறுவது

$$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$$

$$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$$

முற்றொருமை V உடன் ஒப்பிட்டால்,

$(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$, நாம் பெறுவது

$$= (2x - 3y + 5z)^2$$

$$= (2x - 3y + 5z)\,(2x - 3y + 5z).$$

இதை செய்

(i) $(p + 2q + r)^2$ ஐ விரித்து எழுதுக.

(ii) $(4x - 2y - 3z)^2$ ஐ முற்றொருமையை பயன்படுத்தி விரித்து எழுதுக.

(iii) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ca$ ஐ தகுந்த முற்றொருமையை பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துக.

நாம் இதுவரை இருபடி கொண்ட உறுப்புகளின் முற்றொருமைகள் பற்றி பார்த்தோம். இப்பொழுது நாம் முற்றொருமை I ஐ பயன்டுத்தி $(x + y)^3$ன் விரிவாக்கத்தை கண்டுபிடிப்போம்.

நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)^2\,(x + y)\\ &= (x^2 + 2xy + y^2)\,(x + y)\\ &= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)\\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\ &= x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3\\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y).\end{aligned}$$

எனவே நாம் கீழ்கண்ட முற்றொருமையை பெறுகிறோம்.

முற்றொருமை VI : $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$.

முயன்று பார்

$(x - y)^3$ ன் விரிவை பெருக்கல் செய்யாமல் எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்? பெருக்கல் செய்து விடையை சரிபார்.

இதிலிருந்து நாம் மற்றொரு முற்றொருமையை பெறலாம்

முற்றொருமை VII : $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$.

$$\equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

மேற்கண்ட முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 22: பின்வரும் கனத்தை விரித்து எழுதுக.

(i) $(2a+3b)^3$ (ii) $(2p-5)^3$

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x+y)^3$ உடன் ஒப்பிட்டால் $x=2a$ மற்றும் $y=3b$ என்பதை கவனிக்கலாம்.

எனவே முற்றொருமை VI ன் படி,

$$(2a+3b)^3 = (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a+3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a+3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2$$
$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x-y)^3$ உடன் ஒப்பிட்டால் $x = 2p$ மற்றும் $y = 5$ஐ கண்டுபிடி.

$$(2p-5)^3 = (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p-5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p-5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p$$
$$= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.$$

எடுத்துக்காட்டு 23: பின்வருவனவற்றிற்கு பொருத்தமான முற்றொருமையை பயன்படுத்தி விடையை கண்டுபிடி.

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

தீர்வு : $(103)^3 = (100+3)^3$ ஆகும்.

இதை $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ உடன் ஒப்பிட்டால் நாம் பெறுவது,

$$= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100+3)$$
$$= 1000000 + 27 + 900(103)$$
$$= 1000000 + 27 + 92700$$
$$= 1092727.$$

(ii) $(99)^3 = (100-1)^3$ ஆகும்.

இதை $(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ உடன் ஒப்பிட்டால் நாம் பெறுவது,

$$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100-1)$$
$$= 1000000 - 1 - 300\,(99)$$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299.$

எடுத்துக்காட்டு 24: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவையை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$$

இதை முற்றொருமை VI உடன் ஒப்பிட்டால் $(x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,

நாம் பெறுவது $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x + 3y)^3$

$$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y).$$

இதை செய்

1. $(x + 1)^3$ ஐ முற்றொருமையை பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்துக.
2. $(3m - 2n)^3$ ஐ கணக்கிடுக.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ஐ எடுத்துக்கொண்டு விரிவு செய்தால் இவற்றின் பெருக்கற்பலன்

$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z}$$
$$+ \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (சுருக்கிய வடிவில்)

எனவே,

முற்றொருமை VIII : $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

எடுத்துக்காட்டு 25: $(2a + b + c)(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$ ன் பெருக்கற்பலனை கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டவற்றின் பெருக்கற்பலனை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$= (2a + b + c)\,[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)\,(2a)]$

முற்றொருமை VIII உடன் ஒப்பிட்டால்

$(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (2a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3(2a)\,(b)\,(c)$

$= 8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$

எடுத்துக்காட்டு 26: $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ஐ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவையை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$

முற்றொருமை VIII உடன் ஒப்பிட்டால்

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

நாம் பெறும் காரணிகள்

$= (a - 2b - 4c)\,[(a)^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - (a)\,(-2b) - (-2b)\,(-4c) - (-4c)\,(a)]$

$= (a - 2b - 4c)\,(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ca).$

இதை செய்

1. பெருக்கல் செய்யாமல் $(a - b - c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc - ca)$ன் பெருக்கற்பலனை கண்டுபிடி.
2. முற்றொருமையை பயன்படுத்தி $27a^3 + b^3 + 8c^3 - 18abc$ ஐ காரணிப்படுத்துக.

எடுத்துக்காட்டு 27: ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $2x^2 + 9x - 5$ எனில் செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்களுக்கு பொருத்தமான மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : l, b ஐ செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்கள் எனக்கொள்க.

செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $= 2x^2 + 9x - 5$

$lb = 2x^2 + 9x - 5$

$= 2x^2 + 10x - x - 5$

$= 2x(x + 5) - 1(x + 5)$

$= (x + 5)\,(2x - 1)$

∴ நீளம் = $(x + 5)$

அகலம் = $(2x - 1)$

இங்கு $x = 1, \quad l = 6, \quad b = 1$

$x = 2, \quad l = 7, \quad b = 3$

$x = 3, \quad l = 8, \quad b = 5$

....

....

இவ்வாறே பல மதிப்புக்களை கண்டுபிடிக்கலாம்

பயிற்சி - 2.5

1. கீழ்கண்டவற்றின் பெருக்கற்பலனை பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி கண்டுபிடி.

   (i) $(x + 5)(x + 2)$ (ii) $(x - 5)(x - 5)$ (iii) $(3x + 2)(3x - 2)$

   (iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1 + x)(1 + x)$

2. பெருக்கல் செய்யாமலேயே பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

   (i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

   (iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. பின்வருவனவற்றை பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துங்கள்.

   (i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

   (iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

   (v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4. பின்வருவனவற்றை பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி விரிவு செய்க.

   (i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $(-2a + 5b - 3c)^2$

   (iv) $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2$ (v) $(p + 1)^3$ (vi) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

5. காரணிப்படுத்துக

   (i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

   (ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. $a+b+c=9$ மற்றும் $ab+bc+ca=26$ எனில், $a^2+b^2+c^2$ ன் மதிப்பை காண்க.

7. கீழ்கண்டவற்றை பொருத்தமான முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

   (i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக.

   (i) $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ (ii) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

   (iii) $1-64a^3-12a+48a^2$ (iv) $8p^3-\frac{12}{5}p^2+\frac{6}{25}p-\frac{1}{125}$

9. (i) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ (ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ஐ பெருக்கல் முறை மற்றும் சில மிகை முழுக்களை பயன்டுத்தி சரிபார். மேலும் இவற்றை கூட முற்றொருமைகள் எனக் கூறலாமா?

10. 9வது கணக்கை ஆதாரமாக கொண்டு (i) $27a^3+64b^3$ ஐ காரணிப்படுத்துக (ii) $343y^3-1000$ ஐ விரிவு செய்க.

11. $27x^3+y^3+z^3-9xyz$ஐ முற்றொருமையை பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துக.

12. சரிபார் : $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

13. $x+y+z=0$ எனில் $x^3+y^3+z^3=3xyz$ எனக் காட்டு

14. கனங்களின் பெருக்கலை செய்யாமல் பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

   (i) $(-10)^3+(7)^3+(3)^3$ (ii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$

   (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3-(0.3)^3+(0.1)^3$

15. பின்வரும் கோவைகள் ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு எனில் அவற்றிக்கு பொருத்தமான நீள, அகல அளவுகளை கண்டுபிடி.(i) $4a^2+4a-3$ (ii) $25a^2-35a+12$

16. கீழே கனச் செவ்வகங்களின் கன அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு பொருத்தமான அளவுகளை கண்டுபிடி.

   (i) $3x^3-12x$ (ii) $12y^2+8y-20$.

17. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$ எனில், $a=b$ எனக்காட்டு.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கீழ்கண்டவற்றை பற்றி விவாதித்தோம்.

1. ஒரு மாறி x ல் n வது படிகொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$ன் பொது வடிவம் $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ஆகும்.
   இங்கு $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ ஐ of $x^0, x^1, x^2, ... x^n$ ன் குணகம் என்பர்.
   $a_nx^n ; a_{n-1}x^{n-1} ; .... a_0, a_n \neq 0$ ஆகியவை பல்லுறுப்புக்கோவையின் உறுப்புகள் என்பர்.
2. ஒருறுப்புக் கோவை, ஈருறுப்புக் கோவை, மூவுறுப்புக் கோவை என உறுப்புக்களை பொருத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைபடுத்தலாம்.
3. நேரியப் பல்லுறுப்புக்கோவை (ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை) இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை, முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என படியை பொருத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்தலாம்.
4. $p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஏதாவது ஒரு மெய்யெண் a க்கு $p(a) = 0$ எனில் 'a' ஐ அக்கோவையின் பூச்சியம் என்பர். இவ்வாறே a ஐ பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 0$ க்கு மூலம் என்றும் கூறுவர்.
5. ஒரு மாறியை கொண்ட எல்லா நேரிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளும் தனித்த பூச்சியத்தை கொண்டிருக்கும். ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை பூச்சியத்தை கொண்டிராது.
6. மீதித் தேற்றம் : $p(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.
7. காரணித் தேற்றம் : $p(x)$ என்பது $n \geq 1$ படியாக கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. மேலும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. (i) $p(a) = 0$ எனில் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி ஆகும். மேலும் (ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ க்கு காரணி எனில் $p(a)=0$ ஆகும்.
8. சில இயற்கணித முற்றொருமைகள்:
   (i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
   (ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
   (iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
   (iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ மேலும்
   (v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
   (vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
   (vii) $x^4 + 4y^4 = [(x + y)^2 + y^2][(x - y)^2 + y^2]$

மூளைக்கு வேலை

If $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}$ எனில் x ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

03

வடிவியல் ஆதாரங்கள்

3.1 அறிமுகம்

பாலங்கள், அணைக்கட்டுகள், பள்ளிக்கட்டிடங்கள், விடுதிகள், சுகாதார நிலையங்கள் போன்ற பெரிய பெரிய கட்டிடங்களை நீங்கள் பார்த்திருப்பீர்கள். இவை அனைத்தையும் பொறுப்புடன் கட்டித் தருவது கட்டிடக்கலை நிபுணரின் மிகப்பெரிய வேலை ஆகும்.

இக்கட்டிடங்களை கட்டுவதற்கு ஆகும் செலவினை எவ்வாறு மதிப்பீடு செய்கிறார்கள் என்பது உங்களுக்குத் தெரியுமா? இவற்றிற்காகும் செலவு சிமெண்டு, கான்கிரீட் செய்தல், தொழிலாளர் கூலி மீது மட்டும் ஆதாரப்படாமல் கட்டிடங்களின் உருவம் மற்றும் வடிவம் ஆகியவற்றின் மீது ஆதாரப்படுகிறது.

ஒரு கட்டிடத்தின் உருவம் மற்றும் வடிவம் என்பவை அவற்றின் அடித்தளம், தரைப்பரப்பளவு, சுவர் முகப்பு, கூரை போன்றவற்றை உள்ளடக்கியதாகும். இது போன்ற கட்டிடங்களை கட்டுவதில் உள்ளடங்கியுள்ள வடிவியல் சூத்திரங்களை புரிந்துக்கொள்வதற்கு வடிவியலின் அடிப்படை கருத்துகளையும், வடிவியலின் பயன்பாடுகளையும் தெரிந்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஓவியம், கைத்தொழில், அறையின் தரைமீது கற்களை பரப்புதல், நிலத்தை உழுதல், வயல்களில் விதைகளை விதைத்தல் போன்ற அன்றாட வாழ்க்கையில் வடிவியலை பயன்படுத்துகிறோம் என நமக்குத் தெரியும். ஒரு வார்த்தையில் சொல்லவேண்டுமெனில் வடிவியல் இல்லாத வாழ்க்கையை நம்மால் கற்பனைசெய்ய முடியாது.

எகிப்திலுள்ள பிரமிடுகள், சீனப் பெருஞ்சுவர், நமது இந்திய நாட்டிலுள்ள கோயில்கள், மசூதிகள், ஆலயங்கள், தாஜ்மகால், சார்மினார் மேலும் பிரான்சிலுள்ள ஈபில் டவர் போன்ற புகழ்பெற்ற கட்டிடங்களை வடிவியலின் பயன்பாட்டிற்கு உதாரணங்களாக கூறலாம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் வடிவியல் மூலங்களை புரிந்துக்கொள்வதற்கு, வடிவியல் சரித்திரத்தை, வடிவியலிலுள்ள பல்வேறு ஆலோசனை முறைகள், வடிவியலை மேம்படுத்திய விதம் மேலும் நவீன வடிவியலுடன் ஒப்பிட்டு கற்றுக் கொள்கிறோம்.

3.2 வரலாறு

கட்டிடங்களின் உருவம் மற்றும் வடிவங்களை கணித அடிப்படையில் பல்வேறு விதமாக கற்றுக் கொள்ளலாம். இம்முறைகள் அனைத்தும் வடிவியலின் கீழ் வருகிறது. ஜியாமெட்ரி எனும் ஆங்கிலச் சொல் கிரேக்கச் சொற்களான ஜியோ மற்றும் மெட்ரியன் ஆகிய இரண்டு சொற்களிலிருந்து உருவானது. ஜியோ என்றால் பூமி மேலும் மெட்ரியன் என்றால் அளத்தல் ஆகும்.

பழங்கால வடிவியல் பதிவேடுகளை சிந்துபள்ளத்தாக்கு, நாகரிகங்களிலும், பாபிலோனிய நாகரிகங்களிலும் காணலாம். அவர்கள் விரிகோண முக்கோணங்களைப்பற்றி அறிந்திருந்தார்கள். பக்ஷியா மொழியில் எழுதப்பட்ட கையேடுகளில் ஒழுங்கற்ற பொருள்களின் கனஅளவு தொடர்பான கணக்குகளோடு, அநேக வடிவியல் கணக்குகளும் உள்ளன. சிந்து பள்ளத்தாக்கு நாகரிக மக்களின் வடிவியல் பதிவேடுகள் ஹரப்பா, மொஹஞ்சதாரோ பகுதிகளில் தோண்டி எடுத்தலின் மூலம் வெளிப்பட்டது. கி.மு.2500ஆம் ஆண்டிலேயே வட்டத்தை வரையும் கருவிகள் இருந்ததாக சாட்சிகள் கிடைத்துள்ளன.

வேத சமஸ்கிருதத்திலுள்ள ‘சுல்ப சூத்திரங்களில்’ ஓமகுண்டங்கள் அமைப்பதற்கான வடிவியல் சூத்திரங்கள் உள்ளன. இந்த ஓமகுண்டங்கள் அமைப்பதன் பின்னால் அமைந்துள்ள அற்புதமான விஷயம் என்னவெனில் அவை அனைத்தும் பல்வேறு வடிவங்களில் இருந்தபோதிலும் அவை ஆக்கிரமித்துக் கொள்ளும் பரப்பளவு சமமாக இருப்பதே ஆகும். கி.மு.8ஆம் நூற்றாண்டு வாக்கில் பௌத்தாயனா என்பவர் தயாரித்த மிகவும் புகழ்பெற்ற பௌத்தாயன சுல்ப சூத்திரங்களில் சாதாரண பிதாகரஸ் முப்பிரிவுகளான (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) போன்றவையும் ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள், மூலைவிட்டங்களுக்கு பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி இருப்பதை கவனிக்கலாம்.

பழங்கால கிரேக்க கணித மேதைகள் வடிவியலை தமது அறிவியல் நூல்கள் அனைத்திற்கும் பொற்கிரீடமாக கருதினர். அவர்கள். வடிவியலின் எல்லையை பல புதிய படங்களுக்கும், வளைவுகளுக்கும், பரப்பிற்கும் மற்றும் திடப்பொருள்களுக்கும் விரிவுபடுத்தினார்கள். அவர்கள் பயன்படுத்திய கூற்றை உலகலாவிய உண்மை என நிரூபித்தலின் அவசியத்தை உணர்ந்தனர். இந்த கருத்து கிரேக்க கணித மேதையான தேல்ஸ் என்பவரை விதிவிளக்கு நிரூபணம் முறையைப் பற்றி ஆலோசிக்க வழிவகுத்தது.

அயோனியா நாட்டைச் சேர்ந்த பிதாகரஸ்ஸை தேலஸின் சீடனாகக் கருதுவர். இவர் பெயரில் பிதாகரஸ் தேற்றமாக புகழ் பெற்ற தேற்றத்தை பிதாகரஸ் கண்டுபிடித்திருக்காமல் போயிருக்கலாம். ஆனால் இந்த தேற்றத்தை விதிவிளக்கு முறையில் நிரூபித்தவர்களில் ஒருவராக இருந்திருக்கக்கூடும். கி.மு. 325-265 கால கட்டங்களில் எகிப்திலுள்ள அலெக்சாண்டிரியாவைச் சேர்ந்த யூக்ளிட் என்பவர் மூலகங்கள் என்ற பெயரில் 13 புத்தகங்களாக தொகுத்து வெளியிட்டார். இதில் அடிப்படைக் கருத்துகள், வெளிப்படை உண்மைகள், அனுமதிகள், அல்லது தர்க்க ஆலோசனை முறை ஆகியவற்றின் மீது வரையறுத்த ஆலோசனை முறையை உருவாக்கினார்.

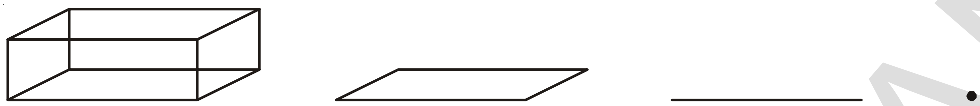
3.3 யூக்ளிடின் வடிவியல் மூலங்கள்

யூக்ளிட் தாம் வாழ்ந்து கொண்டிருக்கிற உலகத்திற்கு ஒரு கருத்துச் சுருக்கமாக வடிவியலை கருதினார். தம் சுற்றுப்புறங்களிலுள்ள புள்ளி, கோடு, தளம் அல்லது மேற்பரப்பு போன்ற அநேக கற்பனைக் கருத்துகளை தொகுத்தளித்தார். வெளி மற்றும் வெளியே சுற்றியுள்ள திடப்பொருள்களை கவனித்தலிலிருந்து திடப்பொருளின் வடிவியல் கருத்து வளர்ச்சியடைந்தது.

ஒரு திடப்பொருள் வடிவம், அளவு, நிலை, ஆகியவற்றை பெற்றிருக்கும். மேலும் அவை ஓரிடத்திலிருந்து மற்றொரு இடத்திற்கு நகர்த்த முடியும். அதன் எல்லைகள் புறப்பரப்பு என்று அழைக்கப்படும். இவை திடப்பொருள்களின் ஒரு பகுதியை மற்றொரு பகுதியிலிருந்து வேறுபடுத்துகிறது. மேலும் அவை தடிமனை பெற்றிருக்காது என்றும் சொல்லப்படுகிறது. புறப்பரப்பின் எல்லைகள், வளைவுகள் அல்லது நேர்கோடுகளாக இருக்கும். இந்த கோடுகள் புள்ளிகளில் முடிவடைகின்றன. திடப்பொருளில் இருந்து புள்ளி வரை உள்ள நிலைகளை கருதுவோம். (திடப்பொருள்கள் - புறப்பரப்புகள் - கோடுகள் - புள்ளி).

அடுத்த பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ள கனச்செவ்வக படத்தை கவனிக்கவும். இதற்கு நீளம், அகலம், உயரம் ஆகிய மூன்று பரிமாணங்கள் உள்ளன. (படம் 1) இது உயரத்தை இழந்தால் இரண்டு பரிமாணங்கள் கொண்ட செவ்வகமாகும். செவ்வகத்திற்கு நீளம், அகலம் எனும் இரண்டு அளவுகளே இருக்கும் (படம் 2) என்று உனக்கு தெரியும். இது மேலும் மற்றொரு அளவான அகலத்தை இழந்தால் கோட்டுத் துண்டாக மட்டுமே மிகுந்து இருக்கும்(படம் 3). மேலும் ஓர் அளவை இழந்தால் அங்கு புள்ளிகள் மட்டுமே மீதமிருக்கும் (படம் 4) ஒரு புள்ளிக்கு எவ்விதமான அளவுகளும் இருக்காது என்பதை நினைவு கூறுவோம். இவ்வாறே நாம் ஒரு மேசை அல்லது புத்தகத்தின் விளிம்புகளை கவனித்தால் அதை ஒரு நேர்கோடாக பார்க்கலாம்.

ஒரு கோட்டின் முடிவுப்புள்ளி அல்லது இரண்டு கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் இடத்தை புள்ளி என்பர்.



(i) (ii) (iii) (iv)

திடப்பொருள்கள் →	தளங்கள்/வளைவுகள் →	கோடுகள் →	புள்ளிகள்
3-D	2-D	1-D	பரிமாணம் இல்லை

இவை வடிவியலின் அடிப்படை உறுப்புகளாகும். இவற்றை ஆதாரங்களாகக் கொண்டு கோட்டுத்துண்டு, கோணம், முக்கோணம் போன்றவை வரையறுக்கப்படுகிறது. யூக்ளிட் புள்ளி, கோடு, தளம் ஆகியவற்றை வரையறுத்தார். இவர் எழுதிய The Elements ன் முதல் புத்தகத்தில் 23 வரையறைகளை எழுதியுள்ளார். அவற்றில் சில கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

- ஒரு புள்ளியானது எந்த ஒரு அளவுகளையும் பெற்றிருக்காது.
- ஒரு கோடு என்பது அகலம் இல்லாத நீளம் ஆகும்.
- ஒரு கோட்டின் முடிவுகளே புள்ளிகளாகும்.
- ஒரு நேர்க்கோடு என்பது அதன் மீது அமைந்த ஒரு சீரான புள்ளிகளால் அமைந்த கோடு ஆகும்.
- ஒரு புறப்பரப்பு நீள, அகலங்களை மட்டுமே பெற்றிருக்கும்
- ஒரு புறப்பரப்பின் விளிம்புகள் கோடுகளாகும்.
- ஒரு சமதளம் என்பது அதன்மேல் சமமான நேர்கோடுகளால் ஆன மேற்பரப்பு ஆகும்.

யூக்ளிட் கி.மு.300
வடிவியலின் தந்தை

புள்ளி, கோடு மற்றும் தளம் போன்ற சொற்களை வரையறுத்தலில், யூக்லிட் பகுதி, அகலம், சீரான போன்ற வரையறுக்க வேண்டிய அல்லது தெளிவான விளக்கம் தேவைப்படுகின்ற சொற்களை பயன்படுத்தினார். தளம் வரையறுத்தலில் தளம் சிறிது பரப்பை அடைத்துக்கொள்ளும் என்று கூறினால், பரப்பை மீண்டும் தெளிவுபடுத்த வேண்டும். ஒரு சொல்லை வரையறுக்க, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சொற்களை வரையறுக்க வேண்டியுள்ளது. இது முடிவில்லாத சங்கிலித்தொடர் வரையறைகளாக இருக்கும். ஆகவே கணித மேதைகள் இவ்வாறான வரையறுக்கப்படாத வார்த்தைகளை விட்டுவிட முடிவு செய்தார்கள். எப்படி இருப்பினும் ஒரு புள்ளி என்ற வடிவியல் கருத்துக்கு மேற்கூறிய வரையறையை விட மேன்மையான கற்பனை கருத்து நமக்கு உள்ளது. ஒரு சிறிய துளிக்கு சில பரிமாணம் இருந்தபோதிலும் அதை புள்ளி என குறிப்பிடுகிறோம். சீன நாட்டிலுள்ள மோஹி (மோஜி) தத்துவமேதைகள் ஒரு கோட்டை பகுதிகளாக பிரித்துக்கொண்டே சென்றால் கடைசியாக பிரிக்க முடியாத பகுதியை புள்ளி என கூறினார். மேலே கூறியுள்ள இரண்டாம் வரையறையில் கூட இதே சிக்கல் தான் உள்ளது. அந்த வரையறையில் அகலம், நீளம் என குறிப்பிட்டிருந்தாலும் இரண்டுமே வரையறுக்கப்படவில்லை. அதனால் ஏதாவது ஒரு அத்தியாயத்தில் சில குறிப்பிட்ட சொற்களை வரையறுக்கப்படாத சொற்களாக விட்டு விட வேண்டியுள்ளது. நாம் வடிவியலில் புள்ளி, கோடு மற்றும் தளம் (யூக்ளிட் சொற்களில் தளபரப்பு) ஆகியவற்றை வரையறுக்கப்படாத சொற்களாக பயன்படுத்துகிறோம். அதாவது அவற்றை உள்ளுணர்வுடன் மட்டுமே வெளிப்படுத்த முடியும் அல்லது வெளிப்புற மாதிரிகளின் உதவியுடன் விவரிக்க முடியும்.

யூக்ளிட் நிருபணங்கள் அவசியமில்லாத சில வடிவியல் பண்புகளை தன்னுடைய வரையறுகளில் பயன்படுத்தினார்.

இந்த பண்புகள் அனைத்தும் தன்னறி உண்மைகளாகும். யூக்ளிட் இவற்றை இரண்டு வகைகளாக பிரித்தார். அவை வெளிப்படை உண்மைகள் மற்றும் கருதுகோள்கள்.

3.3.1 வெளிப்படை உண்மைகள் மற்றும் கருதுகோள்கள்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணித அமைப்பில் தானே தெளிவானது அல்லது உண்மை என ஊகிக்கப்படும் கூற்றுகளே வெளிப்படை உண்மைகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக "மொத்தம் என்பது அதில் ஒரு பகுதியை விட எப்போதும் பெரியதே" என கூறலாம். இது ஒரு உண்மையான மனக்கருத்தாகும். இதற்கு எவ்வித நிரூபணமும் அவசியமில்லை. இந்த வெளிப்படை உண்மை 'விட பெரியது' எனும் சொல்லை வரையறுக்கிறது. அவ்வாறே P எனும் ராசி C எனும் ராசியின் ஒரு பகுதி எனில் Cயை Pராசி மற்றும் மற்றொரு மூன்றாவது ராசி Rகளின் மொத்தமாக எழுதலாம். இதை குறியீட்டு வடிவத்தில் $C>P$ எனில் $C=P+R$ ஆக இருக்கும்படி R எனும் ராசி இருக்கும்.

இந்த 'வெளிப்படை உண்மை' எனும் சொல்லை யூக்ளிட் வடிவியலில் மட்டுமே அல்லாமல் மற்ற கணித பகுதிகளிலும் பயன்படுத்தினார். ஆனால் கருதுகோள் எனும் சொல்லை வடிவியல் கருத்துகளுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தினார். வடிவியல், வெளிப்படை உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு வளர்ச்சியடைந்தது. இந்த வெளிப்படை உண்மைகளை பல்வேறு நிலைகளில் காணலாம்.

யூக்ளிடின் வெளிப்படை உண்மைகளில் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

- சமமான ராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.
- சமமான ராசிகளை சமமான ராசிகளுடன் கூட்டினால் அவற்றின் மொத்தம் சமானமாகும்.
- சமமான ராசிகளை சமமான ராசிகளிலிருந்து கழித்தால் மீதமுள்ளவை சமானமாகும்.
- ஒன்றுடன் மற்றொன்று ஒன்றக்கூடிய ராசிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
- சமமான ராசிகளின் இருமடங்குகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.
- சமமான ராசிகளின் பாதி ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

மேற்கண்ட 'சாதாரண கருத்துகள்' ஒரே பரிமாற்ற மதிப்புகளை காட்டுகின்றன. முதல் பொதுவான கருத்தை சமதளப் படங்களுக்கு பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக Aன் பரப்பளவு Bன் பரப்பளவிற்கு சமமாகி Bன் பரப்பளவு ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கு சமமெனில் Aன் பரப்பளவும் அந்த சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கு சமமாகும்.

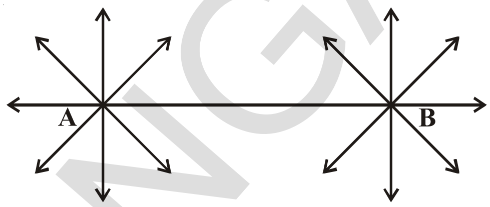
ஒரே வகையான வடிவியல் மதிப்புகளை ஒப்பிடலாம், கூட்டலாம், ஆனால் வெவ்வேறு வடிவியல் மதிப்புகளை ஒப்பிட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கோட்டை மற்றொரு படத்தின் பரப்பளவுடன் கூட்ட முடியாது. அவ்வாறே ஒரு கோணத்தை மற்றொரு ஐங்கோணத்துடன் ஒப்பிட முடியாது.

முயன்று பார்

உன்னுடைய அன்றாட வாழ்க்கையில் நீ ஏதேனும் இரண்டு வெளிப்படை உண்மைகளை எழுதமுடியுமா?

யூக்ளிடின் கருதுகோள்களில் முதல் ஐந்தினை விவாதிப்போம்:

1. A, B புள்ளிகளை ஒரு காகிதத்தின் மீது குறிக்கவும். A,B புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டை வரையவும். A மற்றும் B வழியே இதுபோன்று எத்தனை நேர்க்கோடுகள் வரையலாம்? ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்கோடுகளை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளின் வழியே செல்லுமாறு வரையமுடியாது.



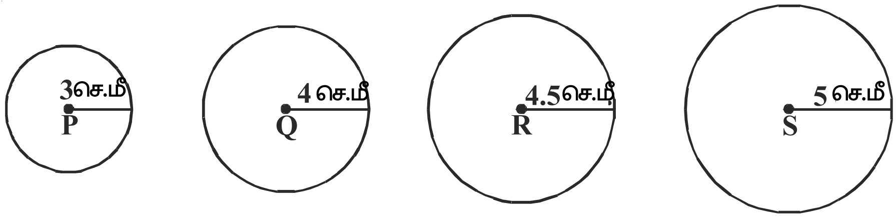
யூக்ளிடின் முதல் கருதுகோள் மேற்கூறிய கருத்தை தருகிறது. அதை கீழ்கண்டவாறு கூறலாம்.

கருதுகோள் 1 : “இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு நேர்கோட்டை மட்டுமே வரைய முடியும்.” இதை யூக்ளிடின் வார்த்தைகளில் சொல்ல வேண்டுமெனில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே இருக்கும். PQஎனும் கோட்டுத்துண்டுகளை வரை. கோட்டுதுண்டின் இருபுறங்களிலும் நீட்டு.

கோட்டுத்துண்டு PQ வை இரு புறங்களிலும் எவ்வளவு தூரம் வரை நீட்டி வரையமுடியும்? இதற்கு முடிவுப்புள்ளிகள் இருக்குமா? கோட்டுத்துண்டு PQ வை எல்லையின்றி இருபுறங்களிலும் நீட்டலாம். இதற்கு முடிவுப்புள்ளிகள் இல்லை எனவும் நாம் அறியலாம். இக்கருத்தை யூக்ளிட் தனது இரண்டாம் வெளிப்படை உண்மையில் எழுதியுள்ளார்.

கருதுகோள் 2 : ஒரு நேர்க்கோட்டுத் துண்டை இருபுறங்களிலும் நீட்டித்தால் அது ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும். இதை யூக்ளிடின் வார்த்தையில் “ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுள்ள கோட்டுத்துண்டை ஒரு நேர்க்கோடாக நீட்டிக்கலாம் எனக் கூறலாம்.”

3. 3செ.மீ, 4செ.மீ, 4.5செ.மீ, 5செ.மீ ஆரங்களுடைய வெவ்வேறு நான்கு வட்டங்களை வரைந்து அவற்றின் மையங்களுக்கு வரிசையாக P, Q, R, S என பெயரிடுக.

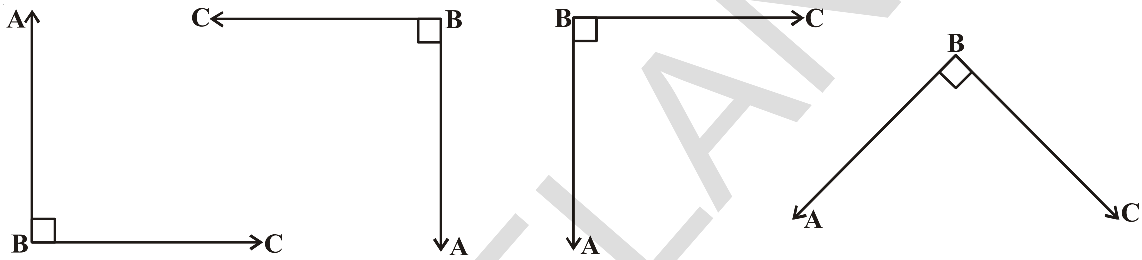


ஒரு வட்டத்தின் மையம், ஆரம் கொடுக்கப்பட்டால் உன்னால் வட்டம் வரைய முடியுமா? ஒரு வட்டத்தை எந்த ஒரு புள்ளியையும் மையமாகக் கொண்டு வரையலாம். அதே போல எந்த ஒரு அளவு ஆரத்தைக் கொண்டும் ஒரு வட்டத்தை வரையமுடியும்.(அத்தியாயம் 12ஐ பார்).

யூக்ளிடின் மூன்றாம் **கருதுகோள்** மேற்கூறிய விவரத்தை தெரிவிக்கிறது. இதை யூக்ளிடின் வார்த்தைகளில் சொல்ல வேண்டுமெனில் “எந்த ஒரு மையத்தையும் எந்த ஒரு தூரத்தையும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையலாம்.”

கருதுகோள் 3 : கொடுக்கப்பட்ட எந்த ஆரத்தையும், எந்த மையத்தையும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையலாம்.

4. ஒரு கட்டத்தாளை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். செங்கோணங்களை குறிக்கக்கூடிய படங்கள் சிலவற்றை வரைக. பிறகு அவற்றை அனைத்தையும் கத்தரித்து எடுத்து ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக அமர்த்தவும். பிறகு நீ அறிவது என்ன?

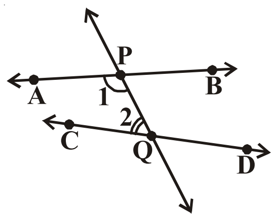


அவை அனைத்தும் ஒன்றுடன் மற்றொன்று ஒன்றி இருப்பதை நாம் காணலாம். எல்லா செங்கோணங்களும் சமம். இதுவே யூக்ளிடின் நான்காவது வெளிப்படை உண்மையாகும். இது எல்லா கோணங்களுக்கும் பொருந்துமா? யூக்ளிட் செங்கோணத்தை ஆதாரமாக கொண்டு மற்ற கோணங்களை குறித்தார் மேலும் அதிலிருந்து பின்வரும் கருதுகோளை வருவித்தார்.

கருதுகோள் 4 : செங்கோணங்கள் அனைத்தும் ஒன்று மற்றொன்றுக்கு சமம்.

இப்போது யூக்ளிடின் 5ம் **கருதுகோ**ளையும் அதற்கு சமமான கூற்றையும் பார்ப்போம்.

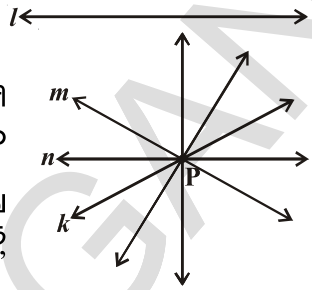
கருதுகோள் 5 : கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நேர்க்கோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டினால் குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ள உள்கோணங்களின் மொத்தம் இரண்டு செங்கோணங்களுக்கும் குறைவாக இருக்கும்போது கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளை எல்லையின்றி நீட்டினால் அவை இரண்டு செங்கோணங்களுக்கும் குறைவான மொத்தமுள்ள பக்கத்தில் இணையும்.



குறிப்பு : படத்தில் PQ எனும் கோடு AB, CD கோடுகளின் மீது இடது பக்கத்திலுள்ள 1,2 உள் கோணங்களின் மொத்தம் இரண்டு செங்கோணங்களின் மொத்தத்தை (180^{0}) விட குறைவாக இருக்குமாறு வெட்டுகிறது. ஆகவே PQ க்கு இடப்பக்கமாக AB, CD எனும் நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும்.

இந்த **கருதுகோளை** யூக்ளிடுடன் மற்ற கணித மேதைகளும் கூட இதை தேற்றமாக கருதுவதால் மிக அதிக முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. இதற்கு மறு முயற்சியாக சுமார் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளாக கணித மேதைகள் 5வது **கருதுகோள்** யூக்ளிடின் ஏனைய ஒன்பது வெளிப்படை உண்மைகளின் பலனே என்று நிரூபிக்க முயற்சிசெய்தார்கள்.

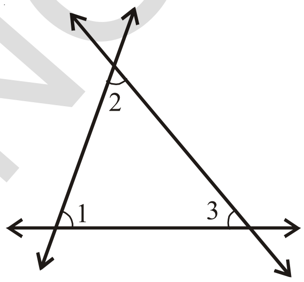
3.3.2 5ம் கருதுகோளுக்கு சமமான பொருளுடைய கூற்றுகள் அல்லது 5ம் கருதுகோளின் துல்லிய கூற்றுகள்.



தொடர்ந்து அடுத்து வந்த கணித மேதைகளால் உருவாக்கப்பட்ட புகழ்பெற்ற மாற்றுக்கூறுகள் இருக்கின்றன.

- கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் மேல் அமையாத ஒரு புள்ளி வழியே கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு ஒரே ஒரு இணைகோடு மட்டும் வரைய முடியும்.(Johnplay fair - 1748-1819)

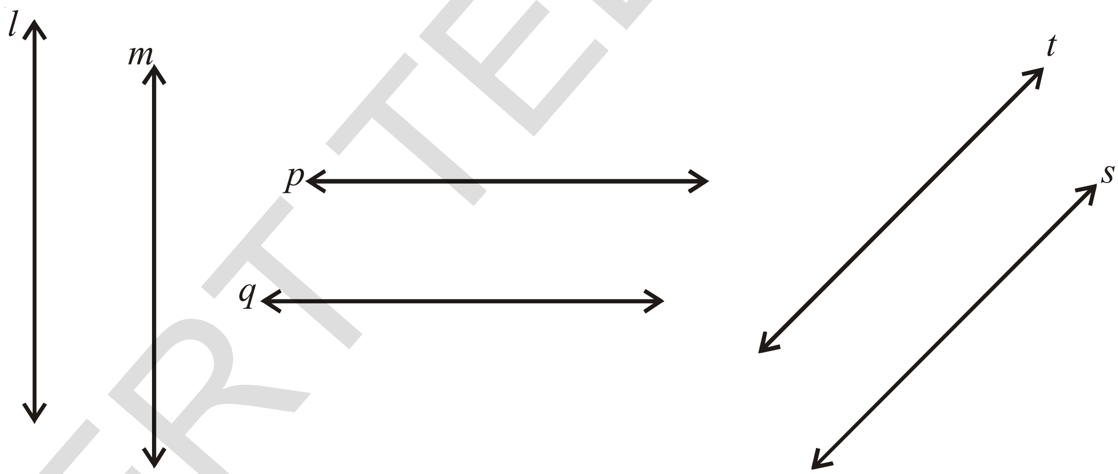
l என்பது ஒரு நேர்கோடு மற்றும் p என்பது l ன் மீது இல்லாத ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. எனவே p வழியே l க்கு இணையாக ஒரே ஒரு கோடு மட்டும் இருக்கிறது. இது "play fair" வெளிப்படை உண்மை என்று அழைக்கப்படுகிறது.



- ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தம் மாறிலி மேலும் இது இரண்டு செங்கோணங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம். (லெஜெண்டர்) (Legendre)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

- ஒரு ஜோடி கோடுகள், அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரம் எல்லா புள்ளிகளிலும் சமமாக இருக்குமாறு இருக்கும். (போசிடோமினஸ்) (Posidominus)



- இரண்டு இணைக்கோடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை ஒரு நேர்கோடு வெட்டினால், அது மற்றொரு கோட்டையும் வெட்டும். (புரோக்ளஸ்) (Proclus)
- இரண்டு நேர்க்கோடுகள் வேறொரு நேர்க்கோட்டிற்கு இணை எனில் அவை அனைத்தும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கும்.

மேற்கூறிய துல்லிய கூற்றுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை யூக்ளிடின் 5வது விதிக்கு பதிலாக எழுதினால் மீண்டும் யூக்ளிட் வடிவியலை பெறமுடியும். யூக்ளிட் மேற்கூறிய ஐந்து **கருதுகோள்**களை அவற்றை பல்வேறு விளைவுகளை விதிவிளக்கு முறையில் நிரூபிக்க பயன்படுத்தினார். இவ்வாறு நிரூபித்த கூற்றுகளே தேற்றங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

சில நேரங்களில் சில கூற்றுகளை உண்மை என்று கருதினாலும், அவை உற்றுநோக்கலின் அடிப்படையில் அறிவுபூர்வமாக ஊகித்தவை ஆகும். இவ்வாறான நிருபிக்கப்பட்ட அல்லது நிரூபிக்கபடாத கூற்றுகள் எடுகோள் (Hypotheris) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

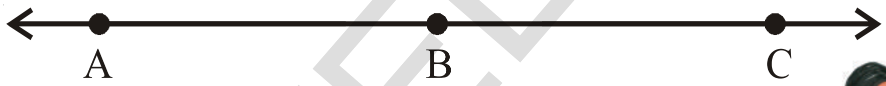
4ஐ விட பெரிய இரட்டை எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் இரண்டு பகா எண்களின் மொத்தமாக எழுதமுடியும் என்பது 'கோல்டு பேக்' கூறிய எடுகோள் ஆகும்.

உண்மையென நிரூபிக்கப்பட்ட எடுகோள் தேற்றம் என்று கூறப்படுகிறது. ஒரு தேற்றம் தர்க்கரீதியான படிகளால் நிரூபிக்கப்படுகிறது. தேற்ற நிரூபணம் என்பது தேற்றத்தில் உண்மையை சந்தேகிக்க இடமின்றி, நிரூபிக்கும் தர்க்கவாத செயலாகும்.

தர்க்கவாத முறையில் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட சொற்கள், வெளிப்படை உண்மைகள், **கருதுகோள்கள்** மற்றும் ஏற்கனவே நிரூபித்த தேற்றங்களின் உதவியுடன் யூக்ளிட் சுமார் 465 தேற்றங்களை கண்டுபிடித்தார்.

விளைவுகளை நிரூபித்தலில் யூக்ளிட் தேற்றங்கள் மற்றும் **கருதுகோள்கள்** எவ்வாறு பயன்படுகிறது என ஆராய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: A,B,C என்பவை ஒரே கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகள். B புள்ளி A,C புள்ளிகளுக்கு இடையே இருந்தால் AC - AB = BC என நிரூபி.



தீர்வு : படத்தில் AC கோடும் AB+BC கோடும் ஒன்றுகின்றன.

யூக்ளிடின் 4வது விதிப்படி ஒன்றுடன் மற்றொன்று ஒன்றுபவை சமம்.

எனவே AB + BC = AC என கூறலாம்.

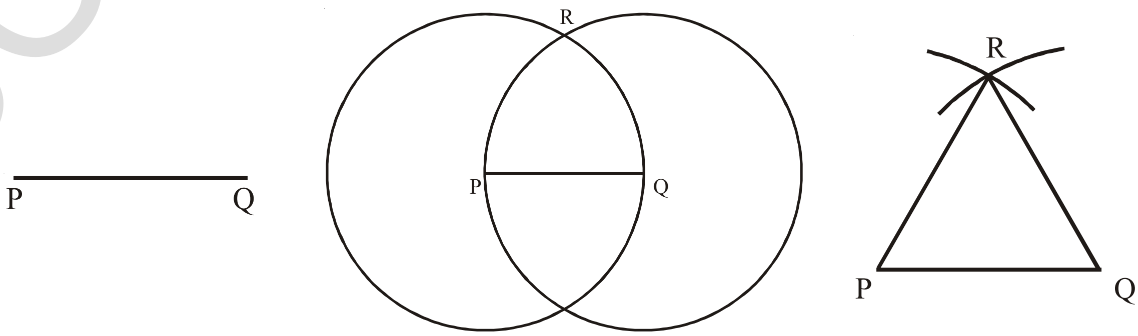
AC ன் மதிப்பை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு AC - AB = BC ல் பிரதியிடு

$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$

இங்கு நாம் இரண்டு புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே இருக்குமென கவனிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2: கொடுக்கப்பட்ட எந்தவொரு நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் மீது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அமைக்க முடியும் என நிரூபி.

தீர்வு : ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு PQ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



யூக்ளிட் மூன்றாம் **கருதுகோளி**லிருந்து ஏதேனும் ஒரு மையம், ஏதேனும் ஒரு ஆரத்துடன் வட்டத்தை வரைய முடியும். ஆகவே P ஐ மையமாகவும், PQ ஆரமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டத்தை வரையலாம். அவ்வாறே Q மையமாகவும் QP ஆரமாகவும் கொண்டு மற்றொரு வட்டத்தை வரை. இவ்விரண்டு வட்டங்களும் R புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும். R ஐ P மற்றும் Q உடன் இணைப்பதால் ΔPQR ஏற்படுகிறது.

இப்போது இவ்வாறு ஏற்பட்ட முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிரூபிக்க வேண்டும். அதாவது $PQ = QR = RP$.

$PQ = PR$ (P ஐ மையமாக கொண்ட வட்ட ஆரங்கள்)

$PQ = QR$ (Q ஐ மையமாக கொண்ட வட்ட ஆரங்கள்)

யூக்ளிட் தேற்றங்களிலிருந்து ஒரே ராசிகளுக்கு சமமான ராசிகள் ஒன்று மற்றொன்றுக்கு சமம். ஆகவே $PQ = QR = RP$. அதனால் ΔPQR ஒரு சமபக்க முக்கோணம். P மற்றும் Q மையங்களாக உள்ள வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனும் கருத்தை வெளிப்படுத்தாமல் யூக்ளிட் தனது நிரூபணத்தில் பயன்படுத்தியதை கவனிக்கவும்.

நாம் ஒரு தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3: இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொதுபுள்ளிகளை பெற்றிருக்காது.

குறிப்பு: யுக்ளிட் இத்தேற்றத்தை நேர்கோடுகளக்கு மட்டுமே வரையறுத்தார். கோடு என்று எழுதும்போது அது எப்போதும் நேர்க்கோட்டையே குறிக்கும்.

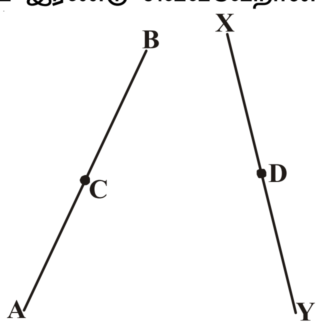
கொடுக்கப்பட்டுள்ள தீர்வு : l, m என்பவை கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளாகும்.

நிரூபிக்க வேண்டியது: l, m கோடுகளுக்கு ஒரே ஒரு பொதுப்புள்ளி இருக்கும்.

நிரூபணம் : அவ்விரண்டு கோடுகளும் AB என்ற இரண்டு வெவ்வேறான புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளும் எனக் கொள்வோம்.

இப்போது நமக்கு AB புள்ளிகள் வழியே செல்லும் இரண்டு கோடுகள் உள்ளன. இது யூக்ளிட் விதி இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளின் வழியே ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே செல்லும் என்பதை முரணாக உள்ளது. வெவ்வேறான இரண்டு புள்ளிகள் வழியே இரண்டு கோடுகள் செல்லும் என்று நாம் எடுத்துக்கொண்டதற்கு இது முரண்பாடாக உள்ளது. எனவே இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகள் ஒன்றுக்கு அதிகமான பொதுப்புள்ளியை பெற்றிருக்காது என்று நாம் முடிவு செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: அடுத்துள்ள படத்தில் $AC = XD$, C மற்றும் D முறையே AB மற்றும் XY களின் மையப்புள்ளிகள் $AB = XY$ எனக் காட்டு.



தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $AB = 2\,AC$ (AB ன் மையப்புள்ளி C)

$XY = 2\,XD$ (XY ன் மையப்புள்ளி D)

மேலும் $AC = XD$ (கொடுக்கப்பட்டது)

எனவே $AB = XY$

(ஒன்றைப் போல் இருமடங்காக உள்ளவை ஒன்றுக்கொன்று சமம் என்பதால்)

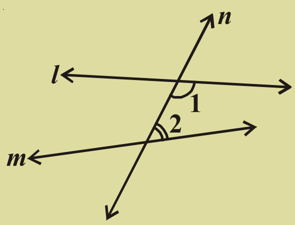
பயிற்சி - 3.1

1. கீழ்கண்டவற்றிற்கு விடையளிக்கவும்.
   i. ஒருதிடப்பொருளுக்கு எத்தனை பரிமாணங்கள் இருக்கும்?
   ii. யூக்ளிடின் **The Elements** எனும் தொகுப்பில் எத்தனை புத்தகங்கள் உள்ளன?
   iii. கனச்சதுரம் மற்றும் கனச்செவ்வகங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை எழுதுக.
   iv. ஒரு முக்கோணத்தின் உள்கோணங்களின் மொத்தம் எவ்வளவு?
   v. வடிவியலில் வரையறுக்கப்படாத சொற்களில் ஏதேனும் மூன்றினை எழுதுக.
2. கீழ்கண்ட கூற்றுகள் சரியா தவறா எனக்கூறுக. அதற்கான காரணங்களையும் விவரிக்கவும்.
   a) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியே ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே வரைய முடியும்.
   b) அனைத்து செங்கோணங்களும் சமம்.
   c) சம ஆரங்களையுடைய வட்டங்கள் சமம்.
   d) ஒரு கோட்டுத் துண்டை இருபுறங்களிலும் எல்லையின்றி நீட்டி வரைவதால் ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பெறலாம்.

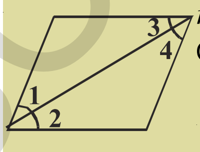
   e) மேற்கண்ட படத்திலிருந்து $AB > AC$
3. கீழ்கண்ட படத்தில் $AH > AB + BC + CD$ என நிரூபி.

4. P, Rபுள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள புள்ளி Q மேலும் $PQ = QR$, எனில்

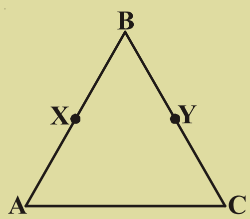
   $PQ = \frac{1}{2}$ PR என நிரூபிக்கவும்.
5. 5.2செ.மீ பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை வரைக.
6. எடுகோள் என்றால் என்ன? ஓர் உதாரணம் தருக.
7. P, Q புள்ளிகளை குறிக்கவும், P, Q புள்ளிகள் வழியே ஒரு நேர்க்கோட்டை வரைக. PQ கோட்டிற்கு எத்தனை இணை கோடுகள் வரைய முடியும்?



8. அருகில் உள்ள படத்தில் உள்கோணங்களின் கூடுதல் $180°$ க்கு குறைவாக இருக்குமாறு l மற்றும் m கோடுகளை n எனும் கோடு வெட்டுகிறது எனில் l மற்றும் m கோடுகளைப் பற்றி நீ என்ன கூற முடியும்



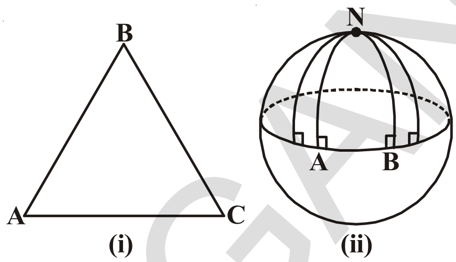
9. அருகில் உள்ள படத்தில் $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 4$, எனில் யூக்ளிடின் விதிப்படி $\angle 1$ $\angle 2$ களுக்கு இடையே உள்ள உறவினை எழுதுக.



10. அடுத்துள்ள படத்தில் $BX = \frac{1}{2}AB$, $BY = \frac{1}{2}BC$ மேலும் $AB = BC$. எனில் $BX = BY$ எனக்காட்டுக.

யூக்ளிட் அல்லாத வடிவியல்

யூக்ளிட் வடிவியலில் 5ஆம் **கருதுகோளின்** நிரூபண முயற்சிகள் தோல்விஅடைந்ததால் பெட்ரிக் கௌஸ், லோபாசெவ்ஸ்கி, பாலே போன்ற கணித மேதைகளுக்கு புதிய ஆலோசனைகள் தோன்றியது. அவர்கள் 5ம் கருத்து உண்மை அல்லது 5ம் கருத்துக் பதிலாக அதன் முரண்பாடு கருத்தை பிரதியிடலாம் எனவும் கருதினார்கள். இந்த 5ம் கருத்துக்கு பதிலாக வேறொரு கருத்தை பிரதியிட்டால் கிடைக்கும் வடிவியல் யூக்ளிட் அல்லாத வடிவியல் எனப்படும்.



தளம் தட்டையாக இல்லாமலிருந்தால் நம்முடைய தேற்றங்களுக்கு என்ன நிகழும்?

இதைப்பற்றி பரிசோதிப்போம்

ஒரு பந்தை எடுத்துக்கொண்டு அதன் மீது ஒரு முக்கோணத்தை வரைய முயலுங்கள், ஒரு சமதளத்தின் மீதுள்ள முக்கோணத்திற்கும், பந்தின் மீதுள்ள முக்கோணத்திற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடுகள் யாவை?

மேற்கண்ட படம் (2)ல் AN, BN கோடுகள் AB என்ற ஒரே கோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ளன. அவற்றிற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ள உள்ள கோணங்களின் மொத்தம் 180^0யை விட குறைவாக இல்லாத நிலையிலும் அவ்விரண்டு நேர்கோடுகளும் Nல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. (உண்மையில் $90^0+90^0=180^0$) அது மட்டுமல்லாமல் கோளத்தின் மீதுள்ள முக்கோணம் NAB ல் உள்ள கோணங்களின் மொத்தம் 180^0 யை விட அதிகம். ($\angle A + \angle B = 180^0$ என கவனிக்கலாம்).

மேற்கண்ட பரிசோதனையில் ஒரு கோளத்தின் மீதுள்ள தளத்தை கோளதளம் என்பர். கோளத்தின் மீது அவ்வாறே வெவ்வேறு தளங்களும், அவற்றிற்கான விதிகளையும் எடுத்துக்கொண்டால் வெவ்வேறு வகையான வடிவியல்கள் ஏற்படுகின்றன.

நாம் கற்றவை

- வரையறுக்கப்படாத சொற்களை புள்ளி, கோடு, தளம் என்பவற்றை வடிவியலின் அடித்தள கற்கள் என கூறுவோம்.
- புள்ளி, கோடு, தளம் போன்ற வரையறுக்கப்படா சொற்களை யூக்ளிட் மற்றும் பண்டைய கணித மேதைகள் வரையறுக்க முயற்சித்தனர்.
- யூக்ளிட் எழுதிய The Elements எனும் புத்தகம் பின்வந்த கணிதவளர்ச்சிக்கு அடிப்படையாய் இருந்தது.
- யூக்ளிட் வெளிப்படை உண்மைகள் சில
  - ஒரே ராசிகளுக்கு சமமான ராசிகள் சமானம்
  - சமமான ராசிகளை சமமான ராசிகளுடன் கூட்டினால் வரும் மொத்தங்களும் சமானம்.

- சமான ராசிகளிலிருந்து சமான ராசிகளை கழித்தால் அவற்றின் வேறுபாடுகளும் சமானம்.
- ஒன்றுடன் ஒன்று ஒன்றக்கூடிய படங்கள் சமானம்.
- மொத்தம் என்பது அதில் ஒரு பாகத்தை விட பெரியது.
- சமான ராசிகளின் இருமடங்குகள் சமானம்.
- சமான ராசிகளில் பாதி ராசிகளும் சமானம்.

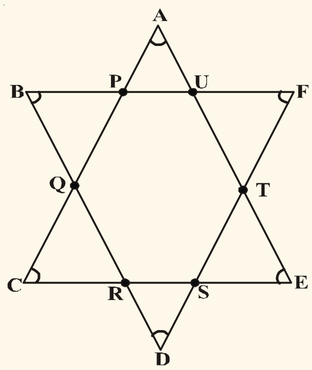
• யூக்ளிட் வடிவியல் கூற்றுகளில் சில,

- ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்க்கோடு வரையலாம்.
- ஒரு நேர்க்கோட்டுத்துண்டை இரு புறங்களிலும் நீட்டி வரையலாம்.
- ஏதேனும் ஆரத்தைக்கொண்டு ஏதேனும் ஒரு மையத்தில் வட்டத்தை வரையலாம்.
- செங்கோணங்கள் அனைத்தும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

கருதுகோள் 5 : கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நேர்க்கோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டினால் குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ள உள்கோணங்களின் மொத்தம் இரண்டு செங்கோணங்களுக்கும் குறைவாக இருக்கும்போது கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளை எல்லையின்றி நீட்டினால் அவை இரண்டு செங்கோணங்களுக்கும் குறைவான மொத்தமுள்ள பக்கத்தில் இணையும்.

மூளைக்கு வேலை

1. கீழ்கண்ட படத்தில் $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ ன் அளவு எவ்வளவு? உன் விடைக்கான காரணத்தையும் தெரிவி.

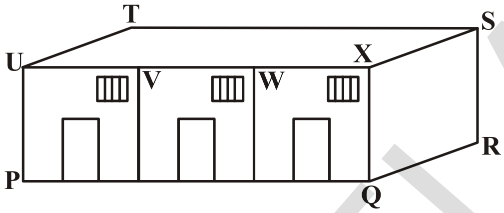


2. ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் ‘a’ அலகுகள் எனில் அதற்கு இருமடங்கு பரப்பளவுள்ள சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் என்ன?

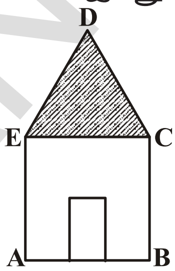
04 நேர்கோடுகளும் கோணங்களும்

4.1 அறிமுகம்

ரேஷ்மா மற்றும் கோபி ஆகிய இருவரும் முறையே அவர்களுடைய பள்ளி மற்றும் வீட்டின் மாதிரி படங்களை வரைந்தனர். இந்த மாதிரி படங்களில் சில கோணங்களையும், கோட்டுத்துண்டுகளையும் உங்களால் குறிப்பிட இயலுமா?



(i)



(ii)

மேற்கண்ட படங்களில் (PQ, RS, ST, ...) மற்றும் (AB, BC, CD, ...) என்பன கோட்டுத்துண்டுகள்.

அதேபோல $\angle UPQ$, $\angle PQR$, ... and $\angle EAB$, $\angle ABC$, ... என்பன சில கோணங்கள்.

ஒரு கட்டிட நிபுணர் கட்டிடங்கள், கோபுரங்கள், பாலங்கள் ஆகியவற்றின் மாதிரி வரைபடங்களை வரையும்போது அவர் வெவ்வேறு கோணங்களில் பலகோடுகளையும் இணைகோடுகளையும் வரைகிறார் என்பது உனக்கு தெரியுமா?

அறிவியலில் உள்ள ஒளியியல் பாடப்பகுதியில் பொருட்களின் பிம்பங்களின் பிரதிபளிப்பையும் ஒளிவிலகலையும் மற்றும் ஒளி சிதறலையும் காட்டும்பொழுது ஒளியின் இயக்கத்தை கோடுகளாகவும் கோணங்களாகவும் ஊகித்துக்கொண்டு வரைகிறோம். இதேபோல பொருட்களின்மீது பல்வேறுபட்ட விசைகள் செயல்படும்போது அதன்மீது செய்யப்பட்ட வேலை எவ்வளவு என கண்டுபிடிக்க விசை மற்றும் இடப்பெயர்ச்சிக்கு இடையேயான கோணங்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம். ஒரு பகுதியின் உயரத்தை கண்டறிய நமக்கு கோணங்களும் நேர்கோடுகளும் தேவைப்படுகின்றன.

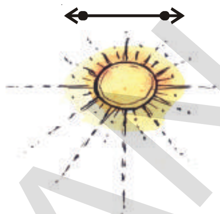
நாம் அன்றாட வாழ்கையில் வடிவியலின் இந்த அடிப்படை கருத்துக்களை பயன்படுத்திக்கொள்ளும் சூழ்நிலைகள் அதிகம் ஏற்படுகின்றன.

இதை செய்

உங்களுடைய சுற்றுபுறங்களை கவனித்து அன்றாட வாழ்க்கையில் கோடுகளும் கோணங்களும் பயன்படும் மூன்று சூழ்நிலைகளை எழுதுக.

அந்த படங்களை உன்னுடைய பதிவேட்டில் வரைந்துக்கொள். அந்த மாதிரியான சில படங்களை சேகரி.

4.2 வடிவியலில் உள்ள அடிப்படை கருத்துகள் :



டார்ச் லைட் அல்லது சூரியனிடமிருந்து வரும் ஒளிக்கற்றைகளை நினைத்துப்பார். அந்த ஒளிக்கற்றைகளை நீ எவ்வாறு குறிப்பிடுவாய்? கதிர் என்பது ஒரு கோட்டின் ஒரு பகுதியே ஆகும் என்பது நாம் அறிந்ததே. இது ஒரு புள்ளியில் தொடங்கி ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் முடிவின்றி நீண்டுகொண்டேயிருக்கும். ஆனால் கோடு, இரண்டு திசைகளிலும் முடிவின்றி நீண்டுகொண்டேயிருக்கும்.

கோட்டுத்துண்டு என்பது இரண்டு புறங்களிலும் முடிவுப்புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு கோட்டின் ஒரு பகுதியே ஆகும்.

கோட்டுத்துண்டு AB ஐ $\overline{AB}$ என்றும் அதனுடைய நீளத்தை ABஎன்றும் நாம் குறித்துக் காட்டுகிறோம்.

கதிர் AB ஐ $\overrightarrow{AB}$ என்றும் கோடு ABஐ $\overleftrightarrow{AB}$ என்றும் குறித்துக்காட்டுகிறோம்.

நாம் பொதுவாக கோடுகளை $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ ... என குறிக்கிறோம். சில நேரங்களில் கோடுகளை l, m, n என்றவாறும் குறிக்கிறோம்.

ஒரே கோட்டின்மீது மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் இருந்தால் அப்புள்ளிகளை ஒருகோட்டுப்புள்ளிகள் என அழைக்கிறோம். அவ்வாறு இல்லையெனில் ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் என அழைக்கிறோம்.

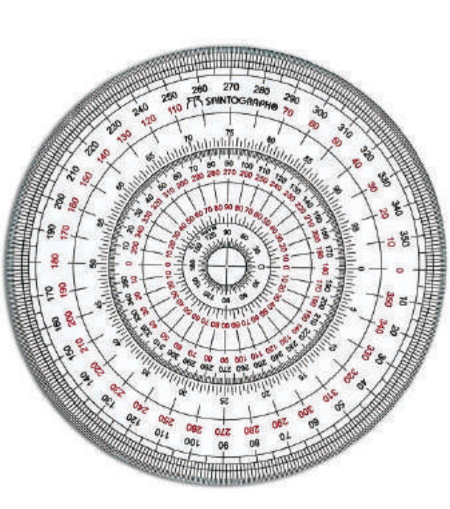
சேகர் என்பவர் ஒரு கோட்டின்மீது சில புள்ளிகளை குறித்து அவைகளால் ஏற்படும் கோட்டுத்துண்டுகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பிட்டான்.

(**குறிப்பு:** $\overline{PQ}$ மற்றும் $\overline{QP}$ என்பன ஒரே கோட்டுத்துண்டை குறிக்கின்றன)

வ.எண்	கோட்டின்மீது உள்ள புள்ளிகள்	கோட்டுத்துண்டுகள்	எண்ணிக்கை
1.	P R Q 3	PQ, PR, RQ	3
2.	P S R Q 4	PQ, PR, PS, SR, SQ, RQ	6
3.	P S T R Q 5	....	

கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் கோட்டுத்துண்டுகளின் எண்ணிக்கைக்கம் இடையே ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட முறையை உன்னால் காணமுடியுமா? மேலும் சில புள்ளிகளை அக்கோட்டின் மீது எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் ஒழுங்கு முறையை ஆராய்வோம்.

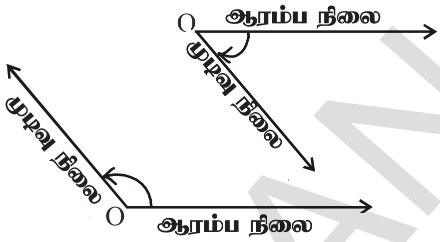
கோட்டின்மேல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	2	3	4	5	6	7
கோட்டுதுண்டுகளின் எண்ணிக்கை	1	3	6	.....	.....	.....



படத்தில் கண்டவாறு ஒரு வட்டம் 360 சமப்பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டது.

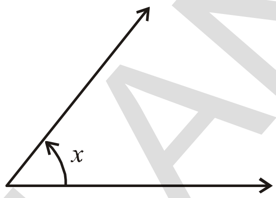
ஒவ்வொரு பகுதியின் கோண அளவையும் ஒரு (டிகிரி) பாகை என அழைக்கிறோம்.

இரண்டு வெவ்வேறான கதிர்கள் ஒரு பொதுப் புள்ளியில் ஒன்று சேரும்போது கோணம் ஏற்படுகிறது. அதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை ஆதாரமாக் கொண்டு ஒரு கதிரை ஆரம்பநிலையிலிருந்து முடிவு நிலைவரை சுழற்றும்போது கோணம் ஏற்படுகிறது.

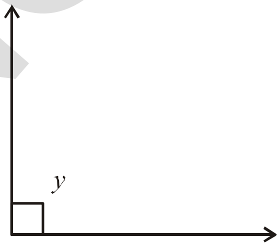


ஒரு நிலைப்புள்ளி ‘O’ ஐ ஆதாரமாகக்கொண்டு ஒரு கதிரை தொடக்க நிலையிலிருந்து இறுதிநிலைவரை உள்ள மாற்றத்தை சுழற்சி என்கிறோம். இந்த சுழற்சியின் அளவை கோணம் என்கிறோம்.

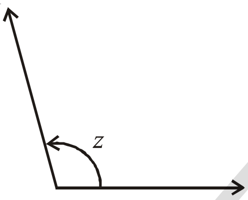
ஒரு முழுமையான சுழற்சி 360° ஆகும். நாம் கவராயத்தைக்கொண்டு கூட கோணங்களை வரையலாம்.



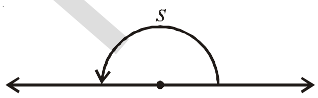
குறுங்கோணம் : $0° < x < 90°$



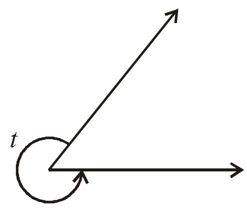
செங்கோணம் $y = 90°$



விரிகோணம் : $: 90° < z < 180°$



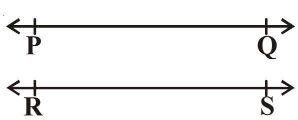
நேர்கோணம் : $s = 180°$



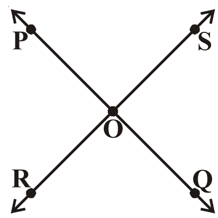
பின்வளைவுகோணம் : $180° < t < 360°$

4.2.1 வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்ளாத கோடுகளும்

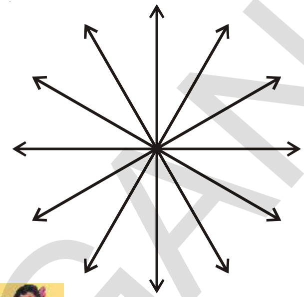
அருகில் உள்ள படங்களை கவனி. $\overleftrightarrow{PQ}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{RS}$ எனும் கோடுகள் பொதுப்புள்ளியை கொண்டிருக்கிறதா? இந்த வகை கோடுகளை என்னவென்று அழைக்கலாம்? இவைகளை இணைகோடுகள் என்று அழைக்கிறோம்.



இவ்வாறு இல்லாமல் அந்த கோடுகள் ஏதாவதொரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொண்டால் அந்த கோடுகளை வெட்டும்கோடுகள் என்று அழைக்கிறோம்.



4.2.2 ஒருபுள்ளி வழிகோடுகள்



எத்தனை கோடுகள் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்தித்துக்கொள்ளும்? ஒரு புள்ளியில் பல கோடுகள் சந்தித்தால் அக்கோடுகளை என்னவென்று அழைப்பர் என உங்களுக்குத் தெரியுமா?

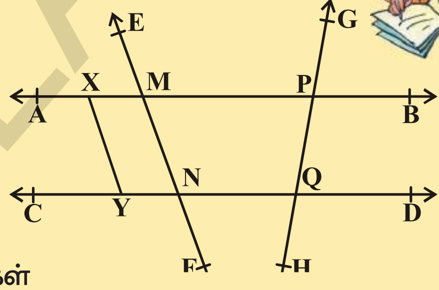
மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒருபுள்ளியில் சந்தித்தால் ஒருபுள்ளிவழிகோடுகள் என்கிறோம். அக்கோடுகள் சந்திக்கும்புள்ளியை கோட்டுச்சந்தி என்கிறோம்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளுக்கும் ஒருபுள்ளிவழிக் கோடுகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடு யாது?

பயிற்சி - 4.1

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்திலிருந்து (விடையளி) பெயரிடு



(i) ஏதேனும் ஆறுபுள்ளிகள்

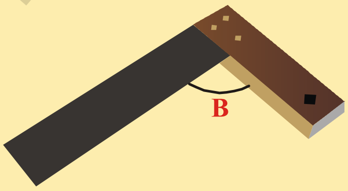
(ii) ஏதேனும் ஐந்து கோட்டுத்துண்டுகள்

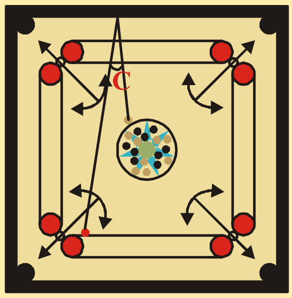
(iii) ஏதேனும் நான்கு கதிர்கள்

(iv) ஏதேனும் நான்கு கோடுகள்

(v) ஏதேனும் நான்கு ஒருகோட்டுப்புள்ளிகள்

2. கீழ்கண்ட படங்களை உற்றுநோக்கி அவைகளில் உள்ள கோணங்களின் வகைகளை குறிப்பிடு.





3. கீழ்கண்ட கூற்றுக்கள் சரியா அல்லது தவறா என்பதை கூறு :

(i) கதிர் முடிவுபுள்ளியை பெற்றிருக்காது.

(ii) $\overleftrightarrow{AB}$ கோடும் $\overleftrightarrow{BA}$ கோடும் ஒன்றே

(iii) $\overrightarrow{AB}$ கதிரும் $\overrightarrow{BA}$ கதிரும் ஒன்றே

(iv) ஒரு கோடு வரையறுக்கப்பட்ட நீளத்தைக்கொண்டிருக்கிறது.

(v) ஒரு தளம் நீளம் மற்றும் அகலத்தை கொண்டிருக்கிறது அனால் தடிமனை கொண்டிருக்காது.

(vi) இரண்டு வெவ்வேறான புள்ளிகள் எப்பொழுதும் ஒரே ஒரு நேர்கோட்டை கொண்டிருக்கும்.

(vii) இரண்டு கோடுகள் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

(viii) இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகள் ஒரே கோட்டிற்கு இந்த இரண்டுமே இணையான கோடுகளாக இருக்கமுடியாது.

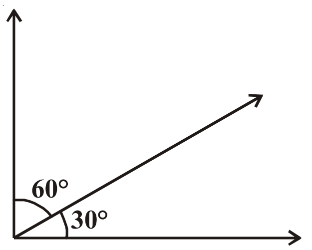
4. கடிகாரத்தில் கீழ்கண்ட நேரங்களை காட்டும்போது கடிகாரத்தின் இரண்டு முட்களுக்கிடையே உள்ள கோணங்களை கண்டுபிடி.

(a) 9 மணி (b) 6 மணி (c) மாலை 7 மணி

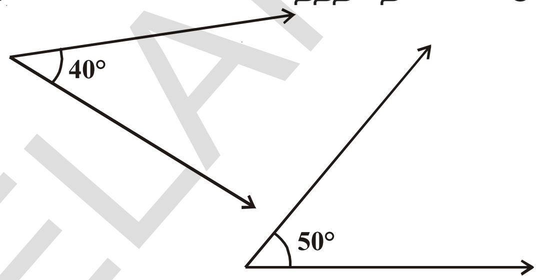
4.3 ஜதை கோணங்கள்

நாம் இப்பொழுது சில ஜதை கோணங்களைப்பற்றி அறிந்துக்கொள்ளலாம்.

கீழ்கண்ட படங்களை கவனித்து கோணங்களின் மொத்தத்தை கண்டுபிடி.



(i)



(ii)

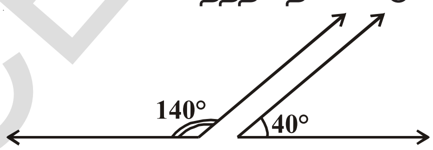
ஒவ்வொரு படத்திலும் இரண்டு கோணங்களின் மொத்தம் என்ன? 90^0 ஆக உள்ளது. இந்த வகை ஜதை கோணங்களை என்னவென்று அழைக்கலாம்? அவற்றை நிரப்புக்கோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம்.

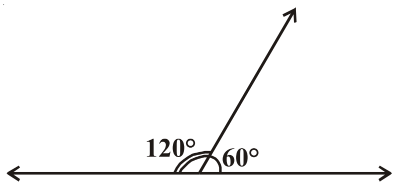
ஒரு கோணம் x^0 ஆக இருந்தால் அதனுடைய நிரப்புக் கோணம் என்ன? x^0 இன் நிரப்புக்கோணம் $(90^0 - x^0)$.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒரு கோணத்தின் அளவு $62°$ஆக இருந்தால் அதனின் நிரப்புக்கோண அளவு என்ன?

தீர்வு : நிரப்பி கோணங்களின் மொத்தம் $90°$ ஆக இருப்பதால், $62°$ன் நிரப்புக் கோணம் $90° - 62° = 28°$

இப்பொழுது கீழ்கண்ட படங்களை கவனித்து ஒவ்வொரு படத்திலும் உள்ள கோணங்களின் மொத்தத்தை கண்டுபிடி.





ஒவ்வொரு படத்திலும் இரண்டு கோணங்களின் மொத்தம் என்ன? 180^0 ஆக உள்ளது. இந்தவகை ஜதை கோணங்களை என்னனென்று அழைக்கலாம்? இந்தகை ஜதை கோணங்களை மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு கோணத்தின் அளவு x^0ஆக இருந்தால் அதனின் மிகைநிரப்புக்கோணம் என்ன? x^0ன் மிகை நிரப்புக்கோணம் $(180° - x°)$.

எடுத்துக்காட்டு 2: இரண்டு நிரப்புக்கோணங்கள் 4:5 விகிதத்தில் உள்ளன. கோணங்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு : தேவையான கோணங்கள் $4x$ மற்றும் $5x$ என்க.

எனவே $4x + 5x = 90^0$ (ஏன்?)

$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$

ஆகவே தேவையான கோணங்கள் 40° மற்றும் 50°.

இப்பொழுது $(120°, 240°)$ $(100°, 260°)$ $(180°, 180°)$ $(50°, 310°)$ ..... போன்ற ஜதை கோணங்களை கவனிப்போம். அந்தவகை ஜதை கோணங்களை என்னவென்று அழைப்பாய்? ஜதை கோணங்களின் மொத்தம் $360°$ ஆக இருந்தால் அந்த கோணங்கள் ஒன்றுக்கு மற்றொன்று முழுவட்டநிரப்பு கோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம்.

$270°$ ன் முழுவட்ட நிரப்புகோணம் எவ்வளவு என்று உன்னால் கூறமுடியுமா?

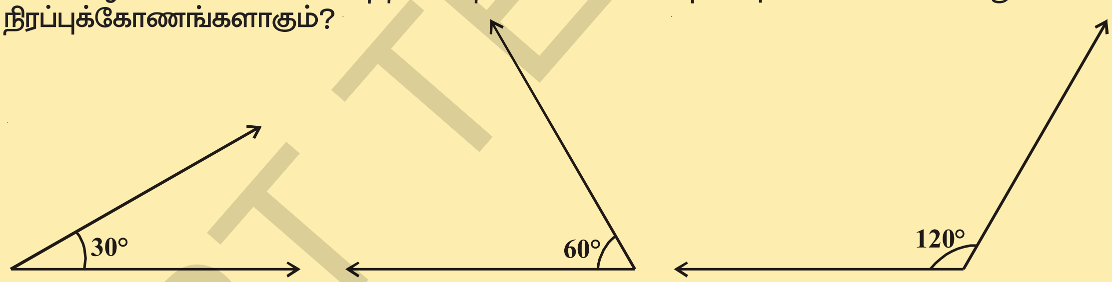
$x°$ ன் முழுவட்ட நிரப்புகோணம் என்ன?

இதை செய்

1. கீழ்கண்ட கோணங்களுக்கு நிரப்புகோணம், மிகைநிரப்புகோணம் மற்றும் முழுவட்டநிரப்பு கோணங்களை எழுது.

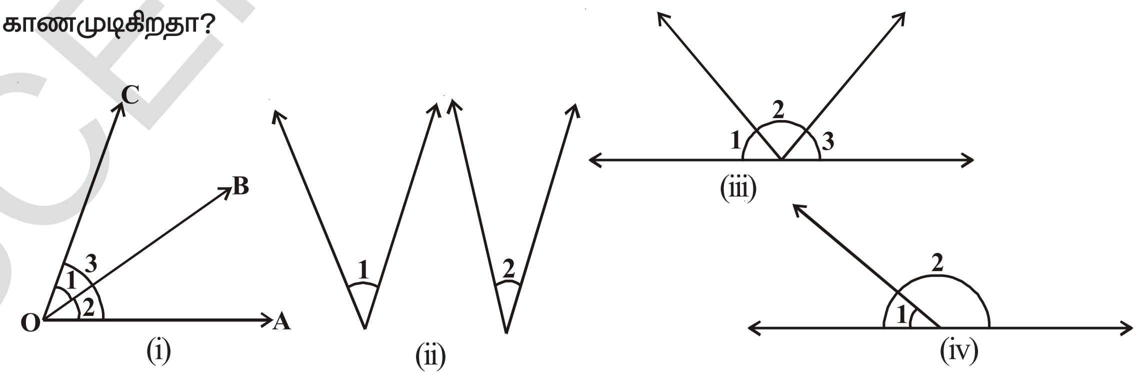
(a)	45^0	(b)	75^0	(c)	215°	(d)	30^0
(e)	60^0	(f)	90°	(g)	180°		

2. கீழ்கண்டவைகளின் எந்த ஜதை கோணங்கள் நிரப்புக்கோணம் அல்லது மிகை நிரப்புக்கோணங்களாகும்?



(i) (ii) (iii)

கீழ்கண்ட படங்களை உற்றுநோக்கு. இந்த படங்களில் ஏதாவது பொதுவானவற்றை காணமுடிகிறதா?



படம் (i)ல் உச்சி ‘O’ மற்றும் புயம் ‘$\overrightarrow{OB}$’ என்பன $\angle 1$ மற்றும் $\angle 2$களுக்கு பொதுவானவைகளாக உள்ளன.

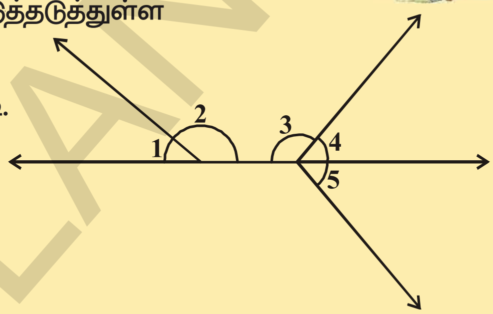
பொதுபப்புயங்களாக இல்லாதவற்றை என்னவென்று அழைப்பாய். அவற்றை எவ்வாறு வரிசைப்படுத்தி அமைப்பாய்? அவை பொதுபுயத்திற்கு இரண்டு புயங்களிலும் அமைந்துள்ளன. இந்தவகை ஜதை கோணங்களை என்னவென்று அழைக்கலாம்? அவற்றை அடுத்தடுத்துள்ள கோண ஜதை என்று அழைக்கிறோம்.

படம் (ii) ல் இரண்டு கோணங்கள் $\angle 1$ மற்றும் $\angle 2$ உள்ளன. அவற்றில் பொதுவான புயமோ அல்லது பொது உச்சியோ இல்லை. எனவே அவை அடுத்தடுத்துள்ள கோண ஜதை அல்ல.

முயன்று பார்

(i) மேற்கண்ட படங்களில் (i, ii, iii & iv) அடுத்தடுத்துள்ள கோண ஜோடி மற்றும் அடுத்தடுத்து அல்லாத கோண ஜோடிகளை கண்டுபிடி.

(ii) அருகில் உள்ள படத்தில் அடுத்தடுத்த கோணங்களை எழுதுக.



ஒருஜதை கோணங்கள் பொது உச்சியையும் பொது புயத்தையும் பெற்றிருந்து பொதுவாக இல்லாத புயங்கள் பொது புயத்திற்கு இருபுயங்களிலும் அமைந்திருந்தால் அந்த ஜதை கோணங்களை அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள் என அழைக்கிறோம்.

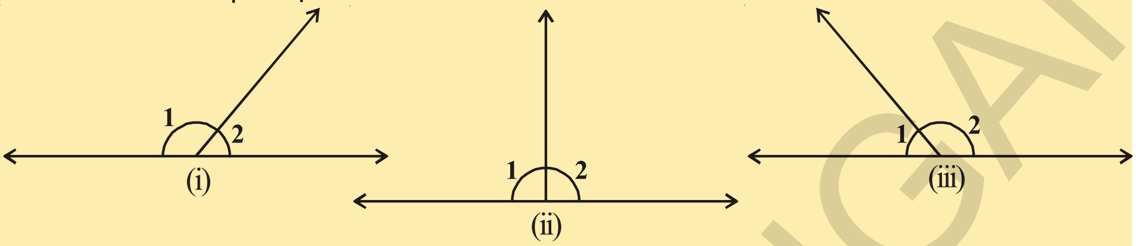
அருகில் தரப்பட்டுள்ள படத்தை உற்றுநோக்கு. விளையாட்டு வீரரின் கைக்கும் ஈட்டிக்கும் இடையே கோணங்கள் ஏற்படுகிறது. அந்த கோணங்களின் வகை என்ன? அவை அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள் என்பது நாம் அறிந்ததே. மேலும் அந்த இரண்டு கோணங்தகளின் மொத்தம் எவ்வளவு இருக்கும்? அந்த கோணங்தகளின் மொத்தம் 180°. ஏனெனில் அவை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது அமைந்துள்ளது. இந்தவகை ஜதை கோணங்களை என்னவென்று அழைக்கலாம்? அவற்றை கோட்டுகோணஜோடி என்று அழைக்கிறோம். ஆகவே, இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கதளின் மொத்தம் 180° எனில் அவற்றை கோட்டுகோண ஜோடி என்று அழைக்கிறோம்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

கோட்டு கோண ஜோடிகளின் மொத்தம் எப்பொழுதும் மிகைநிரப்பு கோணமாக இருக்கும். ஆனால் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் கோட்டுகோண ஜோடிகளாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஏன்?

செயல்பாடு

கீழ்கண்ட படங்களிலுள்ள கோணங்களின் அளவுகளை அளந்து அட்டவணையை நிரப்பு.

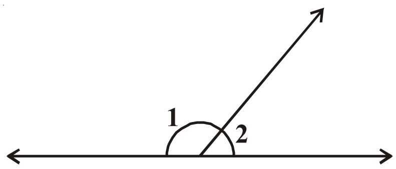


படம்	∠1	∠2	∠1 + ∠2
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 கோட்டுகோணஜோடிகளின் வெளிப்படை உண்மை :

வெளிப்படை உண்மை : ஒரு கதிர் ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமைந்தால் ஏற்படும் இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ ஆகும்.

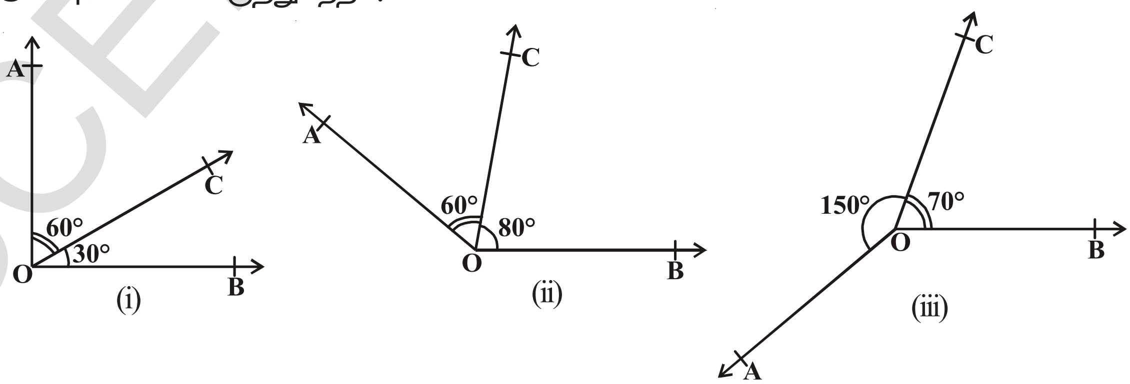
இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ எனில் அவற்றை கோட்டுகோண ஜோடிகள் என்று அழைக்கிறோம்.



அருகில் உள்ள படத்தில் $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

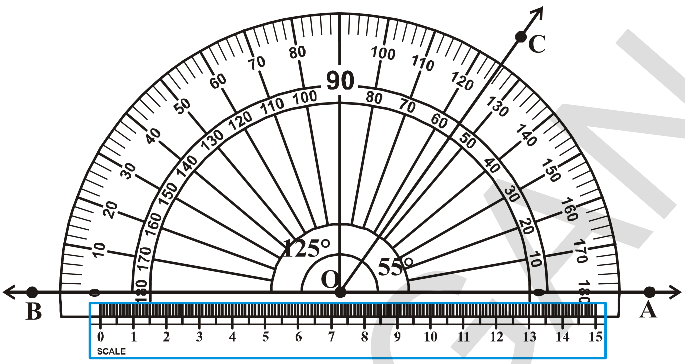
கீழ்கண்ட செயலை செய்யலாம். கீழ்கண்ட படங்களில் உள்ளவாறு பலவிதமான கோண அளவுகளில் அடுத்தடுத்துள்ள கோண ஜோடிகளை வரைக.

ஒவ்வொரு வகையிலும் பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்களில் ஒரு புயத்தின் விளிம்போடு அளவுகோலை வை. பொதுவாக இல்லாத மற்றொரு புயத்தின் விளிம்போடு அளவுகோல் பொருந்துகிறதா?



படம் (iv)ல் மட்டுமே பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்களின் விளிம்போடு அளவுகோல் ஒன்றுகிறது.

அதாவது பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்கள் ஒரு நேர்கோட்டை உருவாக்குகிறது. மேலும் நாம் அறிவது யாதெனில் $\angle AOC + \angle COB = 55° + 125° = 180°$. மற்ற படங்களில் இவ்வாறு இல்லை.



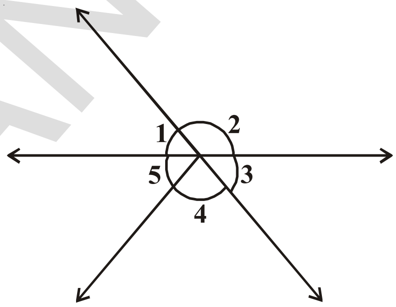
(iv)

வெளிப்படை உண்மை : இரண்டு அடுத்தடுத்த கோணங்களின் மொத்தம் 180°, எனில் அந்த கோணங்களின் பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்கள் ஒரு நேர்கோட்டை உருவாக்கும்.

ஒரு புள்ளியில் ஏற்படும் கோணங்கள் : ஒரு புள்ளியை சுற்றி ஏற்படும் கோணங்ளின் மொத்தம் 360° என நாம் அறிவோம்.

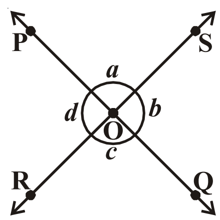
அருகில் உள்ள படத்தில்

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$



4.3.2 வெட்டும் கோடுகளில் ஏற்படும் கோணங்கள் :

இரண்டு வெட்டும்கோடுகளை வரைந்து பெயரிடு. கோட்டுகோண ஜோடிகளை உன்னுடைய பதிவேட்டில் குறித்துக்கொள். எத்தனை கோட்டுகோணஜோடிகள் உள்ளன?

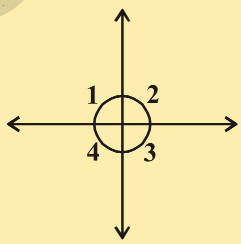


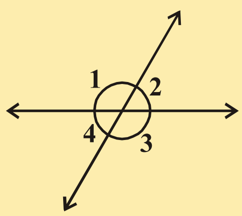
படத்தில் $\angle POS$ மற்றும் $\angle ROQ$ என்பன ஒரே உச்சிபுள்ளி கொண்டு பொதுவான புயத்தை பெற்றிருக்காத எதிரெதிரான கோணங்கள் ஆகும். எனவே அவை குத்தெதிர் கோணங்கள் ஆகும். (குத்துக்கோணங்கள் என்றும் அழைக்கலாம்)

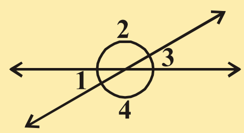
எத்தனை குத்தெதிர்கோண ஜதைகள் உள்ளன? உன்னால் காண முடியுமா? (படத்தைபார்)

செயல்பாடு

கீழ்கண்ட படத்தில் 1, 2, 3, 4 ஆகிய கோணங்களை அளந்து அட்டவணையை நிரப்புக.



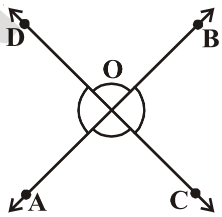




படம்	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i)				
(ii)				
(iii)				

குத்தெதிர்கோண ஜோடிகளைப்பற்றி நீ கூறுவது யாது? அவை சமமாக உள்ளனவா? இப்பொழுது தர்க்க முறையில் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம்-4.1 : இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொண்டால் ஏற்படும் குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்.



தரவு : AB மற்றும் CD என்பன O எனும் புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு நேர்க்கோடுகள்.

கொள்கை : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle AOD = \angle BOC$.

நிரூபணம் : $\overleftrightarrow{CD}$ எனும் கோட்டின் மீது $\overrightarrow{OA}$ கதிர் உள்ளது.

எனவே $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ [கோட்டுஜோடி கோணங்களின் எடுகோள்] .... (1)

மற்றும் $\angle AOD + \angle BOD = 180$ [ஏன்?] .... (2)

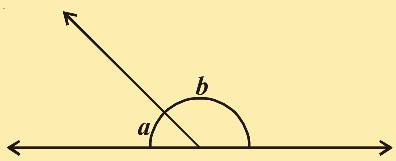
$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ [(1) மற்றும் (2)லிருந்து]

$\angle AOC = \angle BOD$ [இருபுறங்களில் உள்ள சமான கோணங்களை நீக்குதல்]

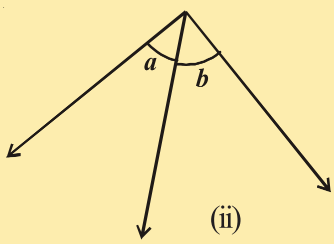
இவ்வாறே $\angle AOD = \angle BOC$ என நாம் நிரூபிக்கலாம். இதை நீங்களே நிருபித்துக்கொள்ளுங்கள்.

இதை செய்

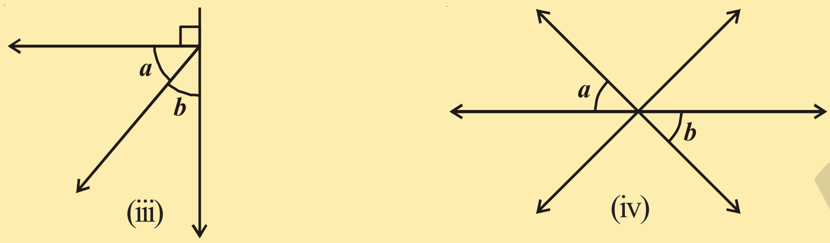
1. கீழ்கண்ட கோணங்களில் நிரப்புக்கோண ஜோடி, கோட்டுகோணஜோடி, குத்தெதிர்கோண ஜோடி மற்றும் அடுத்தடுத்துள்ள கோண ஜோடி ஆகியவற்றை வகைப்படுத்துக.



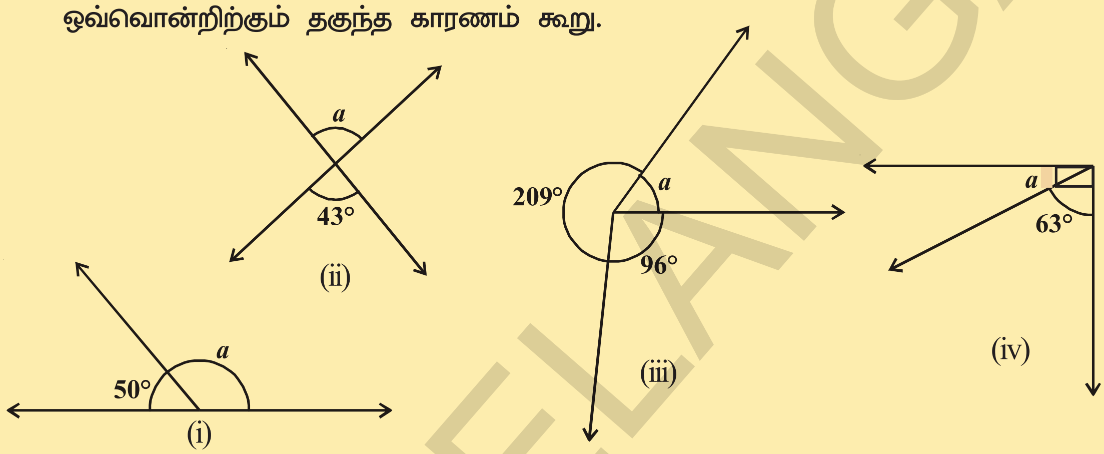
(i)



(ii)

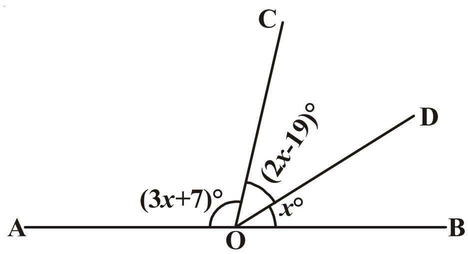


2. கீழ்கண்ட ஒவ்வொரு படத்திலும் ‘a’ன் கோண அளவை அளக்கவும். ஒவ்வொன்றிற்கும் தகுந்த காரணம் கூறு.



இப்பொழுது நாம் சில உதாரண கணக்குகளை செய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3: அருகில் உள்ள படத்தில் $\overleftrightarrow{AB}$ என்பது நேர்கோடு. x ன் மதிப்பை கண்டுபிடி. மேலும் $\angle AOC$, $\angle COD$ மற்றும் $\angle BOD$ ஆகியவற்றையும் கண்டுபிடி.



தீர்வு : $\overleftrightarrow{AB}$ ஒரு நேர்க்கோடு. எனவே $\overleftrightarrow{AB}$ கோட்டின்மீது O எனும் புள்ளியில் உள்ள அனைத்து கோணங்களின் மொத்தம் 180°.

$(3x + 7)° + (2x - 19)° + x = 180°$ (கோட்டு கோணங்கள்)

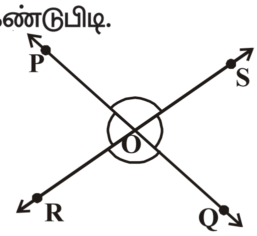
$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32°$.

அகவே, $\angle AOC = (3x + 7)° = (3 \times 32 + 7)° = 103°$,

$\angle COD = (2x - 19)° = (2 \times 32 - 19)° = 45°$, $\angle BOD = 32°$.

எடுத்துக்காட்டு 4: அருகில் உள்ள படத்தில் PQ மற்றும் RS எனும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று O எனும் புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

$\angle POR : \angle ROQ = 5: 7$,எனில் அனைத்துகோணங்களையும் கண்டுபிடி.



தீர்வு : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (கோட்டுகோண ஜோடி)

ஆனால் $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (தரப்பட்டுள்ளது)

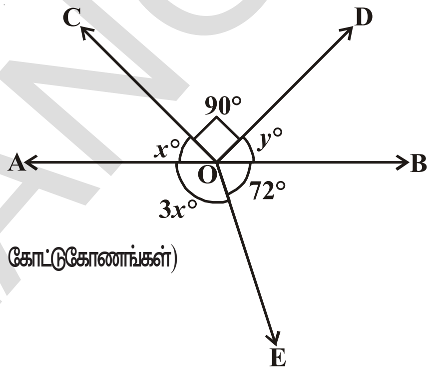
ஆகவே, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180 = 75°$

இவ்வாறே $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180 = 105°$

இப்பொழுது $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

மற்றும் $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

எடுத்துக்காட்டு 5: அருகில் உள்ள படத்தில் $\angle COD = 90^o$, $\angle BOE = 72^o$ மற்றும் AOB என்பது ஓர் நேர்க்கோடு. $\angle AOC$, $\angle BOD$ மற்றும் $\angle AOE$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.



தீர்வு : AOB என்பது ஓர் நேர்க்கோடு

எனவே $\angle AOE + \angle BOE = 180^o$

$= 3x° + 72° = 180°$

$\Rightarrow 3x° = 108° \Rightarrow x = 36°.$

$\angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180^0$ என நாம் அறிவோம் ($\because$ கோட்டுகோணங்கள்)

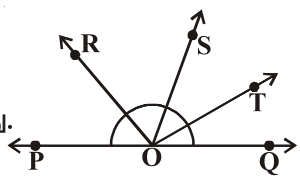
$\Rightarrow x° + 90° + y° = 180°$

$\Rightarrow 36° + 90° + y° = 180°$

$y° = 180° - 126° = 54°$

$\angle AOC = 36^o$, $\angle BOD = 54^o$ மற்றும் $\angle AOE = 108^o$.

எடுத்துக்காட்டு6: அருகில் உள்ள படத்தில் PQ எனும் கோட்டின் மீது OS எனும் கதிர் அமைந்துள்ளது. கதிர்கள் OR மற்றும் OT என்பன முறையே $\angle POS$ மற்றும் $\angle SOQ$ ஆகியவற்றின் கோண இருசமவெட்டிகள். $\angle ROT$ கண்டுபிடி.



தீர்வு : PQ எனும்கோட்டின் மீது OS எனும் கதிர் அமைந்துள்ளது.

ஆகவே, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$ (கோட்டுகோணஜோடி)

ஆகவே $\angle POS = x°$

ஆகவே, $x° + \angle SOQ = 180°$ (எவ்வாறு?)

எனவே, $\angle SOQ = 180° - x°$

கதிர் OR, $\angle POS$, ஐ இருசமக்கூறிடுகிறது,

எனவே $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

இவ்வாறே, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x°}{2}$$

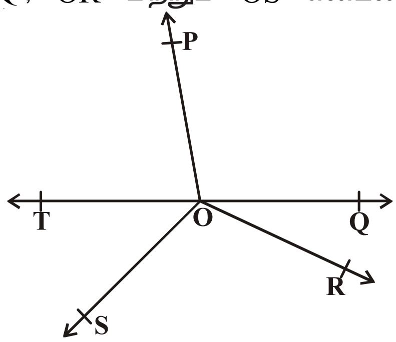
இப்பொழுது $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x°}{2} + \left(90° - \frac{x°}{2}\right)$$

$$= 90°$$

எடுத்துக்காட்டு 7: அருகில் உள்ள படத்தில் $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ மற்றும் $\overrightarrow{OS}$ என்பன நான்கு கதிர்கள்.

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ எனநிருபி.



தீர்வு : தரபட்டுள்ள படத்தில் $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ அல்லது $\overrightarrow{OS}$ ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுக்கு எதிர்புறமாக கதிர் வரைக. $\overleftrightarrow{TOQ}$ என்பது நேர்கோடாக இருக்கும்படி $\overrightarrow{OT}$ கதிர்வரைக. இப்பொழுது கதிர் OP, $\overleftrightarrow{TQ}$ கோட்டின்மீது உள்ளது.

ஆகவே, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ .... (1) (கோட்டுக்கோண ஜோடி எடுகோள்)

இவ்வாறே, $\overrightarrow{OS}$ கதிர், $\overleftrightarrow{TQ}$ கோட்டின்மீது உள்ளது.

ஆகவே $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ .... (2) (ஏன்?)

ஆனால் $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

எனவே (2) லிருந்து

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ .... (3)

இப்பொழுது (1) மற்றும் (3)ஐ கூட்ட, நாம் பெறுவது

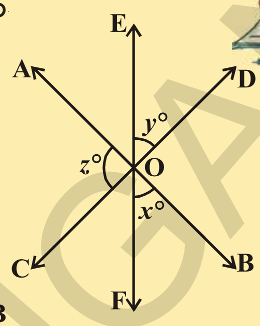
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ .... (4)

ஆனால் $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

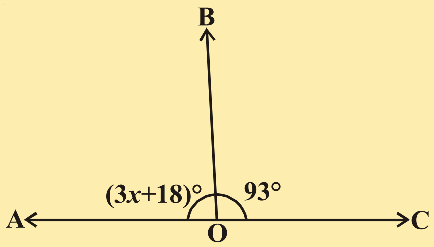
அகவே, (4) லிருந்து $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

பயிற்சி - 4.2

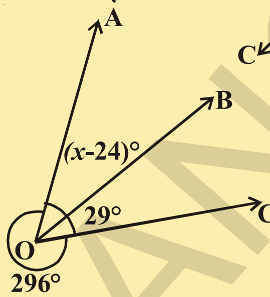
1. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{EF}$ எனும் கோடுகள் O எனும்புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $x : y : z = 2 : 3 : 5$ என இருக்குமாறு x,y மற்றும் z ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.



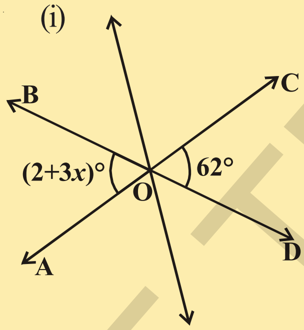
2. கீழ்கண்டபடங்களில் xன் மதிப்பை கண்டுபிடி.



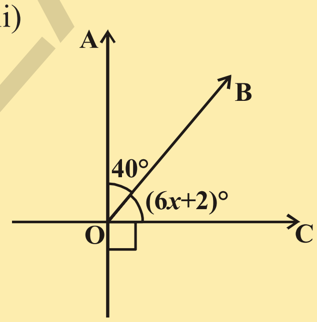
(i)



(ii)

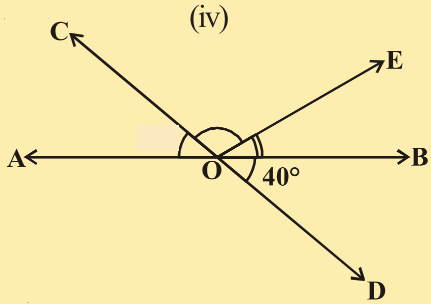


(iii)

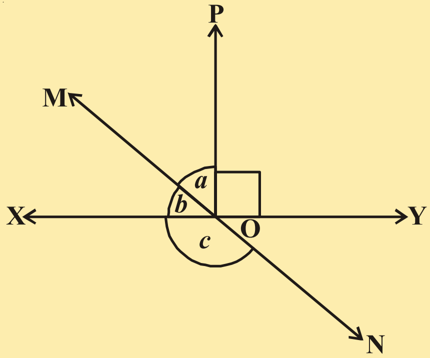


(iv)

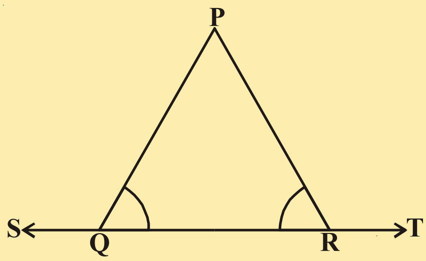
3. அருகில் உள்ள படத்தில் $\overleftrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{CD}$ எனும் கோடுகள் O எனும் புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ மற்றும் $\angle BOD = 40°$, எனில் $\angle BOE$ மற்றும் பின்வளைவு $\angle COE$ கோணங்களைகண்டுபிடி.



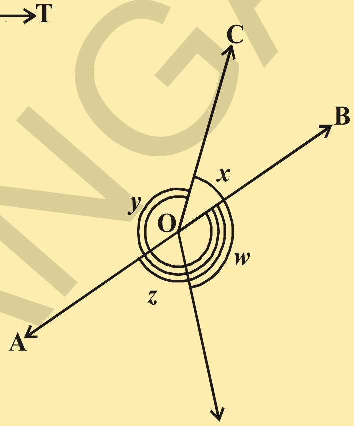
4. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\overleftrightarrow{XY}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{MN}$ எனும் கோடுகள் O எனும் புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle POY = 90°$ மற்றும் $a : b = 2 : 3$, எனில் c ஐ கண்டுபிடி.



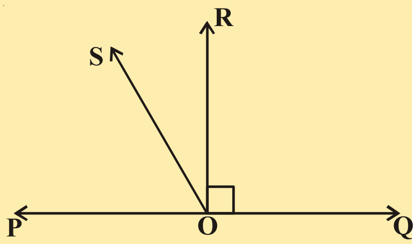
5. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle PQR = \angle PRQ$ எனில் $\angle PQS = \angle PRT$ என நிரூபி.



6. தரப்பட்டுள்ள படத்தில், $x + y = w + z$, எனில் AOB என்பது ஒரு நேர்கோடு என நிரூபி.

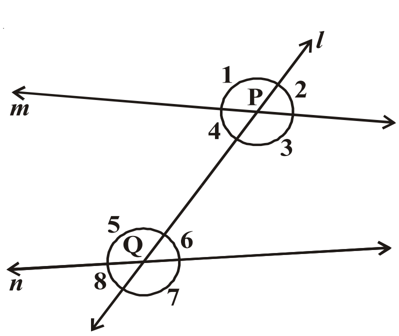


7. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\overleftrightarrow{PQ}$ என்பது ஒரு நேர்கோடு கதிர் $\overrightarrow{OR}$ என்பது $\overleftrightarrow{PQ}$ கோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ளது. $\overrightarrow{OS}$ என்பது $\overrightarrow{OP}$ மற்றும் $\overrightarrow{OR}$ கதிர்களுக்கு இடையே உள்ள மற்றொரு கதிர்.
$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$ என நிரூபி.



8. $\angle XYZ = 64°$ என தரப்பட்டுள்ளது. XY ஐ P வரை நீட்டி வரைக. கதிர் YQ, $\angle ZYP$ஐ இருசமக்கூறிடுகிறது. தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஏற்றவாறு படம் வரைக. $\angle XYQ$ மற்றும் பின்வளைவுகோணம் $\angle QYP$ ஐ கண்டுபிடி.

4.4 நேர்க்கோடுகளும் குறுக்குவெட்டியும்



படத்தை கவனி. l எனும் கோடு, m மற்றும் n கோடுகளை எத்தனை புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது? கோடு l அந்த இரண்டு கோடுகளையும் இரண்டு தனித்த புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. இந்த வகை கோட்டை என்னவென்று அழைக்கலாம்? இது குறுக்குவெட்டி ஆகும். இந்தகோடு இரண்டு தனித்த கோடுகளை இரண்டு தனித்த புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. கோடு 'l' 'm' மற்றும் 'n' கோடுகளை முறையே 'P' மற்றும் 'Q' புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. ஆகவே கோடு l என்பது m மற்றும் n கோடுகளின் குறுக்குவெட்டியாகும்.

ஒரு ஜோடி கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டும்போது ஏற்படும் கோணங்களின் எண்ணிக்கையை கவனி.

ஒறு குறுக்குவெட்டி, இரண்டு கோடுகளை வெட்டினால் எட்டு கோணங்கள் ஏற்படுகிறது.

அந்த கோணங்களை $\angle 1$, $\angle 2$. . . $\angle 8$ என படத்தில் காட்டியவாறு பெயரிடலாம். இந்த கோணங்களை உன்னால் வகைப்படுத்த முடியுமா? சில வெளிக்கோணங்களாகவும், சில உட்கோணங்களாகவும் உள்ளன. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ மற்றும் $\angle 8$ என்பனவற்றை வெளிகோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம். $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ மற்றும் $\angle 6$ என்பனவற்றை உட்கோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம்.

குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்திலும் அடுத்தடுத்த கோணங்களாக இல்லாத ஜோடி கோணங்களில் ஒன்று உட்கோணமாகவும் மற்றொன்று வெளிகோணமாகவும் இருந்தால் அவற்றை ஒத்த கோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம்.

தரப்பட்டுள்ள படத்திலிருந்து

(a) ஒத்த கோணங்கள் யாவை?

(i) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ மற்றும் $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ மற்றும் $\angle 7$, ஆக, நான்கு ஜோடி ஒத்த கோணங்கள் உள்ளன.

(b) ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் யாவை?

(i) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ மற்றும் $\angle 5$, என்பன இரண்டு ஜதை ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் ஆகும் (ஏன்?)

(c) ஒன்றுவிட்ட வெளிகோணங்கள் யாவை?

(i) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ மற்றும் $\angle 8$, என்பன இரண்டு ஜதை ஒன்றுவிட்ட வெளிகோணங்கள் ஆகும் (ஏன்?)

(d) குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள உட்கோணங்கள் யாவை?

(i) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ மற்றும் $\angle 6$ என்பன குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு ஜதை உட்கோணங்கள் ஆகும் (ஏன்?)

குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள உட்கோணங்களை அடுத்தடுத்த உட்கோணங்கள் அல்லது இணை உட்கோணங்கள் அல்லது துணை உட்கோணங்கள் என்று அழைக்கலாம்.

(e) குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள வெளிக்கோணங்கள் யாவை?

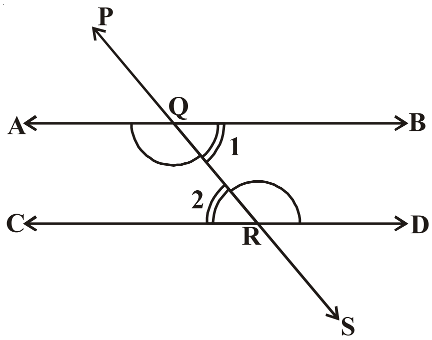
(i) $\angle 1$, $\angle 8$ (ii) $\angle 2$, $\angle 7$ என்பன குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு ஜதை வெளிக்கோணங்கள ஆகும். (ஏன்?)

குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள வெளிகோணங்களை அடுத்தடுத்த வெளிகோணங்கள் அல்லது இணை வெளிகோணங்கள் அல்லது துணை வெளிகோணங்கள் என்று அழைக்கலாம்.

l மற்றும் m எனும் கோடுகள் இணை எனில் ஒத்த கோணங்கள் பற்றி என்ன கூறலாம்? அவைகள் சமமாக இருக்குமா? ஆம். அவைகள் சமமாக இருக்கும்.

ஒத்த கோணங்களின் எடுகோள் :

ஒரு ஜோடி இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒத்தகோணங்கள் சமம்.



ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு யாது? (i) $\angle BQR$ மற்றும் $\angle QRC$ (ii) $\angle AQR$ மற்றும் $\angle QRD$ என்பன படத்தில் உள்ள ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகள்.

ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை ஒத்தகோணங்களின் எடுகோளைப் பயன்படுத்தி காணலாம்.

P

படத்தில் $\overleftrightarrow{PS}$ எனும் குறுக்குவெட்டி $\overleftrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{CD}$ எனும் இணைகோடுகளை முறையே Q மற்றும் R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

$\angle BQR = \angle QRC$ மற்றும் $\angle AQR = \angle QRD$ என்பதை இப்பொழுது நிரூபிக்கலாம்.

$\angle PQA = \angle QRC$ ..... (1) (ஒத்தகோணங்கள் எடுகோள்)

மற்றும் $\angle PQA = \angle BQR$ ..... (2) (ஏன்?)

எனவே, (1) மற்றும் (2)லிருந்து $\angle BQR = \angle QRC$.

இவ்வாறே, $\angle AQR = \angle QRD$.

இந்த முடிவை கீழ்கண்டவாறு தேற்ற வடிவில் எழுதலாம்.

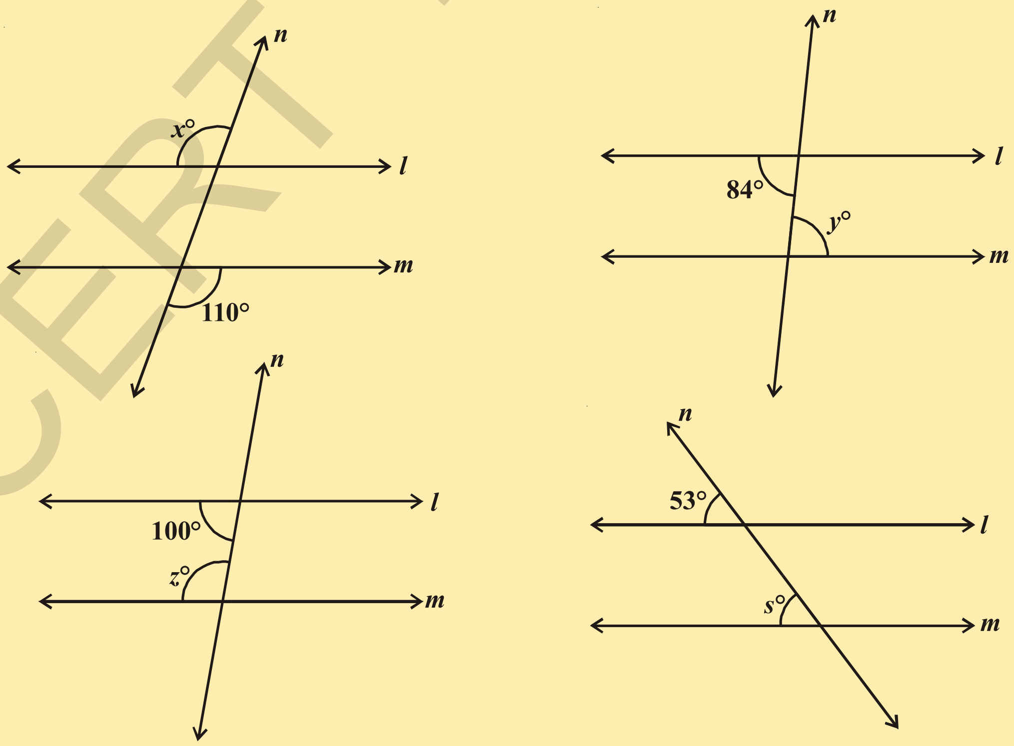
தேற்றம் – 4.2 : இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகள் சமம்.

இவ்வாறே குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள உட்கோணங்களுக்கு இடையே உள்ள உறவின் மூலம் கீழ்கண்ட தேற்றத்தை பெறலாம்.

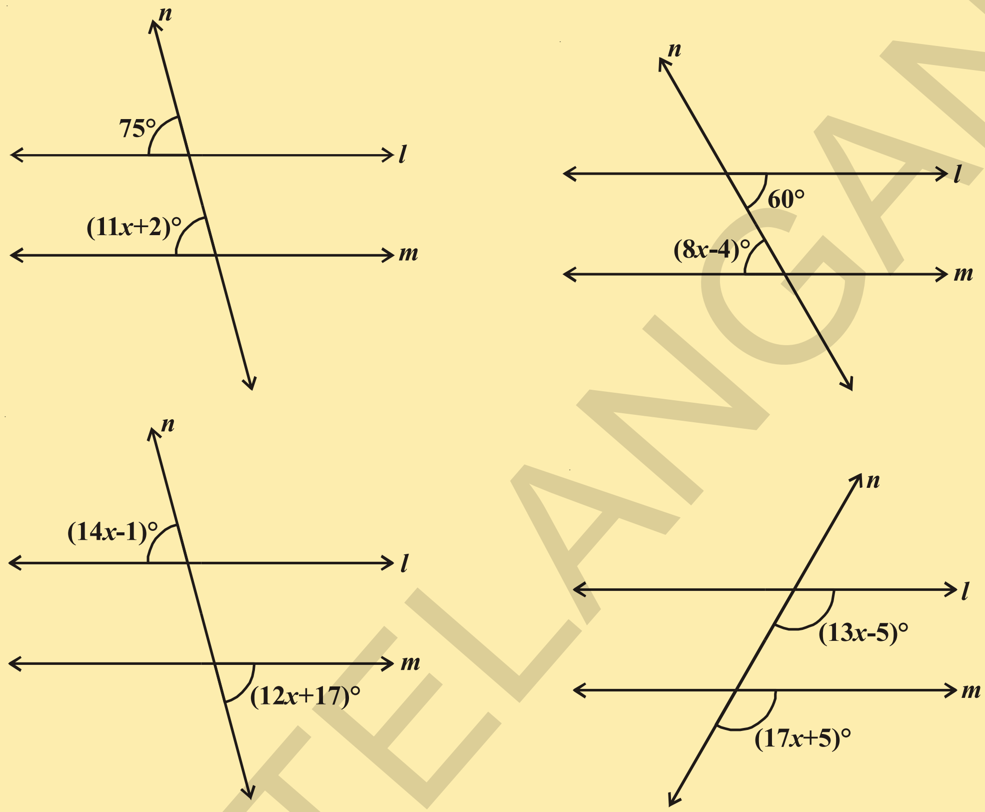
தேற்றம் – 4.3 : இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள உட்கோண ஜோடிகள் மிகைநிரப்பி கோணமாகும்.

இதை செய்

1. படத்தில் l மற்றும் m என்பன இணைகோடுகள். n ஒரு குறுக்குவெட்டி. ஒவ்வொரு படத்திலும் குறிப்பிடப்பட்ட கோணத்தின் மதிப்பை கண்டுபிடி.

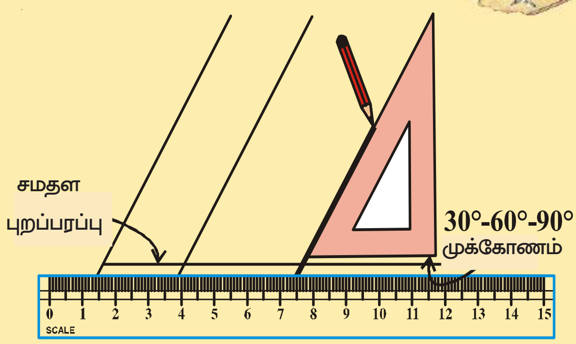


2. ‘x’ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. மற்றும் காரணம் கூறு.



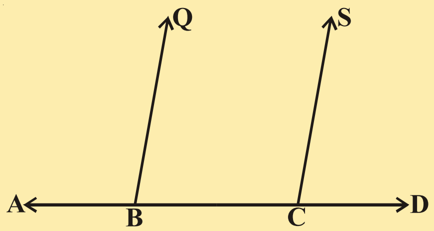
செயல்பாடு

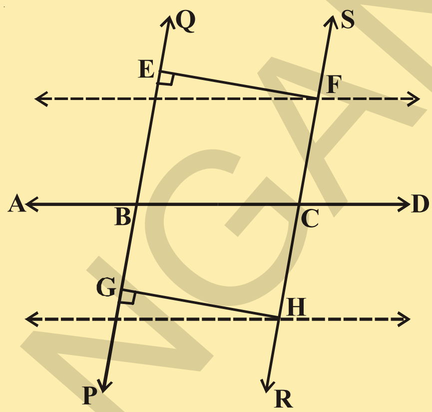
அளவுகோல் மற்றும் மூலைமட்டத்தை எடுத்துக்கொள். அளவுகோலின்மேல் மூலைமட்டத்தை படத்தில் கண்டவாறு பொருத்துக. மூலைமட்டத்தை சாய்வான விளிம்பை ஒட்டியவாறு பென்சிலைக் கொண்டு கோடு வரைக. இப்பொழுது மூலைமட்டத்தை கிடைமட்டமாக நகர்த்தி சாய்வான விளிம்பின் ஓரமாக மீண்டும் ஒரு கோடு வரைக. இந்தகோடுகள் இணையாக இருப்பதை பார்க்கலாம். அவை ஏன் இணையாக உள்ளன? உன்னுடைய நண்பர்களுடன் சிந்தித்து உரையாடுக.



இதை செய்

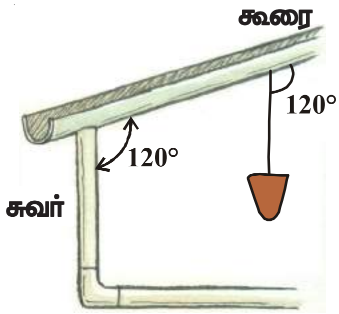
$\overleftrightarrow{AD}$ எனும் கோட்டை வரைந்து அதன்மீது B மற்றும் C புள்ளிகளை குறிக்கவும். B மற்றும் C புள்ளிகளில் ஒன்றுக்கொன்று சமானமாக இருக்கும்படி $\angle ABQ$ மற்றும் $\angle BCS$ கோணங்களை படத்தில் கண்டவாறு வரைக. AD ன் மறுபுறமாக PQ மற்றும் RS ஏற்படுமாறு QB மற்றும் SC ஆகியவற்றை நீட்டி வரைக.



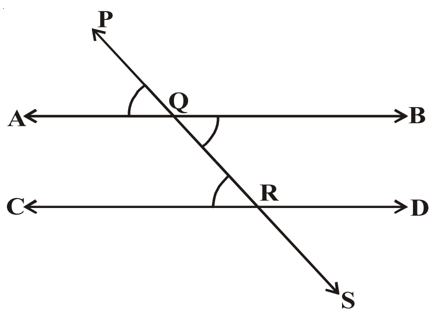


PQ மற்றும் RS எனும் இரண்டு கோடுகளுக்கு EF மற்றும் GH எனும் பொது செங்கத்துக்கோடுகள் வரைக. EF மற்றும் GH கோட்டுத்துண்டுகளின் நீளங்களை அளக்கவும். நீ கவனித்தது யாது? அதிலிருந்து நீ முடிவுக்கு வருவது என்ன? இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் சமம் எனில் அவை இணைகோடுகள் என்பதை நினைவுகூர்க.

எடுகோள் – 1 : இரண்டு கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒத்தகோண ஜோடிகள் சமம் எனில் அந்த இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை.



ஒரு கயிற்றின் முனையில் ஒரு எடையை தொங்கவிடப்பட்டுள்ள அமைப்பை நூற்குண்டு என்கிறோம். இங்க நூற்குண்டின் எடையானது கயிற்றை நேராக கீழ்நோக்கி இழுப்பதால் நூற்குண்டின் கயிறு செங்குத்தாக அமைகின்றது. சுவருக்கும் கூரைக்கும் இடையே உள்ள கோணம் 120° ஆக இருந்தால் கூரைக்கும் நூற்குண்டின் கயிறுக்கும் இடையே உள்ள கோணமும் 120° ஆகும். இதிலிருந்து கட்டிடத்தொழிலாளி சுவர் தரைக்கு செங்குத்தாக உள்ளது என முடிவெடுக்கிறார். அவர் எவ்வாறு இந்த முடிவிற்கு வந்தார்? என சிந்திக்கவும். ஒத்தகோண ஜோடிகள் எடுகோளின் மறுதலையைப் பயன்படுத்தி ஒன்றுவிட்ட உட்கோணஜோடிகள் சமமாக இருந்தால் இந்த இரண்டு கோடுகள் இணையாக இருக்கும் என்பதை நிரூபிக்க முடியுமா?



படத்தில் PS எனும் குறுக்குவெட்டி, $\overleftrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{CD}$ எனும் கோடுகளை முறையே Q மற்றும் R புள்ளிகளில் $\angle BQR$ மற்றும் $\angle QRC$ எனும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்படி வெட்டுகிறது.

அதாவது $\angle BQR = \angle QRC$.

இப்பொழுது நாம் $AB \parallel CD$ என நிரூபிக்கவேண்டும்.

$\angle BQR = \angle PQA$ (ஏன்?) ... (1)

ஆனால், $\angle BQR = \angle QRC$ (தரப்பட்டுள்ளது) ... (2)

எனவே, (1) மற்றும் (2)லிருந்து

$\angle PQA = \angle QRC$

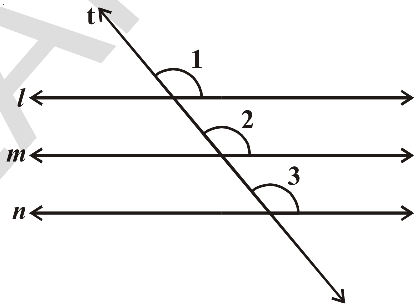
ஆனால் இவை $\overleftrightarrow{PS}$ ஐ குறுக்குவெட்டியாக் கொண்ட $\overleftrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{CD}$ எனும் ஒருஜதை கோடுகளுக்கான ஒத்தகோண ஜோடியாகும்.

எனவே $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (ஒத்த கோணங்கள் எடுகோடுகளின் மறுதலை)

இந்த முடிவை கீழ்கண்டவாறு தேற்றமாக எழுதலாம்.

தேற்றம் – 4.4 : இரண்டு கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகள் சமமாக இருந்தால் அந்த இரண்டு கோடுகள் இணை.

4.4.1 ஒரே நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நேர்கோடுகள் :



இரண்டு கோடுகள் ஒரே கோட்டிற்கு இணையாக இருந்தால் அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இரக்குமா?

இதை பரிசோதித்து பார்க்கலாம்

$m \parallel l$ மற்றும் $n \parallel l$ என இருக்குமாறு l, m மற்றும் n எனும் மூன்று கோடுகளை வரைக.

அந்த மூன்று கோடுகளின் மேல் குறுக்குவெட்டி ‘t’ ஐ வரைக.

படத்திலிருந்து $\angle 1 = \angle 2$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 3$ (ஒத்த கோணங்கள் எடுகோள்)

எனவே, $\angle 2 = \angle 3$ அனால் இவை m & n கோடுகளின் ஒத்த கோண ஜோடி ஆகும்.

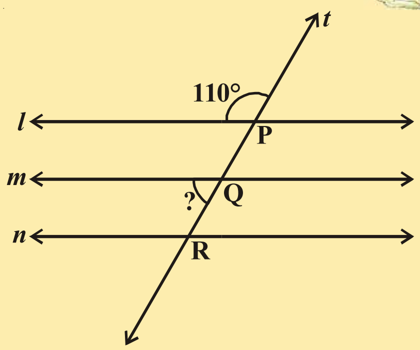
ஆகவே $m \parallel n$ என்றவாறு இருக்கும். (ஒத்தகோணங்கள் எடுகோளின் மறுதலை)

தேற்றம்–4.5 : ஒரே நேர்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை ஆகும்.

முயன்று பார்

(i) தரப்பட்டுள்ள படத்தில் குறிப்பிடப்பட்ட கோணத்தின் அளவை கண்டுபிடி.

(ii) $\angle P$ எனும் கோணத்திற்கு சமமாக உள்ள கோணங்களை கண்டுபிடி. இப்பொழுது நாம் இணைகோடுகளைச் சார்ந்த சில உதாரண கணக்குகளுக்கு தீர்வு காண்போம்.

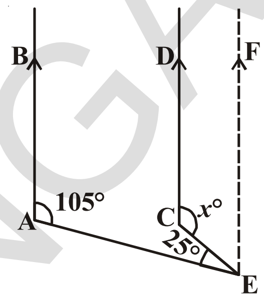


எடுத்துக்காட்டு 8: தரபப்பட்டுள்ள படத்தில் AB|| CD. xன் மதிப்பைக்கண்டுபிடி.

தீர்வு : E யிலிருந்து EF || AB || CD என்றவாறு EF || CD மேலும் CE ஒரு குறுக்குவெட்டி

$\therefore\ \angle DCE + \angle CEF = 180^o$ [$\because$ துணை உட்கோண ஜோடிகள்]

$\Rightarrow\ x^o + \angle CEF = 180^o \Rightarrow\ \angle CEF = (180 - x^o)$.



மற்றும் EF || AB மற்றும் AE என்பது ஒரு குறுக்குவெட்டி

$\angle BAE + \angle AEF = 180^o$ [$\because$ துணை உட்கோண ஜோடி]

$\Rightarrow 105^o + \angle AEC + \angle CEF = 180^o$

$\Rightarrow\ 105^o + 25^o + (180^o - x^o) = 180^o$

$\Rightarrow\ 310 - x° = 180°$

ஆகவே, $x = 130°$.

எடுத்துக்காட்டு 9: அருகில் உள்ள படத்தில் x, y, z மற்றும் a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : தெளிவாக

$y^o = 110^o$ ($\because$ ஒத்தகோண ஜோடி)

$\Rightarrow\ x^o + y^o = 180^o$ (கோட்டுகோணஜோடி)

$\Rightarrow\ x^o + 110^o = 180^o$

$\Rightarrow\ x^o = (180^o - 110^o) = 70^o$.

$z^o = x^o = 70^o$ ($\because$ ஒத்தகோணஜோடி)

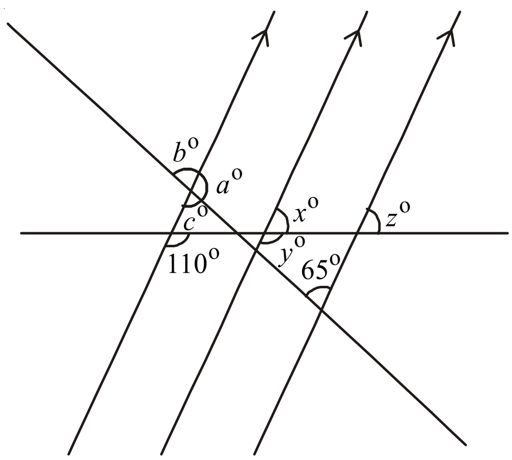
$c^o = 65^o$ (எவ்வாறு?)

$a^o + c^o = 180^o$ [கோட்டுகோணஜோடி]

$\Rightarrow\ a^o + 65^o = 180^o$

$\Rightarrow\ a^o = (180^o - 65^o) = 115^o$.

$b^o = c^o = 65^o$. [$\because$ குத்தெரிர்கோணங்கள்]



ஆகவே, $a = 115°, b = 65°, c = 65°,\ x = 70°, y = 110°, z = 70°$.

எடுத்துக்காட்டு 10: அருகில் உள்ள படத்தில் EF மற்றும் GH என்பன இணைகோடுகள். AB மற்றும் CD எனும் கோடுகளும் இணையாக இருந்தால் x ன் மதிப்புக்கண்டுபிடி.

தீர்வு : $4x° = \angle APR$ (ஏன்?)

$\angle APR = \angle PQS$ (ஏன்?)

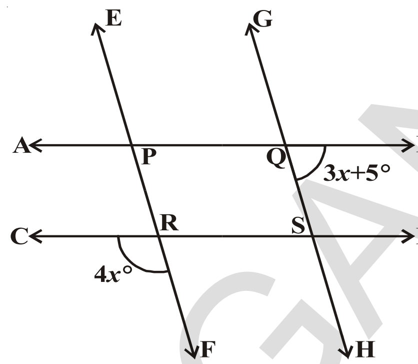
$\angle PQS + \angle SQB = 180°$ (ஏன்?)

$4x° + (3x + 5)° = 180°$

$7x° + 5° = 180°$

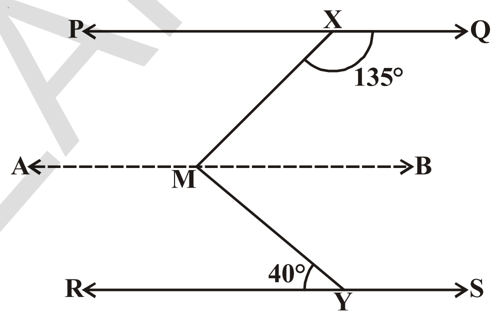
$x° = \dfrac{180° - 5°}{7}$

$= 25°$



எடுத்துக்காட்டு 11: தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135°$ மற்றும் $\angle MYR = 40°$, எனில் $\angle XMY$ கண்டுபிடி.

தீர்வு : AB கோட்டை PQக்கு இணையாக M புள்ளி வழியே வரைக.



இப்பொழுது $AB \parallel PQ$ மற்றும் $PQ \parallel RS$.

எனவே, $AB \parallel RS$

இப்பொழுது, $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

($AB \parallel PQ$, XM குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த உட்கோணங்கள்)

ஆகவே, $135° + \angle XMB = 180°$

எனவே, $\angle XMB = 45°$ ...(1)

இப்பொழுது, $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$ ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

∴ $\angle BMY = 40°$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) ஐ கூட்ட நாம் பெறுது

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$

அதாவது $\angle XMY = 85°$

எடுத்துக்காட்டு 12: இரண்டு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒத்தகோணங்களின் கோண இருசமவெட்டிகள் இணையாக இருந்தால் அந்த இரண்டு நேர்க்கோடுகள் இணை என நிரூபி.

தீர்வு : தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\overleftrightarrow{AD}$ எனும் குறுக்குவெட்டி, $\overleftrightarrow{PQ}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{RS}$ எனும் இரண்டு கோடுகளை முறையே B மற்றும் C புள்ளிகளில் வெட்டுகின்து.

கதிர் $\overrightarrow{BE}$ என்பது $\angle ABQ$ ன் கோண இருசமவெட்டி மற்றும் $\overrightarrow{CF}$ என்பது $\angle BCS$ன் கோண இருசமவெட்டி மற்றும் $BE \parallel CF$.

நாம் $PQ \parallel RS$ என நிரூபிக்க. கீழ்கண்டவைகளில் ஏதாவது ஒன்றை நிரூபித்தால் போதுமானது.

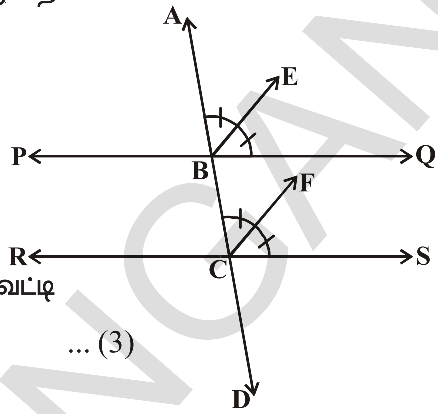
i. ஒத்தகோணங்கள் சமம்

ii. ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடி அல்லது
ஒன்றுவிட்ட வெளிகோணஜோடி சமம்.

iii. குறுக்குவெட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பி.

படத்திலிருந்து,

நாம் ஒத்தகோணஜோடி சமம் என நிரூபிக்க முயற்சிக்கலாம்.



கதிர், BE $\angle ABQ$ ன் இருசமவெட்டி என்றபடியால்.

$\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ.$ ... (1)

இவ்வாறே, கதிர் CF $\angle BCS$ ன் இருசமவெட்டி.

∴ $\angle BCF = \frac{1}{2}\angle BCS$ ... (2)

ஆனால் BE மற்றும் CF இணை, $\overleftrightarrow{AD}$ ஒரு குறுக்குவெட்டி

∴ $\angle ABE = \angle BCF$ (ஒத்தகோணங்கள் எடுகோள்) ... (3)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ (3)இல் பிரதியிட,

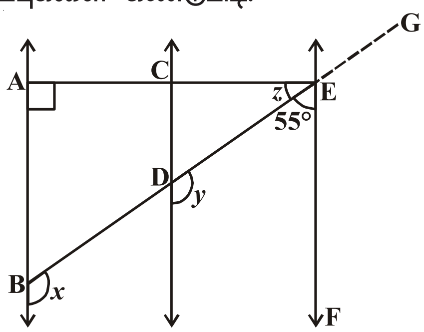
நாம் பெறுவது $\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$

∴ $\angle ABQ = \angle BCS$

ஆனால் இவை $\overleftrightarrow{AD}$ எனும் குறுக்குவெட்டியைக் கொண்ட $\overleftrightarrow{PQ}$ மற்றும் $\overleftrightarrow{RS}$ எனும் ஜதைகோடுகளுக்கான ஒத்தகோண ஜோடி ஆகும். மேலும் அவை சமம்.

∴ $PQ \parallel RS$ (ஒத்தகோணங்கள் எடுகோளின் மறுதலை)

எடுத்துக்காட்டு 13: தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $AB \parallel CD$ மற்றும் $CD \parallel EF$ மற்றும் $EA \perp AB$. $\angle BEF = 55°$எனில், x, y மற்றும் z ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.



தீர்வு : BE ஐ G வரை நீட்டிவரைக.

இப்பொழுது $\angle GEF = 180° - 55°$ (ஏன்?)

$= 125°$

மற்றும் $\angle GEF = x = y = 125°$ (ஏன்?)

இப்பொழுது $z = 90° - 55°$ (ஏன்?)

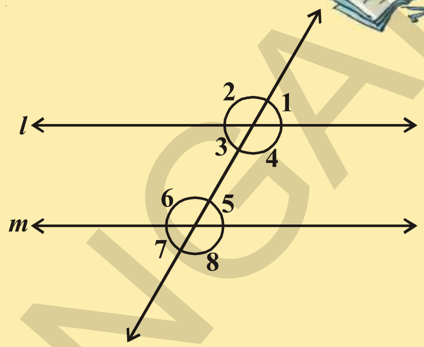
$= 35°$

இரண்டு நேர்கோடுகள் இணை என்பதை பலமுறைளில் நிரூபிக்கலாம்.

1. ஒத்த கோண ஜோடிகள் சமம் என நிரூபித்தல்.
2. ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகள் சமம் என நிரூபித்தல்
3. குறுக்குவெட்டிக்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ள உட்கோணங்கள் ஜோடி மிகைநிரப்பி.
4. ஒரு தளத்தில் ஒரே கோட்டிற்கு இரண்டு கோடுகளும் செங்குத்து என நிரூபித்தல்
5. இரண்டு கோடுகளும் மூன்றாவது கோட்டிற்கு இணை என நிரூபித்தல்.

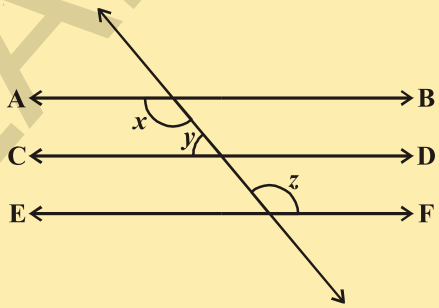
பயிற்சி - 4.3

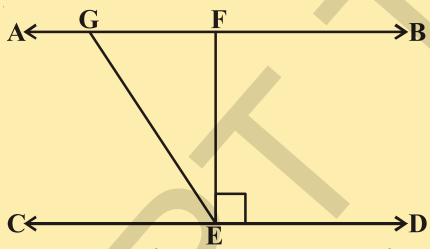
1. படத்தில் $l \parallel m$ எனில் $\angle 1$ என்பது $\angle 8$க்கு மிகைநிரப்பியாக இருப்பதற்கு ஒவ்வொன்றிற்கும் காரணம் கூறுக.



கூற்று	காரணங்கள்
i. $l \parallel m$	____________
ii. $\angle 1 = \angle 5$	____________
iii. $\angle 5 + \angle 8 = 180°$	____________
iv. $\angle 1 + \angle 8 = 180°$	____________
v. $\angle 1$ என்பது $\angle 8$ மிகைநிரப்பி கோணம்	____________

2. அருகில் உள்ள படத்தில் $AB \parallel CD$; $CD \parallel EF$ மற்றும் $y : z = 3 : 7$, எனில் x ஐ கண்டுபிடி.

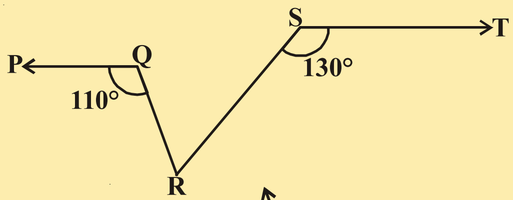




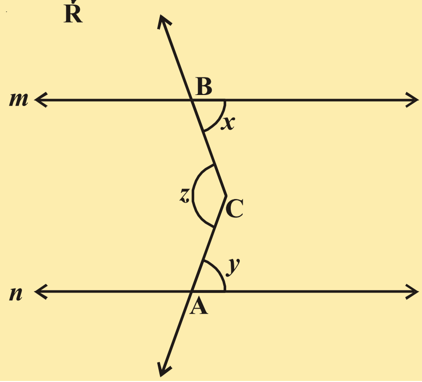
3. அருகில் உள்ள படத்தில் $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ மற்றும் $\angle GED = 126°$, $\angle AGE$, $\angle GEF$ மற்றும் $\angle FGE$ ஆகியவற்றைகண்டுபிடி.

4. அருகில் உள்ள படத்தில் $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110°$ மற்றும் $\angle RST = 130°$, $\angle QRS$ கண்டுபிடி.

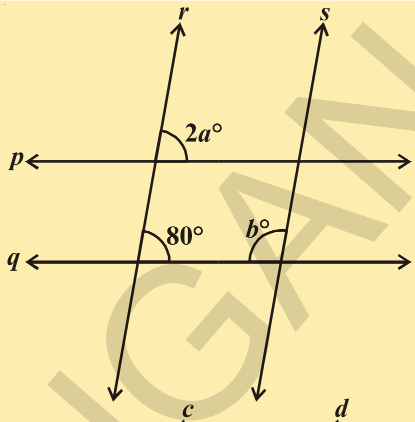
(குறிப்பு : R புள்ளியின் வழியே ST க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக.)



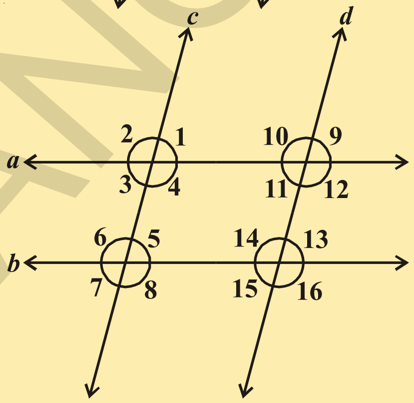
5. அருகில் உள்ள படத்தில் $m \parallel n$. A, B என்பன முறையே m மற்றும் n கோடுகளின் மேல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள். 'C' என்பது m மற்றும் n. கோடுகளுக்கிடையே உள்ள புள்ளி எனில் $\angle ACB$ கண்டுபிடி.

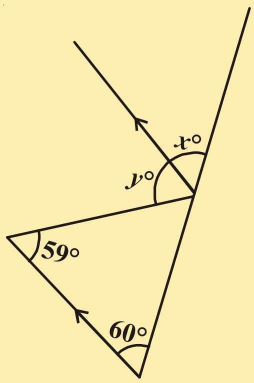


6. $p \parallel q$ மற்றும் $r \parallel s$ எனில் a மற்றும் bன் மதிப்பைக்காண்க.



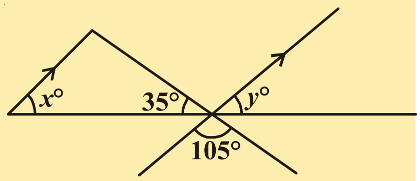
7. படத்தில் $a \parallel b$ மற்றும் $c \parallel d$, எனில் (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ ஆகியவற்றிற்கு சர்வசம கோணங்களை எழுதுக.

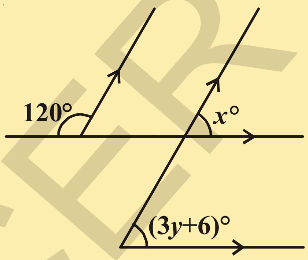




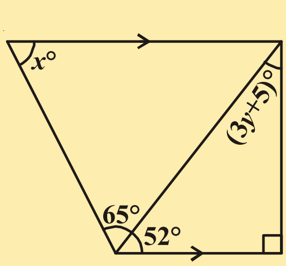
8. படத்தில் அம்பு குறியிட்ட கோட்டுதுண்டுகள் இணை எனில் x மற்றும் y ன் மதிப்புகண்டுபிடி.

9. படத்தில் அம்பு குறியிட்ட கோட்டுதுண்டுகள் இணை எனில் x மற்றும் yன் மதிப்புகண்டுபிடி.





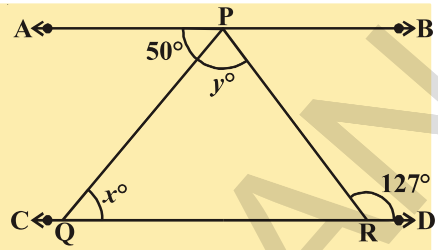
10. படத்திலிருந்து x மற்றும் y ன் மதிப்புகண்டுபிடி.



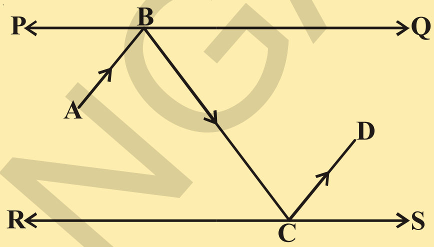
11. படத்திலிருந்து x மற்றும் y ன் மதிப்புகண்டுபிடி.

12. கீழ்கண்ட விவரங்களைக்கொண்டு படம் வரையவும்.
"ஒரு கோணத்தின் இரண்டு புயங்கள் முறையே மற்றொரு கோணத்தின் இரண்டு புயங்களுக்கு செங்குத்தாக இருந்தால் அந்த இரண்டு கோணங்கள் சமம் அல்லது மிகைநிரப்பியாக இருக்கும்".

13. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் AB || CD, $\angle APQ = 50°$ மற்றும் $\angle PRD = 127°$, எனில் x மற்றும் y கண்டுபிடி.

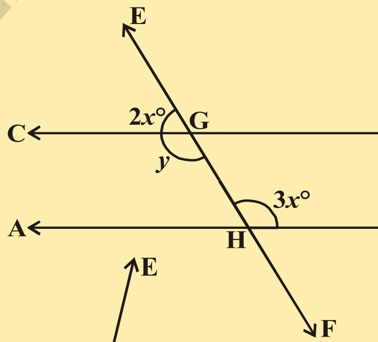


14. படத்தில் PQ மற்றும் RS என்பன ஒன்றுக்கொன்று இணையாக வைக்கப்பட்ட இரண்டு சமதள ஆடிகள். $\overrightarrow{AB}$ எனும் படுகதிர் PQ சமதள ஆடியை B புள்ளியில் தொட்டு எதிரொலிக்கப்படுகிறது. எதிரொலிப்புக்கதிர் $\overrightarrow{BC}$ ன் பாதையில் பயணித்து RS சமதள ஆடியை C புள்ளியில் தொடுகிறது. இது மீண்டும் $\overrightarrow{CD}$ வழியாக எதிரொலிக்கப்படுகிறது. AB || CD என நிரூபி.

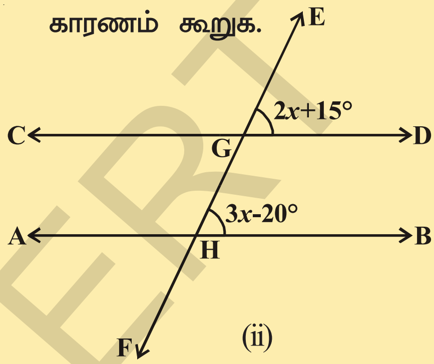


(குறிப்பு : இணைகோடுகளுக்கு செங்குத்தாக வரையபட்ட கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை)

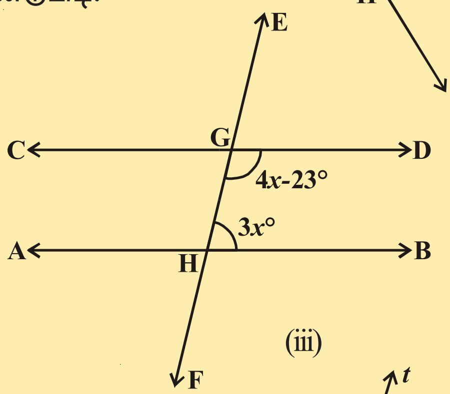
15. கீழ்கண்ட படங்களில் AB || CD. EF எனும் குறுக்குவெட்டி AB மற்றும் CD களை முறையே G மற்றும் H புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. x மற்றும் y ன் மதிப்புக்களை கண்டுபிடி. காரணம் கூறுக.



(i)



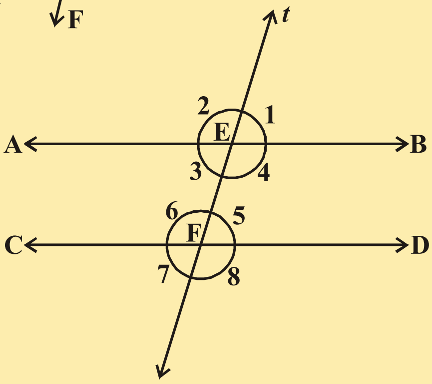
(ii)



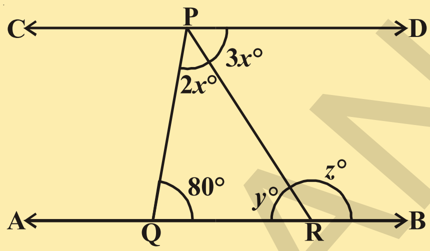
(iii)

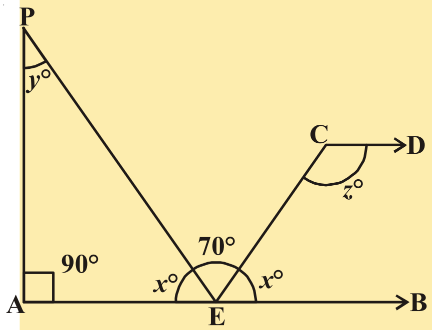
16. அருகில் உள்ள படத்தில் AB || CD, 't' எனும் குறுக்குவெட்டி AB மற்றும் CD இணைகோடுகளை முறையே E மற்றும் F புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$\angle 2 : \angle 1 = 5 : 4$, எனில் குறிப்பிடப்பட்ட கோணங்களை கண்டுபிடி.



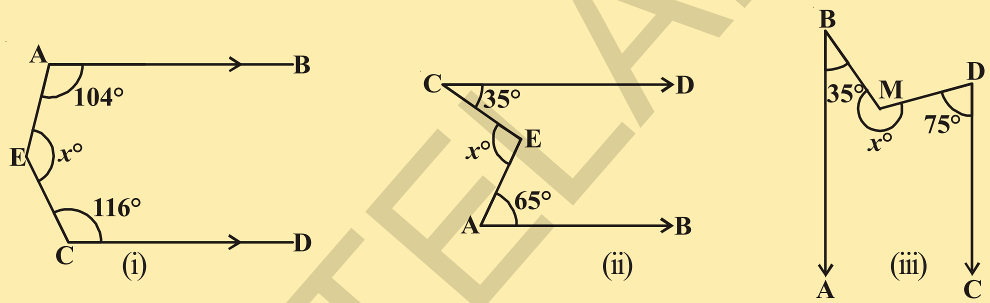
17. அருகில் உள்ள படத்தில் AB || CD. x, y மற்றும் z மதிப்புகளைகண்டுபிடி.





18. அருகில் உள்ள படத்தில் AB || CD. x, y மற்றும் z மதிப்புக்களைகண்டுபிடி.

19. கீழ்கண்ட ஒவ்வொரு படத்திலும் AB || CD. ஒவ்வொன்றிலும் x ன் மதிப்புகண்டுபிடி.

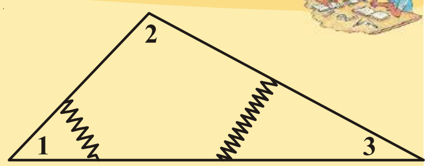


4.5 முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தபண்பு

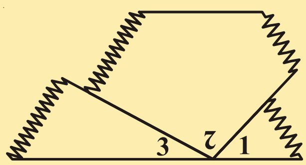
முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ என்பதை இப்பொழுது நிரூபிக்கலாம்.

செயல்பாடு

* பெரிய முக்கோணம் வரைந்து படத்தில் காட்டியவாறு வெட்டியெடு.
* கோணங்களை கத்தரித்து அதை எண்களைக்கொண்டு பெயரிடு.

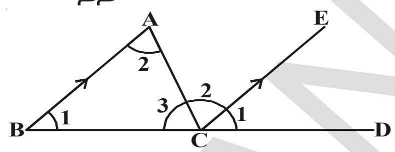


* மூன்று கோணங்களும் ஒரு கோணமாக ஏற்படுமாறு அவற்றை படத்தில் கண்டவாறு அடுத்தடுத்து பொருத்து.



1. அடுத்தடுத்த மூன்று கோணங்களால் ஏற்படும் கோணத்தை குறிப்பிடு? அதன் கோண அளவு எவ்வளவு?
2. இணைகோடுகள் சார்ந்த தேற்றங்களையும் பயன்படுத்தி நாம் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் - 4.6 : ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தம் 180^o.



தரவு : ABC **என்பது ஒரு முக்கோணம்.**

நிருபிக்கப்படவேண்டியவை : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

அமைப்பு : BCஐ D **வரை நீட்டி வரைக.** BA**க்கு இணையாக** CEஐ 'C' **வழியே வரைக.**

நிரூபணம் :

$BA \parallel CE$	[**அமைப்பு**]
$\angle ABC = \angle ECD$ .....(1)	[**ஒத்தகோணங்கள் எடுகோள்**]
$\angle BAC = \angle ACE$ .....(2)	[AB **மற்றும்** CE **எனும் இணைகோடுகளுக்கான ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடி**]
$\angle ACB = \angle ACB$ .....(3)	[**அதற்கு அதே சமம்**]
$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$ $\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB$	[**மேற்கண்ட மூன்று சமன்பாடுகளை கூட்டவும்**]

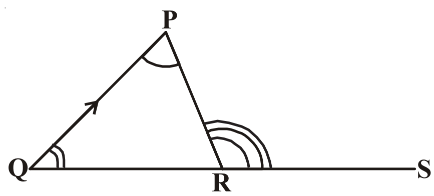
ஆனால் $\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB = 180^0$ [**கோட்டின் மீது உள்ள கோணங்களின் மொத்தம்**]

∴ $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

முக்கோணங்களின் பக்கங்களை நீட்டி வரையும் போது அம்முக்கோணத்திற்கு வெளிகோணங்கள் ஏற்படுகிறது என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள்.

QR **பக்கத்தை** S **வரை நீட்டி வரைந்தால்** $\angle PRS$ **என்பது** ΔPQR **ன் ஒரு வெளிகோணம் ஆகும்.**



$\angle PRQ + \angle PRS = 180°$ ஆகுமா? (ஏன்?) .....(1)

மேலும் $\angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR = 180°$ (ஏன்?) .....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $\angle PRQ + \angle PRS = \angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR$ என பெறலாம்.

∴ $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

இந்த முடிவை கீழ்கண்ட தேற்றம் வடிவில் எழுதலாம்.

தேற்றம் - 4.7 : முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டி வரைவதால் ஏற்படும் வெளிகோணத்தின் அளவு அதற்கு எதிரே உள்ள இரண்டு உட்கோண அளவுகளின் மொத்தத்திற்கு சமம்.

மேற்கண்ட தேற்றத்திலிருந்து முக்கோணத்தின் வெளிகோணத்தின் அளவு எப்பொழுதும் அதனுடைய ஒவ்வொரு எதிர்புற உட்கோணத்தின் அளவைவிட அதிகம்.

இப்பொழுது மேற்கண்ட அடிப்படையை பயன்படுத்தி சில உதாரண கணக்குகளை தீர்ப்போம்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

முக்கோணத்தின் பக்கங்களை வரிசையாக நீட்டி வரைவதால் ஏற்படும் வெளிகோணங்களின் மொத்தம் எவ்வளவு?

எடுத்துக்காட்டு 14: முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $(2x)°, (3x + 5)°$ மற்றும் $(4x - 14)°$. x ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. மேலும் முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவையும் கண்டுபிடி.

தீர்வு : ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தம் $180°$.

$\therefore\ 2x° + 3x° + 5° + 4x° - 14° = 180° \Rightarrow 9x° - 9° = 180°$

$\Rightarrow 9x° = 180° + 9° = 189°$

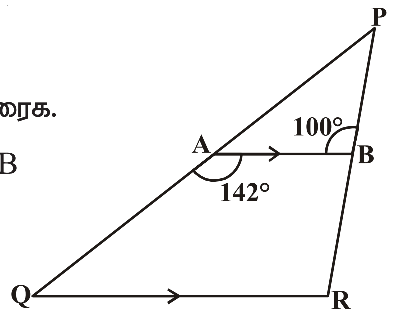
$\Rightarrow x = \frac{189°}{9°} = 21.$

$\therefore\ 2x° = (2\times21)° = 42°, (3x + 5)° = [(3\times21 + 5)]° = 68°.$

$(4x - 14)° = [(4\times21) - 14]° = 70°$

எனவே, முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $42°, 68°$ மற்றும் $70°$.

எடுத்துக்காட்டு 15: அருகில் உள்ள படத்தில் $AB \parallel QR$, $\angle BAQ = 142°$ மற்றும் $\angle ABP = 100°$. (i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ (iii) $\angle QRP$, கண்டுபிடி.



தீர்வு : (i) $\angle APB = x°$ என்க.

ΔPAB ன் பக்கம் PAஐ Q வரை நீட்டி வரைக.

வெளிகோணம் $\angle BAQ = \angle ABP + \angle APB$

$\Rightarrow 142° = 100° + x°$

$\Rightarrow x° = (142° - 100°) = 42°.$

$\therefore\ \angle APB = 42°,$

(ii) இப்பொழுது $AB \parallel QR$ மற்றும் PQ ஒரு குறுக்குவெட்டி.

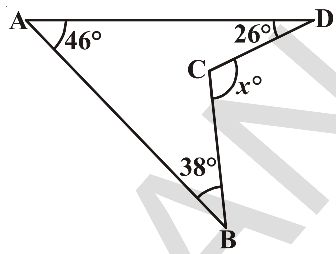
$\therefore\ \angle BAQ + \angle AQR = 180^0$ [இணை உட்கோணங்களின் மொத்தம் $180°$]

$\Rightarrow\ 142° + \angle AQR = 180°,$

$\therefore\ \angle AQR = (180° - 142°) = 38°.$

(iii) $AB \parallel QR$ மற்றும் PR ஒரு குறுக்குவெட்டி

$\angle QRP = \angle ABP = 100°$ (ஒத்த கோணங்கள்)



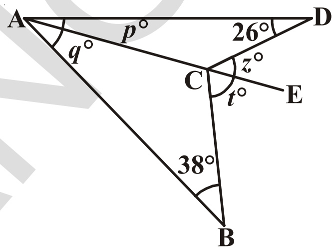
எடுத்துக்காட்டு 16: அருகில் உள்ள படத்தில் தரப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு x ன் மதிப்புக்கண்டுபிடி.

தீர்வு : தரப்பட்டுள்ள படத்தில் ABCD ஒரு நாற்கரம், இதை இரண்டு முக்கோணங்களாக பிரிக்கலாம்.

ACஐ இணைத்து E வரை நீட்டி வரைக.

$\angle DAE = p^\circ$, $\angle BAE = q^\circ$, $\angle DCE = z^\circ$ and $\angle ECB = t^\circ$. என்றவாறு எடுத்துக்கொள்க.

முக்கோணத்தின் வெளிகோணத்தின் அளவு அதன் உள்ளதிர்கோணங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம்.



$z^\circ = p^\circ + 26^\circ$

$t^\circ = q^\circ + 38^\circ$

$\therefore\ z^\circ + t^\circ = p^\circ + q^\circ + (26+38)^\circ = p^\circ + q^\circ + 64^\circ$

ஆனால், $p^\circ + q^\circ = 46$. ($\because \angle DAB = 46^\circ$)

ஆகவே, $z^\circ + t^\circ = 46 + 64 = 110^\circ$.

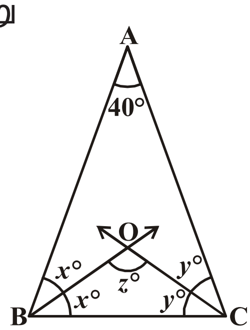
எனவே $x^\circ = z^\circ + t^\circ = 110^\circ$.

எடுத்துக்காட்டு 17: தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle A = 40°$. If $\overrightarrow{BO}$ மற்றும் $\overrightarrow{CO}$ என்பன முறையே $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ ன் கோண இருசமவெட்டிகள் $\angle BOC$ ன் அளவை கண்டுபிடி.

தீர்வு : BO என்பது $\angle B$ ன் இருசமவெட்டி மற்றும்

CO என்பது $\angle C$ன் இருசமவெட்டி என நாம் அறிவோம்.

$\angle CBO = \angle ABO = x°$ மற்றும் $\angle BCO = \angle ACO = y°$ எவ்வாறு எடுத்துக்கொள்.



ஆகவே, $\angle B = (2x)°$, $\angle C = (2y)°$ மற்றும் $\angle A = 40°$.

ஆனால், $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. (எவ்வாறு?)

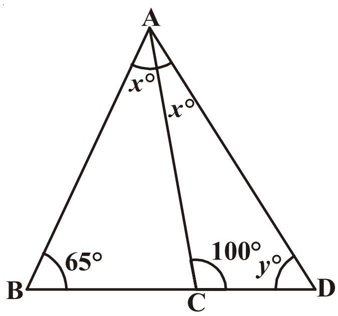
$2x° + 2y° + 40° = 180°$

$\Rightarrow 2(x+y)° = 140°$

$= x° + y° = \dfrac{140°}{2} = 70°$.

ஆகவே, $\angle BOC = 180° - 70° = 110°$.

எடுத்துக்காட்டு 18: அருகில் உள்ள படத்தில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களைக்கொண்டு x மற்றும் y ன் மதிப்புகளைக்காண்க.



தீர்வு : ΔABCன் BC பக்கத்தை D வரை நீட்டி வரைக.

வெளிகோணம் $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

$\therefore\ 100° = 65° + x°$

$\Rightarrow x° = (100° - 65°) = 35°$.

$\therefore\ \angle CAD = \angle BAC = 35°$

Δ ACD ல்

$\angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180^{\circ}$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தபண்பு)

$\Rightarrow 35^{\circ} + 100^{\circ} + y^{\circ} = 180^{\circ}$

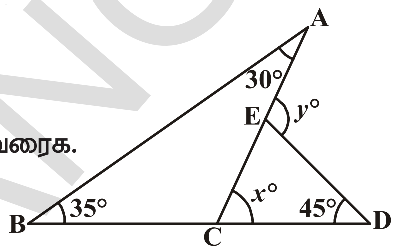
$\Rightarrow 135^{\circ} + y^{\circ} = 180^{\circ}$

$\Rightarrow y^{\circ} = (180^{\circ} - 135^{\circ}) = 45^{\circ}$

ஆகவே, $x = 35^{\circ}, y = 45^{\circ}$.

எடுத்துக்காட்டு 19: அருகில் உள்ள படத்தில் தரபட்ட விவரங்களைக் கொண்டு x மற்றும் y ன் மதிப்புக்களைக்கண்டுபிடி.

தீர்வு : Δ ABC ன் பக்கம் BC ஐ D வரை நீட்டி வரைக.



வெளிகோணம் $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

$\Rightarrow \quad x^{\circ} = 30^{\circ} + 35^{\circ} = 65^{\circ}$.

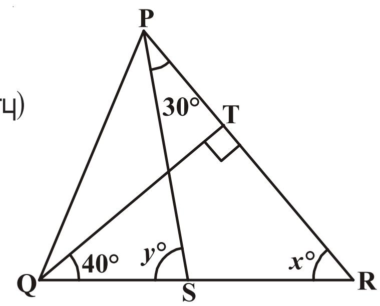
மற்றும் Δ DCE ன் CE பக்கத்தை A வரை நீட்டி வரைக.

வெளிகோணம் $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow \quad y = 45 + x^{\circ} = 45^{\circ} + 65^{\circ} = 110^{\circ}$.

ஆகவே, $x = 65^{\circ}$ மற்றும் $y = 110^{\circ}$.

எடுத்துக்காட்டு 20: அருகில் உள்ள படத்தில் $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40^{\circ}$ மற்றும் $\angle SPR = 30^{\circ}$, எனில் x மற்றும் y ன் மதிப்புகளைக்கண்டுபிடி.



தீர்வு : Δ TQR ல்,

$90^{\circ} + 40^{\circ} + x = 180^{\circ}$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தபண்பு)

$\therefore \quad x^{\circ} = 50^{\circ}$

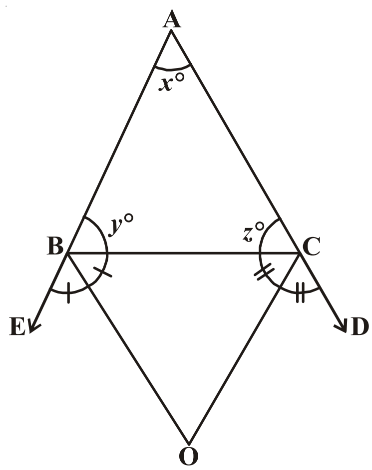
இப்பொழுது, $y^{\circ} = \angle SPR + x^{\circ}$ (முக்கோணத்தின் வெளிகோணம்)

$\therefore \quad y^{\circ} = 30^{\circ} + 50^{\circ}$

$= 80^{\circ}$

எடுத்துக்காட்டு 21: அருகில் உள்ள படத்தில் Δ ABC ன் AB மற்றும் AC பக்கங்களை முறையே E மற்றும் D புள்ளிகள் வரை நீட்டி வரையப்பட்டுள்ளது. $\angle CBE$ மற்றும் $\angle BCD$ன் கோண இருசமவெட்டிகள் முறையே BO மற்றும் CO என்பன O ல் சந்திக்கின்றன எனில்

$\angle BOC = 90^{\circ} - \frac{1}{2} \angle BAC$.



தீர்வு : கதிர் BO என்பது $\angle CBE$ன் கோண இருசமவெட்டி.

$\therefore \angle CBO \quad = \frac{1}{2} \angle CBE$

$= \frac{1}{2} (180^{\circ} - y^{\circ})$

$= 90^{\circ} - \frac{y^{\circ}}{2} \qquad ...(1)$

இவ்வாறே கதிர் CO என்பது $\angle BCD$ன் கோண இருசமவெட்டி.

$$\therefore \quad \angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$$

$$= \frac{1}{2}(180° - z°)$$

$$= 90° - \frac{z°}{2} \qquad ...(2)$$

ΔBOCல், $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ ...(3)

(1) மற்றும் (2) ஐ (3), ல் பிரதியிட, நாம்பெறுவது

$$\angle BOC + 90° - \frac{z°}{2} + 90° - \frac{y°}{2} = 180°$$

எனவே, $\angle BOC = \frac{z°}{2} + \frac{y°}{2}$

அல்லது, $\angle BOC = \frac{1}{2}(y° + z°)$ ... (4)

ஆனால், $x° + y° + z° = 180°$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தபண்பு)

$\therefore \quad y° + z° = 180° - x°$

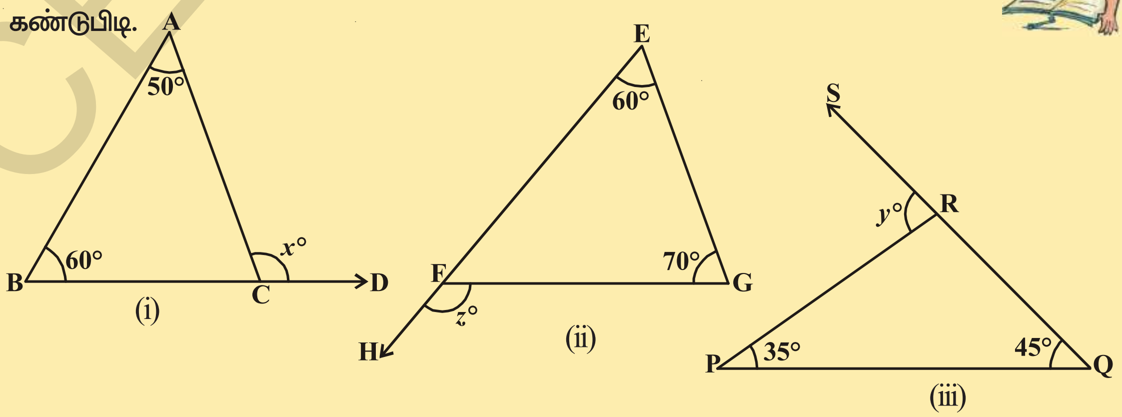
$\therefore$ (4) $\Rightarrow \angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x°)$

$$= 90° - \frac{x°}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

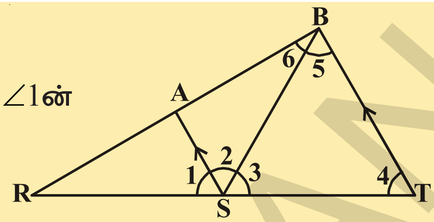
பயிற்சி- 4.4

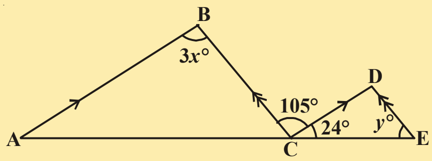
1. தரப்பட்டுள்ள முக்கோணங்களில், x, y மற்றும் z ஆகியவைகளை கண்டுபிடி.



2. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் AS || BT; $\angle 4 = \angle 5$

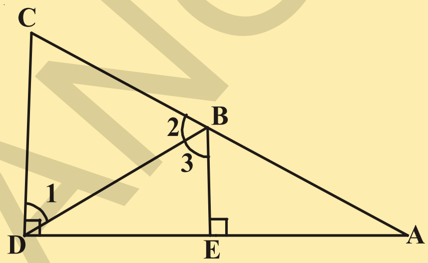
$\overrightarrow{SB}$ என்பது $\angle AST$ ன் கோண இருசமவெட்டி $\angle 1$ன் அளவை கண்டுபிடி.

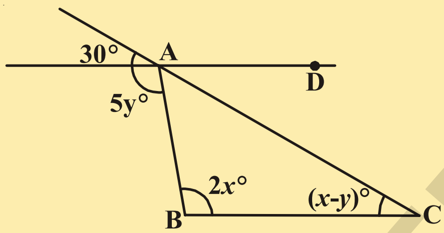




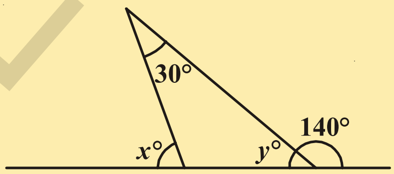
3. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் AB || CD; BC || DE எனில் x மற்றும் yன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

4. அருகில் உள்ள படத்தில் $BE \perp DA$ மற்றும் $CD \perp DA$ எனில் $m\angle 1 \cong m\angle 3$என நிருபி.

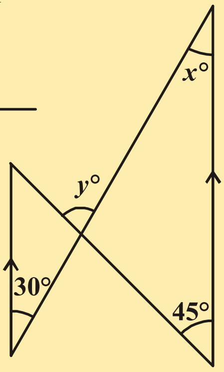




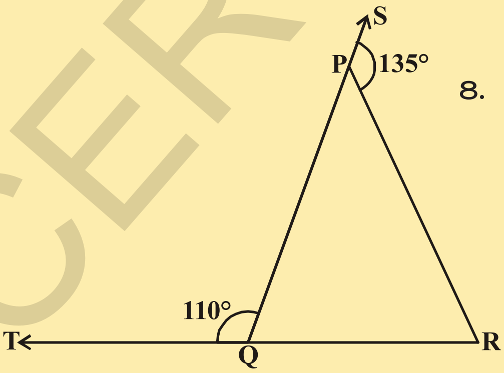
5. அருகில் உள்ள படத்தில் AD மற்றும் BC இணை எனில் x, y ன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.



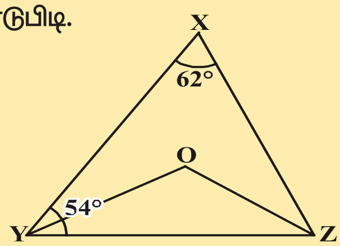
6. படத்தில் உள்ள x மற்றும் yன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.



7. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் அம்புக்குறியிட்ட கோடுகள் இணை எனில் x மற்றும் yன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

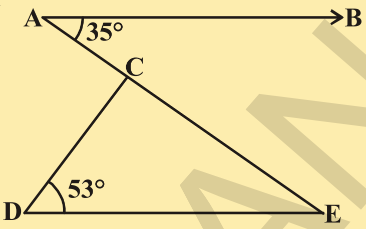


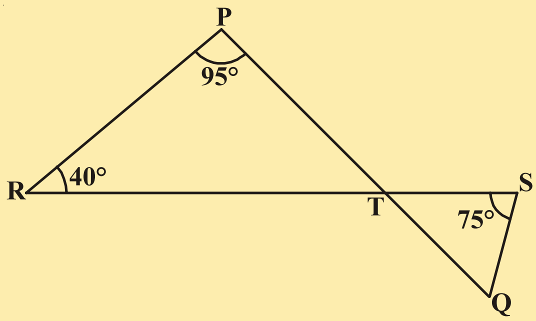
8. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் QP மற்றும் RQ எனும் ΔPQR ன் பக்கங்கள் முறையே S மற்றும் T புள்ளிகள் வரை நீட்டி வரையப்பட்டள்ளது. $\angle SPR = 135°$ மற்றும் $\angle PQT = 110°$ எனில் $\angle PQR$ ஐ கண்டுபிடி.



9. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle X = 62°$, $\angle XYZ = 54°$. ΔXYZ ல் YO மற்றும் ZO என்பன முறையே $\angle XYZ$ மற்றும் $\angle XZY$ ன் கோண இருசமவெட்டிகள் எனில் $\angle OZY$ மற்றும் $\angle YOZ$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.

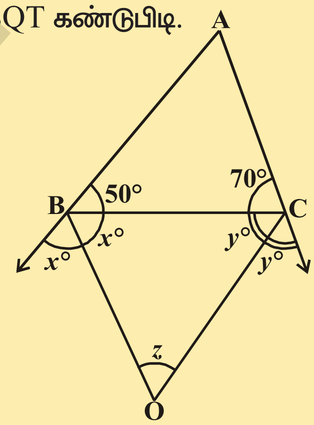
10. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் AB || DE, $\angle BAC = 35°$ மற்றும் $\angle CDE = 53°$, எனில் $\angle DCE$ஐ கண்டுபிடி.

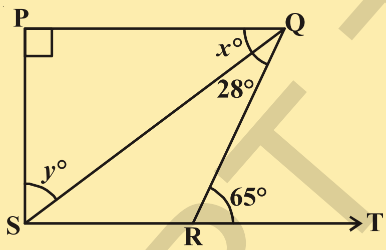




11. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் PQ மற்றும் RS கோட்டுத்துண்டுகள் $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ மற்றும் $\angle TSQ = 75°$ என ஏற்படுமாறு T புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனில் $\angle SQT$ கண்டுபிடி.

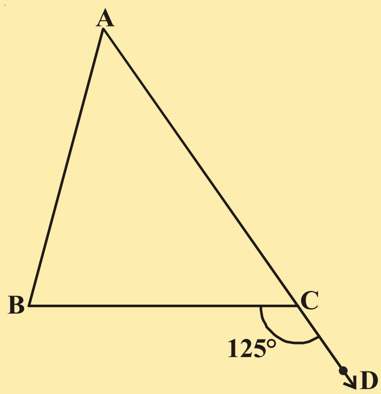
12. அருகில் உள்ள படம் $\angle B = 50°$ மற்றும் $\angle C = 70°$. கொண்ட முக்கோணம் ABC. AB மற்றும் AC பக்கங்கள் நீட்டி வரையப்பட்டுள்ளது.'z' என்பது வெளிகோணங்களின் இருசமவெட்டிகளிடையே ஏற்படும் கோண அளவு எனில் 'z' ன் மதிப்பைகண்டுபிடி.

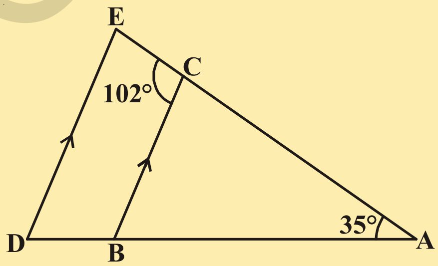




13. தரபட்டுள்ள படத்தில் $PQ \perp PS$, $PQ || SR$, $\angle SQR = 28°$ மற்றும் $\angle QRT = 65°$, எனில் x மற்றும் yன் மதிப்புகளைகண்டுபிடி.

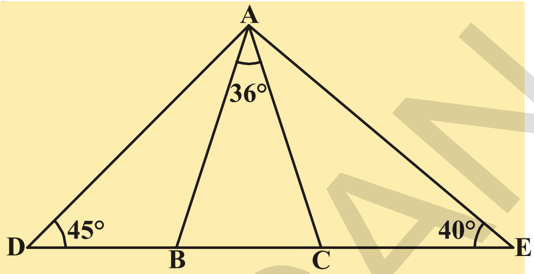
14. தரபட்டுள்ள படத்தில் ΔABC ன் பக்கம் AC, Dவரை நீட்டி வரையபட்டுள்ளது. $\angle BCD = 125°$ மற்றும் $\angle A : \angle B = 2 : 3$, $\angle A$ மற்றும் $\angle B$அளவுகளை கண்டுபிடி.

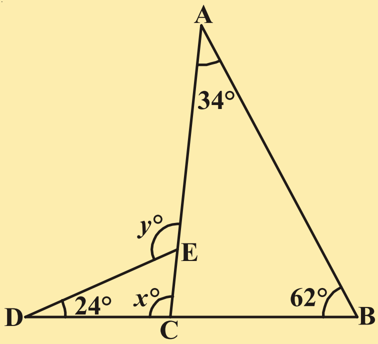




15. அருகில் உள்ள படத்தில் BC || DE, $\angle BAC = 35°$ மற்றும் $\angle BCE = 102°$ என தரபட்டுள்ளது. (i) $\angle BCA$ (ii) $\angle ADE$ (iii) $\angle CED$அளவுகளை கண்டுபிடி.

16. அருகில் உள்ள படத்தில் AB =AC, $\angle BAC = 36^o$, $\angle ADB = 45^o$ மற்றும் $\angle AEC = 40^o$ என தரபட்டுள்ளது (i) $\angle ABC$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAB$ (iv) $\angle EAC$ கண்டுபிடி.





17. அருகில் உள்ள படத்தில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களை கொண்டு x மற்றும் yன் மதிப்புக்களை கண்டுபிடி.

நாம் கற்றவை

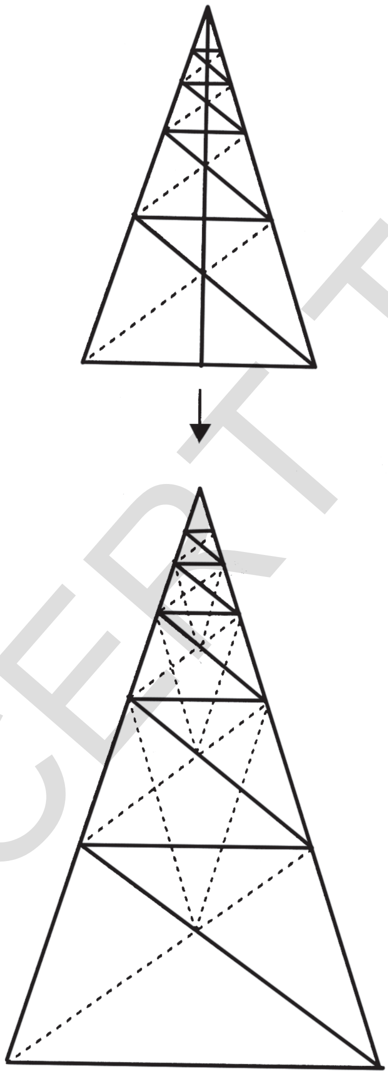
- **கோட்டுகோண ஜோடி எடுகோள் :** ஒரு கோட்டின் மீது ஒரு கதிர் அமைந்திருந்தால் ஏற்படும் இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் மொத்தம் 180° ஆகும்.
- **கோட்டுகோண ஜோடி எடுகோளின் மறுதலை :** இரண்டு அடுத்தடுத்த கோணங்களின் மொத்தம் 180° எனில் அந்த கோணங்களில் பொதுவாக இல்லாத இரண்டு புயங்கள் ஒரு நேர்கோட்டை உருவாக்கும்.
- **தேற்றம் :** இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொண்டால் ஏற்படும் குத்தெரிர் கோணங்கள் சமம்.
- **ஒத்தகோணங்கள் எடுகோள் :** இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒத்தகோண ஜதைகள் சமம்.
- **தேற்றம் :** இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோணஜதைகள் சமம்.
- **தேற்றம் :** இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் குறுக்குவெட்டிக்கு ஒரேபக்கத்தில் அமையும் உட்கோண ஜதைகள் மிகைநிரப்பி.
- **ஒத்த கோணங்கள் எடுகோளின் மறுதலை :** ஒத்தகோண ஜதைகள் சமமாக இருக்கும்படி இரண்டு கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் அந்த இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை.
- **தேற்றம் :** இரண்டு கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டினால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோண ஜோடிகள் சமமாக இருந்தால் அந்த இரண்டு கோடுகள் இணை.

- **தேற்றம் : இரண்டு கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி, வெட்டினால் ஏற்படும் குறுக்குவெட்டிக்கு ஒரே பக்கத்தில் அமையும் உட்கோண ஜதைகள் மிகை நிரப்பி எனில் அந்த இரண்டு கோடுகள் இணை.**
- **தேற்றம் : ஒரே நேர்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை ஆகும்.**
- **தேற்றம் : முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தம்** 180°.
- **தேற்றம் : முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டி வரைவதால் ஏற்படும் வெளிகோணத்தின் அளவு அதற்கு எதிரே உள்ள இரண்டு உட்கோண அளவுகளின் மொத்தத்திற்கு சமம்.**

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

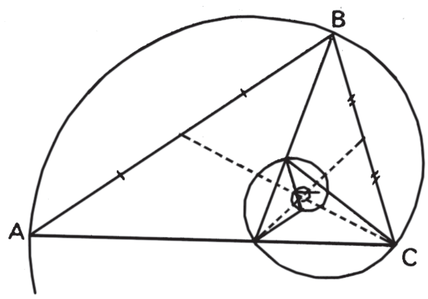
தனக்குள்ளே ஏற்படும் தங்க முக்கோணம்

தங்க முக்கோணம் என்பது 72° அளவு அடிகோணங்களாக கொண்டும் உச்சிகோண அளவு 36°ஐ கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகும். ஒவ்வொரு அடிகோணத்தின் கோண இருசமவெட்டியால் ஏற்படும் புதிய இரு முக்கோணங்கள்கூட தங்க முக்கோணங்களே ஆகும்.



இந்த செயல் முடிவின்றி முதல் முக்கோணத்தின் உச்சிவரை தொடர்ந்து கொண்டே இருக்கும்.

முதல் முக்கோணத்தின் உச்சிகோணத்தை நோக்கி மேலும் முக்கோணங்கள் உருவாக்க முடியாத நிலை வரை எண்ணற்ற முக்கோணங்கள் ஏற்படும்.



தங்க முக்கோணத்திலிருந்து சமகோண சுருளை படத்தில் கண்டவாறு உருவாக்கினால் தங்கமுக்கோண விகிதம் $\phi = |AB| / |BC| = 1.618 \ldots$

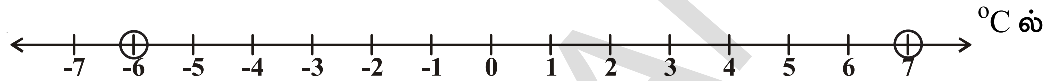
முடிவின்றி உருவாகும் தங்க முக்கோணத்தின் உட்புறமாக மேலும் எண்ணற்ற ஐங்கோணங்களை உருவாக்கலாம். ஐங்கோணத்தின் ஐந்து புள்ளிகள்கூட தங்கமுக்கோணங்களே.

05

ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம்

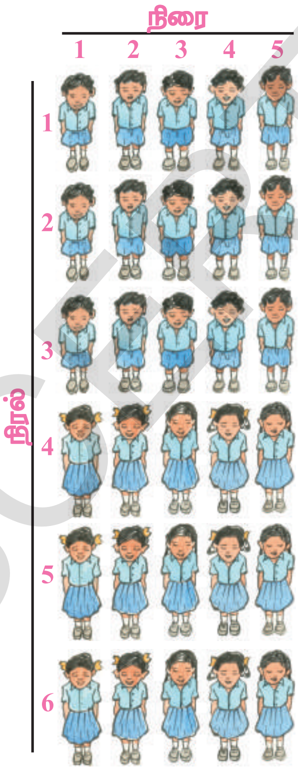
5.1 அறிமுகம்

இமாச்சல பிரதேசத்தில் குப்ரி என்ற இடத்தின் டிசம்பர் மாதத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளின் மிக உயர்ந்த மற்றும் மிககுறைந்த வெப்பநிலை $7^{o}C$ மற்றும் $-6^{o}C$. இதை ஓர் எண்கோட்டின் மேல் உன்னால் குறிக்கவும்



இங்கு இந்த எண்கோடு அந்த குறிப்பிட்ட நாளின் வெப்பநிலையின் நிலைமையை தெரிவிக்கும் அளவுகோலாக உள்ளது.

அருகிலுள்ள படத்தில் காட்டியுள்ள சூழ்நிலையை நாம் உற்று நோக்குவோம். A,B,C,D,E,F,G, H என்ற எட்டு நபர்கள் வரிசையில் நின்றுகொண்டு இருக்கிறார்கள்.



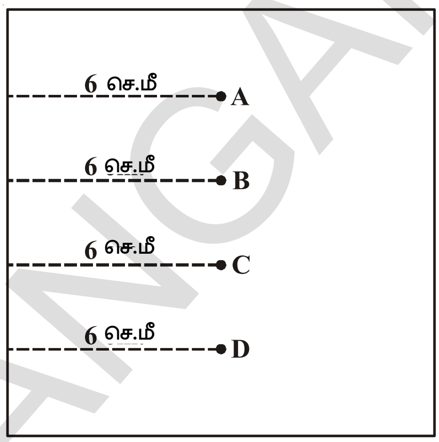
நுழைவுச்சீட்டு வழங்குமிடத்திலிருந்து பார்க்கும்போது A முதலிலும் H கடைசியிலும் இருப்பதை பார்க்கலாம். டீ கடையில் இருந்து பார்க்கும் போது H முதலிலும் Aகடைசியிலும் இருப்பதை பார்க்கலாம். பொருளின் இருப்பிடம் பார்க்கும் இடத்தைப் பொறுத்து மாறுபடுவதை நீ கவனிக்கலாம்.

மற்றொரு உதாரணத்தை நாம் விவாதிக்கலாம். விளையாட்டு பிரிவேளையில் 9ஆம் வகுப்பு மாணவர்கள் (படத்தில் காட்டியவாறு)- வரிசையில் நின்றார்கள். இப்படத்தில் சுதா எங்கு நிற்கிறாள் என்று உன்னால் கூறமுடியுமா? சுதா 2வது நிரலில் நிற்கிறாள் என்று ரமா கூறினாள். சுதா 4வது நிரையில் நிற்கிறாள் என்று பவானி கூறினாள்.

சுதா 2வது நிரலிலும் 4வது நிரையிலும் நிற்கிறாள் என்று நசீமா கூறினாள்.

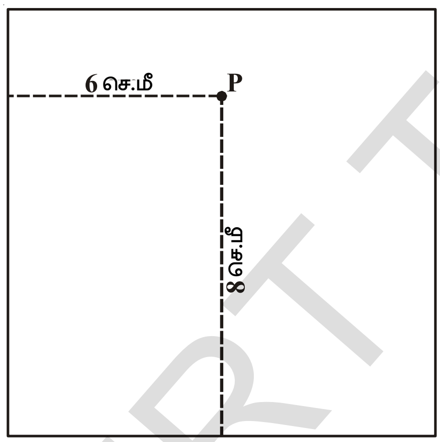
யார் சரியான தகவல் கொடுத்தார்கள்? நசீமா கொடுத்த தகவலை வைத்து சுதாவின் இருப்பிடத்தை உன்னால் சுட்டிக்காட்ட முடியுமா? மாதவியின் இருப்பிடத்தை உன்னால் குறிப்பிட முடியுமா? (1வது நிரல், 5வது நிரையில் நிற்பவள்). கீழ்கண்ட இடங்களில் நின்று கொண்டிருக்கும் மாணவர்களை சுட்டிக்காட்டு. (i) (3வது நிரல், 6வது நிரை) (ii) (5வது நிரல், 2வது நிரை)

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் எத்தனை விவரங்களை நீ கவனித்தாய் என்பதை உன்னால் கூறமுடியுமா? மீண்டும் ஒரு சூழ்நிலையை நாம் விவாதிக்கலாம். ஒரு காகிதத்தின் மேல் ஒரு புள்ளியை குறிக்கும்படி ஆசிரியர் மாணவர்களிடம் கூறினார். இடது பக்கவிளிம்பிலிருந்து 6செ.மீ தூரத்தில் அந்த புள்ளி இருக்கவேண்டும் என்று குறிப்பு தந்தார். சில மாணவர்கள் படத்தில் காட்டியவாறு குறித்தார்கள்.



இந்த படத்தில் எந்த புள்ளி சரியானது என்று நீ கருதுகிறாய்? ABCD என்ற ஒவ்வொரு புள்ளியும் இடப்பக்க விளிம்பிலிருந்து 6செ.மீ தூரத்தில் இருப்பதால் எந்த புள்ளியையும் நாம் மறுக்க முடியாது. புள்ளியின் சரியான இருப்பிடத்தை குறிக்க, இன்னும் தேவையான விவரம் என்ன? அதன் சரியான இருப்பிடத்தை குறிக்க கீழ்விளிம்பிலிருந்து அல்லது மேல் விளிம்பிலிருந்து உள்ள தூரம் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

ஒருவேளை, அந்த புள்ளி இடப்பக்க விளிம்பிலிருந்து 6செ.மீ தூரத்திலும் கீழ்விளிம்பிலிருந்து 8செ.மீ தூரத்திலும் இருக்கிறது என்று ஆசிரியர் கூறினால், இவ் விளக்கத்தின் படி எத்தனை புள்ளிகளை குறிக்க முடியும்?



ஒரே ஒரு புள்ளியை மட்டும் தான் குறிக்க முடியும். எனவே, ஒரு புள்ளியின் இருப்பிடத்தை குறிக்க, உனக்கு எத்தனை விவரங்கள் தேவைப்படுகிறது?

ஒரு புள்ளியின் சரியான இருப்பிடத்தை குறிக்க இரண்டு விவரங்கள். நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. அந்தப்புள்ளியின் இருப்பிடம் (6,8) என்று குறிக்கப்படுகிறது. மேலிருந்து 7செ.மீ தூரத்தில் ஒரு புள்ளி குறிக்கப்படுகிறது என்று கூறினால், அதன் சரியான இருப்பிடத்தை அடையாளம் காட்ட முடியுமா? உன்னுடைய நண்பர்களோடு விவாதி.

இதை செய்

உன் வகுப்பறையிலுள்ள ஏதேனும் ஐந்து மாணவர்களின் அமரும் இருப்பிடத்தை விவரி.

செயல்பாடு (வலை விளையாட்டு - RING GAME)

பொருட்காட்சியில் வலைவிளையாட்டை நீ பார்த்திருக்கிறாயா? நிரை மற்றும் நிரல்களில் அமைக்கப்பட்ட பொருட்களின் மேல் நாம் வலையை வீசுகிறோம். கீழ்கண்ட படத்தை உற்றுநோக்கு.

கீழ்கண்ட அட்டவணையை நிரப்புக.

பொருள்	நிரல்	நிரை	இருப்பிடம்
கைப்பை	3	4	(3,4)
தீப்பெட்டி	....	2	(,2)
கொக்கி	....	....	....
பொம்மை	....	....	....
சோப்பு	....	....	....

3வது நிரல் மற்றும் 4வது நிரையில் உள்ள பொருளும், 4-வது நிரல் மற்றும் 3வது நிரையில் உள்ள பொருளும் ஒன்றா?

இரண்டு விவரங்களை பயன்டுத்தி ஒரு புள்ளியை ஒரு தளத்தில் குறித்தல் என்பது கணிதத்தில் ஆயத்தொலை வடிவகணிதம் என்ற புதிய கிளையின் முன்னேற்றத்திற்கு வழிவகுத்தது.

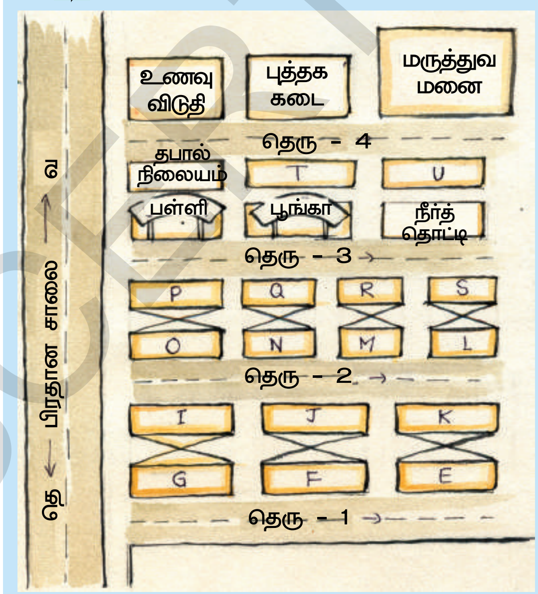
ரேனேடெஸ்கார்ட் (1596-1650) என்ற கணிதமேதை மற்றும் தத்துவஞானி, ஆயத்தொலை வடிவியலை விரிவாக்கினார்.இவர் இயற்கணித சமன்பாடு, வளைவரை மற்றும் வடிவியல் படங்களுக்கு இடையே இணைப்பை கண்டுபிடித்தார்.

இந்த அத்தியாயத்தில் புள்ளி மற்றும் புள்ளிளை கார்டீசியன் அச்சுத்தளத்தில் எவ்வாறு குறிப்பது என்பதை நாம் விவாதிக்கலாம்.

பயிற்சி 5.1

1. வ / மே ← → கி / தெ

ஓரிடத்தில், வடக்கு-தெற்கு திசையில் ஒரு பிரதானசாலை உள்ளது. அதன் வரைபடம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த படத்தின் உதவியுடன் கீழ்கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளி.



(i) 3வது தெருவின் இடப்பக்கத்தில் 3வது பொருள் என்ன?

(ii) 2வது தெருவின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள 2வது வீட்டின் பெயர் என்ன?

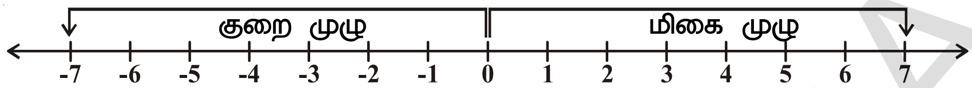
(iii) Mr. K.ன் வீட்டின் இருப்பிடத்தை குறித்துக்காட்டு.

(iv) தபால் நிலையத்தின் இருப்பிடத்தை எப்படி விவரிப்பாய்?

(v) மருத்துவமனையின் இருப்பிடத்தை எவ்வாறு விவரிப்பாய்?

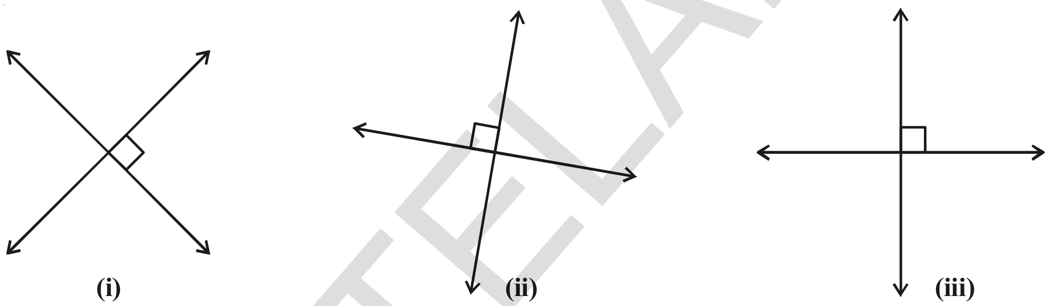
5.2 கார்ட்டீசியன் அமைப்பு

எண்களை குறிப்பதற்கு நாம் எண்கோட்டை பயன்படுத்துகிறோம். கோட்டின் மேல் சமதூரங்களில் புள்ளிகளை குறிக்கிறோம். கீழே உள்ள முழுக்கள் கோட்டை கவனி.



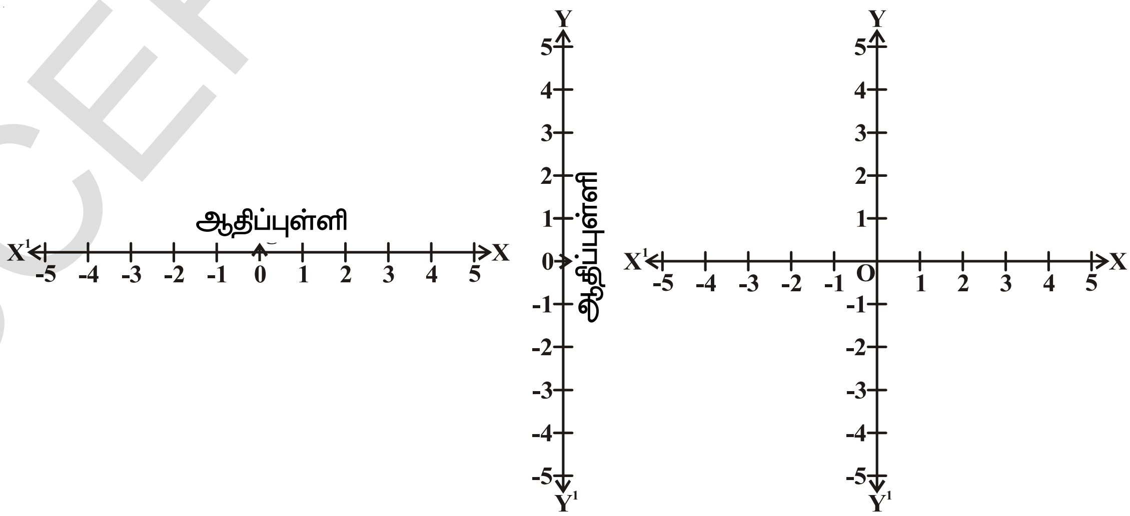
ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து கோட்டின் இருபக்கங்களிலும் தூரங்கள் குறிக்கப்பட்டிருப்பதையும், அதை O என்று குறிப்பிட்டு இருப்பதையும் கவனி. எல்லா மிகை எண்களும் பூஜ்ஜியத்தின் வலதுபக்கத்திலும், குறை எண்கள் இடது பக்கத்திலும் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

ஒரு தளத்தில், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள இரண்டு எண் நேர்கோடுகளை நாம் எடுத்துக்கொள்கிறோம். இந்த இரண்டு நேர்கோடுகளை வைத்து ஒரு புள்ளியின் இருப்பிடத்தை குறிக்கிறோம். கீழ்கண்ட படங்களை கவனி.

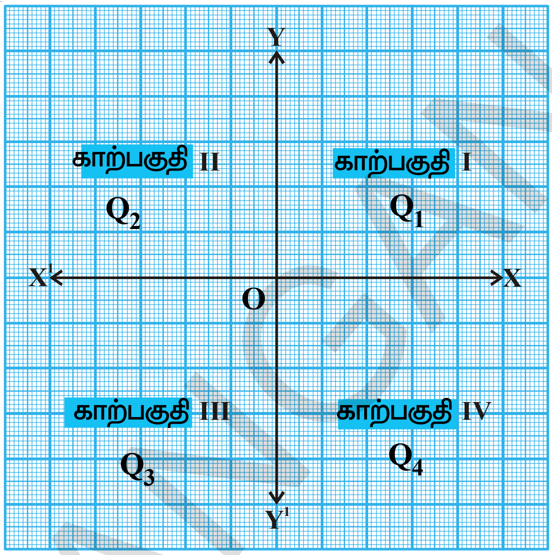


(i) (ii) (iii)

மேற்கண்ட படங்களில் இரண்டு செங்குத்து நேர்கோடுகள் வெவ்வேறு திசைகளில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த அத்தியாயத்தில் ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க இரண்டு நேர்கோடுகளை தேர்ந்தெடுக்கும் போது, நம்முடைய வசதிக்காக, படம் (iii) ல் காட்டியவாறு கிடைமட்டமாக ஒரு நேர்கோட்டையும், செங்குத்தாக ஒரு நேர்கோட்டையும் எடுத்துக்கொள்கிறோம். கிடைமட்டமான கோடும், குத்துக்கோடும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளுமாறு வரைகிறோம். வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி எனப்படும். கிடையான மெய்யெண் நேர்கோடு XX^1 ஐ X அச்சு எனவும், குத்தான மெய்யெண் நேர்கோடு YY^1 ஐ Y அச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.



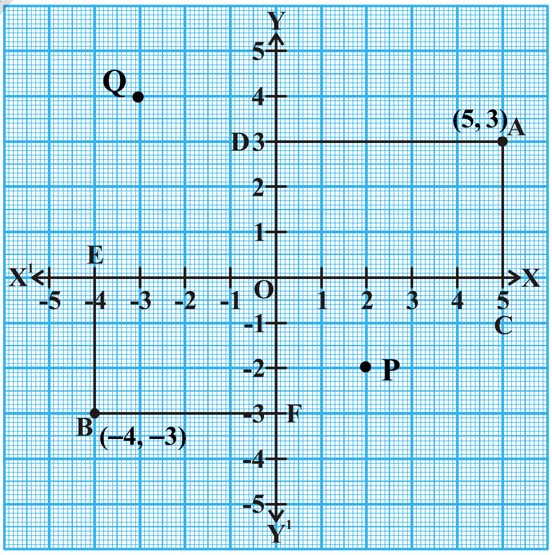
X^1X மற்றும் Y^1Y அச்சுகள் வெட்டும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என்று அழைக்கப்படும். இது O என்று குறிக்கப்படும். மிகை எண்கள் $\overrightarrow{OX}$ திசையில் அமைந்திருப்பதால் X அச்சின் மிகைதிசை என்று அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறே $\overrightarrow{OY}$ Y அச்சின் மிகைதிசை எனப்படும். மேலும் OX^1 மற்றும் OY^1 ஆகியவை குறைதிசை என்று அழைக்கப்படும். அச்சுகள், தளத்தை நான்கு பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன. இந்த நான்கு பகுதிகள் காற்பகுதிகள் என்று அழைக்கப்படும். அவை கடிகார எதிர்திசையில் எண்ணிடப்பட்டு Q_1, Q_2, Q_3 மற்றும் Q_4 என்று குறிக்கப்படுகின்றன. இந்த தளம் கார்ட்டீசியன் தளம் (ரேனே டேஸ் கார்ட்டை கௌரவப்படுத்தும் விதமாக) அல்லது ஆயத்தொலை அச்சுத்தளங்கள் அல்லது XY தளம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. அந்த அச்சுகள் ஆயத்தொலை அச்சுகள் என்று அழைக்கப்படுகிறது.



5.2.1 ஒரு புள்ளியைக் குறித்தல்

ஆயத்தொலை அமைப்பில் ஒரு புள்ளியை எவ்வாறு குறிப்பது என்பதை நாம் காணலாம். கீழ்கண்ட வரைபடத்தை உற்றுநோக்கு. இரண்டு அச்சுகள் வரைபடத்தாளின் மேல் வரையப்பட்டிருக்கிறது. A மற்றும் B அதன்மேல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள். A மற்றும் B எந்த காற்பகுதியில் உள்ளது என்று உன்னால் கூறமுடியுமா?

புள்ளி A முதல் காற்பகுதியிலும்(Q_1) மற்றும் புள்ளி B மூன்றாம் காற்பகுதியிலும் உள்ளன. இப்பொழுது அச்சுகளில் இருந்து A மற்றும் Bகளின் தூரங்களை நாம் காணலாம். இதற்காக நாம், X அச்சிற்கு AC குத்துக்கேட்டையும், Y அச்சிற்கு AD குத்துக்கோட்டையும் வரையலாம். இவ்வாறே BE மற்றும் BF என்ற குத்துக்கோடுகளை படத்தில் காட்டியவாறு வரையலாம்.



நாம் அறிவது,

(i) Yஅச்சிலிருந்து Xஅச்சின் மிகை திசையில் அளக்கப்பட்ட புள்ளி Aன் செங்குத்து தூரம் AD=OC=5 அலகுகள். இதை Aன் Xஅச்சுதூரம் என்கிறோம்.

(ii) Xஅச்சிலிருந்து Yஅச்சின் மிகை திசையில் அளக்கப்பட்ட புள்ளி Aன் செங்குத்து தூரம் AC=OD=3 அலகுகள். இதை Aன் Yஅச்சுதூரம் என்கிறோம். ஆகவே Aன் அச்சு தூரங்கள் (5,3) ஆகும்.

(iii) Yஅச்சிலிருந்து Xஅச்சின் குறை திசையில் அளக்கப்பட்ட புள்ளி Bன் செங்குத்து தூரம் OE=BF=4 அலகுகள். அதாவது Xஅச்சின்மேல் -4 இது Bன் Xஅச்சுதூரம் எனப்படும்.

(iv) X அச்சிலிருந்து Y அச்சின் குறைதிசையில் அளக்கப்பட்ட, புள்ளி Bன் செங்குத்து தூரம் OF = EB = 3 அலகுகள். அதாவது Y அச்சின் மேல் -3. இது Bன் Y அச்சு தூரம் எனப்படும்.

∴ B ன் அச்சு தூரங்கள் (-4, -3) ஆகும்.

இந்த தூரங்களை பயன்படுத்தி புள்ளியை நாம் எவ்வாறு குறிப்பது? ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை கீழ்கண்ட முறையில் நாம் எழுதுகிறோம்.

(i) ஒரு புள்ளியின் x அச்சுதூரம் என்பது ஆதிப்புள்ளியல் இருந்து X அச்சின் மேல் அதன் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி வரையுள்ள தூரமாகும்.

x அச்சு தூரம், x தொலைவு என்றும் அழைக்கப்படும்.

p ன் xஅச்சு தூரம் (தொலைவு) 2 ஆகும்.

Q ன் x அச்சுதூரம் (தொலைவு) 3 ஆகும்.

(ii) ஒரு புள்ளியின் y அச்சு தூரம் என்பது ஆதிப்புள்ளிக்கும் Yஅச்சின் மேல் அதன் செங்குத்து கோட்டின் அடிக்கும் உள்ள தூரம் ஆகும்.

Yஅச்சுதூரம் y தொலைவு என்றம் அழைக்கப்படும்.

P ன் y அச்சு தூரம் (தொலைவு) 2 ஆகும்.

Q ன் y அச்சுதூரம் (தொலைவு) 4 ஆகும்.

எனவே P ன் அச்சு தூரங்கள் (2, -2) மற்றும் Qன் அச்சு தூரங்கள் (-3, 4) ஆகும்.

ஆகவே அச்சுதூரங்கள் ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் தனித்தன்மையை குறிக்கிறது.

5.2.2 ஆதிப்புள்ளி

1. Xஅச்சு மற்றும் Yஅச்சு வெட்டும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி எனப்படும். ஒரு தளத்தில் மற்ற புள்ளிகளை குறிப்பதற்கு ஆதிப்புள்ளியை ஆதாரபுள்ளியாக எடுக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்கண்ட புள்ளிகளின் xதொலைவு மற்றும் y தொலைவு கூறு.மேலும் புள்ளியின் இருப்பிடத்தை விவரி. (i) P(8,8) (ii) Q (6,-8).

தீர்வு : (i) P (8,8)

x தொலைவு = 8 (x - அச்சுதூரம்); y தொலைவு = 8 (y - அச்சுதூரம்)

Yஅச்சிலிருந்து X அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து 8 அலகுகள் தூரத்தில் புள்ளி P உள்ளது. அதன் Yதொலைவு 8 ஆதலால், அப்புள்ளி X அச்சில் இருந்து Yஅச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து 8 அலகுகள் தூரத்தில் உள்ளது.

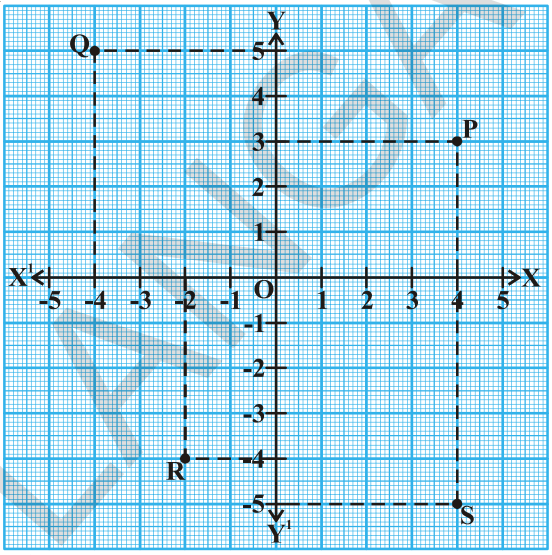
(ii) Q (6, -8)

x தொலைவு = 6 ; y தொலைவு = -8

புள்ளி Q என்பது , Y அச்சிலிருந்து X அச்சின் மிகை திசையில் 6 அலகுகள் தூரத்திலும், X அச்சிலிருந்து Yன் குறை திசையில் 8 அலகுகள் தூரத்திலும் இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2: வரைப்படதாளில் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களை எழுதுக.

தீர்வு : 1. புள்ளி P லிருந்து X அச்சிற்கு ஒரு குத்துக்கோடு வரை. அந்த குத்துக்கோடு X அச்சை 4 அலகுகளில் தொடும். எனவே P ன் x தொலைவு 4 ஆகும். இவ்வாறே P யிலிருந்து Y அச்சிற்கு ஒரு குத்துக்கோடு வரைக. இந்த குத்துக்கோடு Y அச்சை 3 அலகுகளில் தொடுகிறது. எனவே P ன் Y தொலைவு 3 ஆகும். எனவே P ன் அச்சு தூரங்கள் (4,3) ஆகும்.

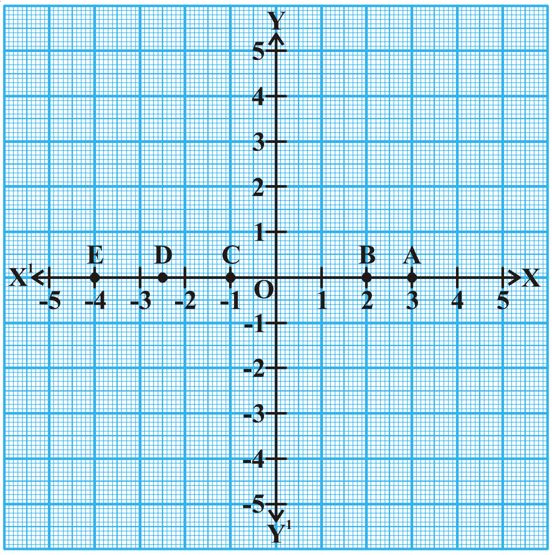


2. இவ்வாறே Q ன் x தொலைவு மற்றும் y தொலைவு முறையே –4 மற்றும் 5 ஆகும். எனவே Q ன் அச்சுதூரங்கள் (-4, 5) ஆகும்.

3. முன்பு போலவே, R ன் x அச்சுதூரம் மற்றும் y அச்சு தூரம் முறையே –2 மற்றும் –4 ஆகும். எனவே R ன் அச்சு தூரங்கள் (-2, –4) ஆகும்.

4. S ன் x தொலைவு மற்றும் y தொலைவு முறையே 4 மற்றும் –5 ஆகும். எனவே S ன் அச்சுதூரங்கள் (4, –5) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: வரைபடத்தாளில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களை எழுது.



தீர்வு : Y அச்சிலிருந்து 3 அலகுகள் தூரத்திலும், X அச்சிலிருந்து 0 அலகுகள் தூரத்திலும் புள்ளி A உள்ளது. ஆகவே A ன் x அச்சுதூரம் 3 மற்றும் y அச்சு தூரம் 0 ஆகும். எனவே A ன் அச்சு தூரங்கள் (3,0) ஆகும்.

சிந்தித்து விவாதம் செய்க.

(i) B ன் அச்சு தூரங்கள் (2,0). ஏன்?
(ii) C ன் அச்சு தூரங்கள் (-1,0). ஏன்?
(iii) D ன் அச்சு தூரங்கள் (-2.5, 0). ஏன்?
(iv) E ன் அச்சு தூரங்கள் (-4,0) ஏன்? நீ கவனித்தது என்ன? ஆகவே படத்தை கவனிக்கும் போது, X அச்சின் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் X அச்சிலிருந்து தூரம் இல்லை. எனவே X அச்சின் மேல் அமையும் ஒரு புள்ளியின் Y அச்சுதூரம் எப்பொழுதும் பூச்சியம் ஆகும்.

X அச்சின் சமன்பாடு Y=0 என்று குறிக்கப்படும்.

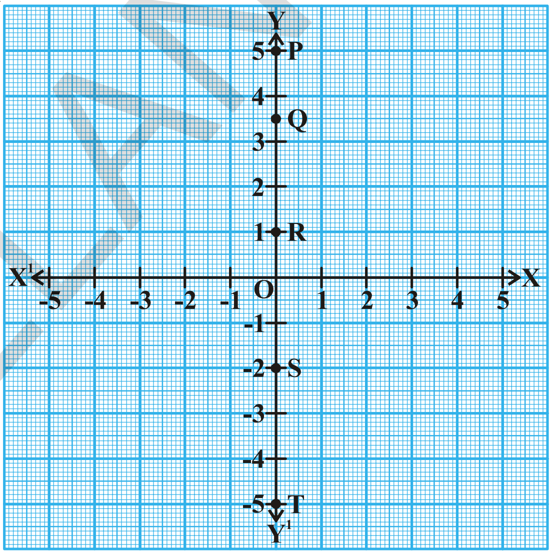
இதை செய்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் சில புள்ளிகள் X அச்சின்மேல் அமைகின்றன. அவற்றை சுட்டிக்காட்டு.

(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

எடுத்துக்காட்டு 4: வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களை எழுது.

தீர்வு :



(i) புள்ளி P, Xஅச்சிலிருந்து +5 அலகுகள் தூரத்திலும் மற்றும் Yஅச்சிலிருந்து பூஜ்ஜியம் தூரத்திலும் இருக்கிறது. எனவே P ன் x அச்சுதூரம் 0 மற்றும் y அச்சுதூரம் 5. எனவே Pன் அச்சுதூரங்கள் (0,5) ஆகும்.

சிந்தித்து விவாதம் செய்

(ii) Q ன் அச்சுதூரங்கள் (0, 3.5), ஏன்?

(iii) R ன் அச்சுதூரங்கள் (0,1), ஏன்?

(iv) S ன் அச்சுதூரங்கள் (0, -2), ஏன்?

(v) T ன் அச்சுதூரங்கள் (0, -5), ஏன்?

Y–அச்சின் மேல் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் Yஅச்சிலிருந்து தூரம் இல்லையாதலால், Yஅச்சின் மேல் அமையும் புள்ளியில் x அச்சு தூரம் எப்பொழுதும் பூஜ்ஜியம் ஆகும். Yஅச்சின் சமன்பாடு $x=0$ என்று குறிக்கப்படும்.

5.2.3 ஆதிப்புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள்

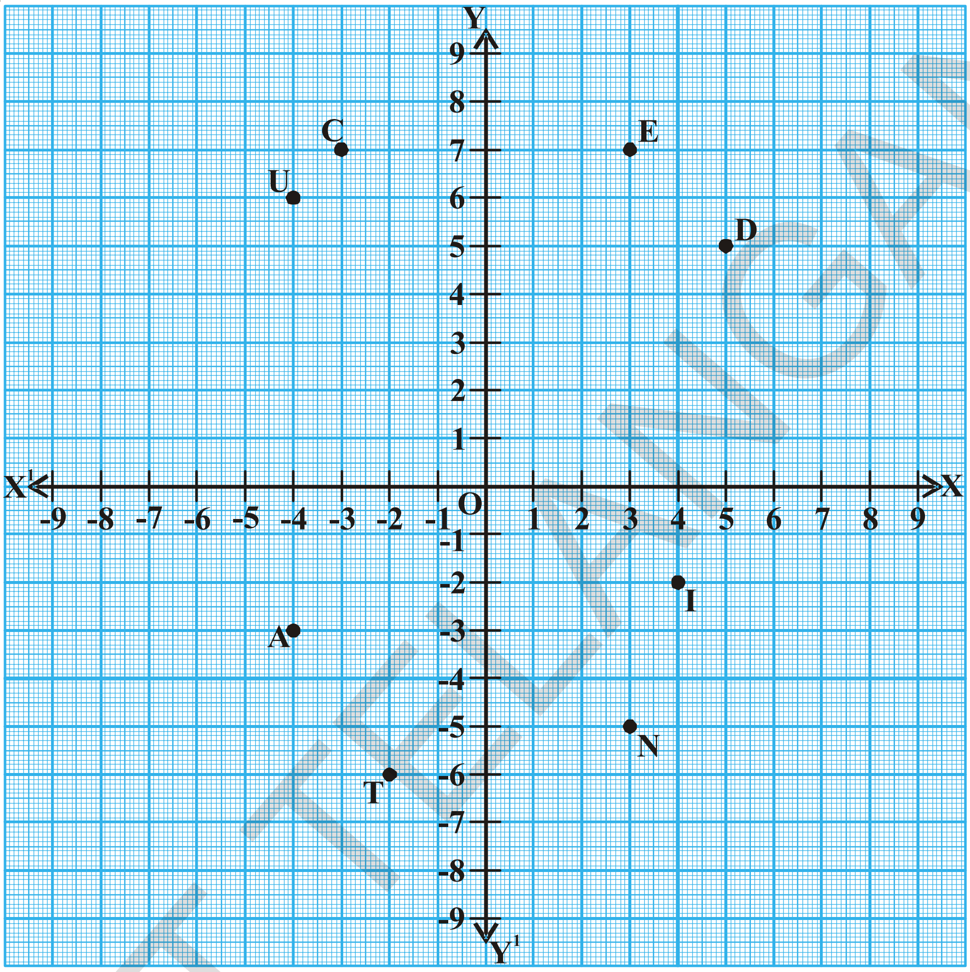
புள்ளி O, Y-அச்சின் மேல் அமைகிறது. Y-அச்சில் இருந்து அதன் தூரம் பூஜ்ஜியம். எனவே அதன் x அச்சு தூரம் பூஜ்ஜியம் ஆகும். மேலும் அது X-அச்சின் மேல் அமைகிறது. X-அச்சிலிருந்து அதன் தூரம் பூஜ்ஜியம் ஆகும். எனவே அதன் y அச்சு தூரம் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

எனவே ஆதிப்புள்ளி 'O'ன் அச்சுதூரங்கள் (0,0) ஆகும்.

முயன்று பார்

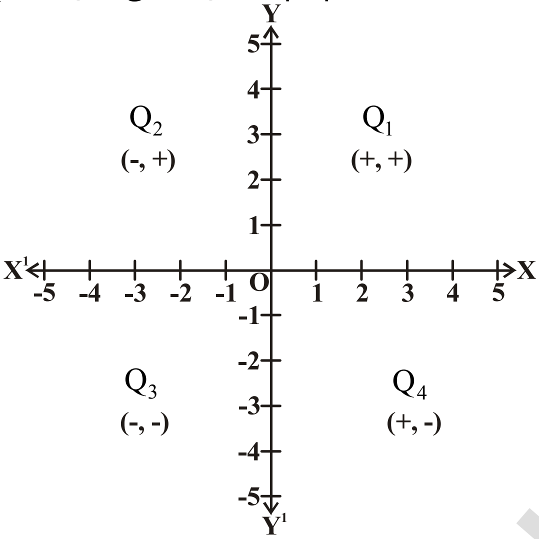
1. $(0, x)$ $(0, y)$ (0,2) மற்றும் (0,-5) ஆகியவை எந்த அச்சின் மேல் அமையும்? ஏன்?
2. X அச்சின் மேல் அமையும் புள்ளிகளின் பொதுவடிவம் என்ன?

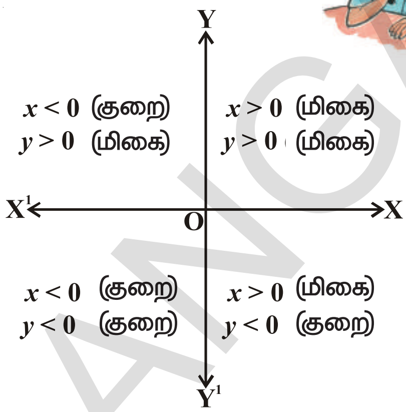
எடுத்துக்காட்டு 5: கீழே உள்ள வரைபடத்தை அடிப்படையாக கொண்டு அட்டவணையை பூர்த்திசெய்.



புள்ளி	x-தொலைவு	y-தொலைவு	அச்சு தூரங்கள்	காற்பகுதி	அச்சுதூரங்களின் குறிகள்
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	-4	6	U (-4,6)	.....	(-,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	-4	-3	A (-4, -3)	.....	(-,-)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	-2	I (4, -2)	.....	(+,-)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

மேற்கண்ட அட்டவணையில் இருந்து, ஒரு புள்ளியின் அச்சுதூரங்களின் குறியீடுகளுக்கும், அந்தபுள்ளி அமைந்துள்ள காற்பகுதிக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு பின்வருமாறு இருப்பதை நீ கவனிக்கலாம்.





பயிற்சி 5.2

1. பின்வரும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ள காற்பகுதியை எழுதுக.

   i) (-2, 3) ii) (5, -3) iii) (4, 2) iv) (-7, -6)

   v) (0, 8) vi) (3, 0) vii) (-4, 0) viii) (0, -6)

2. பின்வரும் புள்ளிகளின் x தொலைவுகள் மற்றும் y தொலைவுகள் எழுதுக.

   i) (4, -8) ii) (-5, 3) iii) (0, 0) iv) (5, 0)

   v) (0, -8)

3. பின்வரும் புள்ளிகள் எந்த அச்சுகளின் மேல் அமைந்துள்ளன? மேலும் அச்சின் பெயரை எழுதுக.

   i) (-5, -8) ii) (0, 13) iii) (4, -2) iv) (-2, 0)

   v) (0, -8) vi) (7, 0) vii) (0, 0)

4. பின்வரும் வரைபடத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு எழுதுக.

   i) L ன் Y அச்சு தூரம்

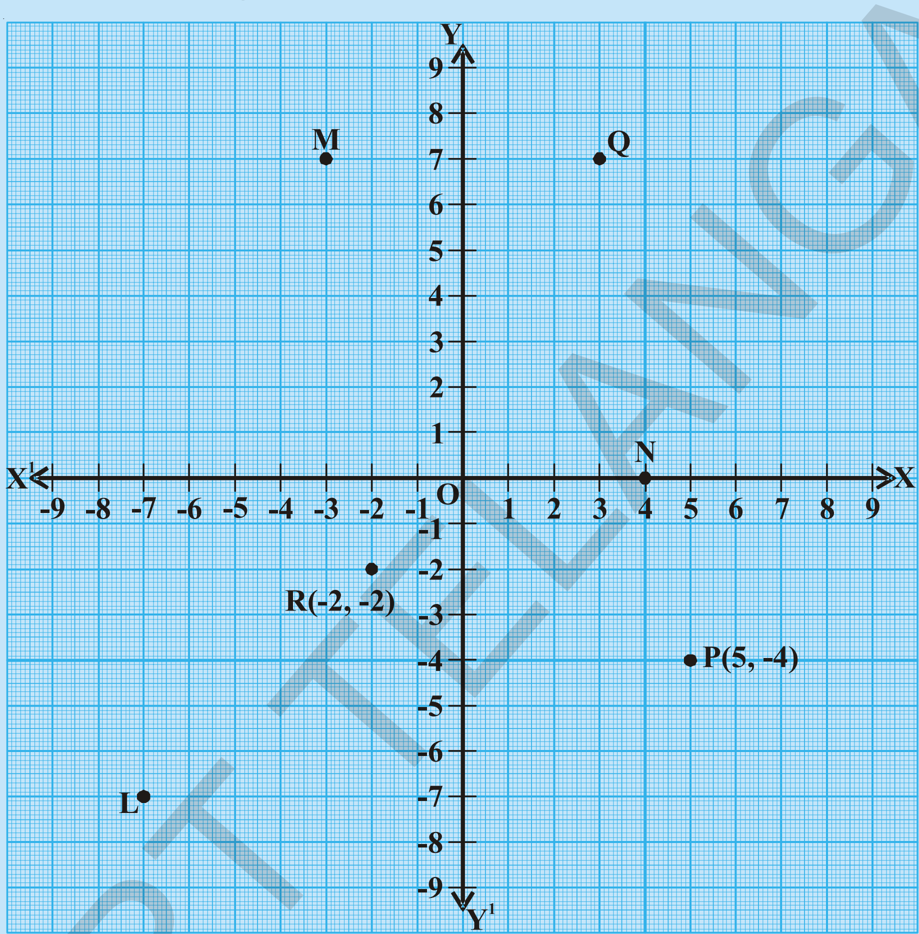
   ii) Qன் Y அச்சு தூரம்

   iii) (-2, -2) ஆல் குறிக்கப்படும் புள்ளி.

iv) (5, -4) ஆல் குறிக்கப்படும் புள்ளி.

v) Nன் x அச்சுதூரம்

vi) Mன் x அச்சுதூரம்



5. சரியா? தவறா? எனக்கூறு. மேலும் சரியான கூற்றை எழுது.

i. கார்ட்டீசியன் தளத்தில், கிடைமட்டமான நேர்கோடு Y அச்சு என்று அழைக்கப்படும்.

ii. கார்ட்டீசியன் தளத்தில், குத்துக்கோடு Y அச்சு என்று அழைக்கப்படும்.

iii. இரண்டு அச்சுகளின் மீது அமையும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என்று அழைக்கப்படும்.

iv. (2, -3) எனும் புள்ளி மூன்றாவது காற்பகுதியில் அமைகிறது.

v. (-5, -8) எனும் புள்ளி நான்காவது காற்பகுதியில் அமைகிறது.

vi. (-x , -y) எனும் புள்ளி முதற்காற்பகுதியில் அமைகிறது. இங்கு $x < 0$, $y < 0$.

6. பின்வரும் வரிசை ஜோடிகளை வரைபடத்தாளில் குறி. நீ உற்றுநோக்கியது என்ன?

i.. (1, 0), (3 , 0), (-2 , 0), (-5, 0), (0, 0), (5, 0), (-6, 0)

ii. (0, 1), (0 , 3), (0 , -2), (0, -5), (0, 0), (0, 5), (0, -6)

5.3 ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் அப்புள்ளியைக் குறித்தல்.

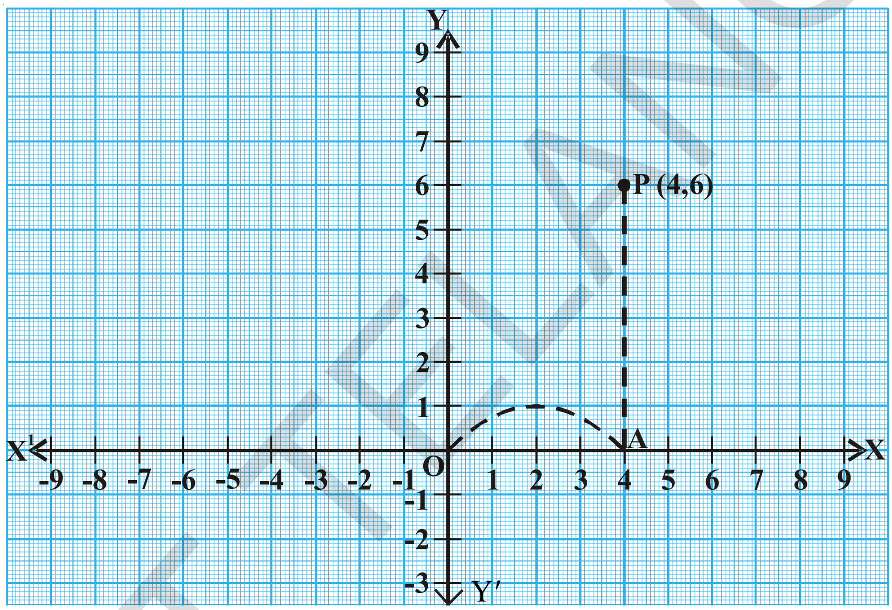
இதுவரை, கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் இருப்பிடத்தை எவ்வாறு படிப்பது என்பதை பார்த்தோம்.

இப்பொழுது, ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அதை எப்படி குறிப்பது என்பதை நாம் கற்கலாம்.

P (4,6) எனும் புள்ளியை எவ்வாறு குறிப்பாய்?

புள்ளி P எந்த காற்பகுதியில் அமைத்துள்ளது என்று உன்னால் கூறமுடியுமா?

x- அச்சுதூரம் 4 மற்றும் y- அச்சுதூரம் 6 என்று நமக்குத் தெரியும்.



∴ P முதல்காற்பகுதியில் அமைகிறது.

P (4,6) எனும் புள்ளியை குறிக்க பின்வரும் வழிமுறை கடைப்பிடிக்கப்படுகிறது.

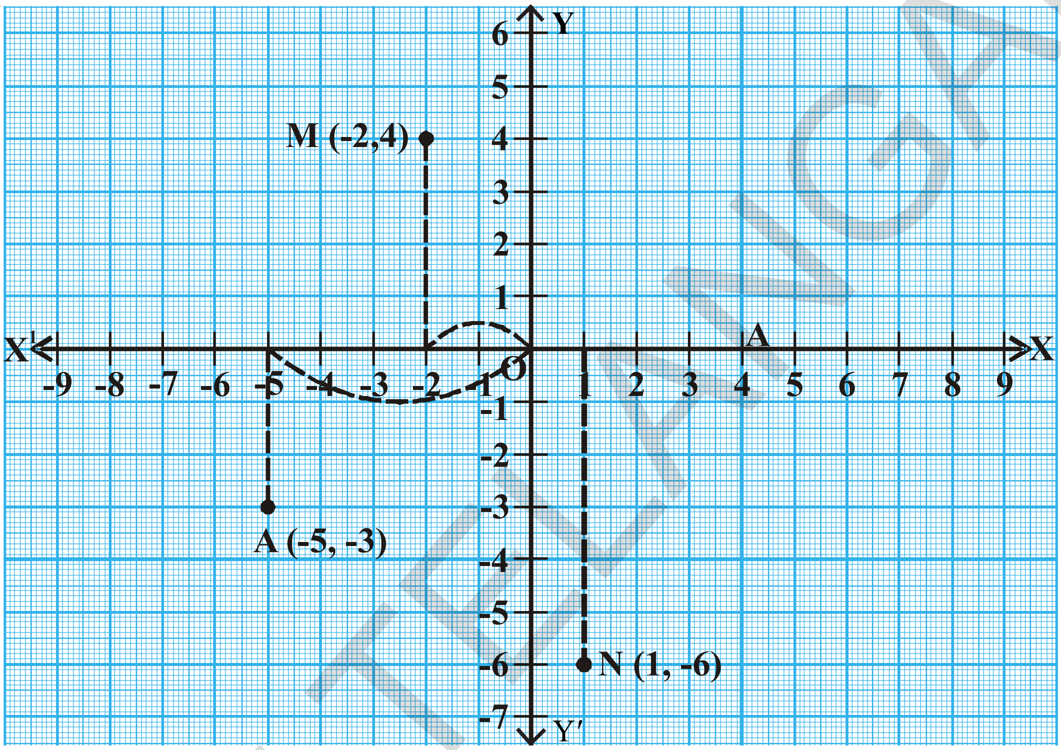
- ஒரு வரைபடத்தாளின் மேல் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக பூஜ்ஜியத்தில் வெட்டிக்கொள்ளுமாறு இரண்டு மெய்யெண் நேர்கோடுகளை வரைக. கிடைகோட்டிற்கு X அச்சு என்றும் குத்துக்கோட்டிற்கு Y-அச்சு என்றும் பெயரிடு. இரண்டு நேர்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி O என்று குறி.
- X -அச்சு தூரத்தை மனதில் கொண்டு ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து ஆரம்பி.
- X - அச்சின் மிகைதிசையில் 4 அலகுகள் வரை நகர்ந்து செல். புள்ளி A ஐ குறி.
- A யிலிருந்து, மிகை Y அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் வழியே மேல் நோக்கி 6 அலகுகள் நகர்ந்து செல்.
- புள்ளி P ன் இருப்பிடமான (4, 6)ஐ குறி.

ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை பயன்படுத்தி, அப்புள்ளியை கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கும் மேற்கூறிய முறை புள்ளியை குறித்தல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 6: பின்வரும் புள்ளிகளை கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும்.

(i) M (-2, 4), (ii) A (-5, -3), (iii) N (1, -6)

தீர்வு : X-அச்சு மற்றும் Y-அச்சு வரைக.



(i) M என்ற புள்ளி அமையும் காற்பகுதியை உன்னால் கூற முடியுமா? அது இரண்டாவது காற்பகுதியில் அமைகிறது. நாம் இப்போது அதன் இருப்பிடத்தை குறிப்போம். M (-2,4): பூஜ்ஜியத்திலிருந்து, X அச்சின் குறை திசையில் 2 அலகுகள் வரை நகர்ந்து செல். அதாவது அதன் இடப்பக்கம்.

அங்கிருந்து Y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் வழியே மேல் நோக்கி 4 அலகுகள் வரை நகர்ந்து செல்.

(ii) A (-5, -3) :

A என்ற புள்ளிமூன்றாவது காற்பகுதியில் அமைகிறது. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து ஆரம்பி.

X-அச்சின் குறை திசையில் 5 அலகுகள் வரை நகர்ந்து செல்.

Y-அச்சின் குறை திசையில் Y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் வழியே கீழ்நோக்கி 3-அலகுகள் வரை நகர்ந்து செல்.

(iii) N (1, -6): ஆதியிலிருந்து ஆரம்பி.

N என்ற புள்ளி நான்காவது காற்பகுதியில் அமைகிறது. X-அச்சின் மிகை திசையில் (பூஜ்ஜியத்தின் வலதுபக்கம்) 1 அலகு நகர்ந்து செல். அங்கிருந்து Y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் வழியே கீழ்நோக்கி 6 அலகுகள் வரை நகர்ந்து செல்.

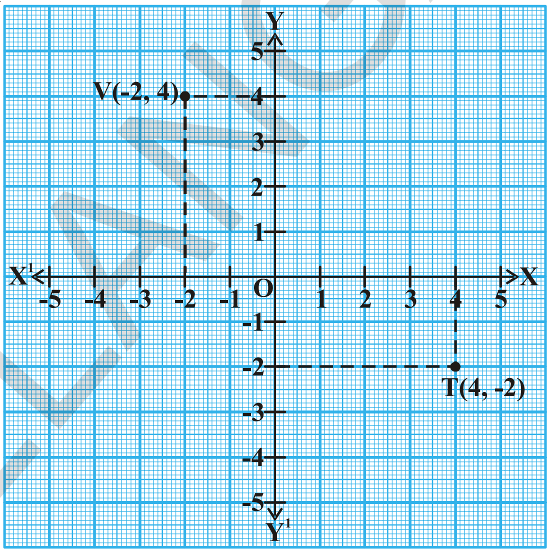
இதை செய்

பின்வரும் புள்ளிகளை கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறி.

1. B (-2, 3) 2. L (5, -8) 3. U (6, 4) 4. E (-3, -3)

எடுத்துக்காட்டு 7:: T(4, -2) மற்றும் V(-2, 4) புள்ளிகளை காரிட்டீசியன் தளத்தில் குறி. இந்த இரண்டு அச்சுதூரங்கள் ஒரே புள்ளியை குறிக்கிறதா?

தீர்வு : இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் T (4, -2) மற்றும் V(-2, 4) ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளை குறித்தோம். (4, -2) மற்றும் (-2, 4) ஆகியவை ஒரே புள்ளிகளா அல்லது வெவ்வேறு புள்ளிகளா? சிந்தி.



(4, -2) மற்றும் (-2, 4) ஆகியவை வெவ்வேறு இடங்களில் இருப்பதைக் காணலாம். மேற்கண்ட செயலை P (8, 3), Q(3, 8) மற்றும் A (4, -5), B(-5 , 4) ஆகிய புள்ளிகளுக்கு மீண்டும் செய். புள்ளி (x, y) புள்ளி (y, x) லிருந்து மாறுபட்டதா, இல்லையா எனகூறு.

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து கார்ட்டீசியன் தளத்தில் (x, y)ன் இருப்பிடம் (y, x) ன் இருப்பிடத்திலிருந்து மாறுபட்டது என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது (x, y) ல் x மற்றும் y ன் வரிசை முக்கியமானது.

ஆகவே (x, y) வரிசை ஜோடி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$x \neq y$, எனில் (x, y) வரிசை ஜோடி $\neq$ (y, x) வரிசை ஜோடி.

$x = y$, எனில் $(x, y) = (y, x)$

எடுத்துக்காட்டு 8: A(2, 2), B(6, 2), C (8, 5) மற்றும் D (4, 5) ஆகிய புள்ளிகளையும் இணைத்து ஓர் இணைகரம் உருவாக்கு. அதன் பரப்பளவு காண்க.

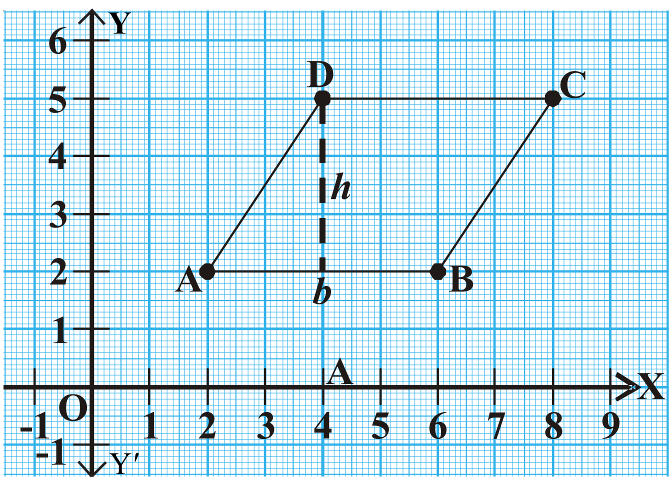
தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் Q_1 ல் அமைகின்றன. வரைபடத்திலிருந்து

b = AB = 4 அலகுகள்.

உயரம் h = 3 அலகுகள்.

இணைகரத்தின் பரப்பளவு = அடிப்பக்கம் × உயரம்

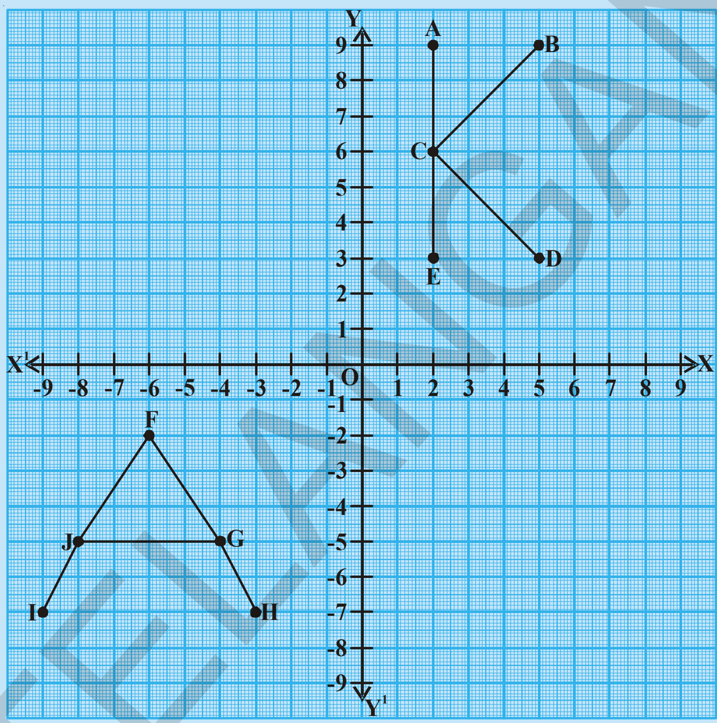
$= 4 \times 3 = 12$ அலகுகள்^{2}



இதை செய்

(i) A, B, C, D, E புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களை எழுது.

(ii) F, G, H, I, J புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களை எழுது.



பயிற்சி 5.3

1. பின்வரும் புள்ளிகளை கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறி. x , y அச்சு தூரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

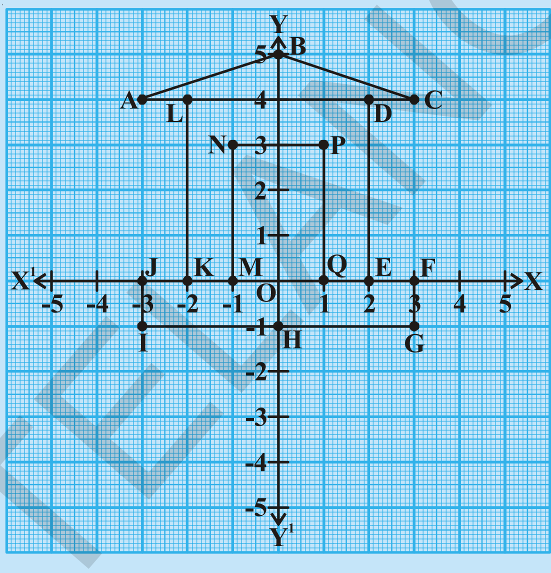
x	2	3	-1	0	-9	-4
y	-3	-3	4	11	0	-6
(x, y)						

2. (5, −8) மற்றும் (-8, 5) களின் இருப்பிடங்கள் ஒரே இடத்தில் அமையுமா? உன்னுடைய விடைக்கான காரணம் கூறு.
3. (1, 2), (1, 3), (1, −4), (1, 0), மற்றும் (1, 8)ன் இருப்பிடத்தை விவரி. வரைப்படத்தாளில் குறி.
4. (5, 4), (8, 4), (3, 4), (0, 4),(-4, 4), (-2, 4) ஆகிய புள்ளிகளின் இருப்பிடத்தை விவரி. வரைபடத்தாளில் அந்த புள்ளிகளை குறி. நீ அறிவது என்ன?
5. (0, 0) (0, 3) (4, 3) (4, 0) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறி. புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறி. புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் இணைத்து ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்கு. செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

6. (2, 3), (6, 3) மற்றும் (4, 7) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறி. அவைகளை இணைத்து ஒரு முக்கோணம் உருவாக்கு. முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காண்க.

7. அச்சுதூரங்களின் கூடுதல் 5க்கு சமமாக இருக்குமாறு குறைந்தது ஆறு புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.
குறிப்பு : (-2, 7) (1, 4) ....

8. வரைபடத்தை பார் A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, L, M. N, P, O மற்றும் Q ஆகிய புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களை எழுதுக.



9. ஒவ்வொரு வரிசை ஜோடி புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றை கோட்டுத்துண்டுகளால் இணைக்கவும்.

i.	(2, 5), (4, 7)	ii.	(-3, 5), (-1, 7)
iii.	(-3, -4), (2, -4)	iv.	(-3, -5), (2, -5)
v.	(4, -2), (4, -3)	vi.	(-2, 4), (-2, 3)
vii.	(-2, 1), (-2, 0)		

10. பின்வரும் வரிசை ஜோடி புள்ளிகளை குறித்து அவற்றை நேர்கோட்டுத்துண்டுகளால் இணைக்கவும்.

(1, 0), (0, 9); (2, 0), (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

(5, 0) (0, 5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2);

(9, 0) (0, 1); (4,7) (4,-3); (4,-2) (2,-4); (4,-3) (2,-5);
(2,5) (2,-5); (-3,5) (-3,-5); (-3,5) (2,5); (-1,7) (4,7),

செயல்பாடு

உலக உருண்டையில் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்சரேகைகளை பொறுத்து ஹைதராபாத், புதுதில்லி, சென்னை மற்றும் விசாகப்பட்டினம் ஆகிய நகரங்களின் இருப்பிடத்தை குறி.

செயல்

பின்வரும் ஜோடிப்புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து, அவைகளை நேர்கோட்டுத்துண்டுகளால் இணை.

$(-9, 0)$, $(-6, 4)$, $(-2, 5)$, $(2, 4)$, $(5, 0)$ $(-2, 0)$,

$(-2, -8)$, $(-3, -9)$, $(-4, -8)$.

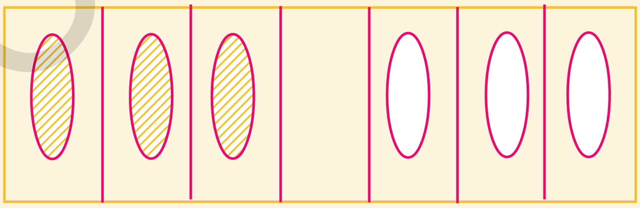
நீ கவனித்தது என்ன?

நாம் கற்றவை

- ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் சரியான இருப்பிடத்தை குறிக்க இரண்டு விவரங்கள் நமக்கு தேவைப்படுகிறது.
- ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளி அல்லது ஒரு பொருளை இரண்டு செங்குத்து மெய்யெண் கோடுகளின் உதவியோடு குறிக்கிறோம். அவற்றில் ஒன்று கிடைநேர்கோடு (X–அச்சு) மற்றொன்று குத்துக்கோடு (Y–அச்சு).
- ஒரு தளத்தில் x மற்றும் y அச்சு தூரங்கள் வடிவில் புள்ளிகளை குறிப்பதை கார்ட்டீசியன் அச்சு தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.
- அச்சுகளின் வெட்டும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி எனப்படும்.
- (x, y) எனும் வரிசை ஜோடி (y,x) எனும் வரிசைஜோடியிலிருந்து மாறுபட்டதாகும்.
- x–அச்சின் சமன்பாடு $y = 0$.
- y–அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$.

மூளைக்கு வேலை (Brain teaser)

கீழே உள்ள அட்டைகளை பார். நீ ஒரு புதிரை காண்பாய். பின்வரும் விதிகளை பின்பற்றி வெள்ளை அட்டைதுண்டுகள், கருப்பு அட்டைதுண்டுகளுடன் இடம் மாறுகிறது. (1) ஒரே நிறமுடைய துண்டுகள் ஒன்றை மற்றொன்று தாண்டாது.(2) ஒரு துண்டு ஒரு முறைதான் இடம்மாறும் அல்லது தாண்டும். குறைந்தபட்ச நகர்வுகளை (இடம்மாறுவதை) கண்டுபிடி.



குறைந்தபட்ச நகர்வுகள் 15 ஆகும். இதைவிட குறைவாக உங்களால் சிறப்பாக செய்யமுடியுமா? விளையாட்டில், அதிகமான சவால்களை உருவாக்க, அட்டைத் துண்டுகளின் எண்ணிக்கையை அதிகமாக்கு.

06

இரண்டு மாறிகள் உள்ள நேரியச்சமன்பாடுகள்

6.1 அறிமுகம்

(i) ஐந்து பேனாக்களின் விலை ₹60 எனில் ஒரு பேனாவின் விலையை கண்டுபிடி.

(ii) ஓர் எண்ணுடன் 7ஐ கூட்டினால் 51 கிடைக்கிறது. அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

இது போன்ற பல கணக்குகளை நாம் பார்த்திருக்கிறோம்.

இங்கு (i) வது சூழ்நிலையில் பேனாவின் விலை தெரியாது. (ii)வது சூழ்நிலையில் எண் தெரியாது. இந்த வகையான வினாக்களை எப்படி தீர்ப்பது? தெரியாத அளவுகளுக்கு நாம் x,y அல்லது z போன்ற எழுத்துகளை பயன்படுத்தி இவ்வாறான சூழ்நிலைகளுக்கு ஒரு சமன்பாட்டை எழுதுகிறோம்.

சூழ்நிலை (i) க்கு

5 × ஒரு பேனாவின் விலை = 60 என்று எழுதலாம்.

ஒரு பேனாவின் விலை ₹y எனில்

$5y = 60$

இப்பொழுது y-ஐ தீர்க்கவேண்டும். இவ்வாறே சூழ்நிலை (ii) க்கு நாம் சமன்பாடு அமைத்து, தெரியாத எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இவ்வகையான சமன்பாடுகள் நேரியச் சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.

$x + 3 = 0$, $x + \sqrt{3} = 0$ மற்றும் $\sqrt{2}\,x + 5 = 0$ ஆகியவை ஒரு மாறியில் நேரியச்சமன்பாடுகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். இவ்வாறான சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் இருக்கும் என்று உனக்கு தெரியும். தீர்வை எவ்வாறு எண்கோட்டின் மேல் குறிப்பது என்பதை நினைவு கூறுங்கள்.

ஆனந்தன் சூழ்நிலை (ii)ன் தீர்வை எண்கோட்டின் மேல் இவ்வாறு குறித்தான்.

6.2 இரு மாறிகளில் நேரியச்சமன்பாடுகள்

இப்பொழுது பின்வரும் சூழ்நிலையை கருதுவோம். ஒரு நாள் காவ்யா 4 நோட்டுபுத்தகங்களும் 2 பேனாக்களும் வாங்குவதற்காக அவள் தந்தையுடன் புத்தக கடைக்குச் சென்றாள். இவற்றிற்காக அவள் தந்தை ₹100ஐ கொடுத்தார்.

நோட்டுப்புத்தகம் மற்றும் பேனாவின் தனித்தனி விலை காவ்யாவிற்கு தெரியவில்லை. இப்பொழுது இந்த விவரத்தை ஒரு சமன்பாடு வடிவில் உன்னால் கூறமுடியுமா?

இங்கு ஒரு நோட்டுப்புத்தகம் மற்றும் ஒரு பேனாவின் விலை தெரியாது என்பதை நீ காணலாம். அதாவது இரண்டு தெரியாத அளவுகள் இருக்கின்றன. அவற்றை குறிப்பதற்கு x மற்றும் yஐ நாம் பயன்படுத்துகிறோம். எனவே ஒரு நோட்டுப்புத்தகத்தின் விலை ₹x மற்றும் ஒரு பேனாவின் விலை ₹y என எடுத்துக் கொள்வோம்.

மேற்கூறியவற்றை ஒரு சமன்பாடு வடிவில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

$4x + 2y = 100$,

இந்த சமன்பாட்டில் x மற்றும் yன் அடுக்குகளை நீ உற்று நோக்கினாயா?

மேலே உள்ள சமன்பாடு இரு மாறிகளில் உள்ள நேரிய வடிவம் ஆகும். **ஒரு நேரியச் சமன்பாடு இரண்டு மாறிகளை பெற்றிருந்தால், அது இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச் சமன்பாடு என்று அழைக்கப்படுகிறது.**

ஆகவே $4x + 2y = 100$ என்பது இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு ஆகும்.

இது சாதாரணமாக x மற்றும் y மாறிகளால் குறிக்கப்படும். ஆனால் மற்ற எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தலாம்.

$p + 3q = 50$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ மற்றும் $3 = \sqrt{5}x - 7y$ ஆகியவை இருமாறிகளின் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டிற்கு எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

மேலே உள்ள சமன்பாடுகளை முறையே $p + 3q - 50 = 0$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} - 5 = 0 \Rightarrow 3s - 2t - 30 = 0$ மற்றும் $\sqrt{5}x - 7y - 3 = 0$ என்றும் அமைக்கலாம்.

ஆகவே இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax + by + c = 0$ ஆகும். இங்கு a, b, c ஆகியவை மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$, $b \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டு 1: சச்சின் மற்றும் சேவாக் சேர்ந்து 137 ரன்கள் எடுத்தார்கள். இந்த விவரத்தை ஒரு சமன்பாடு வடிவில் எழுது.

தீர்வு : சச்சின் எடுத்த ரன்கள் x என்க. மேலும் சேவாக் எடுத்த ரன்கள் y என்க.

மேற்சொன்ன விவரத்தின் சமன்பாடு வடிவம் $x + y = 137$

எடுத்துக்காட்டு 2: ஹேமாவின் வயது மேரியின் வயதைபோல் 4 மடங்கு ஆகும். இந்த விவரத்தை குறிக்கும் இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டை எழுது.

தீர்வு : ஹேமாவின் வயது x வருடங்கள் என்க. மேலும் மேரியின் வயது y வருடங்கள் என்க. மேரியின் வயது y எனில் ஹேமாவின் வயது $4y$, கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் படி நாம் பெறுவது $x = 4y$

$\Rightarrow x - 4y = 0$ (எப்படி?)

எடுத்துக்காட்டு 3: ஓர் ஈரிலக்க எண், அந்த எண்ணின் இலக்கங்களை மாற்றி எழுதினால் கிடைக்கும் எண்ணைவிட 27 அதிகம். அதன் ஒன்றுகள் மற்றும் பத்துகள் இலக்கங்கள் முறையே x மற்றும் y எனில் மேற்சொன்ன கூற்றை குறிக்கும் நேரியச்சமன்பாட்டை எழுது.

தீர்வு : ஒன்றுகள் இலக்கம் x என்றும் பத்துகள் இலக்கம் y என்றும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளதால், அந்த எண் $10y + x$ஆகும்.

இலக்கங்களை மாற்றினால், கிடைக்கும் புதிய எண் $10x + y$ ஆகும். (ஓர் ஈரிலக்க எண்ணில் இலக்கங்களின் இடமதிப்பை நினைவு கூறுங்கள்). கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைதேர்தன்படி, சமன்பாடு

(ஈரிலக்கஎண்) – (இலக்கங்களை மாற்றி எழுதியதால் கிடைத்த எண்) = 27.

அதாவது, $10y + x - (10x + y) = 27$

$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$

$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$

$\Rightarrow y - x - 3 = 0$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0$ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4: பின்வரும் சமன்பாடுகளை $ax + by + c = 0$ வடிவில் எழுது. மேலும் a,b மற்றும் cன் மதிப்புகளை எழுது.

i) $3x + 4y = 5$ ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

iii) $3x = y$ iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

v) $3x - 7 = 0$

தீர்வு : (i) $3x + 4y = 5$ ஐ

$3x + 4y - 5 = 0$ என எழுதலாம்.

இங்கு $a = 3, b = 4, c = -5.$

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$ ஐ

$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ என எழுதலாம்..

இங்கு $a = 1, b = -\sqrt{3}, c = -5.$

(iii) $3x = y$ என்ற சமன்பாட்டை

$3x - y + 0 = 0$ என எழுதலாம்.

இங்கு $a = 3, b = -1, c = 0.$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$ என்ற சமன்பாட்டை

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0$ என எழுதலாம்.

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{-1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$ ஐ

$3x + 0.y - 7 = 0$ என எழுதலாம்.

$a = 3, b = 0, c = -7$

எடுத்துக்காட்டு 5: கீழே உள்ள ஒவ்வொன்றையும் $ax + by + c = 0$ வடிவில் எழுதி, $a, b,$ மற்றும் cன் மதிப்புகளை காண்க.

i) $x = -5$

ii) $y = 2$

iii) $2x = 3$

iv) $5y = -3$

தீர்வு :

வ.எண்.	கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு	$ax + by + c = 0$ வடிவில் எழுதுதல்	a, b, c களின் மதிப்புகள்		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	-2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	---	---

இதை செய்

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டை $ax + by + c = 0$ வடிவில் எழுதி, ஒவ்வொரு வகையிலும் a, b, c களின் மதிப்புகளை குறிப்பிடு.

   i) $3x + 2y = 9$ ii) $-2x + 3y = 6$ iii) $9x - 5y = 10$

   iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$ v) $2x = y$

பயிற்சி - 6.1

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டை $ax + by + c = 0$ வடிவில் எழுதி, ஒவ்வொரு வகையிலும் a, b, c களின் மதிப்புகளை குறிப்பிடு.

   i) $8x + 5y - 3 = 0$ ii) $28x - 35y = -7$ iii) $93x = 12 - 15y$

   iv) $2x = -5y$ v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$ vi) $y = \frac{-3}{2}x$

   vii) $3x + 5y = 12$

2. பின்வருவனவற்றை $ax + by + c = 0$ வடிவில் எழுதி, a, b, c களின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

   i) $2x = 5$ ii) $y - 2 = 0$ iii) $\frac{y}{7} = 3$ iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகளை இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச்சமன்பாடாக எழுது.
   (i) இரண்டு எண்களின் கூடுதல் 34.
   (ii) ஒரு பென்சிலின் விலை ஒரு பேனாவின் பாதிவிலையை விட ₹5 குறைவு.
   (iii) கவிதாவின் மதிப்பெண் சிந்துவின் மதிப்பெண்ணைப் போல் இருமடங்கைவிட 10 அதிகம்.
   (iv) ஒரு பென்சிலின் விலை ₹2 மற்றும் ஒரு பேனாவின் விலை ₹15. ஷீலா, தான் வாங்கிய பென்சில் மற்றும் பேனாவிற்கு ₹100ஐ கொடுத்தாள்.
   (v) 9ஆம் வகுப்பு மாணவிகளான யாமினி மற்றும் பாத்திமா இருவரும் சேர்ந்து பிரதமர் நிவாரண நிதிக்கு ₹200 கொடுத்தார்கள்.
   (vi) ஓர் ஈரிலக்க எண் மற்றும் அதன் இலக்கங்களை மாற்றி எழுதினால் கிடைக்கும் எண் ஆகியவற்றின் கூடுதல் 121. ஒன்றுகள் இடம் மற்றும் பத்துகள் இடம் முறையை ‘x’ மற்றும் ‘y’ ஆகும்.

6.3 இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டின் தீர்வு

ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடு ஒரே ஒரு தீர்வை மட்டும் பெற்றிருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$3x - 4 = 8$? என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு என்ன?

$3x - 2y = 5$ என்ற சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டின் தீர்வை பற்றி நீ என்ன நினைக்கிறாய்? தீர்வில் ஒரே ஒரு மதிப்பு மட்டும் கிடைக்குமா? அல்லது அதிகம் கிடைக்குமா? விவாதிக்கலாம்.

$x = 3$ என்பது இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு என்று உன்னால் கூற முடியுமா?

$x = 3$ என்று சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு நாம் சரிபார்க்கலாம்.

நாம் பெறுவது $3(3) - 2y = 5$

$9 - 2y = 5$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வை நாம் இன்னும் காண முடியவில்லை. ஆகவே, தீர்வை தெரிந்துகொள்வதற்கு, மேலும் x ன் மதிப்போடு, y ன் மதிப்பும் நமக்கு தேவையாய் இருக்கிறது. மேற்கண்ட சமன்பாடு $9 - 2y = 5$ லிருந்து yன் மதிப்பை நாம் பெறலாம். $\Rightarrow 2y = 4$ (அ) $y = 2$

$3x - 2y = 5$ என்ற சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்யும் x மற்றும் y ன் மதிப்புகள் $x = 3$, $y = 2$ ஆகும். எனவே இருமாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்ய ‘x’க்கு ஒரு மதிப்பு மற்றும் yக்கு ஒரு மதிப்பு என்று இரண்டு மதிப்புகள் தேவைப்படுகிறது.

ஆகவே இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்யும் ஜோடி மதிப்புகளான ‘x’ மற்றும் ‘y’ அதன் தீர்வு எனப்படும்.

$3x - 2y = 5$ ன் தீர்வு $x = 3, y = 2$ என்பதை அறியலாம். இதை வரிசை ஜோடியாக (3, 2), ‘x’ மதிப்பு முதலிலும் ‘y’ மதிப்பு பின்னரும் எழுதலாம். சமன்பாட்டிற்கு வேறு ஏதேனும் தீர்வுகள் இருக்கின்றதா? $x = 4$ ஐ எடுத்துக்கொள். அதை $3x - 2y = 5$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிடு. சமன்பாடு $12 - 2y = 5$ என்று கிடைக்கும். இது ஒரு மாறியை கொண்ட ஒரு சமன்பாடாகும். இதை தீர்த்தால் நாம் பெறுவது.

$y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}$, எனவே $\left(4, \frac{7}{2}\right)$ $3x - 2y = 5$ ன் மற்றொரு தீர்வாகும்.

$3x - 2y = 5$க்கு மேலும் சில தீர்வுகளை உன்னால் காண முடியுமா? (1, −1) மற்றொரு தீர்வா என சரிபார்?

ஆகவே இரு மாறிகளில் உள்ள ஒரு நேரியச்சமன்பாட்டிற்கு பல தீர்வுகளை நாம் காணலாம்.

குறிப்பு : இரண்டு தீர்வுகள் பெற, சுலபமான முறை $x = 0$ எனக்கொண்டு, அதற்கேற்ற yன் மதிப்பை பெறலாம். இவ்வாறே $y = 0$ எனக்கொண்டு, அதற்கேற்ற xன் மதிப்பை பெறலாம்.

முயன்று பார்

மேற்கண்ட சமன்பாட்டிற்கு மேலும் 5ஜோடி மதிப்புகள் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 6: $4x + y = 9$. ன் வெவ்வேறான நான்கு தீர்வுகள் காண்க. (அட்டவணையில் தேவையான இடத்தில் நிரப்புக).

தீர்வு :

வ.எண்.	x அல்லது yமாறியின் மதிப்பின் வாய்ப்பு	சுருக்குதல்		தீர்வு
1.	$x = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 0 + y = 9$ $\Rightarrow y = 9$	(0,9)
2.	$y = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4x + 0 = 9$ $\Rightarrow 4x = 9$ $\Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 1 + y = 9$ $\Rightarrow 4 + y = 9$ $\Rightarrow y = 5$	——
4.	$x = -1$		———	$(-1, 13)$

∴ (0, 9), $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, (1, 5) மற்றும் (−1, 13) ஆகியவை மேலே உள்ள சமன்பாட்டின் சில தீர்வுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7: கீழ்கண்டவற்றில் $x + 2y = 4$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எவை என சரிபார். (அட்டவணையில் தேவையானவற்றை நிரப்பு)

i) $(0, 2)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

v) $(1, 1)$ vi) $(-2, 3)$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஜோடிகளை நாம் பிரதியிடும் போது LHS = RHS எனில், அது தீர்வு என்று நமக்குத் தெரியும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x + 2y = 4$

வ. எண்.	ஜோடி மதிப்புகள்	LHSன் மதிப்பு	RHSன் மதிப்பு	LHS & RHS இடையே உள்ள தொடர்பு	தீர்வு/ தீர்வுஅற்றவை
1.	$(0, 2)$	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	LHS=RHS	$(0, 2)$ **தீர்வு ஆகும்.**
2.	$(2, 0)$	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4	......	$(0, 2)$ **தீர்வு இல்லை.**
3.	$(4, 0)$	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	LHS = RHS	___
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	___	LHS $\neq$ RHS	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ **தீர்வு இல்லை.**
5.	$(1, 1)$	___	4	LHS $\neq$ RHS	$(1, 1)$ **தீர்வு இல்லை.**
6.	___	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	LHS = RHS	(-2, 3) **தீர்வு ஆகும்**

எடுத்துக்காட்டு 8: $5x - 7y = k$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x = 3, y = 2$ எனில் k ன் மதிப்பு காண்க. மேலும் k ன் மதிப்பை பிரதியிட்டு, புதிய சமன்பாட்டை எழுது.

தீர்வு : $5x - 7y = k$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x = 3, y = 2$ ஆதலால்,

$$5 \times 3 - 7 \times 2 = k$$
$$\Rightarrow 15 - 14 = k$$
$$\Rightarrow 1 = k$$
$$\therefore k = 1$$

$\therefore$ புதிய சமன்பாடு $5x - 7y = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 9: $5x + 3y - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x = 2k + 1$ மற்றும் $y = k$ எனில் kன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : $x = 2k + 1$ மற்றும் $y = k$ ஆகியவை $5x + 3y - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

x மற்றும் y களின் மதிப்புகளை சமன்பாட்டில் பிரதியிடும் போது, நாம் பெறுவது.

$$\Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 = 0$$
$$\Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 = 0$$

$\Rightarrow 13k - 2 = 0$ (இது ஒரு மாறியில் நேரியச்சமன்பாடாகும்).

$$\Rightarrow 13k = 2$$
$$k = \frac{2}{13}$$

பயிற்சி- 6.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் மூன்று வெவ்வேறான தீர்வுகளை காண்க.
   i) $3x + 4y = 7$ ii) $y = 6x$ iii) $2x - y = 7$
   iv) $13x - 12y = 25$ v) $10x + 11y = 21$ vi) $x + y = 0$
2. $(0, a)$ மற்றும் $(b, 0)$ ஆகியவை பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் எனில் 'a' மற்றும் 'b' ஐ காண்க.
   i) $8x - y = 34$ ii) $3x = 7y - 21$ iii) $5x - 2y + 3 = 0$
3. பின்வருவனவற்றில் எது $2x - 5y = 10$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு என்று சரிபார்.
   i) $(0, 2)$ ii) $(0, -2)$ iii) $(5, 0)$ iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
4. $2x + 3y = k$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = 2, y = 1$ எனில் kன் மதிப்பு காண்க. புதிய சமன்பாட்டிற்கு மேலும் இரண்டு தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

5. $x = 2 - \alpha$ மற்றும் $y = 2 + \alpha$ ஆகியவை $3x - 2y + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு எனில் α ன் மதிப்பு காண்க. மேலும் கிடைத்த சமன்பாட்டிற்கு மேலும் மூன்று தீர்வுகளைக் காண்க.
6. $3x + ay = 6$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = 1, y = 1$ எனில் 'a'ன் மதிப்பு காண்க.
7. இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச்சமன்பாடு ஐந்தினை எழுதி, ஒவ்வொன்றிற்கும் மூன்று தீர்வுகளைக் கண்டுபிடி.

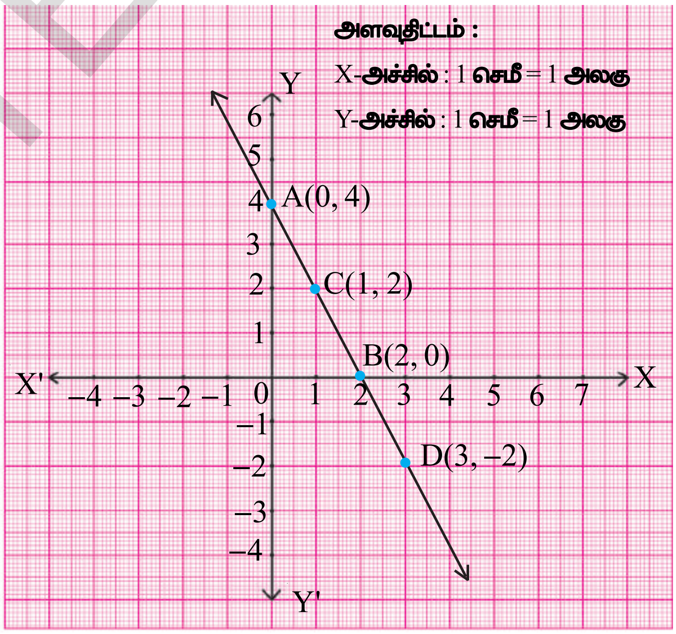
6.4 இரு மாறிகள் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டின் வரைபடம்

இரு மாறிகள் கொண்ட ஒவ்வொரு நேரியச் சமன்பாடும் அதிக தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும் என்பதை நாம் கற்றிருக்கிறோம். ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டின் சாத்தியமான தீர்வுகளை எடுத்துக்கொண்டால், அவற்றை வரைபடத்தில் குறிக்க முடியுமா? ஒவ்வொரு தீர்வும் ஒரு ஜோடி மெய்யெண்கள் என்று நமக்குத் தெரியுமாதலால் அதை புள்ளியாக வரைபடத்தில் குறிக்கலாம்.

$4 = 2x + y$ என்ற இருமாறிகள் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டை கருதுவோம். இதை $y = 4 - 2x$ என்றும் எழுதலாம். இந்த சமன்பாட்டிற்கு x ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு 'y' ன் மதிப்பை நாம் காணமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக $x = 2$ எனில் $y = 0$. எனவே (2,0) ஒரு தீர்வு ஆகும். இவ்வாறாக நம்மால் முடிந்த அளவு தீர்வுகளை காணலாம். இந்த எல்லா தீர்வுகளையும் பின்வரும் அட்டவணையில் xன் மதிப்பிற்கு தகுந்த y ன் மதிப்புகளை ஒன்றின் கீழ் ஒன்றாக எழுதவேண்டும்.

தீர்வுகளின் அட்டவணை:

x	$y = 4 - 2x$	(x, y)
0	$y = 4 - 2(0) = 4$	(0, 4)
2	$y = 4 - 2(2) = 0$	(2, 0)
1	$y = 4 - 2(1) = 2$	(1, 2)
3	$y = 4 - 2(3) = -2$	(3, –2)



*x*ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் yக்கு ஒரு மதிப்பு இருப்பதை நாம் பார்க்கலாம். *x*-ன் மதிப்புகளை x-அச்சிலும், yன் மதிப்புகளை yஅச்சிலும் நாம் எடுக்கலாம். (0, 4), (2, 0), (1, 2) மற்றும் (3, -2) புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கலாம். இவற்றில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைத்தால் நமக்கு AD என்னும் நேர்கோடு கிடைக்கிறது.

மற்ற தீர்வுகளும் AB ன் மேல் அமையுமா? இப்போது கோட்டின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (4,-4)ஐ எடுத்துக்கொள். இது தீர்வாகுமா?

$x = 0$ எனில்
$y = 4 - 2x = 4 - 2(0) = 4$
$x = 2$ எனில்
$y = 4 - 2(2) = 0$

ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை ADன் மேல் எடுத்துகொண்டு அந்த அச்சு தூரங்கள் சமன்பாட்டை நிவர்த்திபடுத்துகிறதா? இல்லையா? என்று சரிபார்.

AD கோட்டின் மேல் அமையாத புள்ளி (1, 1)ஐ எடுத்துக்கொள். அது சமன்பாட்டை நிவர்த்திபடுத்துகிறதா? AD கோட்டின் மேல் அமையாத ஆனால் சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்யும் புள்ளியை உன்னால் காணமுடியுமா?

நாம் உற்றுநோக்கியதை பட்டியலிடுவோம்:

1. நேரியச்சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு தீர்வும் அச்சமன்பாட்டிற்கான கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளியாக குறிக்கப்படும்.
2. அந்த கோட்டின் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் நேரியச்சமன்பாட்டின் தீர்வாக இருக்கும்.
3. அந்த கோட்டின் மேல் அமையாத எந்த ஒரு புள்ளியும் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வாக இருக்காது. அதன் மறுதலையும் அப்படியே ஆகும்.
4. ஒரு நேரியச்சமன்பாட்டின் தீர்வாக உள்ள புள்ளிகளின் தொகுப்பே, அச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஆகும்.

இரு மாறிகளை கொண்ட ஒரு நேரியச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடாகும் என்பதை அறிக. எனவே $ax + by + c = 0$ (a , b ம் ஒரே சமயத்தில் பூஜ்ஜியமாக இருக்காது) என்பது இரு மாறிகளை கொண்ட ஒரு நேரியச்சமன்பாடு என்று அழைக்கப்படும்.

6.4.1 ஒரு நேரியச்சமன்பாட்டின் வரைபடத்தை வரைவது எப்படி?

படிகள் :

1. நேரியச்சமன்பாட்டை எழுது.
2. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $x = 0$ என்று வைத்து, அதற்கேற்ற y ன் மதிப்பைகாண்.
3. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $y=0$ என்று வைத்து, அதற்கேற்ற x ன் மதிப்பை காண்.
4. xன் மதிப்பையும், அதற்கேற்ற yன் மதிப்பையும் முறையே x மற்றும் yன் அச்சு தூரங்களாக (x, y) வடிவில் எழுது.
5. புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறி.
6. இந்த புள்ளிகளைச் சேர்.

எனவே வரையப்பட்ட கோடு, இரு மாறிகளை கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஆகும். கோடு சரியா என்பதை சரிபார்க்க, இரண்டிற்கு அதிகமான புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வது நல்லது. அதிக தீர்வுகளை காண கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் xக்கு வெவ்வேறான மதிப்புகளை பிரதியிட்டு அதற்கேற்ற yன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

முயன்று பார்

ஒரு வரைபடத்தாளில் (2,4) என்ற புள்ளியை குறித்து, அதன் வழியே ஒருநேர்கோடு வரை.

1. (2, 4) புள்ளி வழியே மற்றொரு நேர்கோட்டை வரைய முடியுமா?
2. இவ்வாறாக எத்தனை கோடுகள் வரையமுடியும்?
3. (2, 4)ஐ தீர்வாக உடைய இரண்டு மாறிகள் கொண்ட நேரியச்சமன்பாடு எத்தனை இருக்கும்?

எடுத்துக்காட்டு 10: $y - 2x = 4$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைந்து, பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளி.

(i) (2, 8) என்ற புள்ளி கோட்டின் மேல் அமைகிறதா? (2, 8) சமன்பாட்டின் தீர்வாகுமா? (2, 8)ஐ சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு சரிபார்.

(ii) (4, 2) என்ற புள்ளி கோட்டின் மேல் அமைகிறதா? (4, 2) சமன்பாட்டின் தீர்வாகுமா? இயற்கணித முறையிலும் சரிபார்.

(iii) வரைபடத்திலிருந்து சமன்பாட்டின் தீர்வாக உள்ள மூன்று புள்ளிகளையும், தீர்வு அல்லாத மூன்று புள்ளிகளையும் காண்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$

தீர்வுகளின் அட்டவணை

x	y = 2x + 4	(x, y)	புள்ளி
0	$y = 2(0) + 4 = 4$	(0, 4)	A(0, 4)
–2	$y = 2(-2)+4 = 0$	(–2, 0)	B(–2, 0)
1	$y = 2(1) + 4 = 6$	(1, 6)	C(1, 6)

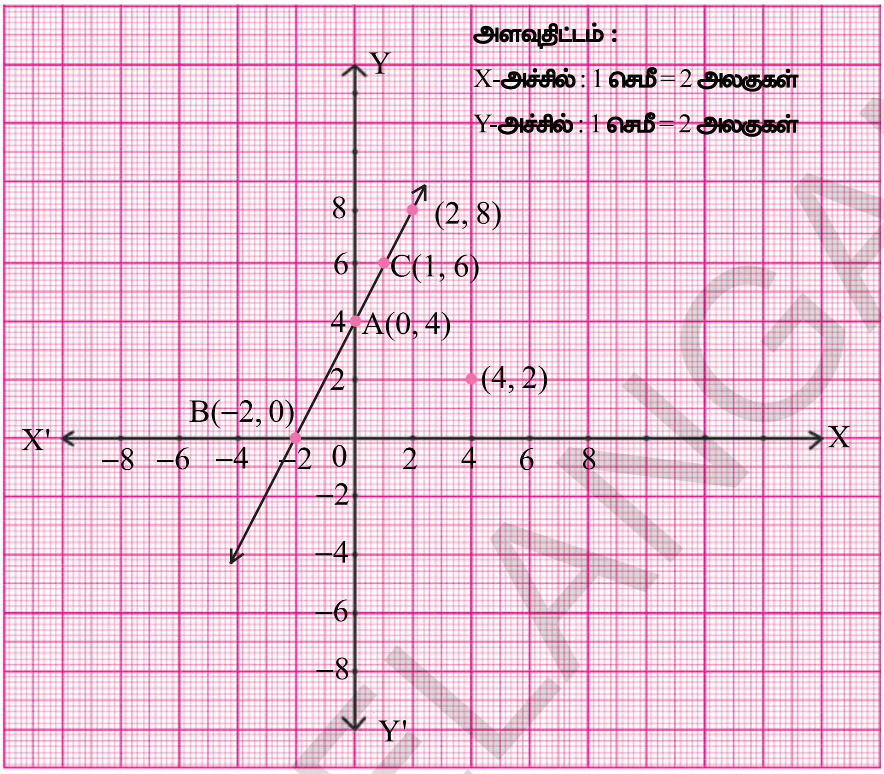
A, B மற்றும் C புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து. அவற்றைச் சேர். படத்தில் காட்டியவாறு BC எனும் நேர்கோடு கிடைக்கும். இக்கோடே நமக்குத் தேவையான $y - 2x = 4$ என்ற சமன்பாட்டின் கோடாகும்.

(i) (2, 8) புள்ளியை வரைபடத்தில் குறி. வரைபடத்திலிருந்து (2,8) என்ற புள்ளி கோட்டின் மேல் இருப்பது தெளிவாக தெரிகிறது.

இயற்கணித முறையில் சரிபார்த்தல்:

(2, 8)ஐ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிடும் போது நாம் பெறுவது.

$LHS = y - 2x = 8 - 2x2 = 8 - 4 = 4 = RHS$, எனவே (2,8) ஒரு தீர்வாகும்.



(ii) (4, 2) என்ற புள்ளியை வரைபடத்தில் குறி. (4,2) கோட்டின் மேல் அமையவில்லை என்பதை நீ காணலாம்.

இயற்கணித முறையில் சரிபார்த்தல்:

(4,2)ஐ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதின் மூலம் நாம் பெறுவது

$$\text{LHS} = y - 2x = 2 - 2\times 4 = 2 - 8 = -6 \neq \text{RHS},$$ எனவே (4, 2) தீர்வு அல்ல.

(iii) கோட்டின் மேல் உள்ள ஒவ்வொருபுள்ளியும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுஆகும் என்று நமக்குத் தெரியும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் தீர்வுகளாக உள்ள ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகளை நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம். எ.கா. :(-4, -4) மேலும் கோட்டின் மேல் அமையாத புள்ளி கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு அல்ல என்பது நமக்குத் தெரியும். ஆகவே $y - 2x = 4$ன் தீர்வாக இல்லாத கோட்டின் மேல் அமையாத மூன்றுபுள்ளிகளை நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எ.கா : (i) (1, 5); ....; ....

எடுத்துக்காட்டு 11: $x - 2y = 3$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக.

வரைபடத்திலிருந்து (i) $x = -5$ எனில் தீர்வு (x, y)

(ii) $y = 0$ எனில் தீர்வு (x, y)

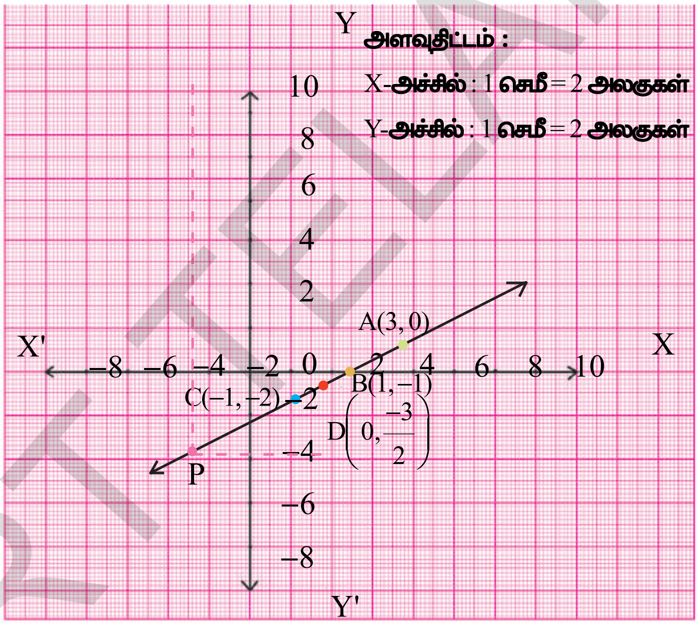
(iii) $x = 0$ எனில் தீர்வு (x, y) ஆகியவற்றை காண்.

தீர்வு : $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$

தீர்வுகளின் அட்டவணை

x	$y=\frac{x-3}{2}$	(x, y)	புள்ளி
3	$y=\frac{3-3}{2}=0$	(3, 0)	A
1	$y=\frac{1-3}{2}=-1$	(1, – 1)	B
– 1	$y=\frac{-1-3}{2}=-2$	(– 1, – 2)	C

A, B, C புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவைகளை சேர்க்கும்போது நமக்கு படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கிறது. இக்கோடு $x-2y=3$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஆகும்.



(i) $x=-5$ எனில் தீர்வு (x, y) ஐ காணவேண்டும். அதாவது x-அச்சுதூரம் '– 5'ஆகவும். நேர்கோட்டின் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியை நாம் காணவேண்டும். அந்த புள்ளியை காண $x=-5$ல் y-அச்சுக்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். (படத்தில் புள்ளி கோடாக காட்டப்பட்டுள்ளது). இந்த கோடு படத்தில் 'P'ல் வெட்டுகிறது. அங்கிருந்து X-அச்சிற்கு இணையாக மற்றொரு கோடு வரைகிறோம். அது Y-அச்சை $y=-4$ ல் வெட்டுகிறது.

பின் அச்சுதூரங்கள் = (– 5, – 4)

P(– 5, – 4) $x-2y=3$, என்று கோட்டின் மேல் அமைவதால், அது $x-2y=3$ன் தீர்வாகும்.

(ii) y=0 எனில் தீர்வு (x, y)ஐ காணவேண்டும்.

y = 0, ஆதலால், (x, 0) எனும்புள்ளி X-அச்சின் மேல் அமையும். ஆகவே X-அச்சின் மேல் அமைவதும் $x-2y=3$ என்ற வரைபடத்தின் மேல் அமைவதுமான ஒரு புள்ளியை நாம் காணவேண்டும்.

வரைபடத்திலிருந்து (3, 0) என்பது தேவையான புள்ளி என்பது தெளிவாகிறது. ஆகவே (3, 0) தீர்வாகும்.

(iii) $x = 0$ ல் தீர்வு (x, y) ஐ காண வேண்டும்.

$x = 0$ ஆதலால், $(0, y)$ என்ற புள்ளி Y-அச்சின் மேல் அமையும். எனவே Y-அச்சின் மேல் அமைவதும் மற்றும் $x - 2y = 3$ என்ற வரைபடத்தின் மேல் அமைவதுமான புள்ளியை நாம் காணவேண்டும்.

வரைபடத்திலிருந்து $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ என்பது இந்த புள்ளி என்பது தெளிவாகிறது.

ஆகவே தீர்வு $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ ஆகும்.

பயிற்சி 6.3

1. கீழ்கண்ட நேரியச்சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக.

   i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. கீழ்கண்ட நேரியச்சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைந்து, பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.

   i) $y = x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

   i) எல்லா சமன்பாடுகளும் $y = mx$, (இங்கு m ஒரு மெய்யெண்) வடிவில் உள்ளனவா?

   ii) எல்லா வரைபடங்களும் ஆதிபுள்ளி வழியாகச் செல்கிறதா?

   iii) இந்த வரைபடங்களைப் பற்றி நீ என்ன முடிவெடுக்க முடியும்?

3. $2x + 3y = 11$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக. இதிலிருந்து $x = 1$ எனில் y ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

4. $y - x = 2$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து

   i) $x = 4$ எனில் y ன் மதிப்பு,

   ii) $y = -3$ எனில் x ன் மதிப்பு காண்க.

5. $2x+3y=12$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து தீர்வுகள் காண்க.

   i) எப்புள்ளியின் y அச்சுதூரம் 3

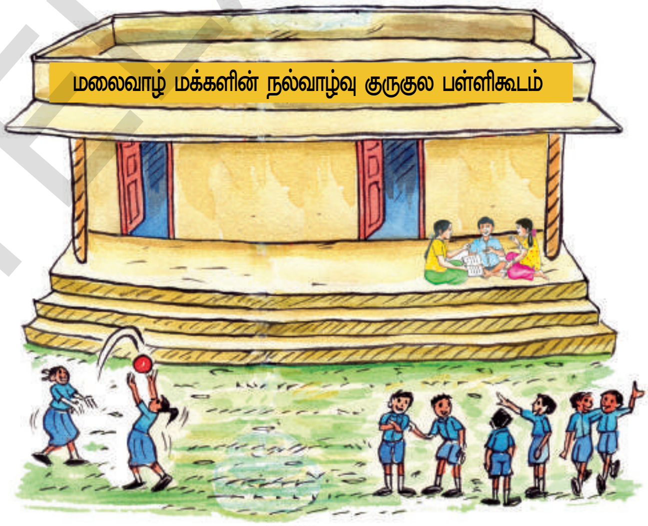
   ii) எப்புள்ளியின் x அச்சுதூரம் -3

6. கீழே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக. வரைபடம் ஆயத்தொலை அச்சுகளை வெட்டும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.

   i) $6x - 3y = 12$ ii) $-x + 4y = 8$ iii) $3x + 2y + 6 = 0$

7. ஒன்பதாம் வகுப்பு மாணவிகளான ரஜியா மற்றும் பிரீத்தி ஆகிய இருவரும் சேர்ந்து இயற்கை சீற்றங்களால் பாதிக்கப்பட்டவர்களுக்காக பிரதமர் நிவாரண நிதிக்காக ₹1000 வசூல் செய்தார்கள். நேரியச்சமன்பாட்டை எழுதி, இக்கூற்றை விளக்க ஒரு வரைபடம் வரைக.
8. கோபால் என்பவர் மொத்த பரப்பு 5000சதுர மீட்டர்கள் உள்ள இரண்டு வயல்களில் கோதுமை மற்றும் நெல்லை விதைத்தார். நேரியச் சமன்பாட்டை எழுதி, இதை குறிப்பதற்கான வரைபடம் வரைக.
9. 6கி.கி. நிறை உள்ள ஒரு பொருளின் மேல் கொடுக்கப்படும் விசை, அப்பொருளால் ஏற்படுத்தப்படும் முடுக்கத்திற்கு நேர்விகிதசமத்தில் இருக்கிறது. இந்த உற்றுநோக்கலுக்கான ஒரு சமன்பாட்டை எழுதி, அதன் வரைபடம் வரைக.
10. ஒரு மலையில் இருந்து ஒரு கல் விழுகிறது. அதன் திசைவேகம் $V = 9.8t$. என்னும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது. இதற்கான வரைபடம் வரைக. விழஆரம்பித்த 4 வினாடிகளுக்கு பிறகு கல்லின் திசைவேகத்தை கண்டுபிடி.

எடுத்துக்காட்டு 12: ஒரு பள்ளியில் உள்ள மாணவர்களில் 25% சிறுமிகள் மற்றவர்கள் சிறுவர்கள். இதற்கு ஒரு சமன்பாடு அமைத்து, வரைபடம் வரை. வரைபடத்தை உற்றுநோக்கி, பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.



(i) சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை 25 எனில் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.

(ii) சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை 45 எனில் சிறுமிகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.

(iii) சிறுவர்களின் எண்ணிக்கைக்கு மூன்று வெவ்வேறு மதிப்புகள் எடுத்து சிறுமிகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி. இவ்வாறே சிறுமிகளின் வெவ்வேறு மூன்று மதிப்புகளுக்கு சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி?

தீர்வு : சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை x என்றும் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை y என்றும் கொள்க.

மொத்த மாணவர்கள் = $x + y$

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் படி சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை = மொத்தமாணவர்களில் 25%

$$x = (x + y) \text{ ல் } 25\%$$

$$= (x + y) \text{ ல் } \frac{25}{100} = \frac{1}{4}(x + y)$$

$$x = \frac{1}{4}(x+y)$$

$$4x = x + y$$

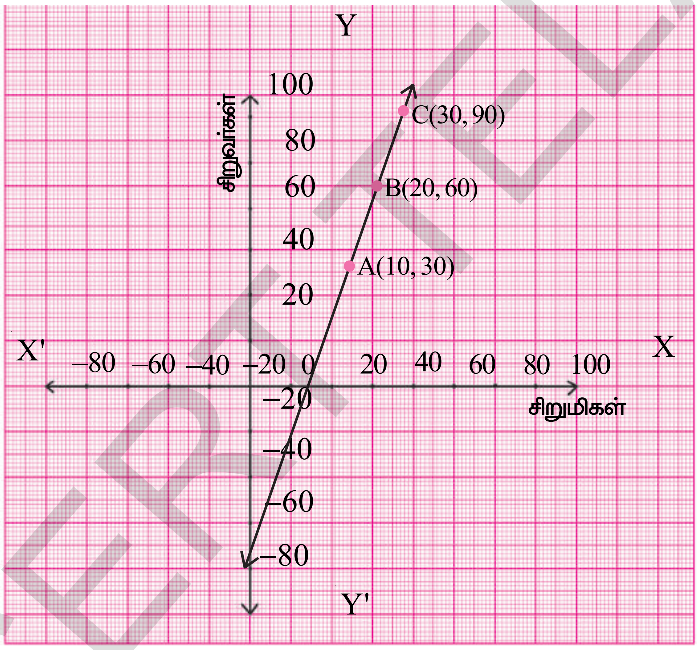
$$3x = y$$

தேவையான சமன்பாடு $3x - y = 0$ அல்லது $3x = y$.

தீர்வுகளின் அட்டவணை

x	$y = 3x$	(x, y)	புள்ளி
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

வரைபடத்தில் A, B, C புள்ளிகளை குறித்து அவைகளை சேர்த்தால் நாம் கீழே படத்தில் காட்டியவாறு நேர்க்கோட்டை பெறுகிறோம்.



அளவுதிட்டம் :

X-அச்சில் : 1 செமீ = 20 அலகுகள்

Y-அச்சில் : 1 செமீ = 20 அலகுகள்

வரைபடத்திலிருந்து நாம் காண்பது

(i) சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை 25 எனில் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை 75.

(ii) சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை 45 எனில் சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை 15.

(iii) நீ விரும்பும் சிறுமிகளின் எண்ணிக்கையை தேர்ந்தெடுத்து, அதற்கு தகுந்த சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.

இவ்வாறே நீ விரும்பும் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையை தேர்ந்தெடுத்து அதற்கேற்ற சிறுமிகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி. இங்கு வரைபடம் மற்றும் சமன்பாட்டை நீ கவனித்தாயா? அந்த கோடு ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்கிறது. $y=mx$, m ஒரு மெய்யெண், $y=mx$ வடிவில் உள்ள சமன்பாடு ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13: கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு வரைபடத்திற்கும், நான்கு நேரியச்சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடத்தை குறிக்கும் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

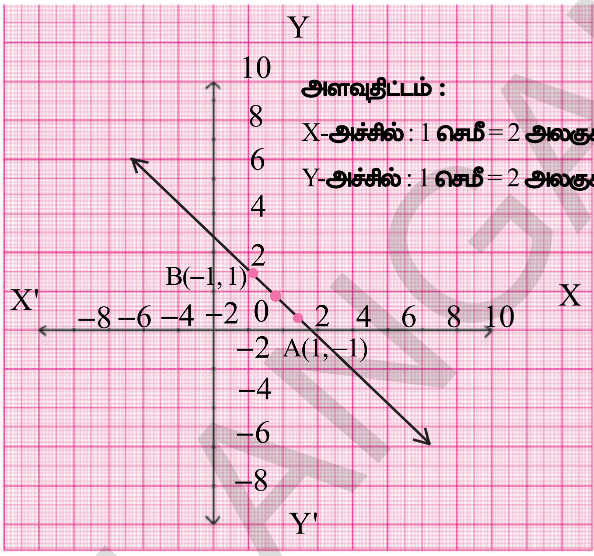
(i) சமன்பாடுகள்

A) $y = x$

B) $x + y = 0$

C) $y = 2x$

D) $2 + 3y = 7x$



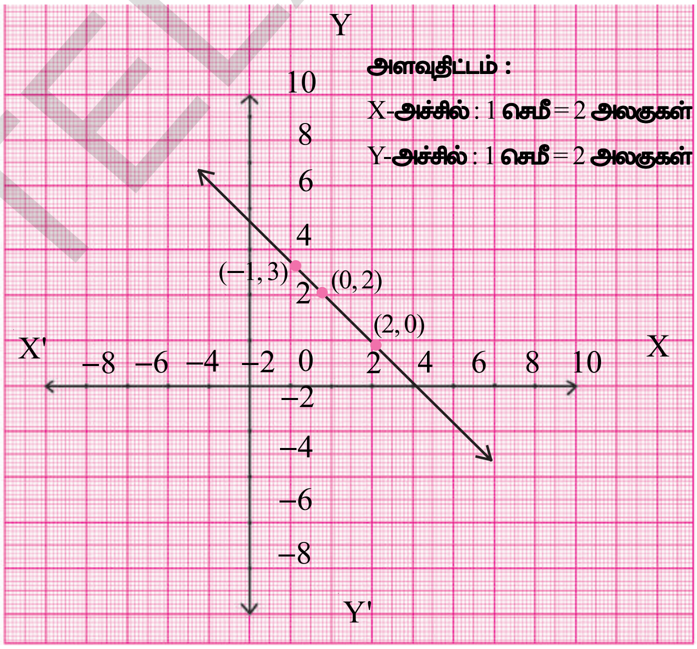
(ii) சமன்பாடுகள்

A) $y = x + 2$

B) $y = x - 2$

C) $y = -x + 2$

D) $x + 2y = 6$



தீர்வு :

(i) வரைபடத்திலிருந்து (1, –1) (0, 0) (–1, 1) ஆகியவை ஒரே கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளதை பார்க்கலாம். இவைகள் தேவையான கோட்டின் தீர்வுகள் ஆகும். அதாவது இந்த புள்ளிகளை தேவையான கோட்டில் பிரதியிடும் போது அவை நிவர்த்திசெய்ய வேண்டும். இந்த ஜோடிகளால் நிவர்த்தி செய்யப்படும் சமன்பாட்டை நாம் காணவேண்டும். (1, –1)ஐ முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிடும் போது அது நிவர்த்தி செய்யப்படவில்லை. ஆகவே $y = x$ தேவையான சமன்பாடு இல்லை.

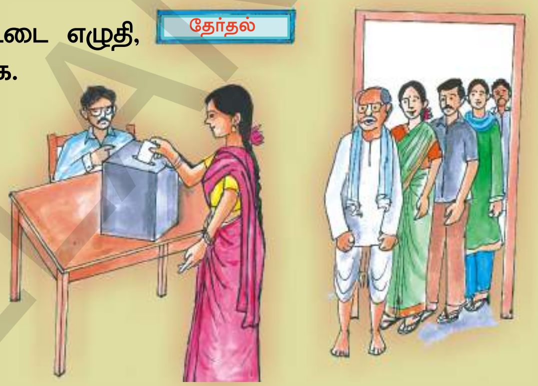
(1, –1)ஐ $x + y = 0$ ல் பிரதியிடும்போது அது சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்கிறது. உண்மையில் எல்லா மூன்று புள்ளிகளும் இரண்டாவது சமன்பாட்டை நிவர்த்திசெய்கிறது. ஆகவே $x + y = 0$ தேவையான சமன்பாடாகும்.

$y = 2x$ மற்றும் $2 + 3y = 7x$ ஆகியவையும் (1, –1) (0, 0) மற்றும் (–1, 1) ஆகிய புள்ளிகளால் நிவர்த்திசெய்யப்படுகிறதா என்று சரிபார்க்கலாம். மூன்று ஜோடிகளில், ஒரு ஜோடி கூட நிவர்த்தி செய்யவில்லை என்பதை நாம் காணலாம். ஆகவே அவைகள் தேவையான சமன்பாடுகள் இல்லை

(ii) (2, 0), (0, 2) மேலும் (-1, 3) ஆகியவை கோட்டின்மேல் உள்ள புள்ளிகள். இந்த புள்ளிகள் அனைத்தும் முதல் மற்றும் இரண்டாவது சமன்பாடுகளை நிவர்த்தி செய்யவில்லை. மூன்றாவது சமன்பாடு $y = -x + 2$ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். மேலே உள்ள மூன்று புள்ளிகளை சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது, அது நிவர்த்தி செய்யப்படுகிறது. ஆகவே $y = -x + 2$ என்பது தேவையான சமன்பாடு ஆகும். இந்த புள்ளிகள் $x + 2y = 6$ என்ற சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்கிறதா என்று சரிபார்.

பயிற்சி 6.4

1. ஒரு தேர்தலில் 60% வாக்காளர்கள் வாக்களித்தார்கள். இதற்கான சமன்பாட்டை எழுதி, இந்த விவரத்திற்கான வரைபடம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றை காண்க.



(i) 1200 வாக்காளர்கள் வாக்களித்தார்கள் எனில் மொத்த வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) மொத்த வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை 800 எனில் வாக்களித்தவர்களின் எண்ணிக்கை.

(குறிப்பு : வாக்களித்தவர்களின் எண்ணிக்கை ‘x’ மற்றும் மொத்த வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை ‘y’ எனில் $x = y$ல் 60%).

2. ரூபி பிறந்தபொழுது அவள் தந்தையின் வயது 25 வருடங்கள். இந்த விவரத்திற்கு ஒரு சமன்பாடு எழுதி, வரைபடம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றை காண்க.

(i) ரூபியின் வயது 25 வருடங்கள் எனில் அவள் தந்தையின் வயது.

(ii) தந்தையின் வயது 40 வருடங்கள் எனில் ரூபியின் வயது.

3. ஒரு ஆட்டோவில் முதல் கிலோமீட்டக்கு ₹15ம், அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு கிலோ மீட்டருக்கும் ₹8ம் வசூலிக்கப்படுகிறது. ‘x’ கிலோமீட்டர் தூரத்திற்கு ₹‘y’ கொடுக்கப்படுகிறது. இந்த விவரத்திற்கு ஒரு சமன்பாடு எழுதி, வரைபடம் வரைக. வரைபடத்தின் உதவியோடு ₹55 கொடுக்கப்பட்டால் பயணம் செய்த தூரம் காண்க. 7கி.மீக்கு எவ்வளவு பணம் கொடுக்கவேண்டும்.

4. ஒரு நடமாடும் நூலகம், முதல் மூன்று நாட்களுக்கு ஒரு நிலையான கட்டணமும் அதற்கடுத்த ஒவ்வொரு நாளுக்கும் கூடுதல் கட்டணமும் வசூலிக்கிறது. ஜான் 7 நாட்களுக்கு ₹27 கொடுத்தார். நிலையான கட்டணம் ₹x மற்றும் அடுத்தடுத்த நாட்களுக்கான கூடுதல் கட்டணம் ₹y எனில், இந்த விவரங்களுக்கு ஒரு சமன்பாடு எழுதி, வரைபடம் வரைக. நிலையான மொத்ததொகை ₹7 எனில் ஒவ்வொரு நாளும் கூடுதலாக கொடுத்த பணத்தையும், ஒவ்வொரு நாளும் கூடுதலாக கொடுத்த பணம் ₹4 எனில் முதல் மூன்று நாட்களுக்கு கொடுக்கவேண்டிய மொத்த பணத்தையும் கணக்கிடு.

5. ஹைதராபாத் இரயில் நிலையத்தில் ஒரு காரை நிறுத்துவதற்கு கட்டணமாக முதல் இரண்டு மணிநேரத்திற்கு ₹50ம், அடுத்த ஒவ்வொரு மணிநேரத்திற்கு ₹10ம் வசூலிக்கப்படுகிறது. இதற்கு ஒரு சமன்பாடு எழுதி, வரைபடம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து பின்வரும் நேரங்களுக்கான கட்டணங்களை கண்டுபிடி.
   (i) மூன்று மணி நேரங்கள் (ii) ஆறு மணிநேரங்களுக்கு
   (iii) ரேகா, நிறுத்தும் கட்டணமாக ₹80ஐ செலுத்தினாள் எனில் அவள் எவ்வளவு நேரம் காரை நிறுத்தினாள்?

6. மீரா, 60கி.மீ/ம என்ற சீரான வேகத்தில் காரை ஓட்டினாள். தூரம்–காலம் வரைபடம் வரை. வரைபடத்திலிருந்து, கீழ்கண்ட நேரங்களில் மீரா பயணம் செய்த தூரத்தை கண்டுபிடி.

   (i) $1\frac{1}{2}$ மணிநேரம் (ii) 2 மணிநேரம் (iii) $3\frac{1}{2}$ மணிநேரம்

7. நீரில் ஹைட்ரஜன் மற்றும் ஆக்ஸிஜனின் மூலக்கூறு எடைகளின் விகிதம் 1:8. ஹைட்ரஜன் மற்றும் ஆக்ஸிஜன் இடையே ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி, வரைபடம் வரை. வரைபடத்திலிருந்து ஆக்ஸிஜன் 12கிராம்கள் எனில் ஹைட்ரஜன் அளவையும் ஹைட்ரஜன் $\frac{3}{2}$ கிராம்கள் எனில் ஆக்ஸிஜன் அளவையும் கண்டுபிடி?

   (குறிப்பு : ஹைட்ரஜன் மற்றும் ஆக்ஸிஜன் அளவுகள் முறையே 'x' மற்றும் 'y' எனில் $x : y = 1:8 \Rightarrow 8x = y$)

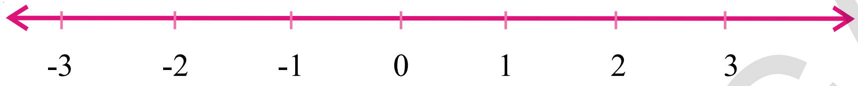
8. 28லிட்டர்கள் உள்ள ஒரு கலவையில் பால் மற்றும் நீரின் விகிதம் 5:2 என இருக்கிறது. கலவை மற்றும் பால் இடையே ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி, வரைபடம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து கலவையில் பாலின் அளவை கண்டுபிடி.

   (குறிப்பு : கலவை மற்றும் பால் இடையே உள்ள விகிதம் = 5+ 2 : 5 = 7 : 5)

9. USA மற்றும் கனடா போன்ற நாடுகளில் வெப்பநிலை பாரன்ஹீட்டிலும், இந்தியா போன்ற நாடுகளில் செல்சியஸிலும் அளக்கப்படுகிறது. பாரன்ஹீட் அளவை செல்சியஸ் அளவாக மாற்றும் நேரியச் சமன்பாடு $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$ ஆகும்.
   (i) செல்சியஸ் அளவை xஅச்சிலும் பாரன்ஹீட் அளவை yஅச்சிலும் கொண்டு மேற்கண்ட நேரியச் சமன்பாட்டிற்கு வரைபடம் வரைக.
   (ii) வெப்பநிலை $30°C$ எனில் பாரன்ஹீட் அளவில் வெப்பநிலை என்ன?
   (iii) வெப்பநிலை $95°F$ எனில் செல்சியஸ் அளவில் வெப்பநிலை என்ன?
   (iv) பாரன்ஹீட் மற்றும் செல்சியஸ் ஆகிய இரண்டு அளவுகளிலும் ஒரே எண்மதிப்பைக் கொண்ட வெப்பநிலை இருக்குமா? ஆம் எனில் அதை கண்டுபிடி.

6.5 x அச்சு மற்றும் y அச்சுகளுக்கு இணையாக உள்ள கோடுகளின் சமன்பாடு

x = 3 என்ற சமன்பாட்டை கருதுவோம். இது ஒரு மாறியை கொண்ட சமன்பாடாக எடுத்துக்கொண்டால் x = 3 என்ற தனித்த தீர்வை பெற்றிருக்கும். அத்தீர்வு எண்கோட்டின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.



இரண்டு மாறிகளை கொண்ட சமன்பாடாக கருதி ஆயத்தொலை அச்சுகளின் மேல் குறித்தால் அதை $x + 0.y - 3 = 0$ என்று எழுதமுடியும்.

இது முடிவில்லா தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும். நாம் சிலவற்றை காணலாம். இங்கு y ன் குணகம் பூஜ்ஜியம் ஆகும். எனவே y ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் x=3ஆகும்.

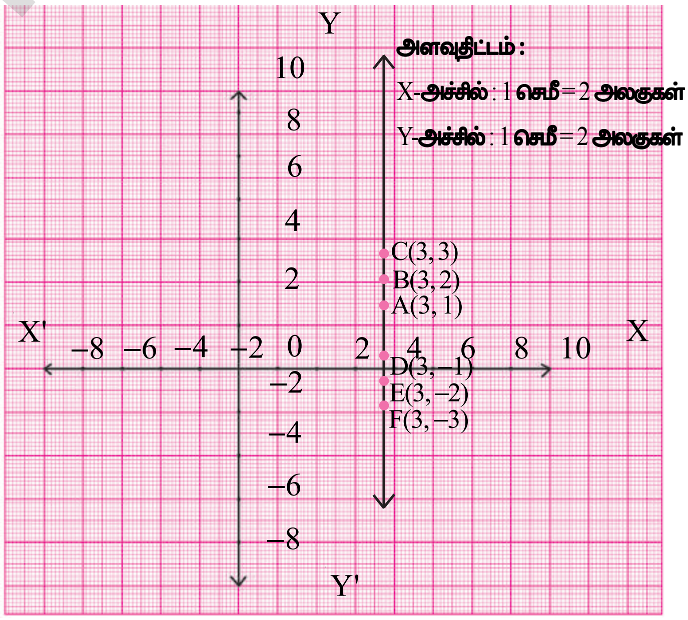
தீர்வுகளின் அட்டவணை

x	3	3	3	3	3	3	……
y	1	2	3	–1	–2	–3	…..
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, –1)	(3, –2)	(3, –3)	…..
புள்ளி	A	B	C	D	E	F	…..

அட்டவணையிலிருந்து, இந்த சமன்பாடு (3, a) வடிவில் முடிவில்லா தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.,இங்கு a ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

இப்பொழுது மேலே உள்ள தீர்வுகளை பயன்படுத்தி வரைபடம் வரை.

இது ஒரு நேர்கோடா? இது ஒரு கோடா அல்லது அச்சுகளா? வரையப்பட்ட கோடு y அச்சிற்கு இணையாக உள்ள ஒரு நேர்கோடாகும். yஅச்சிலிருந்து இந்த கோட்டின் தூரம் என்ன? ஆகவே x=3 என்ற வரைபடம் வலதுபக்கத்தில் 3 அலகுகள் தூரத்தில் y அச்சிற்கு இணையாக உள்ள கோடாகும்.



இதை செய்

1. i) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக.
   a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

   ii) இந்த சமன்பாடுகளின் வரைபடங்கள் அனைத்தும் y-அச்சிற்கு இணையாக இருக்கின்றனவா?

   iii) ஒவ்வொரு வகையிலும் வரைபடத்திற்கும், y-அச்சிற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை காண்க.

2. i) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக.
   a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = -3$

   ii) இந்த சமன்பாடுகளின் வரைபடங்கள் அனைத்தும் x-அச்சிற்கு இணையாக இருக்கின்றனவா?

   iii) ஒவ்வொரு வகையிலும் வரைபடத்திற்கும் மற்றும் x-அச்சிற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை கண்டுபிடி.

மேற்கண்ட உற்றுநோக்க×ல் இருந்து நாம் பின்வரும் முடிவை பெறலாம் :

1. $x = k$ என்ற வரைபடம் y அச்சிற்கு இணையாக k அலகுகள் தூரத்தில் உள்ள கோடாகும். மேலும் இது (k,0) புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது.
2. $y=k$ என்ற வரைபடம் x-அச்சிற்கு இணையாக k அலகுகள் தூரத்தில் உள்ள கோடாகும். மேலும் இது (o,k) புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது.

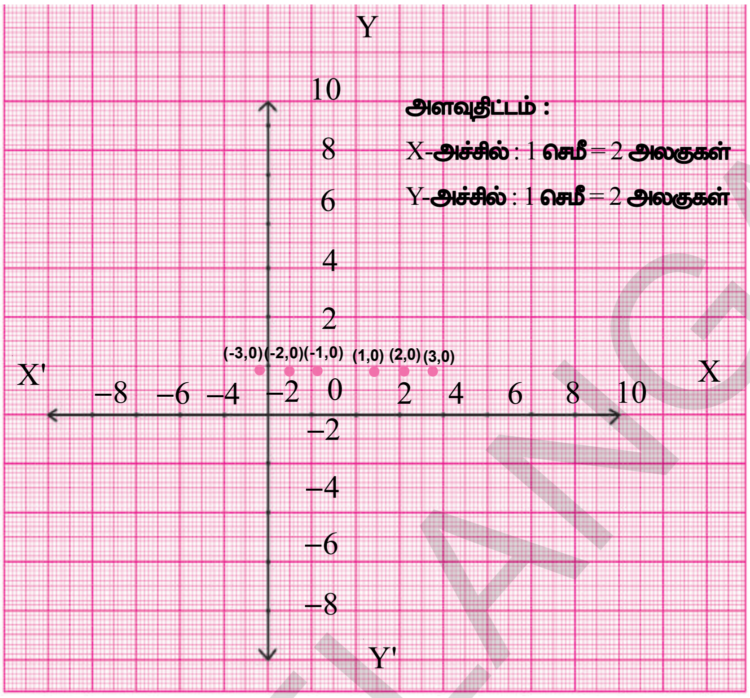
6.5.1 x-அச்சு மற்றும் y-அச்சின் சமன்பாடு:

$y=0$ என்ற சமன்பாட்டை கருதுவோம். இதை $0.x + y = 0$ என்று எழுதலாம். இந்த சமன்பாட்டிற்கான வரைபடத்தை நாம் வரையலாம்.

தீர்வுகளின் அட்டவணை

x	1	2	3	–1	–2	…...
y	0	0	0	0	0	…..
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(–1, 0)	(–2, 0)	…..
புள்ளி	A	B	C	D	E	…..

இந்த அனைத்து புள்ளிகளையும் வரைபடத்தாளில் குறித்தால், நமக்கு பின்வரும் படம் கிடைக்கிறது. வரைபடத்திலிருந்து நீ என்ன கவனித்தாய்?



அனைத்து புள்ளிகளும் X அச்சின் மீதுள்ளன. மேலும் அனைத்து புள்ளிகளின் Yஅச்சு தூரம் 0 ஆகவும் இருப்பதை நாம் கவனிக்கலாம்.

எனவே y=0 என்னும் சமன்பாடு X-அச்சை குறிக்கிறது. X அச்சின் சமன்பாடு y=0 என்றும் கூறலாம்.

முயன்று பார்

y-அச்சின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

பயிற்சி - 6.5

1. பின்வரும் சமன்பாட்டை வரைபடத்தில் குறி.

   a) மெய்யெண்கோட்டின் மேல் b) கார்ட்டீசியன் தளத்தில்

   i) $x = 3$ ii) $y + 3 = 0$ iii) $y = 4$ iv) $2x - 9 = 0$

   v) $3x + 5 = 0$

2. $2x - 11 = 0$ ஐ

   i) ஒரு மாறி கொண்ட சமன்பாடாக ii) இரண்டு மாறிகளை கொண்ட சமன்பாடாக எழுதி, வரைபடம் வரைக.

3. $3x + 2 = 8x - 8$ என்ற சமன்பாட்டை தீர்த்து,

   i) மெய்யெண்கோட்டின் மேல் ii) கார்ட்டீசியன் தளத்தின் மேல் குறி

4. கீழ்கண்ட புள்ளி வழிச்செல்வதும் x-அச்சிற்கு இணையாக உள்ளதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

   i) $(0, -3)$ ii) $(0, 4)$ iii) $(2, -5)$ iv) $(3, 4)$

5. கீழ்கண்ட புள்ளி வழிசெல்வதும் y-அச்சிற்கு இணையாக உள்ளதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

   i) $(-4, 0)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(3, 5)$ iv) $(-4, -3)$

6. (i) X-அச்சிற்கு இணையாக (ii) Y-அச்சிற்கு இணையாக உள்ள மூன்று நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

நாம் கற்றவை

1. ஒரு நேரியச் சமன்பாடு இரண்டு மாறிகளை பெற்றிருந்தால் அது இரு மாறிகள் உள்ள நேரியச் சமன்பாடு என்று அழைக்கப்படும்.
2. இருமாறிகள் கொண்ட நேரியசமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்யும் 'x' மற்றும் 'y' என்ற ஜோடி மதிப்புகள் அதன் தீர்வு எனப்படும்.
3. இரு மாறிகள் கொண்ட ஒரு நேரியச் சமன்பாடு எண்ணற்ற தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும்.
4. இரண்டு மாறிகளை கொண்ட ஒவ்வொரு நேரியச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடாகும்.
5. $y = mx$ வடிவில் உள் ஒரு சமன்பாடு ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்லும் நேர்கோட்டை குறிக்கும்.
6. $x = k$ என்ற வரைபடம் y-அச்சிற்கு இணையாக, k அலகுகள் தூரத்தில் (k,0) புள்ளி வழியே செல்லும் கோடாகும்.
7. y=k என்ற வரைபடம் x-அச்சிற்கு இணையாக, k அலகுகள் தூரத்தில் (0,k) புள்ளி வழியே செல்லும் கோடாகும்.
8. x-அச்சின் சமன்பாடு y=0
9. y-அச்சின் சமன்பாடு x=0

07

முக்கோணங்கள்

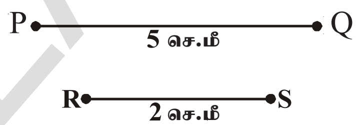
7.1 அறிமுகம்

நேர்கோடுகள், வளைவரைகோடுகளை பயன்படுத்தி வடிவங்களை எவ்வாறு வரையலாம் எனவும் மேலும் அவ்வடிவங்களின் பண்புகளை பற்றியும் கற்றுகொண்டோம். கொடுக்கப்பட்ட நீளத்திற்கேற்ற கோட்டுத்துண்டை வரைவது எவ்வாறென உனக்கு தெரியுமா? எல்லா கோட்டுதுண்டுகளும் ஒரே அளவுடன் இருக்காது. கோட்டு துண்டுகள் அனைத்தும் வெவ்வேறு நீளங்களை கொண்டிருக்கும். நாம் வட்டங்களை கூட வரைகிறோம்? ஒரு வட்டத்தை வரைய நமக்கு தேவைப்படும் அளவு எது? ஒரு வட்டத்தை வரைய வேண்டுமானால் அவ்வட்டத்தின் ஆரம் தெரிந்திருக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு சமமான கோணத்தையும் கூட நாம் வரைகிறோம்.

இரண்டு கோட்டுத்துண்டுகளின் நீளங்கள் சமம் எனில் அவை சர்வசமம் என நமக்கத் தெரியும்.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

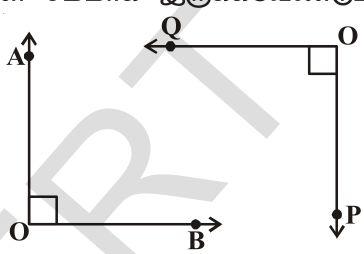
(சர்வசமம்)



$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$

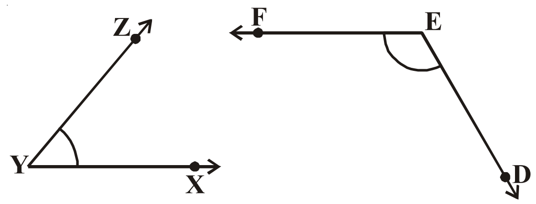
(சர்வசமமல்ல)

இரண்டு கோணங்கள் சர்வசமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் அவற்றின் கோண அளவுகள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.



$\angle AOB \cong \angle POQ$

(சர்வசமம்)



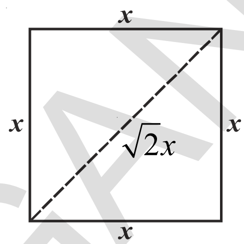
$\angle XYZ \ncong \angle DEF$

(சர்வசமமல்ல)

மேற்காணும் உதாரணங்கள் மூலம் இரண்டு படங்களின் அளவுகள் சமமாக உள்ளதா, இல்லையா? என சரிபார்க்க வேண்டுமானால் அப்படங்களைப் பற்றிய மேலும் சில சிறப்பான விவரங்கள் தேவைப்படுகிறது.

ஒரு சதுரத்தை எடுத்துகொள்வோம் : இரண்டு சதுரங்கள் ஒரே அளவை பெற்றுள்ளதா, இல்லையா என கூறவேண்டுமானால் நமக்கு தேவைப்படும் குறைந்தபட்ச விவரம் எது? நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட சதுரங்களின் பக்கஅளவு மட்டுமே தேவையான விவரம். இரண்டு சதுரங்களின் பக்கஅளவுகள் சமம் எனில் அவை சர்வசம சதுரங்கள் எனப்படும் என சத்யா கூறினாள்.

இது உண்மைதான் ஆனால் இரண்டு சதுரங்களின் மூலைவிட்டங்கள் சமமாக இருந்தால் கூட அவைகளை சர்வசம சதுரங்கள் என கூறலாம் என்று ஸ்ரீதர் கூறினான். இவர்கள் இருவரும் கூறியது சரி என்று நினைக்கிறாயா?



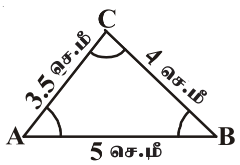
சதுரங்களின் பண்புகளை நினைவுகூறுங்கள். ஒரே பக்க அளவுள்ள இரண்டு வெவ்வேறு சதுரங்களை வரைய முடியாது. இதுபோலவே இரண்டு சதுரங்களின் பக்க அளவுகள் சமமாக இருந்தால் மட்டுமே அவற்றின் மூலைவிட்டங்கள் சமமாக இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட படத்தை பார்.

ஒரே மாதிரியான வடிவமும் அளவும் கொண்ட படங்கள் சர்வசம படங்கள் எனப்படுகின்றன. (சர்வசமம் எனில் எல்லா வகையிலும் சமம் என்று பொருள்படும்) எனவே சமமான பக்க அளவுகளை கொண்ட சதுரங்கள் சர்வசமம் மேலும் சமமான மூலைவிட்டங்களும் சர்வசமம்.

குறிப்பு : பொதுவாக பக்கங்கள் அளவுகளையும் கோணங்கள் வடிவங்களையும் நிர்ணயிக்கும்.

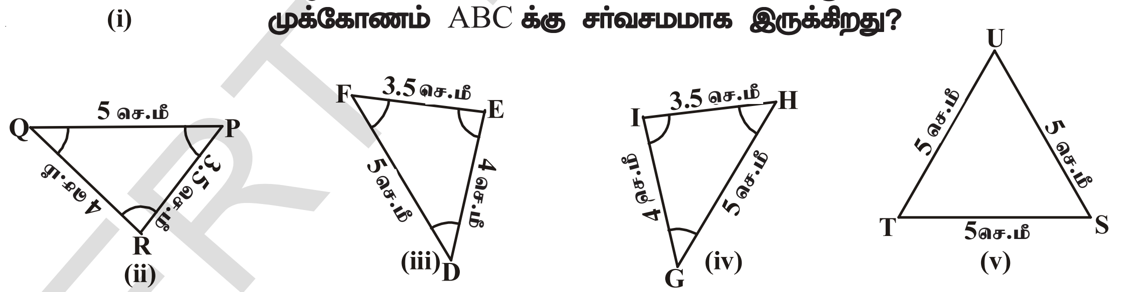
இரண்டு சதுரங்கள் சர்வசமம் எனில் அவற்றை ஒருதாளின் மேல் வரைந்து ஒன்றை வெட்டியெடுத்து மற்றொரு சதுரத்தின் மீது வைத்தால் அது முழுவதுமாக மற்றொன்றின் மீது சரியாக பொருந்தும் என நமக்கு தெரியும். ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள், கோணங்கள், மூலைவிட்டங்கள் முறையே மற்றொரு சதுரத்தின் பக்கங்கள், கோணங்கள், மூலைவிட்டங்களுக்கு சமமாக இருக்கும் என்று நாம் கூறலாம். இப்போது நாம் இரண்டு முக்கோணங்களின் சர்வசமம் பற்றி காண்போம்.



(i)

இரண்டு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்தபக்கங்கள், கோணங்களுக்கு சமம் எனில் அவ்விரண்டு முக்கோணங்களையும் சர்வசம முக்கோணங்கள் எனலாம்.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களில் எது படம் (1)ல் உள்ள முக்கோணம் ABC க்கு சர்வசமமாக இருக்கிறது?



படம் (ii) முதல் (v) வரையிலான எல்லா முக்கோணங்களையும் வரைந்து பின்னர் வெட்டிஎடுத்து அவற்றை ΔABC மீது பொருத்திபார். படம் (ii), (iii), (iv)ல் உள்ள முக்கோணங்கள் ΔABCக்கு சர்வசமம் எனவும், படம் (v)ல் உள்ள முக்கோணம் TSU, ΔABC க்கு சர்வசமம் அல்ல எனவு அறியலாம்.

ΔPQR மேலும் ΔABC சர்வசமம் எனில் $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ நாம் என எழுதுகிறோம்.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ஆகும் போது ΔPQRன் பக்கங்கள், கோணங்கள் முறையே ΔABCன் ஒத்த பக்கங்கள், கோணங்களுக்கு சமமாக இருக்கும்.

அதாவது PQ, AB உடனும் QR, BC உடனும் RP, CA உடனும் பொருந்தும் அது போலவே $\angle P, \angle A$ உடனும் $\angle Q$, $\angle B$ உடனும் $\angle R$, $\angle C$ உடனும் பொருந்தும். மேலும் முக்கோணத்தின் முனைகளுக்கிடையே ஒன்று-ஒன்று தொடர்பு இருக்கும். அதாவது P முனை A உடனும் Q முனை B உடனும் R முனை C உடனும் பொருந்தும்.

இதையே நாம்

$P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ என எழுதுகிறோம். இங்கு நீங்கள் $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ என எழுதலாம். ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட படங்களுக்கு QR=AB, RP=BC, QP=AC ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று பொருந்தாமல் இருப்பதால் $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ என்று எழுதுவது சரியாக இருக்காது.

இதுபோலவே படம் (iii) மூலம்

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ மேலும் $EF \leftrightarrow CA$ மேலும்

$F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ மேலும் $E \leftrightarrow C$

எனவே $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. ஆனால் $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ என எழுதுவது தவறு.

படம் (iv)ல் உள்ள முக்கோணத்திற்கும் ΔABCக்கும் இடைபட்ட ஒப்புமைகளை எழுதுக.

எனவே முக்கோணங்களின் சர்வசமபண்பை எழுதவேண்டுமானால் முக்கோணங்களின் முனைகளின் ஒன்று-ஒன்று தொடர்பை எழுத வேண்டியது அவசியமாகும். சர்வசமமுக்கோணங்களின் ஒத்தபக்கங்கள் சமமாக இருக்கும். சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள் சமம் என்பதை ஆங்கிலத்தில் Corresponding Parts Of Congruent Trinagles என எழுதுவர். இதை சுருக்கமாக CPCT என குறிப்பிடுவர்.

இதை செய்

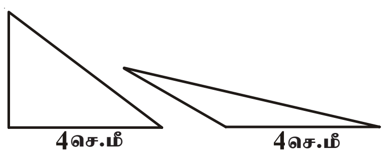
1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகள் சரியா தவறா என எழுதுக
   i. இரண்டு வட்டங்கள் எப்போதும் சர்வசமம். ( )
   ii. ஒரேமாதிரியான நீளம் கொண்ட இரண்டு கோட்டுதுண்டுகள் எப்போதும் சர்வசமம். ( )
   iii. இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் சிலநேரங்களில் மட்டும் சர்வசமம்.( )
   iv. சமமான பக்க அளவுகளை கொண்ட இரண்டு சமபக்க முக்கோணங்கள் எப்போதும் சர்வசமம். ( )
2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட வடிவங்கள் சர்வசமமா இல்லையா என சோதித்து பார்ப்பதற்கு தேவைப்படும் குறைந்தபட்ச அளவுகள் என்ன?
   i. இரண்டு செவ்வகங்கள் ii. இரண்டு சாய்சதுரங்கள்.

7.2 முக்கோணங்களின் சர்வசமபண்பிற்கான நிபந்தனைகள்

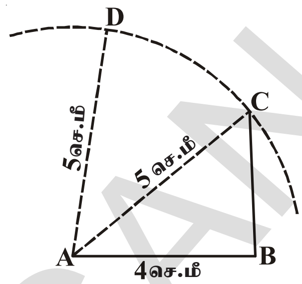
முக்கோணங்களின் சர்வசமபண்பிற்கான நிபந்தனைகளை நீங்கள் முன்வகுப்பில் கற்றுஇருப்பீர்கள். அவற்றை ஒரு முறை நினைவுகூறுவோம்.

ஒரு முக்கோணத்தை வரைய அம்முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள், மூன்று கோணங்களின் அளவுகள் அவசியமா?

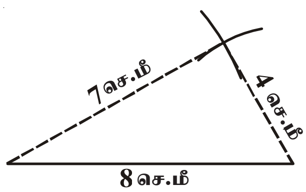
ஒரு பக்கத்தின் அளவு 4செ.மீ உள்ளவாறு இரண்டு முக்கோணங்களை வரை. ஒரு பக்கஅளவு 4செ.மீ கொண்ட இரண்டு வெவ்வேறு முக்கோணங்களை உன்னால் வரைய முடியுமா? உன்னுடைய நண்பர்களோடு விவாதி. உனக்கு சர்வசம முக்கோணங்கள் கிடைக்குமா? 4செ.மீ உள்ளவாறு வெவ்வேறான முக்கோணங்களை நம்மால் வரையமுடியும்.



முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் முறையே 4செ.மீ, 5செ.மீ, உள்ளவாறு வெவ்வேறான முக்கோணங்களை வரை, சர்வசம முக்கோணங்ள் கிடைக்கிறதா?



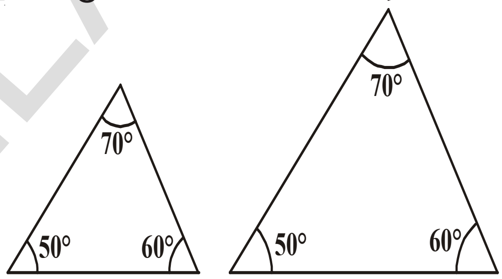
இரண்டு பக்க அளவுகளை மட்டும் கொண்ட நாம் வெவ்வேறு முக்கோணங்களை வரையலாம்.



4செ.மீ, 7செ.மீ, 8செ.மீ பக்க அளவுகளாக கொண்டு முக்கோணம் வரைக. இரண்டு வெவ்வேறு முக்கோணங்களை வரைய முடியுமா? இம்மூன்று பக்க அளவுகள் கொண்டு ஒரே ஒரு முக்கோணம் மட்டும்தான் வரைய முடியும். அப்படி இந்த பரிமாணங்களை கொண்டு நீ வரையும் முக்கோணங்கள் இந்த ஒரே ஒரு முக்கோணத்திற்கு சர்வசமமாக இருக்கும்.

உன்னுடைய விருப்பத்திற்கேற்ப மூன்று கோணங்களை எடுத்துகொள். ஆனால் அம்மூன்று கோணங்களின் மொத்தம் 180° ஆக இருக்க வேண்டும். நீ எடுத்து கொண்ட கோணங்களை பயன்படுத்தி இரண்டு வெவ்வேறான முக்கோணங்களை வரைக.

$\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ கோண அளவுகளை கொண்டு வெவ்வேறு முக்கோணங்கள் வரையமுடியும் என்று மஹிமா கண்டாள்.



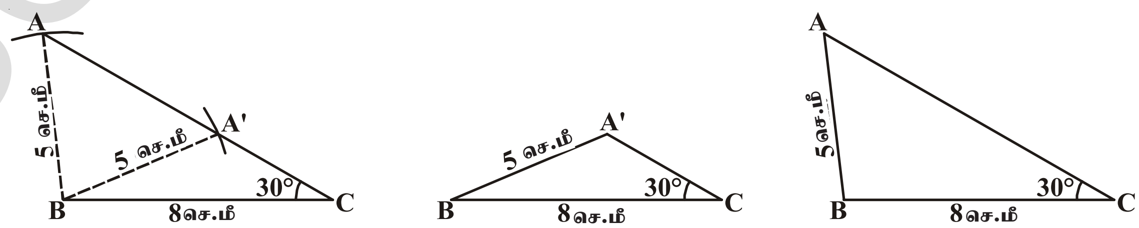
முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் கொடுக்கப்படும் போது மூன்று கோணங்களின் மொத்தம் 180° என்ற பண்பை பயன்படுத்தி மூன்றாம் கோணத்தை கண்டறியலாம் என்று ஷெரீப் நினைத்தான். முக்கோணம் வரைய இரண்டு கோண அளவுகள் போதுமானது. ஆனால் அது தனித்தன்மை கொண்டதாக இருக்காது. ஒரு தனித்த முக்கோணம் வரைய குறைந்தது மூன்று தனித்த அளவுகள் தேவைப்படுகிறது.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு இரண்டு வெவ்வேறு முக்கோணங்களை வரைக.

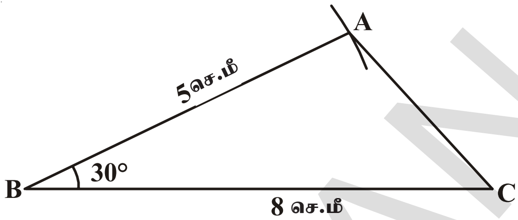
i. ΔABC ல் $AB = 5$ செ.மீ., $BC = 8$ செ.மீ., $\angle C = 30^\circ$

ii. ΔABC ல் $AB = 5$ செ.மீ., $BC = 8$ செ.மீ., $\angle B = 30^\circ$

(i) ல் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை கொண்டு ஒரே ஒரு முக்கோணத்தை வரையமுடியுமா? (படம் வரைந்து உன்னுடைய நண்பர்கள் வரைந்த படத்துடன் சரிபார்)



கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை கொண்டு வெவ்வேறான இரண்டு முக்கோணங்கள் ΔABC மேலும் ΔA^1BC நம்மால் வரையமுடியும் (ii) ல் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை பயன்படுத்தி இரண்டு முக்கோணங்களை வரை. நீ கவனித்தது என்ன? அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் இல்லையா?



இதலிருந்து நாம் அறிவது (ii) ல் உள்ள அளவுகள் படி ஒரே ஒரு முக்கோணத்தை மட்டுமே வரையமுடியும் என்று சொல்லலாம். வகை (i) வகை (ii)களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளின் வரிசையை நீ கவனித்திருக்கிறாயா? (i)ல் இரண்டு பக்கஅளவுகளும் அவற்றிற்கிடையே அமையாத கோணமும் (ii)ல் இரண்டு பக்க அளவுகளும் அவற்றிற்கு இடையே அமையும் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களும் ஒரு கோணம் அதாவது மூன்று தனிப்பட்ட அளவுகள் ஒரு தனித்த முக்கோணம் அமைக்க தேவையான நிபந்தனைகள் இல்லை. ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளின் வரிசை ஒரு தனித்த முக்கோணத்தை அமைப்பதில் முக்கியபங்கு வகிக்கிறது.

7.3 முக்கோணங்களின் சர்வசமம்

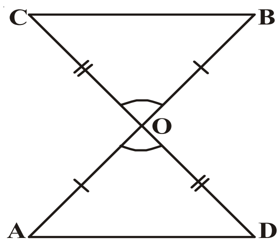
மேலே உள்ளவற்றை பயன்படுத்தி முக்கோணங்களின் சர்வசம பண்பை விவரிக்கலாம். ஒருபக்கம் சமமாக உள்ள இரண்டு முக்கோணங்கள் அல்லது மூன்று முக்கோணங்கள் சமமாக உள்ள முக்கோணங்கள் இருந்தால் முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என்று நாம் முடிவு செய்யமுடியாது. ஏனெனில் இந்த சிறப்பியல்புகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முக்கோணங்கள் இருக்க வாய்ப்பிருக்கிறது. இரண்டு பக்கங்களும், ஒரு கோணமும் சமமாக இருக்கும்போது கொடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமாக இல்லை எனில் முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என்று நாம் கூறமுடியாது. பக்கம்–கோணம்–பக்கம் (ப.கோ.ப) மட்டும் சர்வசம பண்பை நிர்ணயிக்குமே தவிர பக்கம்–பக்கம்–கோணம் அல்லது கோணம்–பக்கம்–பக்கம் முக்கோணங்களின் சர்வசம பண்பை நிர்ணயிக்காது.

மேற்காணும் விதியை முக்கோணங்களின் சர்வசம பண்பிற்கு முதல் விதியாக எடுத்துகொண்டு மீதமுள்ள விதிகளை இதன் உதவியுடன் பின்னர் நிருபிப்போம்.

வெளிப்படை உண்மை (பக்கம்–கோணம்–பக்கம் சர்வசம கோட்பாடு (ப.கோ.ப) : *ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் அவற்றிற்கு இடைபட்ட கோணம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் அவற்றிக்கு இடைபட்ட கோணத்திற்கு சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமம்.*

எடுத்துக்காட்டு 1: கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் AB மேலும் CD Oல் வெட்டுகிறது. $OA = OB$ மேலும் $OD = OC$ எனில் (i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ மேலும் (ii) $AD \parallel BC$ என நிரூபி.

தீர்வு : (i) ΔAOD, ΔBOC களில்



$OA = OB$ (தரவு)

$OD = OC$ (தரவு)

$\angle AOD$, $\angle BOC$ ஆகியவை ஒரு ஜோடி குத்தெதிர் கோணங்களாதலால்

$\angle AOD = \angle BOC$.

எனவே, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (ப.கோ.ப. சர்வசம விதிப்படி)

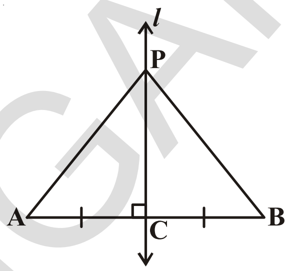
(ii) ΔAOD, ΔBOC, சர்வசமமுக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள், ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

எனவே $\angle OAD = \angle OBC$ மேலும் இவைகள் AD, BC கோட்டுதுண்டுகளுக்கு ஒருஜோடி, ஒன்றுவிட்ட கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது.

$\therefore AD \parallel BC$

எடுத்துக்காட்டு 2:. AB எனும் கோட்டுதுண்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டி l, இதன் மீது P ஒரு புள்ளி எனில் புள்ளி P, A, B களிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளது எனகாட்டு.

தீர்வு : $l \perp AB$ மேலும் கோடு l கோட்டுதுண்டு AB ஐ அதன் மையப்புள்ளி C ல் வெட்டுகிறது.



நாம் $PA = PB$ என காட்ட வேண்டும்.

ΔPCA மேலும் ΔPCB ஐ எடுத்துகொள்வோம்.

$AC = BC$ (AB ன் மையபுள்ளி C)

$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ (தரவு)

$PC = PC$ (பொது)

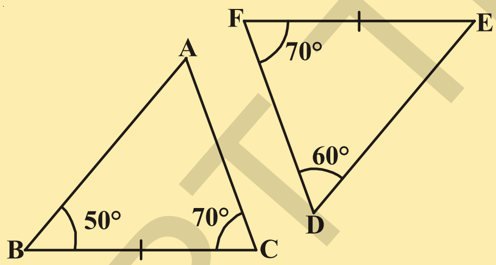
எனவே, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (ப.கோ.ப. விதிப்படி) எனவே

$PA = PB$, (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள்)

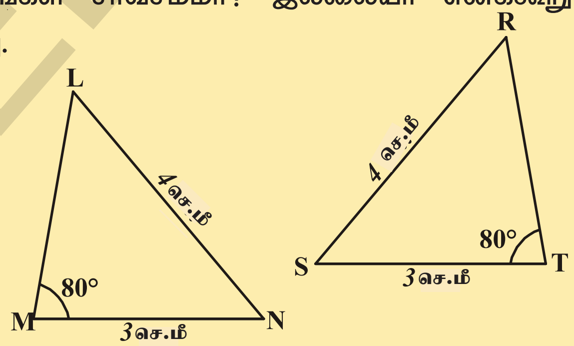
எனவே புள்ளி P, A, B களிலிருந்து சமதூரத்ததில் இருக்கும்.

இதை செய்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்கள் சர்வசமமா? இல்லையா எனக்கூறு. இதற்கான காரணங்களையும் கூறு.



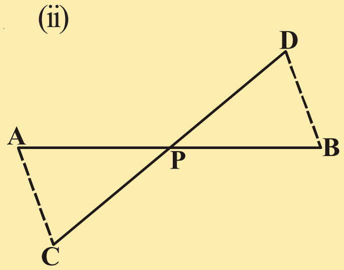
(i)



(ii)

2. கொடுக்கப்பட்டதில் AB, DC கோட்டுத்துண்டுகளின் இருசமவெட்டி P எனில்

$\Delta APC \cong \Delta BPD$ எனகாட்டு

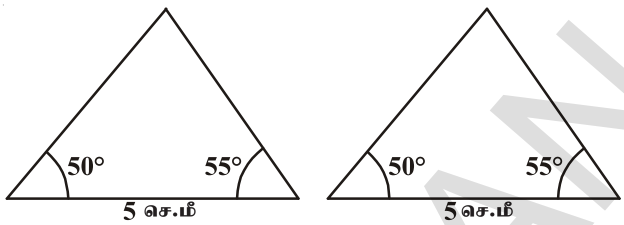


7.3.1 சர்வசம பண்பின் மற்ற கோட்பாடுகள் :

$50^\circ, 55^\circ$ களை கோண அளவாகவும், இந்த இரண்டு கோணங்களும் அமைந்துள்ள பக்கத்தின் நீளம் 5செ.மீ உடைய இரண்டு முக்கோணங்களை வரைய முயற்சித்துப்பார்.

நீ வரைந்த முக்கோணங்களை வெட்டி எடுத்து ஒன்றன் மீது ஒன்று பொருத்திப்பார். சர்வசமம் என கவனித்திருப்பீர்கள். இந்த முடிவை நாம் சர்வசமபண்பின் கோணம்-பக்கம்-கோணம் கோட்பாடு என்கிறோம்.

இதை நாம் கோ.ப.கோ கோட்பாடு என எழுதுகிறோம். இதை நாம் முந்தைய வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். இம்முடிவை (கோ.ப.கோ.) நாம் வரையறுத்து நிரூபிக்கலாம். நிரூபிக்கமுடியகூடிய இம்முடிவை நாம் தேற்றம் என்கிறோம். இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்க நாம் ப.கோ.ப. அடிப்படை உண்மையை பயன்படுத்துகிறோம்.



தேற்றம் 7.1 (கோ.ப.கோ. சர்வசம கோட்பாடு) : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் மேலும் இவைகளை உள்ளடக்கிய பக்கம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் மேலும் இவைகளை உள்ளடக்கிய பக்கத்திற்கு சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமம்.

தீர்வு : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ களில்

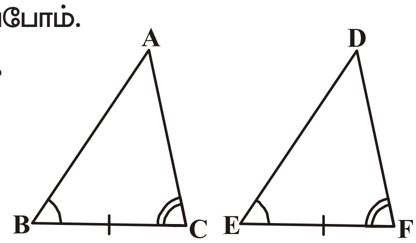
$\angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ மேலும் $\overline{BC} = \overline{EF}$

நிரூபிக்க வேண்டியது : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

நிரூபணம் : இங்கு மூன்று வாய்ப்புகள் உள்ளன. $\overline{AB}$ மேலும் $\overline{DE}$ களுக்கு இடையே உள்ள வாய்ப்புகள் $\overline{AB} > \overline{DE}$ அல்லது $\overline{DE} > \overline{AB}$ அல்லது $\overline{DE} = \overline{AB}$ ஆகும்.

இந்த மூன்று வாய்ப்புகளையும் கவனித்து பார்ப்போம்.

நிலை (i): $\overline{AB} = \overline{DE}$ என்க. நாம் கவனிப்பது என்ன?



ΔABC மேலும் ΔDEF ஐ கருது.

$\overline{AB} = \overline{DE}$ (ஊகித்தது)

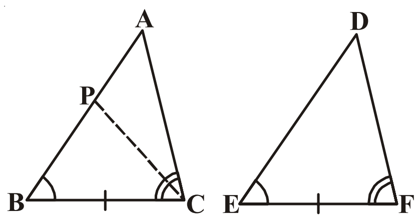
$\angle B = \angle E$ (தரவு)

$\overline{BC} = \overline{EF}$ (தரவு)

எனவே, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$(ப.கோ.ப. சர்வசம உண்மையின்படி)

வகை (ii): இரண்டாம் வாய்ப்பு $AB > DE$.

$PB = DE$ என்றவாறு ABயின் மீது Pஎனும் புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம்.



இப்போது ΔPBC மேலும் ΔDEF ஐ கருதுவோம்.

$\overline{PB} = \overline{DE}$ (அமைப்பின்படி)

$\angle B = \angle E$ (தரவு)

$\overline{BC} = \overline{EF}$ (தரவு)

எனவே, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (ப.கோ.ப. சர்வசமபண்பின்படி)

முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என்பதால் அவற்றின ஒத்த பாகங்கள் சமம். எனவே

$\angle PCB = \angle DFE$

ஆனால் $\angle ACB = \angle DFE$ (தரவு)

எனவே $\angle ACB = \angle PCB$ (மேலே உள்ளவற்றிலிருந்து)

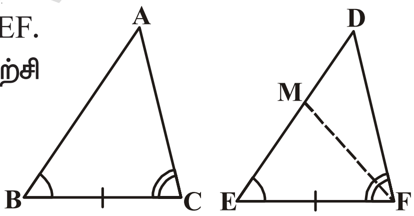
இது சாத்தியமா? P ஆனது A உடன் ஒன்றும் போது மட்டுமே இது சாத்தியம். அல்லது $\overline{BA} = \overline{ED}$

எனவே, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ப.கோ.ப. சர்வசமபண்பின் படி)

(**குறிப்பு : மேற்காணும் நிரூபணத்தில்** $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, மேலும் $\overline{BC} = \overline{EF}$ எனில் $\overline{AB} = \overline{DE}$ ஆகும், எனவே ΔABC, ΔDEF சர்வசம முக்கோணங்கள்).

வகை (iii): மூன்றாம் வாய்ப்பு $\overline{AB} < \overline{DE}$

ME = AB எனுமாறு DEFல் DEன் மீது Mஎனும் புள்ளியை எடுத்துக்கொள். வகை (ii) ல் கூறிய வாதத்தை திரும்ப செய்தோமானால் $\overline{AB} = \overline{DE}$ எனமுடிவு செய்யலாம். அப்போது $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. ஆகும். அருகிலுள்ள படத்தை பார்த்து நீயே நிரூபிக்க முயற்சி செய்க.



இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு ஜோடி கோணங்களும் மேலும் ஒரு ஜோடி பக்கங்களும் சமம் ஆனால் இந்த பக்கம் சமமான ஒத்த ஜோடி கோணங்களுக்கு உட்பட்ட பக்கம் அல்ல. இப்போதும் இந்த முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக இருக்கிறதா? ஏன்? காரணம் கூறமுடியுமா?

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ என்று உனக்குத் தெரியும். இரண்டு கோண ஜோடிகள் சமம் எனில் மூன்றாம் ஜோடி கோணங்களும் சமம் ஆகும். ($180°$ – சமமான கோணங்களின் மொத்தம்).

எனவே இரண்டு முக்கோணங்களில் இரண்டு ஜோடி கோணங்களும் மேலும் ஒரு ஜோடி ஒத்தபக்கங்களும் சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம். இதையே நாம் கோ.கோ.ப. சர்வசம கோட்பாடு என்கிறோம். இப்போது மேலும் சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3: கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $AB \| DC$ மேலும் $AD \| BC$ எனில்

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ எனக்காட்டு.

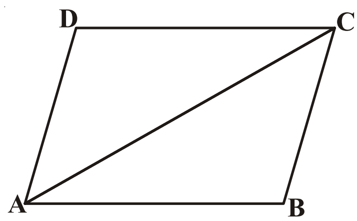
தீர்வு : ΔABC, ΔCDA களை எடுத்துகொள்வோம்.

$\angle BAC = \angle DCA$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

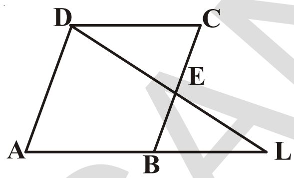
$AC = CA$ (பொதுபக்கம்)

$\angle BCA = \angle DAC$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$(கோ.ப.கோ)



எடுத்துக்காட்டு 4: கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $AL \parallel DC$, BC ன் மையப்புள்ளி E. $\Delta EBL \cong \Delta ECD$ எனக்காட்டு.



தீர்வு : ΔEBL மேலும் ΔECD

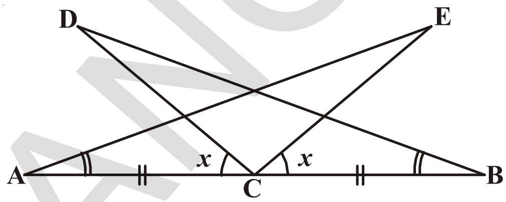
$\angle BEL = \angle CED$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

$BE = CE$ (BC ன் மையப்புள்ளி E என்பதால்)

$\angle EBL = \angle ECD$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோண்கள்)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$(கோ.ப.கோ. சர்வசமபண்பின்படி)

எடுத்துக்காட்டு 5: படத்திலுள்ள விவரங்களை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிரூபி.



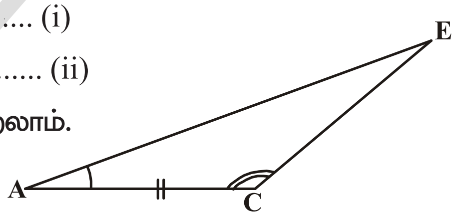
(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) $DC = EC$.

தீர்வு : $\angle ACD = \angle BCE = x$ என்க

∴ $\angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

∴ $\angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

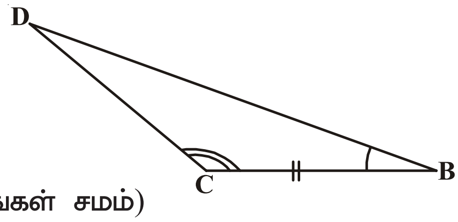


(i), (ii), லிருந்து : $\angle ACE = \angle BCD$ எனபெறலாம்.

ΔDBC மேலும் ΔEAC களிலிருந்து,

$\angle ACE = \angle BCD$ (மேலே நிருபிக்கப்பட்டது)

$BC = AC$ (தரவு)



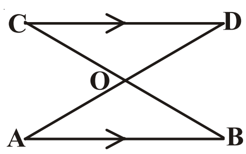
$\angle CBD = \angle EAC$ (தரவு)

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [கோ.ப.கோ. பண்பின்படி]

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ ஆதலால்

$DC = EC$.(சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் சமம்)

எடுத்துக்காட்டு 6: AB , CD என்பவை ஒன்றுக்கொன்று இணை. AD ன் மையபுள்ளி O எனில்,



(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC ன் மையபுள்ளியும் O எனநிரூபி.

தீர்வு : (i) ΔAOB மேலும் ΔDOC.

$\angle ABO = \angle DCO$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், ஏனெனில் $AB \parallel CD$, BC என்பது குறுக்கு வெட்டு)

$\angle AOB = \angle DOC$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

$OA = OD$ (தரவு)

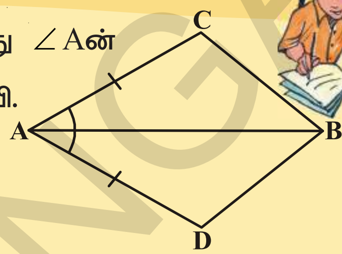
எனவே, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (கோ.கோ.ப. பண்பின்படி)

(ii) $OB = OC$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் சமம்)

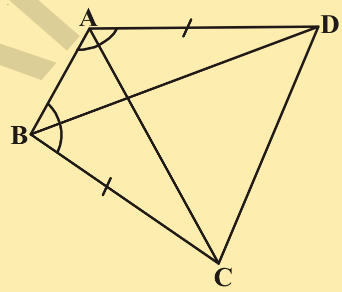
எனவே, O என்பது BC ன் மையப்புள்ளி.

பயிற்சி - 7.1

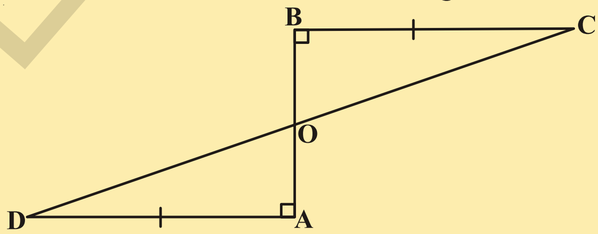
1. நாற்கரம் ACBD ல் $AC = AD$ மேலும் AB ஆனது $\angle A$ன் இருசமவெட்டியாகும். $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ எனநிரூபி. BC மேலும் BD யை குறித்து நீ என்ன கூறுவாய்?



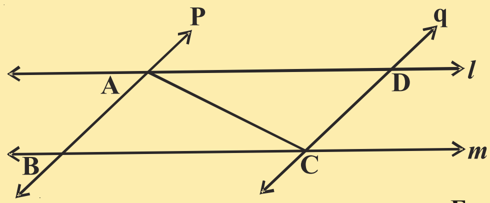
2. ABCD ஒரு நாற்கரம் $AD = BC$ மேலும் $\angle DAB = \angle CBA$ எனில்
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
   (ii) $BD = AC$
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$ என நிரூபி.



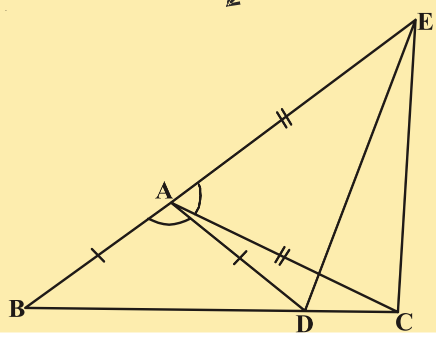
3. AD, BC என்பவை சமம். மேலும் அவ்விரண்டும் AB கோட்டுத்துண்டிற்கு செங்குத்து. CD கோட்டுதுண்டு ABயை இருசமக்கூறிடும் எனகாட்டு.



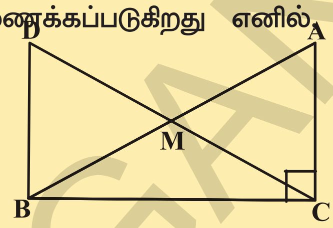
4. *l, m* ஒரு ஜோடி இணைக்கோடுள். இவை p மேலும் q எனும் மற்றொரு ஜோடி இணைக்கோடுகளால் வெட்டப்படுகிறது எனில் $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ எனநிரூபி.



5. பக்கத்தில் உள்ள படத்தில் $AC = AE$, $AB = AD$ மேலும் $\angle BAD = \angle EAC$ எனில் $BC = DE$ எனநிரூபி.



6. செங்கோண முக்கோணம் ABCல் C செங்கோணம் ஆகும். கர்ணம் ABன் மையப்புள்ளி M. $DM = CM$ என்றவாறு C புள்ளியை M உடன் சேர்த்து D வரை நீட்டிக்கப்படுகிறது. மேலும் D புள்ளி B உடன் இணைக்கப்படுகிறது எனில், கீழ்கண்டவற்றை நிரூபி.



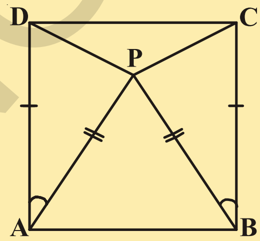
(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ஒரு செங்கோணம்

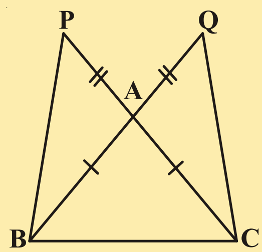
(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

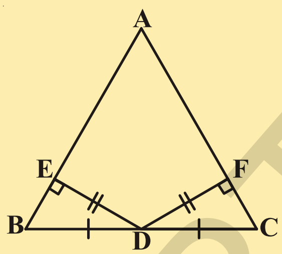
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7. அடுத்துள்ள படத்தில் ABCD ஒரு சதுரம். ΔAPB ஒரு சமபக்கமுக்கோணம். $\Delta APD \cong \Delta BPC$ எனநிரூபி.
(குறிப்பு: ΔAPD மேலும் ΔBPC களில் $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ மேலும் $\angle PAD = \angle PBC = 90^o - 60^o = 30^o$]



8. அடுத்துள்ள படத்தில் $\overline{AD} = \overline{BC}$. ΔABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் $\overline{AQ} = \overline{AP}$ என்றிருக்குமாறு $\overline{CA}$, $\overline{BA}$ முறையே Q மற்றும் P புள்ளிகள் வரை நீட்டி வரையப்பட்டுள்ளது. $\overline{PB} = \overline{QC}$ என நிரூபி. (குறிப்பு : ΔAPB, ΔACQ களை ஒப்பபிடு)

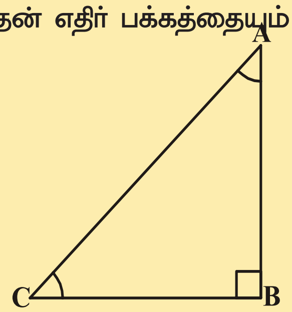




9. படத்தில் ΔABCல் BCன் மையப்புள்ளி D, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ மேலும் $DE = DF$ எனில் $\Delta BED \cong \Delta CFD$ எனநிரூபி.

10. ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் இருசமவெட்டி அதன் எதிர் பக்கத்தையும் இரு சமபாகமாக வெட்டுகிறது எனில் அது இரு சமபக்கமுக்கோணம் எனக்காட்டு.

11. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம் B முனையில் செங்கோணம் உள்ளது. மேலும் $\angle BCA = 2\angle BAC$ எனில் கர்ணம் $AC = 2BC$ எனக்காட்டு.
(குறிப்பு : BC=BD என்றவாறு CBயை Dபுள்ளிவரை நீட்டிக்கவும்)

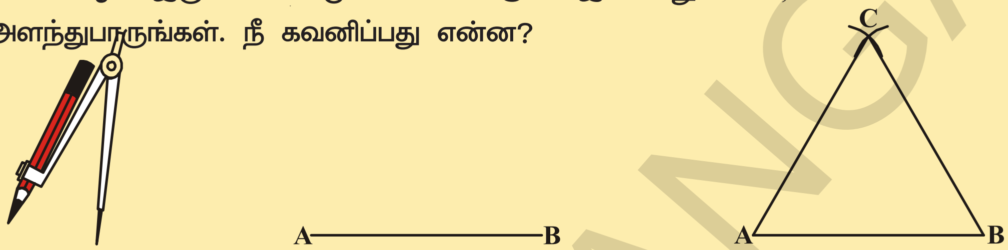


7.4 முக்கோணங்களின் சில பண்புகள்

இதுவரை முக்கோணங்களின் சர்வசமபண்புகளின் இரண்டு கோட்பாடுகளை கற்றுக்கொண்டோம். நாம் கற்றுகொண்ட இம்முடிவுகளை இரண்டு பக்கங்கள்சமமாக உள்ள முக்கோணங்களின் பண்புகளை கற்றுகொள்ள பயன்படுத்திக்கொள்வோம்.

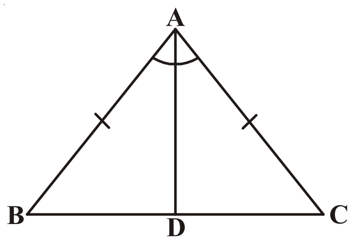
செயல்பாடு

i. கவராயத்தை பயன்படுத்தி முக்கோணத்தை வரைய ஏதேனும் அளவுடன் கோட்டுதுண்டு ABயை வரை. பின்னர் தேவையான அளவுடன் கவராயத்தை அமைத்து முனை A மற்றும் B களில் வைத்து ஒரே அளவிளான வில்களை வரையவும். இப்போது உங்களுக்கு எவ்வகையான முக்கோணம் கிடைத்தது? ஆம், இது இருசமபக்கமுக்கோணம் ஆகும். படத்தில் உள்ள ΔABC , AC=BC எனும்படியாக உள்ள ஓர் இருசமபக்க முக்கோணமாகும். இப்போது, $\angle A$, $\angle B$ கோணங்களை அளந்துபாருங்கள். நீ கவனிப்பது என்ன?



ii. சில இருசமபக்க முக்கோணங்களை வெட்டியெடு. சமமான பக்கங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துமாறு முக்கோணத்தை மடிக்கவும். $\angle A$, $\angle B$ பற்றி நீ கவனித்தது என்ன?

ஒவ்வொரு இருசமபக்க முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம் என்பதை கவனித்திருப்பீர்கள். இதுமிகவும் முக்கியமான உண்மை. இந்த உண்மை எல்லா இருசமபக்க முக்கோணங்களுக்கும் பொருந்தும். இதை கீழ்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.



தேற்றம் - 7.2 : ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரெயுள்ள கோணங்கள் சமம்.

இதை நிரூபிக்க அநேக முறைகள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தரவு: ΔABC ஓர் இருசமபக்கமுக்கோணம்.இதில் $AB = AC$.

நிருபிக்கவேண்டியது : $\angle B = \angle C$.

அமைப்பு : $\angle A$ன் கோண இருசமவெட்டியை வரை. இது BC பக்கத்தை Dல் வெட்டும்.

நிரூபணம் : ΔBAD **மேலும்** ΔCAD**களில்,**

$AB = AC$ (தரவு)

$\angle BAD = \angle CAD$ **(அமைப்பின்படி)**

$AD = AD$ **(பொதுபக்கம்)**

எனவே, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ **(ப.கோ.ப. சர்வசமகோட்பாட்டின்படி)**

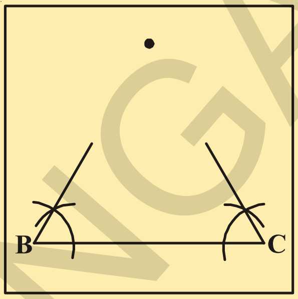
எனவே, $\angle ABD = \angle ACD$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள்)

அதாவது, $\angle B = \angle C$ **(சமமான கோணங்கள்)**

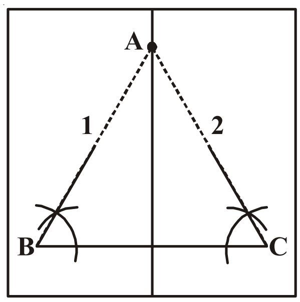
இதன் மறுதலையும் உண்மையா? அதாவது ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு கோணங்கள் சமம் எனில் அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமம் என நீங்கள் கூறமுடியுமா?

செயல்பாடு

1. ஒரு படியெடுத்தாளின் மீது 6செ.மீ நீளமுடைய BC எனும் கோட்டுதுண்டை வரை.
2. B மேலும் C முனைகளில் 60° கோணத்தை வரை. அவைகள் வெட்டுமிடத்தை A என்க.
3. B, C முனைள் ஒன்றன் மீது ஒன்று பொருந்துமாறு முக்கோணத்தை மடிக்கவும். நீங்கள் கவனித்தது என்ன? AB = AC சமமாக உள்ளனவா?

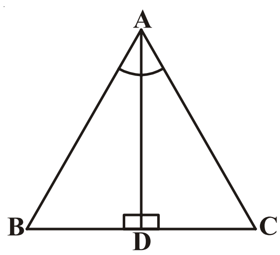


$\angle B$, $\angle C$ களுக்கு வெவ்வேறு கோணங்களை எடுத்துகொண்டு மீண்டும் இந்த செயலை செய்துபார். ஒவ்வொருமுறையும் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் சமமாக இருப்பதை கவனித்திருப்பாய். இதிலிருந்து நாம் கீழ்வரும் தேற்றத்தை கூறலாம்.



தேற்றம்-7.3 : ஒரு முக்கோணத்தின் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் சமம். இத்தேற்றம் இதற்கு முந்தைய தேற்றத்தின் மறுதலையாகும். கோ.ப.கோ. சர்வசமபண்பை பயன்படுத்தி நிரூபி.

எடுத்துக்காட்டு 7: ΔABCல், A ன் கோண இருசமவெட்டிகள் AD பக்கம் BC க்கு செங்குத்தாக உள்ளது எனில் AB = AC மேலும் ΔABC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் எனகாட்டு.



தீர்வு : ΔABD மேலும் ΔACDல்,

$\angle BAD = \angle CAD$ (தரவு)

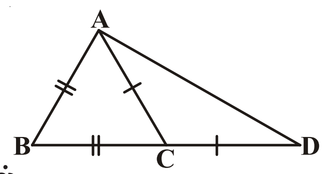
$AD = AD$ (பொதுபக்கம்)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (தரவு)

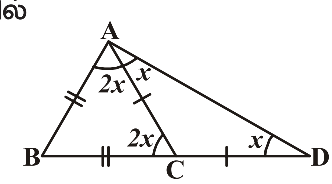
எனவே, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (கோ.ப.கோ. கோட்பாடு)

இதன் மூலம் $AB = AC$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தபக்கங்கள்)

அல்லது, ΔABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம்.



எடுத்துக்காட்டு 8: படத்தில் AB = BC மேலும் AC = CD எனில் $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$ எனக்காட்டு.



தீர்வு : $\angle ADB = x$ என்க

ΔACD, ல் $AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

வெளிக்கோணம் $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x.$ ($\because$ ΔABCல், $AB = BC$)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

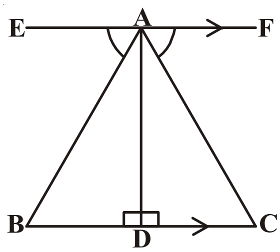
$= 2x + x = 3x$

மேலும், $\dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

அதாவது $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1.$

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 9: படத்தில் AD என்பது BCக்கு செங்குத்து. மேலும் $EF \parallel BC$, $\angle EAB = \angle FAC$, எனில் ABD மேலும் ACD சர்வசமம் எனக்காட்டு. மேலும் $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$, $BD = x$ மேலும் $DC = y + 1$ எனில், x, y மதிப்புகளை கண்டுபிடி?



தீர்வு : $AD \perp EF$

$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (தரவு)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

ΔABD மேலும் Δ DACD ல்

$\angle BAD = \angle CAD$ [மேலே நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ $[AD \perp BC]$

மேலும் $AD = AD$

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ [கோ.ப.கோ]

நிரூபிக்கப்பட்டது.

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ மேலும் $BD = CD$ [சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தபாகங்கள்]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ மேலும் $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ மேலும் $x - y = 1$

பிரதியிட $2(1+y) - 3y = -2$ $\qquad$ $y = 4$ ஐ $x = 1 + y$ ல் பிரதியிட

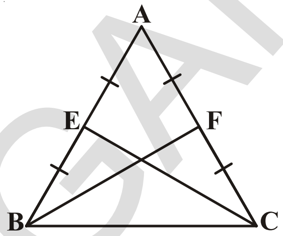
$x = 1 + y \qquad 2 + 2y - 3y = -2 \qquad x = 1 + 4$

$-y = -2 - 2 \qquad x = 5$

$-y = -4$

எடுத்துக்காட்டு 10: ΔABC ல் சமமான பக்கங்கள் AB, ACகளின் மையபுள்ளிகள் முறையே E மேலும் F (படத்தைபார்) எனில் BF=CE எனக்காட்டு.

தீர்வு : ΔABF மேலும் ΔACEல்,



$AB = AC$ (தரவு)

$\angle A = \angle A$ (பொதுகோணம்)

$AF = AE$ (சமமான பக்கங்களின் பாதிகள்)

எனவே, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (ப.கோ.ப. கோட்பாடு)

∴ $BF = CE$ (சர்வசமமுக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள் சமம்)

எடுத்துக்காட்டு 11: ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் ABCல் AB=AC என்றவாறு D மேலும் E எனும் புள்ளிகள் BC ன் மேல் அமைந்துள்ளன. (படத்தை பார்) AD=AE எனக்காட்டு.

தீர்வு : ΔABD, ΔACE களில்

$AB = AC$ (தரவு) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள்) .... (2)

மேலும்,$BE = CD$

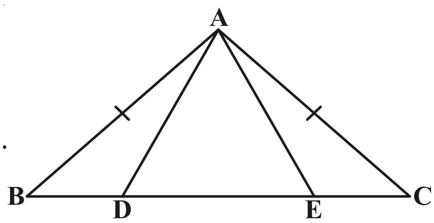
எனவே, $BE - DE = CD - DE$

அதாவது, $BD = CE$ (3)

எனவே, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

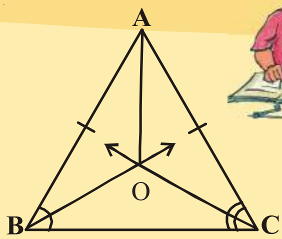
((1), (2), (3) மேலும் ப.கோ.ப. கோட்பாட்டின்படி).

$AD = AE$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தபக்கங்கள் சமம்)

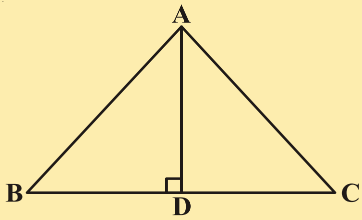


பயிற்சி - 7.2

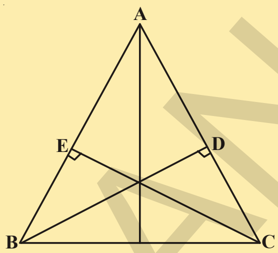
1. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் ABCல், AB = AC, $\angle B$, $\angle C$ கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் Oவில் வெட்டுகின்றன. A மேலும் O புள்ளிகளை இணை. (i) $OB = OC$ (ii) AO, $\angle A$க்கு கோண இருசமவெட்டி எனக்காட்டு.

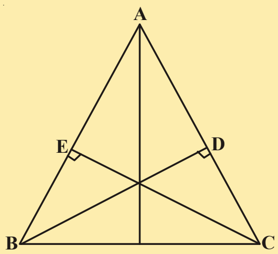


2. ΔABC ல் AD என்பது பக்கம் BCக்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி (படத்தைப்பார்) ΔABC, AB=AC எனும் படியான இருசமபக்க முக்கோணம் எனக்காட்டு.



3. ΔABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம். சமமான பக்கங்கள் AC, ABகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து கோடுகள் முறையே BD மேலும் CE எனில் இந்த குத்துகோடுகள் சமம் எனக்காட்டு.

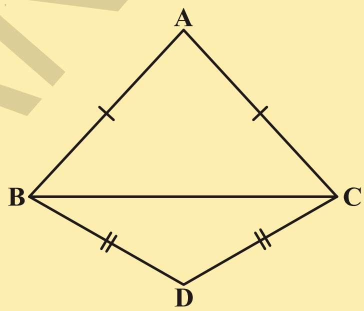




4. ΔABC ல் AC, AB பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்து கோடுகள் BD மற்றும் CE எனில்.

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

(ii) AB = AC அதாவது, ΔABC ஓர் இருசமமபக்க முக்கோணம் எனக்காட்டு.



5. ΔABC, ΔDBC ஒரே அடிபக்கம் BC மீது அமைந்த இருசமபக்க முக்கோணங்கள் (படத்தைபார்) எனில் $\angle ABD = \angle ACD$ எனக்காட்டு.

7.5 முக்கோணங்களின் சர்வசமபண்பிற்கு மேலும் சில கோட்பாடுகள் :

தேற்றம் - 7.4 (ப.ப.ப. சர்வசம கோட்பாடு) : வரைதல் மூலம் ப.ப.ப.சர்வசமபண்பு உண்டென அறிந்து கொண்டோம். இதை தேற்றம் மூலமும், நிருபிக்கலாம். இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு சமம் எனில் அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்.

ப.ப.ப. சர்வசம கோட்பாட்டின் நிரூபணம் :

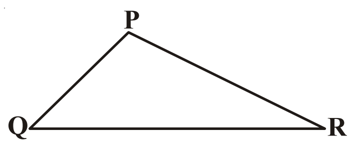
தரவு : ΔPQR மேலும் ΔXYZல் PQ = XY, QR = YZ மேலும் PR = XZ

நிரூபிக்கவேண்டியது : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

அமைப்பு : $\angle ZYW = \angle PQR$ மேலும் WY = PQ எனுமாறு YWஐ வரைக. மேலும் XW, WZகளை இணைக்கவும்.

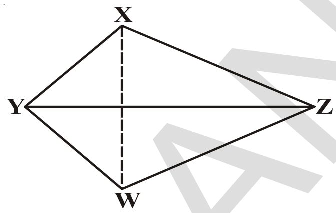
நிரூபணம் : ΔPQR மேலும் ΔDWYZல்

QR = YZ	(தரவு)
$\angle PQR = \angle ZYW$	(அமைப்பு)
PQ = YW	(அமைப்பு)
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$	(ப.கோ.ப. சர்வசமகோட்பாடு)



$\angle P = \angle W$ மேலும் $PR = WZ$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தபாகங்கள்CPCT)

$PQ = XY$ (தரவு) மேலும் $PQ = YW$ (அமைப்பு)



$\therefore XY = YW$

அதுபோலவே, $XZ = WZ$

ΔXYWல், $XY = YW$

$\angle YWX = \angle YXW$ (சமமானபக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்)

அதுபோலவே $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\angle W = \angle X$

இப்போது, $\angle W = \angle P$

$\angle P = \angle X$

ΔPQR மேலும் ΔXYZல்

$PQ = XY$

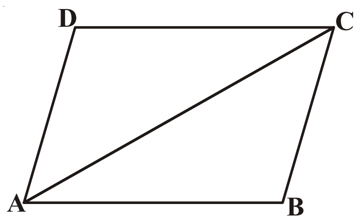
$\angle P = \angle X$

$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (ப.கோ.ப. சர்வசமகோட்பாடு)

இதை ஆதாரமாக கொண்ட கீழே உள்ள எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 12: ABCD, நாற்கரத்தில் $AB = CD$, $BC=AD$ எனில் $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ எனக்காட்டு. ΔABC, ΔCDA களை கருதுவோம்.



$AB = CD$ (தரவு)

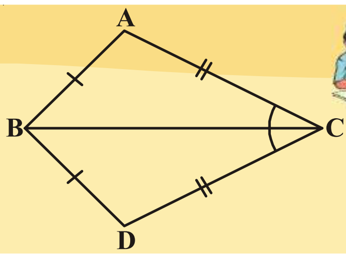
$AD = BC$ (தரவு)

$AC = CA$ (பொதுபக்கம்)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ப.ப.ப. சர்வசம கோட்பாடு)

இதை செய்

1. படத்தில் ΔABC மேலும் ΔDBCல் $\overline{AB} = \overline{BD}$ மேலும் $\overline{AC} = \overline{CD}$ எனில் $\Delta ABC \cong \Delta DBC$ எனக்காட்டு.



ப.கோ.ப. சர்வசம கோட்பாட்டின் ஒருஜோடி ஒரு ஜோடி சமமான கோணங்கள் ஒருஜோடி சமமான ஒத்த பக்கங்களுக்குகிடைப்பட்ட கோணமாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லைஎனில் இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாக இருக்க முடியாது என்று நாம் ஏற்கனவே பார்த்திருக்கிறோம்.

செயல்பாடு

கர்ணம் 5செ.மீ மேலும் ஒரு பக்கத்தின் அளவு 3செ.மீ இருக்கும்படி ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை வரைந்துகொள். எத்தனை வெவ்வேறான முக்கோணங்களை உன்னால் வரையமுடியும்? நீ வரைந்த முக்கோணங்களை உன் நண்பர்கள் வரைந்த முக்கோணங்களோடு ஒப்பிட்டுபார். அவைகள் சர்வசமமா? அவைகளை கத்தரித்து சமமான பக்கங்கள் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும்படிவை. நீ அறிவது என்ன? இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில், ஒரு முக்கோணத்தின் கர்ணம் மேலும் ஒரு பக்கம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் கர்ணம், பக்கங்களுக்கு சமம்.

இங்கு செங்கோணம் பக்கங்களுக்கு இடைபட்ட கோணம் அல்ல. இதிலிருந்து நாம் பின்வரும் சர்வசம கோட்பாட்டை வரையறுக்கலாம்.

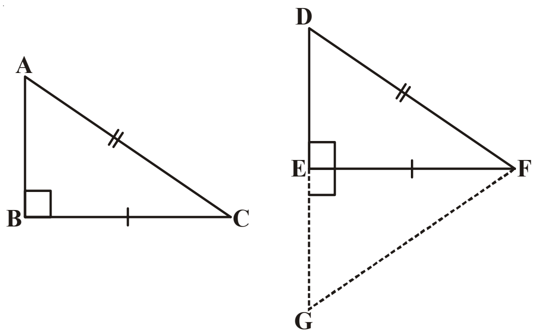
தேற்றம் 7.5 : (செ.க.ப. சர்வசம கோட்பாடு) : இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் கர்ணம் மேலும் ஒரு பக்கம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஒரு பக்கத்திற்கு சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம. இங்கு செ.க.ப. எனில் செங்கோணம்–கர்ணம்–பக்கம். இப்போது நிரூபணத்தை செய்வோம்.

தரவு : இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் ΔABC மேலும் ΔDEFல்

$\angle B = 90^\circ$ மேலும்

$\angle E = 90^\circ$ $AC = DF$ மேலும்

$BC = EF$.



நிரூபிக்க வேண்டியது : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

அமைப்பு : $EG=AB$ எனும்படி DE ஐ G வரை நீட்டித்து G, Fயை இணைக்கவும்.

நிரூபணம் :

கூற்று	**காரணம்**
ΔABC மேலும் ΔGEFல்	
$AB = GE$	(அமைப்பின்படி)
$\angle B = \angle FEG$	(ஒவ்வொரு கோணமும் செங்கோணம் (90^0))
$BC = EF$	(தரவு)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(ப.கோ.ப. சர்வசம கோட்பாடு)
எனவே $\angle A = \angle G \ldots (1)$	(சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தகோணங்கள்)
$AC = GF \ldots (2)$	(சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தபக்கங்கள்)
இன்னும் $AC=GF$ மேலும் $AC=DF$	((2) மேலும் தரவு)
$\therefore DF = GF$	(மேலே வருவித்தது)

எனவே $\angle D = \angle G \ldots (3)$ (சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்)

நாம் பெறுவது $\angle A = \angle D \ldots (4)$ ((1), (3)மூலம் லிருந்து)

ஆகவே ΔABC, ΔDEF ல் $\angle A = \angle D$, ((4) லிருந்து)

$\angle B = \angle E$ (தரவு)

எனவே, $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$ (கூட்ட)

எனவே $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ மேலும் (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்த பண்பு)

$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்தம்)

$180 - \angle C = 180 - \angle F$ ($\angle A + \angle B = 180^0 - \angle C$ மேலும் $\angle D + \angle E = 180^0 - \angle F$)

எனவே $\angle C = \angle F, \ldots (5)$ (நீக்கல் விதிகள்)

இப்போது ΔABC, ΔDEFல் நாம் பெறுவது

$BC = EF$ (தரவு)

$\angle C = \angle F$ ((5) லிருந்து)

$AC = DF$ (தரவு)

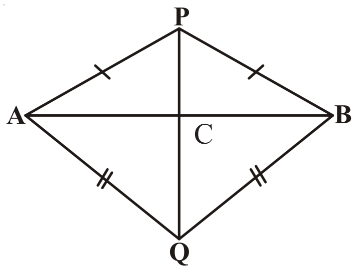
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ப.கோ.ப. சர்வசம கோட்பாடு)

எடுத்துக்காட்டு 13: AB ஒரு கோட்டுதுண்டு. P மேலும் Q புள்ளிகள் முறையே ABன் இரு புறங்களிலும் A,Bகளிலிருந்து சம தூரத்திலுள்ளன. (படத்தை பார்). PQ கோடு, ABக்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி எனக்காட்டு.

தீர்வு : PA=PB, QA=QB என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. PQ கோடு ABக்கு செங்குத்து எனவும் PQ கோடு ABஐயை இருசமகூறிடும் எனவும் நீ காட்ட வேண்டும். PQ கோடு ABஐ Cல் வெட்டுகிறது என்க.

இப்படத்தில் இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களை பற்றி நீ அறியமுடிகிறதா?

ΔPAQ மேலும் ΔPBQ எடுத்துகொள்வோம்.



இந்த முக்கோணங்களில்

$AP = BP$ (தரவு)

$AQ = BQ$ (தரவு)

$PQ = PQ$ (பொதுபக்கம்)

எனவே, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (ப.ப.ப. சர்வசம கோட்பாடு)

∴ $\angle APQ = \angle BPQ$ (சர்வசமமுக்கோணங்களின் ஒத்தபாகங்கள்).

ΔPAC மேலும் ΔPBCல்

$AP = BP$ (தரவு)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ மேலே நிருபிக்கப்பட்டது)

$PC = PC$ (பொதுபக்கம்)

எனவே $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (ப.கோ.ப. கோட்பாடு)

∴ $AC = BC$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள்) .... (1)

மற்றும் $\angle ACP = \angle BCP$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்தகோணங்கள்)

இன்னும் $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (கோட்டு ஜோடிகள்)

எனவே $2\angle ACP = 180°$

அல்லது $\angle ACP = 90°$ .... (2)

(1), (2) லிருந்து PQ, ABக்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி எனக் கூறலாம்.

$AP = BP$ (தரவு)

$PC = PC$ (பொதுபக்கம்)

மேலும் $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB ல் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்)

என்று இருந்தபோதிலும் ΔPAQ, ΔPBQ சர்வசமம் என நிரூபிக்காமல் $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ என்று நிரூபிக்கமுடியாது என்பதை கவனி. இங்கு இது ப.ப.கோ.கோட்பாட்டை பெற்றிருந்தபோதிலும், கொடுக்கப்பட்ட கோணம் ஒருஜோடி சமபக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமாக இல்லாததால் ப.ப.கோ. சர்வசம பண்பு எப்பொழுதும் உண்மையாக இருக்காது.

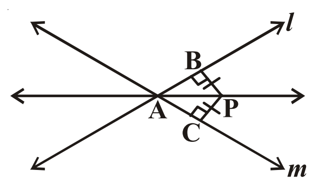
எடுத்துக்காட்டு 14: P எனும் புள்ளியிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள கோடுகள் l மற்றும் m, Aல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. AP கோடு l, m க்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை இருசமக்கூறிடும் எனக்காட்டு.

தீர்வு : l, m கோடுகள் A புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கிறது.

PB, l க்கு செங்குத்து என்க. $PC \perp m$.

$PB = PC$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\angle PAB = \angle PAC$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.



$PB = PC$ (தரவு)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (தரவு)

$PA = PA$ (பொதுபக்கம்)

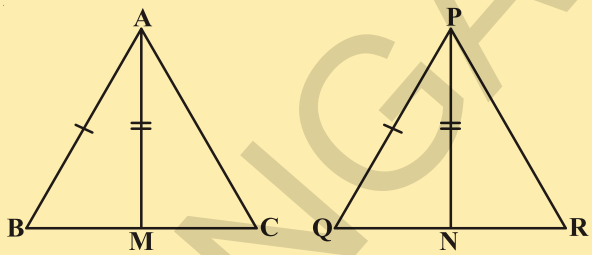
எனவே $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (செ.க.ப. கோட்பாடு)

எனவே $\angle PAB = \angle PAC$ (சர்வமுக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள்)

பயிற்சி - 7.3

1. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் ABCல் AB=AC, AD என்பது A விருந்து BCக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு எனில். (i) BC பக்கத்தை AD இருசமகூறிடும் (ii) $\angle A$ யை AD இருசமகூறிடும் எனக்காட்டு.

2. ΔABC ல் பக்கங்கள் AB, BC மேலும் மையக்கோடு AM முறையே ΔPQRல் இரண்டு பக்கங்கள் PQ, QR மேலும் மையக்கோடு PNக்கு சமம் (படத்தை பார்).

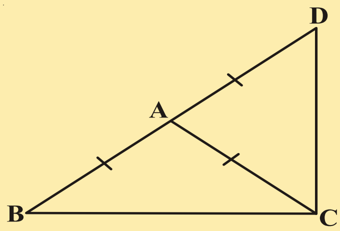


   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$எனக்காட்டு.

3. ΔABCல், BE , CF இரண்டு சமமான குத்துக்கோடுகள். செ.க.ப. கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி ΔABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் எனக்காட்டு.

4. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் ΔABCல் $AB = AC$எனில், $\angle B = \angle C$என நிரூபி. (குறிப்பு $AP \perp BC$ எனும்படி AP யை வரைக. செ.க.ப. கோட்பாட்டை பயன்படுத்து)

5. ஓர் இருசமபக்க ΔABC ல் AB = AC, AD=AB எனும்படி பக்கம் BAயை D புள்ளிவரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. (படத்தை பார்). $\angle BCD$ ஒரு செங்கோணம் எனக்காட்டு.



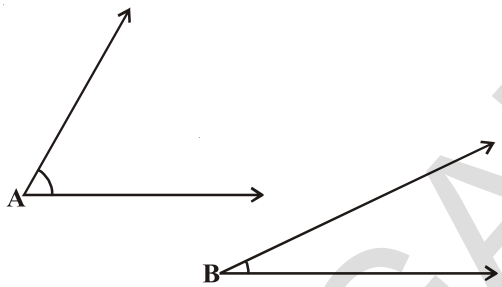
6. ΔABC ஒரு செங்கோணமுக்கோணம். இதில் $\angle A = 90^0$ மேலும் $AB = AC$, எனில் $\angle B = \angle C$ எனக்காட்டு.

7. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தில் ஒவ்வொருகோணமும் 60^0 எனக்காட்டு.

7.6 முக்கோணத்தில் சமமின்மைகள்

இதுவரை நாம் முக்கோணத்தின் அல்லது முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்களின் சர்வசமம்பற்றி கற்றுக்கொண்டோம். சில நேரங்கதளில் சமமில்லாதவற்றை ஒப்பிடவேண்டி இருக்கும். உதாரணத்திற்கு அடுத்தபக்கத்தில் படம் (i)ல் உள்ள கோட்டுதுண்டு ABன் நீளம் CD நீளத்தைவிட பெரியது. படம் (ii)ல் $\angle A$, $\angle B$ ஐவிட பெரியது. படம் (ii)

(i)

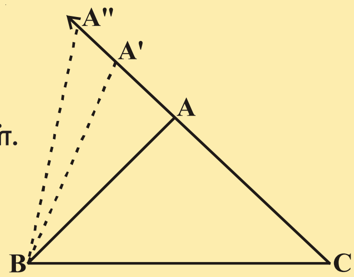


(ii)

இப்போது நாம் ஒரு முக்கோணத்தின் சமமில்லா பக்கங்கள் மற்றும் சமமில்லா கோணங்களுக்கிடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என சோதிப்போம். இதற்காக பின்வரும் செயலை செய்துபார்ப்போம்.

செயல்பாடு

1. ABC முக்கோணத்தை வரைந்து, CAன் நீட்டிசியின் மேல் புள்ளி A'ஐ குறி. (புதிய இடம்)



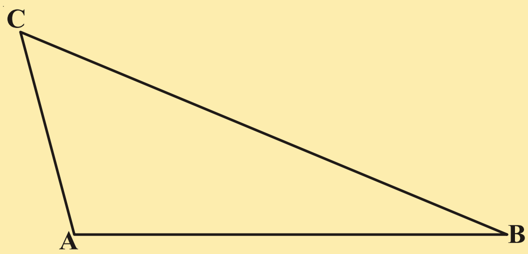
எனவே $A'C > AC$ (நீளங்களை ஒப்பிடு)

A', Bகளை இணைத்து $A'BC$ யை உருவாக்குங்கள்.

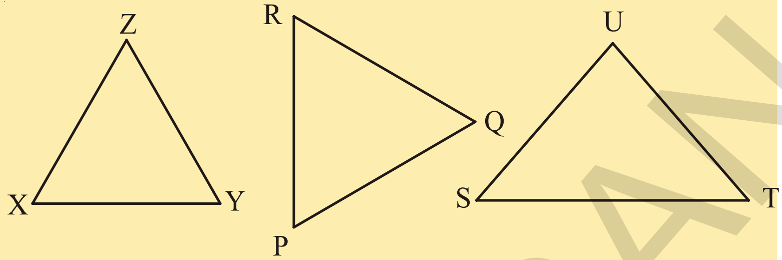
இப்போது நீங்கள் $\angle A'BC$ மேலும் $\angle ABC$குறித்து என்ன கூறமுடியும்? இந்த இரண்டு கோணங்களையும் ஒப்பிடுங்கள். நீங்கள் கவனித்தது என்ன?

தெளிவாக $\angle A'BC > \angle ABC$ இவ்வாறே CA வை மேலும் நீட்டித்து அதன் மீது அநேக புள்ளிகளை குறித்து அவைகளை BC பக்கத்துடன் இணை. AC பக்கத்தின் நீளம் அதிகமாகும் போது (Aன் இடங்களை மாற்றும் போது) அதற்கு எதிரேயுள்ள அதாவது $\angle B$ அதிகமாகிறது. இப்போது மற்றொரு செயலை செய்வோம்.

2. ஓர் அசமபக்க முக்கோணத்தை வரையவும் (அதாவது வெவ்வேறு பக்க அளவுகளை உடைய ஒருமுக்கோணம்) பக்கங்களின் நீளங்களை அளந்து பாருங்கள். பிறகு கோணங்களை அளந்து பாருங்கள். நீங்கள் கவனித்தது என்ன?

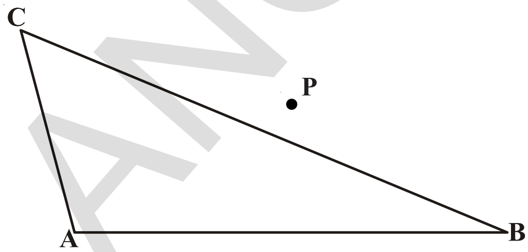


ΔABC படத்தில் BC மிக அதிக நீளமுடைய பக்கம் மேலும் AC மிககுறைவான நீளமுடைய பக்கம். அதுபோலவே $\angle A$ மிகப்பெரியது. மேலும் $\angle B$ மிகச் சிறியக்கோணம். மேலே உள்ள முக்கோணங்களின் கோணம் மற்றும் படத்தில் சில முக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பக்கங்களை, கோணங்களை அளந்துபார்.இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?



தேற்றம் 7.6 : ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்கள் அசமம் எனில் பெரிய பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம் பெரியது.

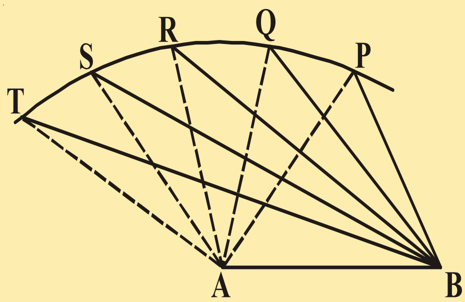
படத்தில் காட்டியபடி $CA = CP$ ஆகும்படி BCன் மீது Pஎனும் புள்ளியை எடுத்துகொண்டு இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.



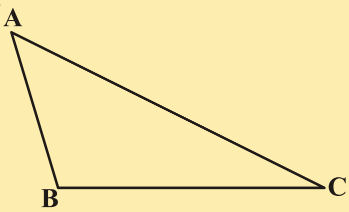
இப்போது மற்றொரு செயலை செய்வோம்.

செயல்பாடு

AB எனும் கோட்டுதுண்டை வரையவும். Aவை மையமாக கொண்டு ஏதேனும் ஒரு ஆரத்துடன் ஒருவில்லை வரையவும். வில்லின் மீது P,Q,R,S,T, புள்ளிகளை குறிப்பிடு.



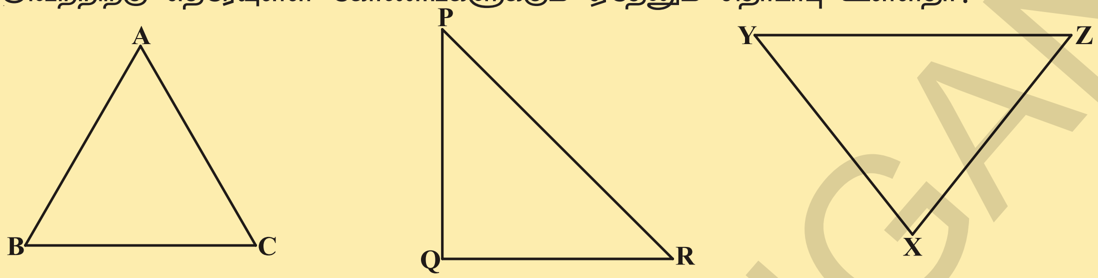
இந்த புள்ளிகள் அனைத்தையும் A,Bபுள்ளிகளோடு சேர்க்கவும் (படத்தைபார்). நாம் P புள்ளியிலிருந்து Tபுள்ளிவரை நகரும் போது $\angle A$ன் மதிப்பு அதிகமாகிறது என அறியலாம். அதற்கு எதிராக உள்ள பக்கத்தின் அளவு எவ்வாறு உள்ளது? $\angle A$க்கு எதிராக உள்ள பக்கத்தின் நீளமும் அதிகரிப்பதை கவனித்திருப்பாய். அதாவது $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ மேலும் $TB > SB > RB > QB > PB$.



இப்போது வெவ்வேறு கோணஅளவுகளுடன் ஏதேனும் ஒரு முக்கோணத்தை வரையவும். பக்கங்களின் நீளங்களை அளந்து பார். (படத்தை பார்க்கவும்) பெரிய கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் நீளமாக இருப்பதை கவனித்திருப்பாய். படத்தில் $\angle B$ மிகப்பெரியகோணம். மேலும் அதற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் ACமிக அதிக நீளமுடையது.

வெவ்வேறான முக்கோணங்களை பயன்படுத்தி, இச்செயலை செய்துபார். மேற்கண்ட தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையென அறிவாய்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களையும் பக்கங்களையும் அளந்துபார். ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலுள்ள பக்கங்களுக்கும் அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களுக்கும் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா?



இதன் மூலம் நமக்கு பின்வரும் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 7.7 : ஒரு முக்கோணத்தில் பெரிய கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் பெரியது.

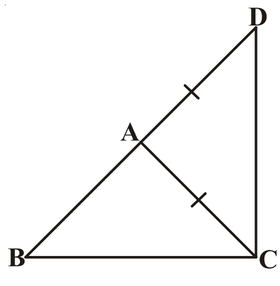
இந்த தேற்றத்தை முரண்பாடு முறையில் நிரூபிக்கலாம்.

இதை செய்

இப்போது ΔABC வரைந்து அதன் பக்கங்களை அளந்துபார். பின்னர் $AB + BC$, $BC + AC$ மேலும் $AC + AB$, கண்டறிந்து இவைகளை மூன்றாவது பக்கத்துடன் ஒப்பிட்டுப்பார். நீங்கள் கவனித்தீர்களா?

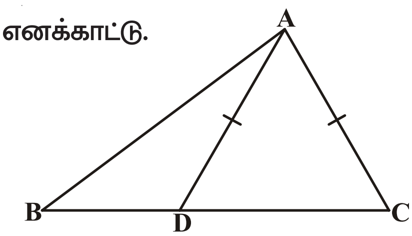
$AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$ மேலும் $AC + AB > BC$ என கவனித்தீர்கள். இச்செயலை வெவ்வேறான முக்கோணங்களுக்கும் செய்துபார். இதன் மூலம் பின்வரும் தேற்றத்தை வருவிக்கலாம்.

தேற்றம் - 7.8 : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் கூடுதல் மூன்றாம் பக்கத்தைவிட அதிகம்.



அருகிலுள்ள படத்தில் ΔABCல் $AD=AC$ என்றிருக்கும்படி பக்கம் BAவை புள்ளி Dவரை நீட்டிக்கப்பட்டுள்ளது. $\angle BCD > \angle BDC$ எனவும், $BA + AC > BC$ எனவும் உங்களால் நிரூபிக்கமுடியுமா? இந்த தேற்றத்தை பயன்படுத்தி சில உதாரணங்களை செய்துபார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 15: ΔABCல் $AD=AC$ எனும்படி பக்கம் BCன் மீது D எனும் புள்ளி (படத்தைப்பார்) உள்ளது. $AB > AD$ எனக்காட்டு.



தீர்வு : ΔDACல்,

$AD = AC$ (தரவு)

ஆகவே, $\angle ADC = \angle ACD$ (சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்)

இப்போது $\angle ADC$, ΔABD க்கு வெளிக்கோணம்.

எனவே $\angle ADC > \angle ABD$

அல்லது, $\angle ACD > \angle ABD$

அல்லது, $\angle ACB > \angle ABC$

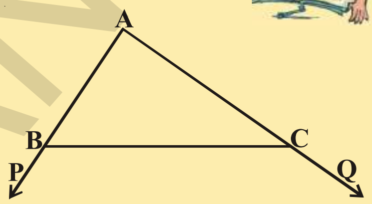
எனவே, $AB > AC$ (ΔABC ல் பெரிய கோணத்திற்கு எதிரிலுள்ள பக்கம்)

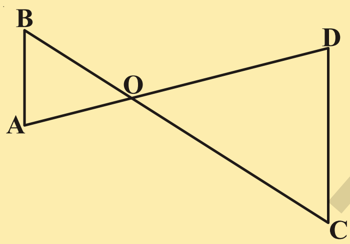
அல்லது, $AB > AD$ ($AD = AC$)

பயிற்சி - 7.4

1. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் மிகப்பெரிய பக்கம் கர்ணமாகும் எனநிருபி.

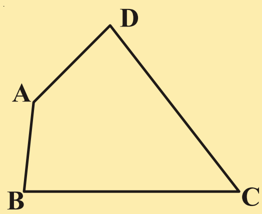
2. பக்க படத்தில், ΔABC ல் பக்கங்கள் AB, AC முறையே P, Q புள்ளிகள் வரை நீட்டிக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் $\angle PBC < \angle QCB$ எனில் $AC > AB$ எனக்காட்டு.

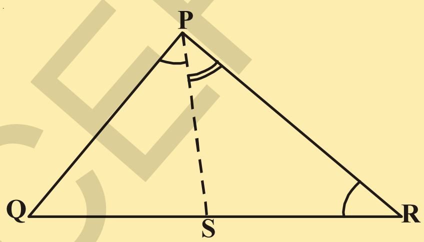




3. அடுத்துள்ள படத்தில், $\angle B < \angle A$ மேலும் $\angle C < \angle D$ எனில் $AD < BC$ எனக்காட்டு.

4. நாற்கரம் $ABCD$ ல் AB மிகச்சிறியபக்கம் மேலும் CD மிகப்பெரிய பக்கம். (படத்தைப்பார்) $\angle A > \angle C$ மேலும் $\angle B > \angle D$ எனக்காட்டு.





5. படத்தில் $PR > PQ$ மேலும் $\angle QPR$ ன் கோணஇருசமவெட்டி PS. $\angle PSR > \angle PSQ$ எனக்காட்டு.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் அளவுகள் முறையே 4செ.மீ மேலும் 6செ.மீ. மூன்றாவது பக்கத்தின் வாய்ப்புள்ள அளவுகள் (மிகைமெய்யெண்) அனைத்தையும் கண்டுபிடி. இதுபோல எத்தனை முக்கோணங்களை வரைய வாய்ப்புள்ளது?

7. 5செ.மீ, 8செ.மீ, 1செ.மீ அளவுகளுடன் முக்கோணத்தை வரையமுயற்சிக்கவும். இந்த வரைமுறை சாத்தியமா? இல்லையா? உங்கள் கருத்தை எழுதுங்கள்.

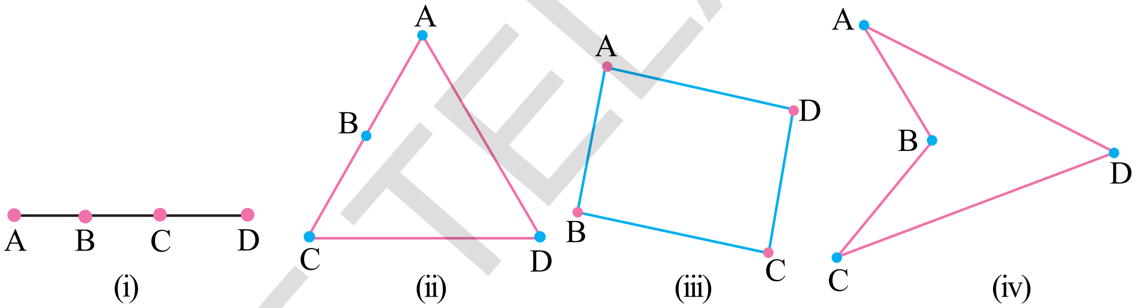
நாம் கற்றவை

- ஒரே வடிவத்தையும் ஒரே அளவையும் கொண்ட வடிவங்கள் சர்வசம வடிவங்கள் எனப்படும்.
- ஒரு முக்கோணத்தை வரைய மூன்று தனித்த அளவுகள் தேவை.
- இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்தபக்கங்கள், ஒத்தகோணங்களுக்கு சமமாக இருந்தால் அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும்.
- இவைகளின் முனைகளுக்கிடையே ஒன்று–ஒன்று தொடர்பு உள்ளது.
- இரண்டு சர்வசமமுக்கோணங்களில் ஒத்தபாகங்கள் சமம். இதை சுருக்கமாக CPCT என குறிப்பிடுகிறோம்.
- **ப.கோ.ப. சர்வசமகோட்பாடு :** இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் அவற்றுக்கிடையேயுள்ள கோணம் முறையே இரண்டாம் முக்கோணத்தின் ஒத்தபக்கங்கள் மேலும் அவற்றுக்கிடையேயுள்ள கோணத்திற்கு சமமாக இருந்தால் அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும்.
- **கோ.ப.கோ. சர்வசம கோட்பாடு :** இரண்டு முக்கோணங்தகளில் ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்க்ள அவற்றுக்கு இடைபட்ட பக்கம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த கோணங்கள் மேலும் அவற்றுக்கு இடைபட்ட பக்கத்திற்கு சமமாக இருந்தால் அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும்.
- ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்.
- மறுதலையாக, ஒரு முக்கோணத்தில் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் சமம்.
- **ப.ப.ப. சர்வசமகோட்பாடு :** ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கு சமமாக இருந்தால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்.
- **செ.க.ப. சர்வசம கோட்பாடு :** இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஒரு பக்கம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் கர்ணம் ஒத்தபக்கத்திற்கு சமமாமக இருந்தால் அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும்.
- ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்கள சமமாக இல்லாத போது பெரிய பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம் பெரியது.
- எந்த ஒரு முக்கோணத்திலும், பெரியகோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் பெரியது.
- ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் மூன்றாம் பக்கத்தின் நீளத்தை விட அதிகம்.

08 நாற்கரங்கள்

8.1 அறிமுகம்

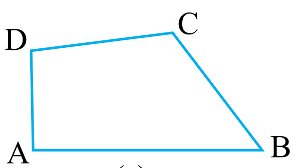
நீங்கள் முக்கோணங்களின் பண்புகளைப் பற்றியும் அவற்றின் நிருபணங்களைப் பற்றியும் முன் அத்தியாயத்தில் தெரிந்துக்கொண்டீர்கள். ஒரு முக்கோணம் என்பது ஒரு கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகளை இணைப்பதால் கிடைக்கும் ஒரு எளிய மூடிய படம் என உங்களுக்குத் தெரியும். ஒரு தளத்தில் உள்ள நான்கு புள்ளிகளை இணைப்பதால் கிடைக்கும் படத்தைப்பற்றி உனக்குத் தெரியுமா? அந்த நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டுப்புள்ளிகள் எனில் நமக்கு ஒரு கோட்டுத்துண்டு (படம் i) கிடைக்கும். அந்த நான்கு புள்ளிகளில் மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகள் எனில் நமக்கு ஒரு முக்கோணம் அமையும் (படம் ii). எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகள் அல்ல எனில் நான்கு பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு மூடிய படம் அமையும். (படம் iii) (படம் iv) இந்த படங்களை நாம் நாற்கரங்கள் என்கிறோம்.



(i) (ii) (iii) (iv)

நீங்கள் இவ்விதமான நாற்கரங்கள் நிறைய வரையலாம். இந்த விதமான படங்களை உங்கள் சுற்றுபுறங்களிலும் காணலாம். (படம் iii) (படம் iv)ல் உள்ள நாற்கரங்கள் ஒரு முக்கியமான நிலையில் வேறுபட்டுள்ளன. அவை எவ்வாறு வேறுபட்டுள்ளன?

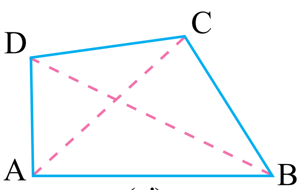
இந்த அத்தியாயத்தில் படம் (iii)-ல் உள்ள நாற்கரங்களைப் போன்று அமைந்துள்ளவற்றைப் பற்றித் தெரிந்துக்கொள்ளலாம். இவற்றை மூடிய நாற்கரங்கள் என்கிறோம்.



(v)

ஒரு நாற்கரம் என்பது ஒருதளத்தில் அமைந்த நான்கு கோடுகளால் ஏற்பட்ட ஒரு எளிய மூடிய படம் ஆகும்.

நாற்கரம் ABCD என்பது AB, BC, CD மற்றும் DA, ஆகிய நான்கு பக்கங்களையும், A, B, C மேலும் D என்ற முனைப்புள்ளிகளையும், $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஆகிய உச்சிகோணங்களையும் கொண்டதாக அமைந்துள்ளது.



(vi)

நாற்கரத்தின் எதிரெதிர் முனைப்புள்ளிகள் A, C மேலும் B, D ஆகியவற்றை இணைப்பதால் கிடைக்கும் AC மேலும் BD ஆகியவற்றை நாற்கரம் ABCD ன் மூலைவிட்டங்கள் என்கிறோம்.

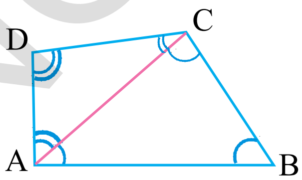
8.2 நாற்கரத்தின் பண்புகள்

நாற்கரத்தின் உட்புறத்தில் நான்கு கோணங்கள் உள்ளன. இந்த நான்கு கோணங்களின் மொத்தத்தைப் பற்றி தெரிந்துக் கொள்ளலாமா? இப்போது முக்கோணங்களின் கோணங்களின் மொத்த பண்பினை நினைவுப்படுத்திக் கொள்வோம். நாற்கரத்தின் நான்கு உட்கோணங்களின் மொத்தத்தைக்காண இந்த பண்பினை பயன்படுத்தலாம்.

ABCD ஒரு நாற்கரம் மற்றும் AC என்பது ஒரு மூலைவிட்டம் (படத்தைப்பார்)

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA = 180^\circ$ ...(1) முக்கோணம்ABC கோணங்களின் மொத்த பண்பு

என்பது நமக்குத் தெரியும்



அவ்வாறே Δ ABC-ல்

$$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ \quad ...(2)$$

(1) மேலும் (2)ஐக் கூட்ட

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ + 180^\circ$ எனக் கிடைக்கும்

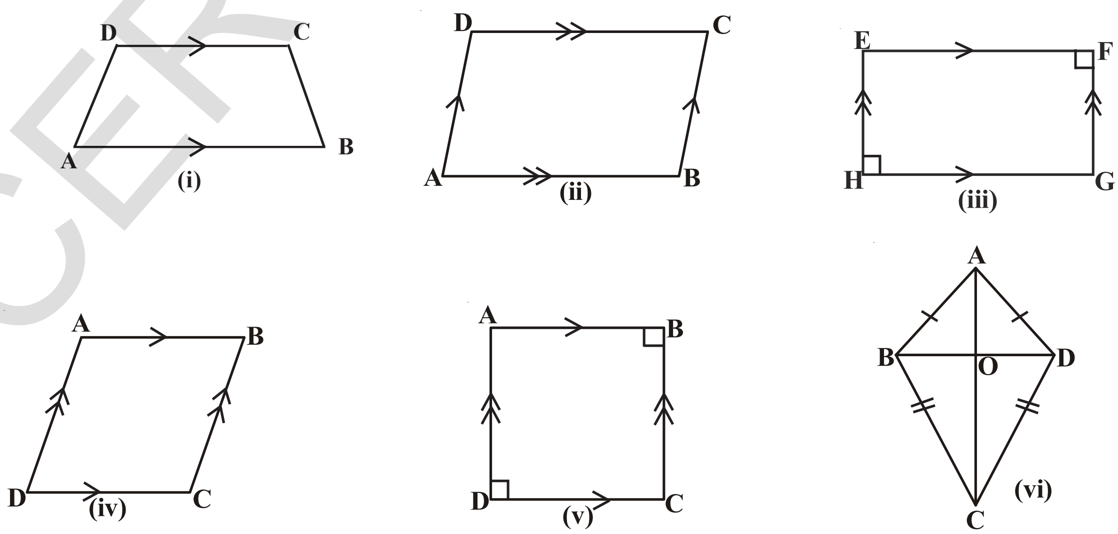
$\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ மேலும் $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

எனவே $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

அதாவது ஒரு நாற்கரத்தின் கோணங்களின் மொத்தம் 360° அல்லது 4 செங்கோணங்கள்.

8.3 நாற்கரங்களின் வகைகள்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட நாற்கரங்களைக் கவனி. இவற்றில் அதிக படங்களைப்பற்றி நாம் முன்பே தெரிந்துக் கொண்டுள்ளோம். இவற்றின் பெயர்களைப்பற்றியும், அவற்றின் பண்புகளைப் பற்றியும் நினைவுப்படுத்திக் கொள்வோம்.



நாம் கவனித்தது

* படம் (i) ல் நாற்கரம் ABCD ல் ஒரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் AB மற்றும் DC ஒன்றுக்கொன்று இணையாக உள்ளன. இந்த நாற்கரத்தை சரிவகம் என்கிறோம்.

  சரிவகத்தில் இணையல்லாத மற்ற இருபக்கங்களும் சமம் எனில் அந்த சரிவகத்தை இருசமபக்க சரிவகம் என்கிறோம்.
* படம் (ii) ல் உள்ளதைப்போல் இரண்டு ஜோடி எதிர்பக்கங்களை இணையாகக் கொண்ட நாற்கரத்தை இணைகரம் என்கிறோம். படம் (iii) படம் (iv) மற்றும் (v)ம் இணைகரங்கள் ஆகும்.
* படம் (iii) ல் இணைகரம் EFGH ன் எல்லா கோணங்களும் செங்கோணங்கள். இதை செவ்வகம் என்கிறோம்.
* படம் (iv)ல் இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ளன. இதை சாய்சதுரம் என்கிறோம்.
* படம் (v)ல் இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமம் மேலும் எல்லா கோணங்களும் $90°$ ஆக உள்ளது. இதை சதுரம் என்கிறோம்.
* படம் (vi)ல் உள்ள நாற்கரம் ABCD ல் இரண்டு ஜோடி அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ளன. அதாவது $AB = AD$ மேலும் $BC = CD$ இதை பட்டம் என்கிறோம்.

நிஷா என்ன சொல்கிறாள் என்பதைப் பார்ப்போம் :

ஒரு சாய்சதுரம் சதுரமாகலாம், ஆனால் எல்லா சதுரங்களும் சாய்சதுரங்கள் ஆகமுடியாது.

லலிதா தொடர்கிறாள்

எல்லா செவ்வகங்களும் இணைகரங்கள் ஆகும். ஆனால் எல்லா இணைகரங்களும் செவ்வகங்கள் ஆகமுடியாது.

மேற்கண்ட வாக்கியங்களில் நீ எவற்றை ஏற்றுக்கொள்கிறாய்?

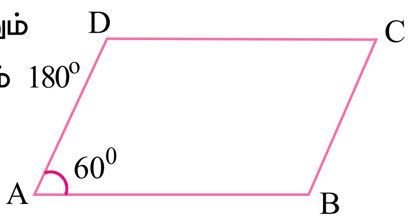
உன் விடைக்கு காரணங்களைக் கொடு. நாற்கரங்களின் வகைகளின் பண்புகளைப் பற்றி மேலும் சில கூற்றுகளை எழுது.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

எடுத்துக்காட்டு 1: ABCD ஒரு இணைகரம் மேலும் $\angle A = 60^o$. மற்ற கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு : இணைகரத்தின் எதிரெதிர் கோணங்கள் சமம்.

$\angle C = \angle A = 60^o$ மேலும் $\angle B = \angle D$ மற்றும்



நாற்கரத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த கோணங்களின் மொத்தம் 180^o

$\angle A$ மேலும் $\angle B$ என்பவை அடுத்தடுத்த கோணங்கள்

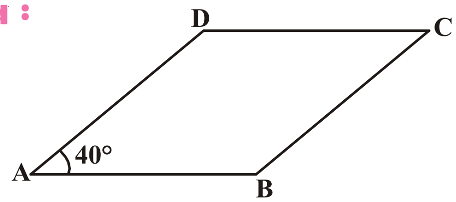
$\angle D = \angle B = 180^o - \angle A$

$= 180^o - 60^o = 120^o$.

எனவே மற்றகோணங்கள் $120^o, 60^o, 120^o$.

எடுத்துக்காட்டு 2: இணைகரம் ABCD ல் $\angle DAB = 40^{0}$ மற்ற கோணங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :



ABCD ஒரு இணைகரம்

$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ மேலும் AD || BC

அடுத்துள்ள கோணங்களின் மொத்தம்

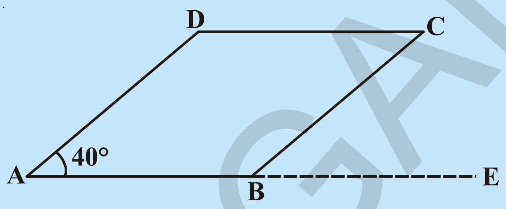
$\angle CBA + \angle DAB = 180°$

$\angle CBA = 180 - 40°$

$= 140°$

இதிலிருந்து $\angle ADC = 140°$ மேலும் $\angle BCD = 40°$ என காணலாம்.

முயன்று பார்



AB ஐ E வரை நீட்டி $\angle CBE$ ஐ கண்டுபிடி.

நீ கவனித்தது என்ன? $\angle ABC$ மேலும் $\angle CBE$ எவ்வகை கோணங்கள் ?

எடுத்துக்காட்டு 3: இணைகரத்தின் இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்கள் 4.5செ.மீ மேலும் 3செ.மீ அதன் சுற்றளவைக் காண்.

தீர்வு : இணைகரத்தின் எதிரெதிர் பக்கங்கள் சமம். எனவே மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் 4.5செ.மீ மற்றும் 3செ.மீ எனவே சுற்றளவு = 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15 செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 4: இணைகரம் ABCDல் அடுத்துள்ள கோணங்கள் $\angle A$ மேலும் $\angle B$ ன் இருசமவெட்டிகள் Pல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle APB = 90^{0}$ எனக்காட்டு.

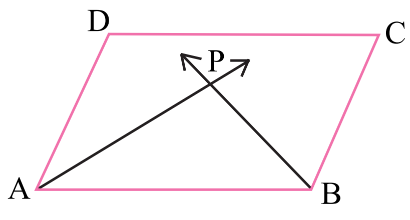
தீர்வு : ABCD என்பது இணைகரம். $\overrightarrow{AP}$ மேலும் $\overrightarrow{BP}$ என்பவை, $\angle A$ மேலும் $\angle B$ என்னும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள்.

இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்களின் மொத்தம் மிகை நிரப்பிக் கோணங்கள்.

$\angle A + \angle B = 180^{0}$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90°$



ΔAPB ல்,

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180°$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்த பண்பு)

$\angle APB = 180^{0} - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^{0} - 90^{0}$

$= 90^{0}$

எனவே $\angle APB = 90^{0}$ என நிரூபிக்கப்பட்டது

பயிற்சி 8.1

1. கீழ்கண்ட கூற்றுகள் மெய்யா, மெய்யற்றவையா எனக்கூறு.

   (i) ஒவ்வொரு இணைகரமும் ஒரு சரிவகம் ( )

   (ii) எல்லா இணைகரங்களும் நாற்கரங்கள் ( )

   (iii) எல்லா சரிவகங்களும் இணைகரங்கள் ( )

   (iv) ஒரு சதுரம் என்பது ஒரு சாய்சதுரம் ( )

   (v) ஒவ்வொரு சாய்சதுரம் ஒரு சதுரம் ( )

   (vi) எல்லா இணைகரங்களும் செவ்வகங்கள் ( )

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட நாற்கரத்தின் பண்பு மெய் எனில் **ஆம்** (YES) எனவும், மெய்யல்ல எனில் **இல்லை** (NO) எனவும் எழுது.

பண்புகள்	சரிவகம்	இணைகரம்	சாய்சதுரம்	செவ்வகம்	சதுரம்
a) ஒரு ஜோடி எதிர் பக்கங்கள் இணை	ஆம்				
b) இரண்டு ஜோடி எதிர் பக்கங்கள் இணை					
c) எதிர் பக்கங்கள் சமம்					
d) எதிர் கோணங்கள் சமம்					
e) அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பி					
f) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி					
g) மூலைவிட்டங்கள் சமம்					
h) எல்லாபக்கங்களும் சமம்					
i) ஒவ்வொரு கோணமும் செங்கோணம்					
j) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து					

3. சரிவகம் ABCD ல் $AB \parallel CD$. $AD = BC$, எனில் $\angle A = \angle B$ மேலும் $\angle C = \angle D$ எனக்காட்டு.

4. ஒரு நாற்கரத்தின் கோணங்கள் 1:2:3:4 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவைக் கண்டுபிடி.

5. ABCD ஒரு செவ்வகம் மேலும் AC ஒரு மூலைவிட்டம். ΔACDன் கோணங்களின் அளவுகளைக் கண்டுபிடி. காரணங்களைக் கொடு.

8.4 இணைகரம் மற்றும் அதன் பண்புகள்

இணைகரங்கள் அனைத்தும் நாற்கரங்கள் என நாம் அறிவோம். இணைகரங்களின் பண்புகளை நாம் கீழே காண்போம்.

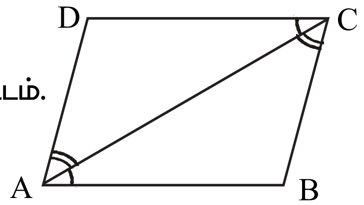
செயற்பாடு

ஒரு காகிதத்தில் ஒரு இணைகர வடிவத்தை வெட்டி எடுத்துக்கொள். அதை மேலும் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் வழியே வெட்டு. இப்போது உனக்கு என்ன வடிவங்கள் கிடைக்கிறது? இந்த முக்கோணங்களைப் பற்றி நீ என்ன கூறுவாய்?

இப்போது ஒரு முக்கோணத்தின் மேல் அடுத்த முக்கோணத்தை வை. முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் அடுத்ததின் மேல் சரியாக வைக்கமுடியுமா? பக்கங்களை சரியாக பொருத்துவதற்கு முக்கோணத்தை திருப்ப வேண்டியிருக்கும். இரண்டு முக்கோணங்கள் சரியாக பொருந்துவதால் அவை இரண்டும் சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும். இதை மேலும் சில இணைகரங்களுக்கு செய்துபார். எந்த ஒரு மூலைவிட்டத்தையும் வெட்டுவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

மேற்கண்ட செயலிலிருந்து ஒரு மூலைவிட்டம் இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசமமுக்கோணங்களாக பிரிப்பதை காணலாம். இதை இப்பொழுது நாம் நிருபிக்கலாம்.

தேற்றம் 8.1 : ஒரு மூலைவிட்டம் இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.



நிருபணம் : இணைகரம் ABCDஐ எடுத்துக்கொள்.

A, C இணை. AC என்பது இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம்.

$AB \parallel DC$ மேலும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி

எனவே $\angle DCA = \angle CAB$. (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

இவ்வாறே $DA \parallel CB$ மேலும் AC ஒரு மூலைவிட்டம்

எனவே $\angle DAC = \angle BCA$.

ΔACD மேலும் ΔCAB ஐ எடுத்துக்கொள்.

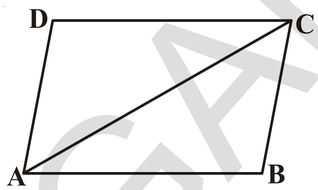
இதில் $\angle DCA = \angle CAB$ மேலும் $\angle DAC = \angle BCA$ மேலும் $AC = CA$. (பொதுபக்கம்)

எனவே $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

A.S.A. (கோணம், பக்கம், கோணம்) உண்மையின்படி இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம். அதாவது மூலைவிட்டம் AC என்பது இணைகரம் ABCD ஐ இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.

தேற்றம் 8.2 : ஒரு இணைகரத்தின் எதிர் பக்கங்கள் சமம்.

நிருபணம் : ஒரு மூலைவிட்டம் இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது என முன்பே நிருபித்தோம்.



எனவே இந்தபடத்தில் $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

எனவே $AB = DC$ மேலும் $\angle CBA = \angle ADC$

மேலும் $AD = BC$, $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

எனவே $\angle DCB = \angle DAB$

எனவே இணைகரத்தில் இவற்றை நாம் காணலாம்.

i. எதிர் பக்கங்கள் சமம்.

ii. எதிர் கோணங்கள் சமம்.

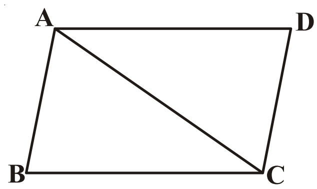
ஒரு குவி நாற்கரத்தின் எதிர்பக்கங்கள் இணை எனில் அதன் எதிர்எதிர் பக்கங்கள் மற்றும் எதிரெதிர் கோணங்கள் சமம் என்பதை நாம் காணலாம்.

நாம் இப்போது இதன் மறுதலையை நிருபிக்க முயற்சி செய்யலாம். அதாவது ஒரு நாற்கரத்தின் எதிரெதிர் பக்கங்கள் சமம் எனில் அது ஒரு இணைகரம்.

தேற்றம் 8.3 : ஒரு நாற்கரத்தின் இரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் சமம் எனில் அது ஓர் இணைகரம்.

நிருபணம் : $AB = DC$ மற்றும் $BC = AD$ ஆக உள்ள $ABCD$ நாற்கரத்தை கருதுவோம்.

மூலைவிட்டம் AC ஐ வரை



ΔABC மற்றும் ΔCDAஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$BC = AD, AB = DC$ மற்றும் $AC = CA$ (பொதுபக்கம்)

எனவே $\Delta ABC \cong \Delta CDA$(ஏன்?)

எனவே $\angle BCA = \angle DAC$, AC ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால்

அல்லது $AB \parallel DC$ ...(1)

CA ஒரு குறுக்கு வெட்டி எனில் $\angle ACD = \angle CAB$ எனவை

$BC \parallel AD$ ...(2)

எனவே (1) மற்றும் (2)லிருந்து $ABCD$ ஒரு இணைகரம்.

ஒரு இணைகரத்தில் இரண்டு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் சமம் எனவும், அதன் மறுதலையாக, ஒருநாற்கரத்தின் இரண்டு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் சமம் எனில் அது ஒரு இணைகரம் என்பதையும் நாம் பார்த்தோம்.

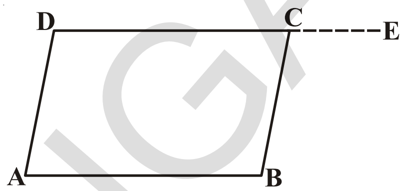
ஒரு நாற்கரத்திற்கு ஒரு ஜோடி எதிரெதிர் கோணங்கள் சமம் என காட்ட முடியுமா?

தேற்றம் 8.4 : ஒரு நாற்கரத்தில் இரண்டு ஜோடி எதிர் கோணங்கள் சமம் எனில் அது ஓர் இணைகரம்.

நிருபணம் : நாற்கரம் ABCDல், $\angle A = \angle C$ மேலும் $\angle B = \angle D$ எனில் ABCD ஒரு இணைகரம் என நிருபிக்க வேண்டும்.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ என நமக்குத் தெரியும்

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360°}{2}$$



அதாவது $\angle A + \angle B = 180°$

DC ஐ Eக்கு நீட்டி வரைக

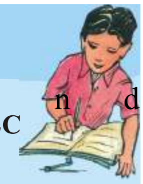
$\angle C + \angle BCE = 180°$ எனவே $\angle BCE = \angle ADC$

$\angle BCE = \angle D$ எனில் AD || BC (ஏன்?)

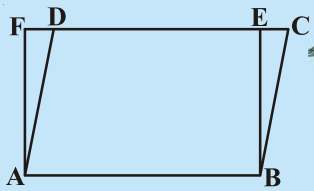
இங்கு DC ஒரு குறுக்குவெட்டி ஆகும்.

இவ்வாறே AB || DC எனக்காட்டலாம். எனவே ABCD ஒரு இணைகரம்.

பயிற்சி 8.2



1. அடுத்துள்ள படத்தில் ABCD ஓர் இணைகரம். ABEF ஒரு செவ்வகம் $\Delta AFD \cong \Delta BEC$. எனக்காட்டு



2. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அதை நான்கு சர்வசமமுக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும் எனக்காட்டு.
3. நாற்கரம் ABCD ல் $\angle C$ மேலும் $\angle D$ ன் கோண இருசமவெட்டிகள் Oல் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனில்

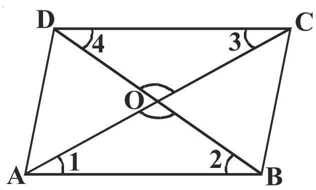
$$\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$ என நிருபி

8.5 ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள்

தேற்றம் 8.5 : ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி.

நிருபணம் : இணைகரம் ABCDஐ வரைக. மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஒன்றையொன்று O ல் வெட்டுமாறு வரைக.

ΔOAB மற்றும் ΔOCDல் ஏற்படும் கோணங்களை



$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ என குறிக்கவும்.

$\angle 1 = \angle 3$ (AB || CD மேலும் AC குறுக்குவெட்டி)

$\angle 2 = \angle 4$ (ஏன்?) (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

மேலும் $AB = CD$ (இணைகரத்தின் பண்பு)

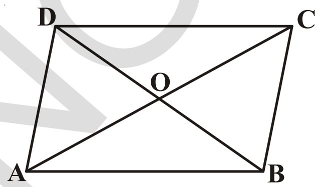
(கோணம், பக்கம், கோணம்) சர்வசம பண்பின்படி

$\Delta OCD \cong \Delta OAB$

$CO = OA$, $DO = OB$ அல்லது மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி.

இவ்வாறாக, இதன் மறுதலையும் உண்மை என்பதையும் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம். மறுதலையாக, ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி எனில் அது ஒரு இணைகரம்.

தேற்றம்-8.6 : ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி எனில் அது ஓர் இணைகரம்.



நிருபணம்: ABCD ஒரு நாற்கரம்.

AC, BD என்ற மூலைவிட்டங்கள் 'O' ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன

மேலும் $OA = OC$, $OB = OD$.

ABCD ஒரு இணைகரம் என நிருபி.

(குறிப்பு : ΔAOB மேலும் ΔCOD ஐ எடுத்துக்கொள். அவை சர்வசமமா? சர்வசமம் எனில் என்ன சொல்லலாம்)

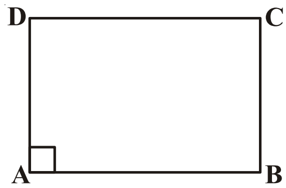
8.5.1 மேலும் சில வடிவியல் கூற்றுகள்

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் நாம் சில பொதுவான பண்புகளிலிருந்து தொடங்கி ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவத்தின் (இணைகரம்) பல கூற்றுகளை காணலாம் என்று பார்த்தோம். மேற்கூறிய முடிவுகளை பயன்படுத்தி புதிய கூற்றுகளை வருவிக்கலாம். இந்த கூற்றுகளை அளத்தல் முறையின் மூலம் சரிபார்க்கத் தேவையில்லை. ஏனெனில் அவை எல்லா வகைகளிலும் உண்மை எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

முன்பே தெரிந்து கொண்ட மற்றும் நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றுகளில் இருந்து வருவிக்கப்பட்ட அத்தகைய கூற்றுகள் கிளைத்தேற்றம் என்று அழைக்கப்படும். கிளைத்தேற்றம் என்பது ஏற்கனவே நிரூபிக்கப்பட்ட தேற்றத்திலிருந்து எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட மெய்கூற்று ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம் 1 : ஒரு செவ்வகத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் ஒரு செங்கோணம் என நிருபி.

தீர்வு : ஒரு கோணம் செங்கோணமாக உள்ள இணைகரம், செவ்வகம் ஆகும்.



கொடுக்கப்பட்டுள்ளது : ABCD ஒரு செவ்வகம்.

இதில் ஒரு கோணம் $\angle A = 90^o$ எனக் கொள்க.

$\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ என நிருபிக்க வேண்டும்.

நிருபணம் : ABCD ஒரு இணைகரம். எனவே

$AD \parallel BC$, AB ஒரு குறுக்கு வெட்டி.

எனவே $\angle A + \angle B = 180^o$ (குறுக்குவெட்டியில் ஒரேபக்கத்தில் அமைந்த உட்கோணங்கள்)

$\angle A = 90^o$ (**கொடுக்கப்பட்டது**)

$\angle B = 180^o - \angle A$

$= 180^o - 90^o = 90^o$

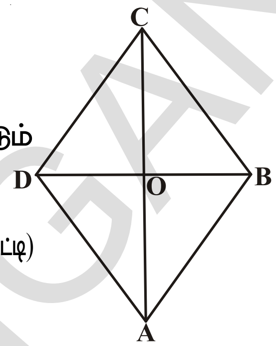
இப்போது $\angle C = \angle A$ **மேலும்** $\angle D = \angle B$ (**இணைகரத்தின் எதிர் கோணங்கள்**)

எனவே $\angle C = 90^o$ **மேலும்** $\angle D = 90^o$.

எனவே செவ்வகத்தில் ஒவ்வொரு கோணமும் ஒரு செங்கோணம்.

கிளைத்தேற்றம் 2 : ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனக்காட்டு.

நிரூபணம் : சாய்சதுரம் என்பது எல்லா பக்கங்களும் சமமாக உள்ள ஒரு இணைகரம்



ABCD ஒரு சாய்சதுரம் மேலும் மூலைவிட்டங்கள்

AC மேலும் BDஎன்பவை O ல் வெட்டுகின்றன.

AC என்பது BDக்கு செங்குத்து என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்

Δ AOB மற்றும் Δ BOC ஐ கருதுவோம்.

OA = OC (இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி)

OB = OB (Δ AOB மேலும் Δ BOCன் பொதுபக்கம்)

AB = BC (சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள்)

எனவே $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (ப.ப.ப பண்பின்படி)

எனவே $\angle AOB = \angle BOC$

ஆனால் $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (மிகை நிரப்பி)

எனவே $2\angle AOB = 180^\circ$

அல்லது $\angle AOB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

இவ்வாறாகவே $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ (ஒரே கோணம்)

எனவே AC என்பது BDக்கு செங்குத்து.

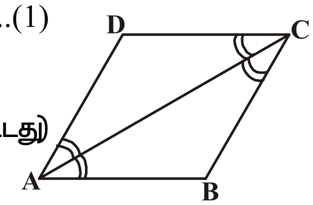
இதிலிருந்து, சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

கிளைத்தேற்றம் 3 : இணைகரம் ABCD ல், மூலைவிட்டம் AC என்பது $\angle$Aன் இருசமவெட்டி எனில் ABCD ஒரு சாய்சதுரம்.

நிரூபணம் : ABCD ஒரு இணைகரம்,

எனவே AB || DC. AC என்பது $\angle$A மேலும் $\angle$C ஐ வெட்டும் குறுக்குவெட்டி

எனவே $\angle BCA = \angle DAC$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)...(1)



$\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)

ஆனால் AC என்பது $\angle$A ன் இருசமவெட்டி (கொடுக்கப்பட்டது)

எனவே $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

இவ்வாறு AC என்பது $\angle$C ன் இருசமவெட்டியும் ஆகும்.

①, ② மற்றும் ③ லிருந்து

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABCல் $\angle BAC = \angle BCA$ எனில் $BC = AB$ (இருசமபக்க முக்கோணம்)

ஆனால் $AB = DC$ மேலும் $BC = AD$ (இணைகரம் ABCD ன் எதிர்பக்கங்கள்)

ஃ $AB = BC = CD = DA$

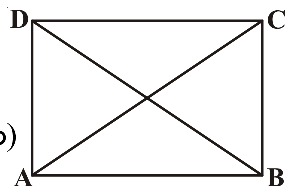
எனவே ABCD ஒரு சாய்சதுரம்

கிளைத்தேற்றம் 4 : ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் சமம் எனக் காட்டு.

நிரூபணம் : ABCD ஒரு செவ்வகம் மேலும் AC, BD என்பவை அதன் மூலைவிட்டங்கள் $AC = BD$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

ABCD ஒரு செவ்வகம்.

இதை எல்லா கோணங்களும் செங்கோணங்களாகக் கொண்ட ஒரு இணைகரம் எனலாம்.



ΔABC மேலும் ΔBAD ஐ எடுத்துக்கொள்

$AB = BA$ (பொது)

$\angle B = \angle A = 90^{o}$ (செவ்வகத்தின் ஒவ்வொரு கோணம்)

$BC = AD$ (செவ்வகத்தின் எதிர் பக்கங்கள்)

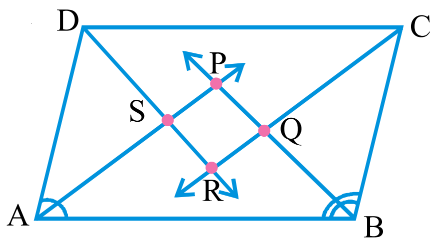
எனவே, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ப.கோ.ப. பண்பு)

$\Rightarrow AC = BD$

அல்லது செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் சமம்.

கிளைத்தேற்றம் 5 : ஒரு இணைகரத்தின் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் ஒரு செவ்வகத்தை ஏற்படுத்தும் எனக்காட்டுக.

நிரூபணம் : ABCD ஒர் இணைகரம் $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ ன் கோண இருசமவெட்டிகள் முறையே P, Q, R, S ல் வெட்டிக்கொண்டு ஒரு நாற்கரத்தை ஏற்படுத்துகிறது (அடுத்துள்ள படத்தைப்பார்).



ABCD ஒரு இணைகரம். எனவே $AD \parallel BC$. இவற்றை AB என்னும் குறுக்குவெட்டி வெட்டுகிறது என்க. இப்போது $\angle A + \angle B = 180^{o}$(இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்கள்)

$\angle BAP = \frac{1}{2}\angle A$ மேலும் $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle B$ [AP, BP என்பவை முறையே $\angle A$ ன் $\angle B$ ன் இருசமவெட்டிகள்]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\times 180^{o}$$

அல்லது $\angle BAP + \angle ABP = 90^{o}$ ...(1)

ஆனால் Δ APBல்

$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^{o}$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் மொத்த பண்பு)

எனவே $\angle APB = 180^{o} - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^{o} - 90^{o}$ ① லிருந்து

$= 90^{o}$

$\angle SPQ = \angle APB = 90°$ என்பதை நாம் காணலாம்,

இவ்வாறாகவே $\angle CRD = \angle QRS = 90°$ (ஒரே கோணங்கள் என்பதையும் நாம் காட்டலாம்)

ஆனால் $\angle BQC = \angle PQR$ மேலும் $\angle DSA = \angle PSR$ (ஏன்?)

$\angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90°$

எனவே PQRSன் எல்லா கோணங்களும் $90°$.

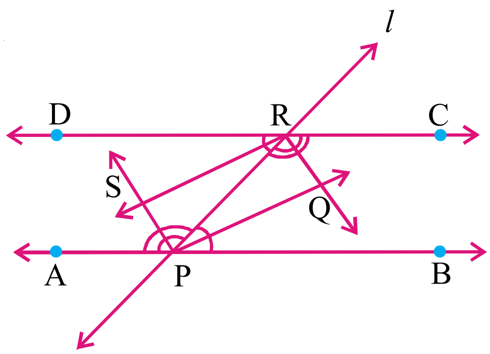
எனவே PQRS ஒரு செவ்வகம் என கூறலாம்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

1. ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் மற்றும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் எனக்காட்டு.
2. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அதை நான்கு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிக்கும் எனக்காட்டு.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5: $\overleftrightarrow{AB}$ மேலும் $\overleftrightarrow{DC}$ என்பவை இரண்டு இணைகோடுகள் மேலும் l, என்பது குறுக்குவெட்டி. இது $\overleftrightarrow{AB}$ ஐ P யிலும் $\overleftrightarrow{DC}$ ஐ Rலும் வெட்டுகிறது. இணைகோடுகளின் உட்கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் ஒரு செவ்வகத்தை ஏற்படுத்தும் என நிரூபி.



நிரூபணம் : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, l என்பது $\overleftrightarrow{AB}$ ஐ Pயிலும் $\overleftrightarrow{DC}$ ஐ Rலும் வெட்டும் குறுக்கு வெட்டி.

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}$ மேலும் $\overrightarrow{PS}$ என்பவை முறையே $\angle RPB, \angle CRP, \angle DRP$ மற்றும் $\angle APR$ ன் கோண இருசமவெட்டிகள் எனக்கொள்க.

$\angle BPR = \angle DRP$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்) ...①

ஆனால் $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\because \overrightarrow{PQ}$ என்பது $\angle BPR$ ன் இருசமவெட்டி)

மேலும் $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\because \overrightarrow{RS}$ என்பது $\angle DPR$ ன் இருசமவெட்டி). ...(2)

(1) மேலும் (2) லிருந்து

$\angle RPQ = \angle PRS$

இவை $\overrightarrow{PQ}$ மேலும் $\overrightarrow{RS}$க்கு $\overline{PR}$ ஆல் ஏற்பட்ட ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்.

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

இவ்வாறே

$\angle PRQ = \angle RPS$, எனவே $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

எனவே PQRS என்பது ஒரு இணைகரம் ஆகும் ... (3)

$\angle BPR + \angle CRP = 180^{o}$ என நமக்குத் தெரியும் ($\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$க்கு குறுக்கு வெட்டி l ன் ஒரே பக்கதில் உள்ள உட்கோணங்கள்)

$$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^{o}$$

$$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^{o}$$

ஆனால் Δ PQRல்,

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^{o}$ (ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்கள்)

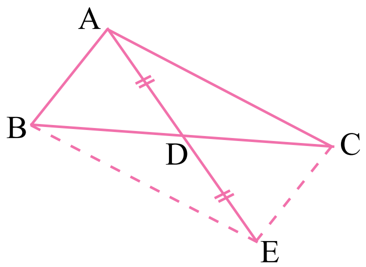
$\angle PQR = 180^{o} - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

$= 180^{o} - 90^{o} = 90^{o}$ ... (4)

(3) மேலும் (4) லிருந்து

PQRS என்பது ஒரு கோணம் செங்கோணமாக் கொண்ட ஒரு இணைகரம். எனவே PQRS என்பது ஒரு செவ்வகம்.

எடுத்துக்காட்டு 6: Δ ABCல் , AD என்பது BCக்கு வரையப்பட்ட மையக்கோடு மேலும் AD என்பது AD = ED என்றிருக்குமாறு E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. ABEC என்பது ஒரு இணைகரம் என நிரூபி.



நிரூபணம் : AD என்பது Δ ABCன் மையக்கோடு.

AD = ED என்றிருக்குமாறு AD ஐ E வரை நீட்டு.

BE மேலும் CE ஐ இணை.

இப்போது Δ ABD மேலும் Δ ECDல்

BD = DC (D என்பது BC ன் மையப்புள்ளி)

$\angle ADB = \angle EDC$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

AD = ED (கொடுக்கப்பட்டது)

எனவே $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (ப.கோ.ப. பண்பு)

எனவே AB = CE (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள்)

மேலும் $\angle ABD = \angle ECD$

$\overleftrightarrow{AB}$ மேலும் $\overleftrightarrow{CE}$ கோடுகளுக்கு $\overleftrightarrow{BC}$ குறுக்குவெட்டியால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

இவ்வாறாக, நாற்கரம் ABECல்,

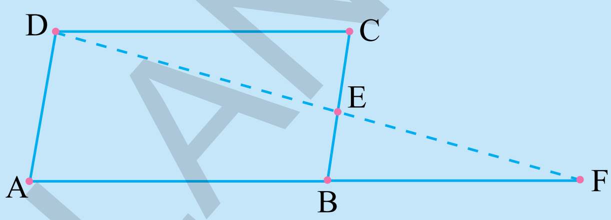
$AB \parallel CE$ மேலும் $AB = CE$

எனவே ABEC ஒரு இணைகரம்.

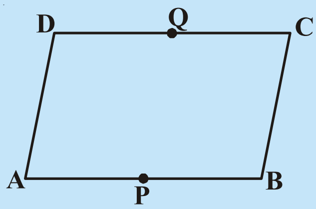
பயிற்சி - 8.3

1. ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்கோணங்கள் $(3x - 2)^o$ மேலும் $(x + 48)^o$ எனில் இணைகரத்தின் ஒவ்வொரு கோணத்தையும் காண்க.

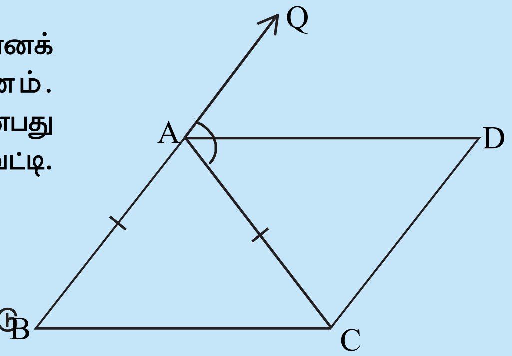
2. ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு கோணம், அதன் மிகச்சிறிய கோணத்தின் இருமடங்கைவிட 24^o குறைவு எனில் அந்த இணைகரத்தின் எல்லா கோணங்களையும் காண்.



3. அடுத்துள்ள படத்தில் ABCD ஓர் இணைகரம் மேலும் E என்பது BC ன் மையப்புள்ளி, DE மேலும் AB என்பவை Fல் சந்திக்குமாறு AB நீட்டி வரையப்பட்டால் $AF = 2AB$ என காட்டு.



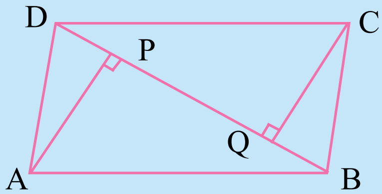
4. அடுத்துள்ள படத்தில் ABCD ஒரு இணைகரம். P,Q என்பவை முறையே AB, DCன் மையப்புள்ளிகள். PBCQ என்பதும் ஓர் இணைகரம் எனக்காட்டு.



5. ABC என்பது $AB = AC$ எனக் கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணம். அடுத்துள்ளபடத்தில் காட்டியபடி ADஎன்பது வெளிக்கோணம் QAC ன் இருசமவெட்டி. மேலும் $CD \parallel BA$. எனில்

   (i) $\angle DAC = \angle BCA$

   (ii) ABCD ஓர் இணைகரம் எனக்காட்டு



6. (படத்தைப் பார்) ABCD ஓர் இணைகரம். AP மேலும் CQ என்பவை மூலைவிட்டம் BDக்கு A மேலும் C என்னும் முனைகளிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள்.

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ மேலும்

   (ii) $AP = CQ$ எனக்காட்டு

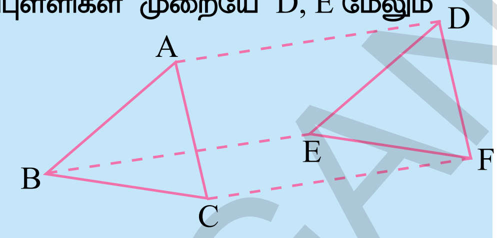
7. அடுத்துள்ள படத்தைப்பார். ΔABC மேலும் ΔDEFல் $AB = DE$; $BC = EF$ மேலும் $BC \parallel EF$. A, B மேலும் C என்னும் முனைப்புள்ளிகள் முறையே D, E மேலும் F உடன் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. எனில்

   (i) ABED ஓர் இணைகரம்

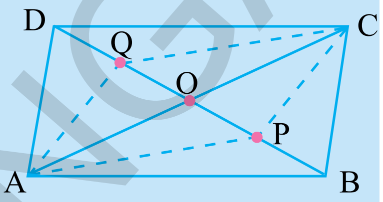
   (ii) BCFE ஓர் இணைகரம்

   (iii) $AC = DF$

   (iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



8. அடுத்துள்ள படத்தில் ABCD ஓர் இணைகரம். AC, BD என்னும் மூலைவிட்டங்கள் O ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. P மேலும் Q என்னும் புள்ளிகள் மூலைவிட்டம் BD ஐ மூன்று பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகள். $CQ \parallel AP$ எனவும், AC கோட்டுத்துண்டு PQஐ இருசமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் எனவும் நிருபி.



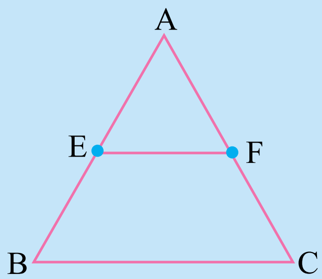
9. ABCD ஒரு சதுரம். E, F, G மேலும் H என்பவை முறையே AB, BC, CD மற்றும் DA ன் மையப்புள்ளிகள். மேலும் $AE = BF = CG = DH$. EFGH ஒரு சதுரம் எனநிருபி.

8.6 முக்கோணத்தின் மையபுள்ளி தேற்றம்

நாம் ஒரு முக்கோணம் மற்றும் ஒரு நாற்கரத்தின் பண்புகளைக் கற்றுக்கொண்டோம். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளைக் கொண்டு எதை வருவிக்க முடியும் என்பதை முயற்சி செய்வோம்.

முயன்று பார்

ஒரு முக்கோணம் ABC ஐ வரைந்து, $\overline{AB}$ மேலும் $\overline{AC}$ ன் மையப்புள்ளிகளை முறையே E மேலும் F எனக்குறி. படத்தில் காட்டியதைப் போல E மேலும் Fஐச் சேர்.



முக்கோணத்தின் பக்கம் BC மற்றும் EFஐ அளந்துக்கொள். மேலும் $\angle AEF$, $\angle ABC$ ஐ அளந்துக்கொள்.

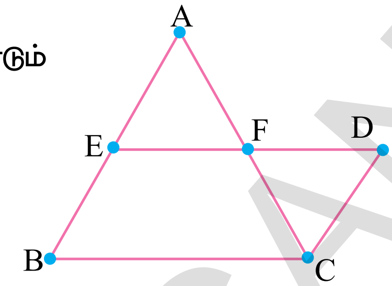
மேலும் $\angle AEF = \angle ABC$ மேலும் $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ எனவும் நாம் அறியலாம். இவை EF, BC என்னும் கோடுகளை AB என்னும் குறுக்குவெட்டி வெட்டுவதால் ஏற்படும் கோணங்கள். எனவே $EF \parallel BC$ என்கிறோம். இந்த செயல்பாட்டை மேலும் சில முக்கோணங்களை வரைந்து செய்.

இதிலிருந்து நாம் கீழ்கண்ட தேற்றத்தை அடையலாம்.

தேற்றம்–8.7 : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை மேலும் அதில் பாதி.

தீர்வு : ΔABC-ல் E, F என்பவை முறையே AB மேலும் ACன் மையப்புள்ளிகள்.

(i) EF || BC (ii) $EF = \frac{1}{2} BC$ என காண்பிக்க வேண்டும்



நிருபணம் : EFஐச் சேர்த்து நீட்டி, C வழியே BAக்கு இணையாக, EF ன் நீட்சியை Dல் வெட்டுமாறு ஓர் இணைகோடு வரைக.

Δ AEF மேலும் Δ CDFல்

AF = CF (F என்பது AC ன் மையப்புள்ளி)

$\angle AFE = \angle CFD$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

மேலும் $\angle AEF = \angle CDF$ (CD || BA, ED குறுக்குவெட்டியினால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

கோ.ப.கோ சர்வசம பண்பின்படி

$\therefore\ \Delta AEF \cong \Delta CDF$

எனவே AE = CD மேலும் EF = DF (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள்)

AE = BE என நமக்குத் தெரியும்

$\therefore$ BE = CD

BE || CD மேலும் BE = CD, எனவே BCDE ஓர் இணைகரம்

எனவே ED || BC $\Rightarrow$ EF || BC

BCDE என்பது ஓர் இணைகரம் என்பதால் ED = BC (எப்படி ?) ($\because$ DF = EF)

ஆனால் நாம் DF = EF எனக் காட்டியுள்ளோம்.

$\therefore$ 2EF = BC

எனவே $EF = \frac{1}{2} BC$

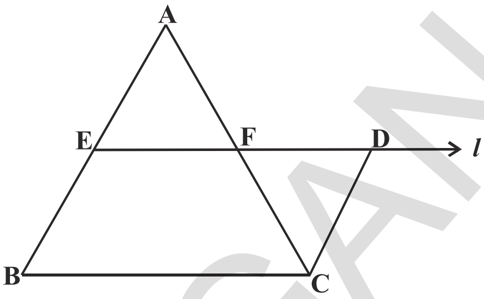
இந்த தேற்றத்தின் மறுதலையையும் மெய்யென நாம் பார்க்கலாம். அதன் மறுதலையை எழுதி அதை எவ்வாறு நிருபிப்பது எனப் பார்ப்போம்.

தேற்றம் 8.8 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாகவும், மற்றொரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் வரையப்பட்ட கோடு மூன்றாவது பக்கத்தை இருசமபாகங்களாகக் பிரிக்கும்.

நிருபணம் : Δ ABC ஐ வரைக. AB ன் மையப்புள்ளி Eஐக் குறி. E வழியே BCக்கு இணையாக l என்னும் கோட்டை வரைக. இந்தகோடு AC ஐ Fல் வெட்டுகிறது.

CD || BA என இருக்குமாறு அமைக்கவும்.

AF = CF எனக் காட்டவேண்டும்.



ΔAEF மேலும் ΔCFDஐ எடுத்துக்கொள்.

$\angle EAF = \angle DCF$ (BA || CD மேலும் ACகுறுக்குவெட்டி) (எப்படி?)

$\angle AEF = \angle D$ (BA || CD மேலும் ED குறுக்குவெட்டி) (எப்படி?)

இந்த இரண்டு முக்கோணங்களில் எந்த இரண்டு ஒத்த பக்கங்களும் சமம் என நாம் காட்டவில்லை. எனவே முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என நிருபிக்க முடியாது.

அவ்வாறு நிருபிக்க EB || DC என எடுத்துக்கொள்

ED || BC

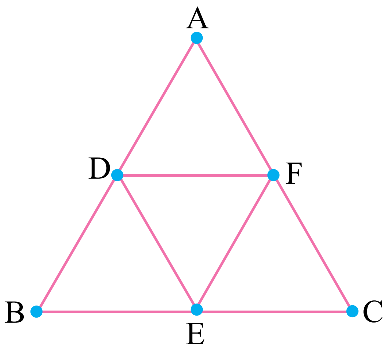
எனவே EDCB ஒரு இணைகரம். எனவே BE = DC எனலாம்.

BE = AE ஆதலால் AE = DC.

எனவே $\Delta AEF \cong \Delta CFD$

∴ AF = CF

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்



எடுத்துக்காட்டு 7: ΔABC, D, E மேலும் F என்பவை முறையே AB, BC மற்றும் CAன் மையப்புள்ளிகள். இந்த மையப்புள்ளிகளை ஒன்றோடொன்று சேர்க்கும் போது ΔABC நான்கு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது எனக் காட்டு. (ΔDEF ஐ மைய முக்கோணம் என்கிறோம்)

நிருபணம் : ΔABCல் D, E என்பவை முறையே $\overline{AB}$ மேலும் $\overline{BC}$ ன் மையப்புள்ளிகள்.

மையப்புள்ளி தேற்றத்தின் படி,

DE || AC

இவ்வாறே DF || BC மேலும் EF || AB.

எனவே ADEF, BEFD, CFDE என்பவை அனைத்தும் இணைகரங்கள் ஆகும்.

இணைகரம் ADEF ல், DF மூலைவிட்டம்.

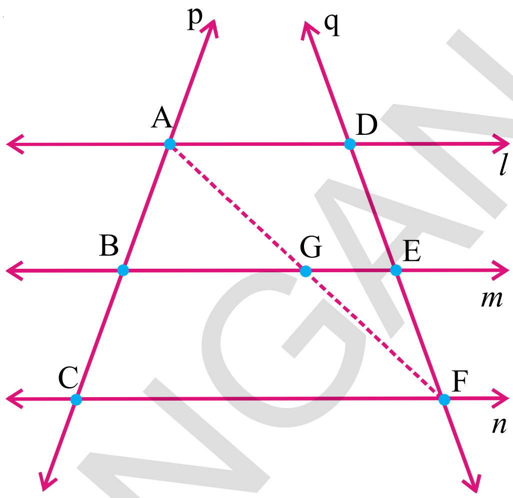
எனவே $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (மூலைவிட்டம், இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது)

இவ்வாறே $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

மேலும் $\Delta CEF \cong \Delta DEF$

எனவே, எல்லா முக்கோணங்களும் சர்வசமம்.

பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை சேர்ப்பதால், ΔABC நான்கு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்பதை நாம் காட்டியிருக்கிறோம்.



எடுத்துக்காட்டு 8: l, m மேலும் n என்பவை இணை கோடுகள். அவற்றை p மேலும் q என்னும் குறுக்கு வெட்டிகள் வெட்டுகின்றன. p என்னும் குறுக்குவெட்டி l, m , n மேல் AB=BC என்னும் சமமான குறுக்கிடுகளை ஏற்படுத்துமாறு A, B, C ல் வெட்டுகிறது. q என்னும் குறுக்குவெட்டி அந்த இணைகோடுகளை D,E, Fல் வெட்டுகிறது. q ன் மேல் ஏற்படும் குறுக்கிடுகள் DE மேலும் EF சமம் எனக்காட்டு.

நிருபணம் : AB மேலும் BC ன் சமானப்பண்பை DE மேலும் EF உடன் ஒப்பிட்டுப்பார்க்க வேண்டும். A ஐ F உடன் இணைத்து, அந்த கோடு 'm' கோட்டை வெட்டும்புள்ளியை G எனக் கொள்ளலாம்.

ΔACFல் AB = BC (கொடுக்கப்பட்டது)

எனவே B என்பது AC ன் மையப்புள்ளி

மேலும் BG || CF (எப்படி?)

எனவே G என்பது AFன் மையப்புள்ளி (தேற்றத்தின்படி)

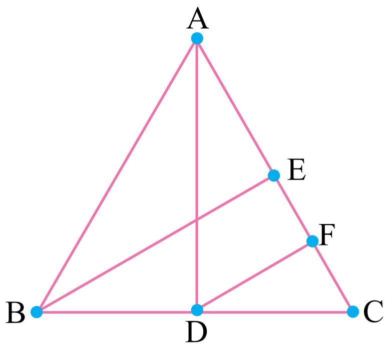
இப்போது ΔAFDல் அதே காரணத்தின் படி G என்பது AFன் மையப்புள்ளி மேலும் GE || AD, எனவே E என்பது DF ன் மையப்புள்ளி.

எனவே DE = EF.

இவ்வாறு l, m மேலும் n என்பவை qன் மேல் சமமான குறுக்கிடுகளை ஏற்படுத்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9: கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் AD, BE என்பவை ΔABC ன் மையக்கோடுகள் மேலும் BE || DF.

$CF = \frac{1}{4}$ AC என நிருபி



நிருபணம் : ΔABCல், D என்பது BCன் மையப்புள்ளி, BE || DF; தேற்றத்தின்படி F என்பது CE ன் மையப்புள்ளி.

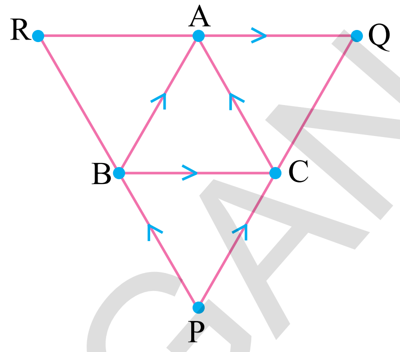
$\therefore$ **CF** $= \frac{1}{2}CE$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\right)$ **(எப்படி ?)**

எனவே CF $= \frac{1}{4}AC$.

எடுத்துக்காட்டு 10: ABC ஒரு முக்கோணம். A, B, C ன் வழியே முறையே BC, CA, ABக்கு இணையாகவும், மேலும் P, Q, R என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறும் கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. ΔPQR ன் சுற்றளவு ΔABC ன் சுற்றளவைப்போல் இருமடங்கு என நிருபி.

நிரூபணம் : AB || QP மேலும் BC || RQ எனவே ABCQ ஓர் இணைகரம். இவ்வாறே BCAR, ABPC என்பவை இணைகரங்கள்.



∴ BC = AQ மேலும் BC = RA

⇒ A என்பது QRன் மையப்புள்ளி ஆகும்.

இவ்வாறே B, C என்பவை முறையே PR மற்றும் PQ வின் மையப்புள்ளிகள்.

$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ;\quad BC = \frac{1}{2}QR$ மேலும் $CA = \frac{1}{2}PR$ (எப்படி)

(தகுந்த தேற்றத்தை எழுது)

இப்போது ΔPQRன் சுற்றளவு $= PQ + QR + PR$

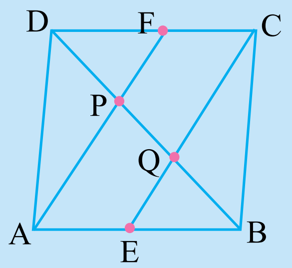
$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

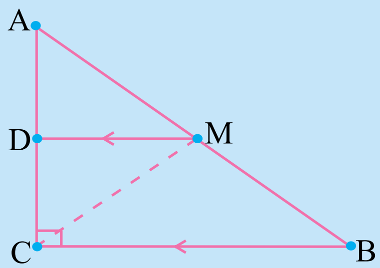
$= 2$ (ΔABC ன் சுற்றளவு).

பயிற்சி 8.4

1. ABC ஒரு முக்கோணம். $AD = \frac{1}{4}AB$ என இருக்குமாறு D என்பது ABன் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி மேலும். $AE = \frac{1}{4}AC$. என இருக்குமாறு E என்பது AC ன் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி. DE = 2 செ.மீ எனில் BCஐக் கண்டுபிடி.
2. ABCD ஒரு நாற்கரம். E, F, G மேலும் H என்பவை முறையே AB, BC, CD மேலும் DA ன் மையப்புள்ளிகள். EFGH ஓர் இணைகரம் என நிரூபி.
3. ஒரு சாய்சதுரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் ஏற்படும் வடிவம் ஒரு செவ்வகம் என நிரூபி.
4. இணைகரம் ABCD ல் E, Fஎன்பவை முறையே AB, CD ன் மையப்புள்ளிகள். AF மேலும் EC என்னும் கோட்டுத்துண்டுகள் மூலைவிட்டம் BDஐ மூன்று பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது எனக் காட்டு.



5. ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டுகள் இருசமவெட்டி எனக்காட்டு.
6. ΔABC என்பது Cல் செங்கோணத்தை கொண்டுள்ளது. கர்ணம் ABன் மையப்புள்ளி M வழியாகவும். BCக்கு இணையாகவும் வரையப்பட்ட கோடு AC ஐ Dல் வெட்டுகிறது எனில்.
   (i) D என்பது AC ன் மையப்புள்ளி.
   (ii) $MD \perp AC$
   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ எனக்காட்டு

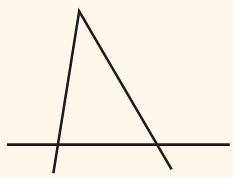


நாம் கற்றவை

1. ஒரு நாற்கரம் என்பது ஒருதளத்தில் நான்கு கோடுகளால் ஏற்படும் ஒரு எளிய மூடிய படம்.
2. ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் மொத்தம் 360^0 அல்லது 4 செங்கோணங்கள்.
3. சரிவகம், இணைகரம், சாய்சதுரம், செவ்வகம், சதுரம், மற்றும் பட்டம் என்பவை நாற்கரங்களின் சிறப்பு வடிவங்கள்.
4. இணைகரம் என்பது பலபண்புகளைக் கொண்ட நாற்கரத்தின் சிறப்பு வடிவம். நாம் கீழ்கண்ட தேற்றங்களை நிருபித்து இருக்கிறோம்.
   அ) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் அதை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.
   ஆ) இணைகரத்தின் எதிர்பக்கங்கள் மற்றும் எதிர்கோணங்கள் சமம்.
   இ) ஒரு நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் சமம் எனில் அது ஓர் இணைகரம்.
   உ) ஒரு நாற்கரத்தன் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்கோணங்கள் சமம் எனில் அது ஒரு இணைகரம்.
   ஊ) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி.
   எ) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இருசமவெட்டி எனில் அது ஒரு இணைகரம்.
5. ஒரு முக்கோணத்தின் மையப்புள்ளி தேற்றம் மற்றும் அதன் மறுதலை.
   அ) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை மேலும் அதில் பாதி.
   ஆ) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாகவும், மற்றொரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் வரையப்படும் கோடு, மூன்றாவது பக்கத்தை இருசமபாகங்களாகப் பிரிக்கும்.

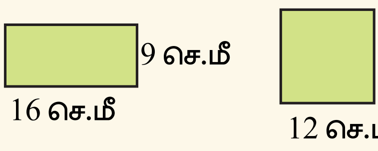
Brain teaser

1. முக்கோணப் புதிரை உருவாக்குதல்



மேற்காணும் படத்தில் 2 நேர்கோடுகளை இணைத்து 10 முக்கோணங்களை உருவாக்கு.

2. 16செ.மீ நிளம், 9செ.மீ அகலம் உடைய செவ்வகவடிவ காகிதத்தை எடுத்துக்கொண்டு, அதனை சரியாக 2 துண்டுகளாக வெட்டி, பிறகு இணைத்து சதுரத்தை உருவாக்குக.



09 புள்ளியியல்

9.1 அறிமுகம்

ஒரு நாள் சோமு, அவனின் கணக்கு ஆசிரியரின் வீட்டிற்கு சென்றான். அந்த நேரத்தில் அவனுடைய ஆசிரியர் இந்திய நாட்டின் மக்கள்தொகை கணக்கெடுப்புக்காக தன்னுடைய பகுதியிலிருந்து சேகரித்த தகவல்களை தொகுத்து கொண்டிருந்தார்.

சோமு : மாலை வணக்கம் ஐயா, நீங்கள் வேலையாக இருக்கின்றீர்கள் போல் உள்ளது. உங்கள் வேலையில் நானும் உதவட்டுமா ஐயா?

ஆசிரியர் : சோமு, நான் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்புக்காக குடும்பங்களை பற்றிய தகவல்களை சேகரித்தேன். அதாவது குடும்ப உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை, அவர்களின் வயது, குடும்ப வருமானம், அவர்கள் வாழும் வீட்டின் வகை மற்றும் இதர தகவல்களையும் சேகரித்தேன்.

சோமு : ஐயா, இந்த தகவல்களினால் என்ன பயன்?

ஆசிரியர் : இந்த தகவல்கள், அரசாங்கம் முன்னேற்ற செயல்திட்டங்களை திட்டமிடுவதற்கும், வளமூலங்களை பங்கிடுவதற்கும் பயன்படுகின்றன.

சோமு : இவ்வளவு அதிக அளவிலான தகவல்களை அரசாங்கம் எவ்வாறு பயன்டுத்துகிறது?

ஆசிரியர் : மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பு பிரிவு, இந்த அதிக அளவிலான விவரங்களை தொகுத்து மேலும் தேவையான விவரங்களைக் கையாளுவதற்கான கருவிகளை பயன்படுத்தி, விவரங்களை ஆராய்ந்தறிந்து அதன் பிறகு, முடிவுகளை தகவல்கள் வடிவில் விவரித்து கூறுகிறது. சோமு, நீயும் உன் முன் வகுப்புகளில் அடிப்படை புள்ளியியல் (விவரங்களை கையாளுதல்) பற்றி கற்றாய் அல்லவா?

சோமுவைப் போன்றே நாமும் உண்மைகள், எண்கள், அட்டவணைகள், வரைபடங்கள் போன்ற வடிவில் தகவல்களை பல சூழ்நிலைகளில் கடந்து வருகிறோம். காய்கறிகளின் விலைகள், நகரத்தின் வெப்பநிலை, கிரிக்கெட், ஆட்டக்கணிப்பு எண்கள், வாக்கெடுப்பு முடிவுகள் மற்றும் பலவற்றையும் இதனுடன் தொடர்புபடுத்தலாம். எண்கள் வடிவிலான அல்லது ஒரு நிச்சயமான நோக்கத்திற்காக சேகரிக்கப்பட்ட உண்மைகள் அல்லது மதிப்புகள் "**விவரங்கள்**" எனப்படும். எண் விவரங்களிலிருந்து கருத்துக்களை பல வகைகளில் தருவித்தலை பற்றி படிக்கும் கணிதத்தின் ஒரு பிரிவே **புள்ளியியல்** எனப்படும்.

நாம் முதலில் முந்தைய வகுப்புகளில் புள்ளியியல் (விவரங்களைக் கையாளுதல்) அத்தியாயத்தில் கற்றவற்றை நினைவு கூர்வோம்.

9.2 விவரங்களை சேகரித்தல்

ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக விவரங்களை சேகரித்தல், புள்ளியியலின் முதன்மையான செயல்பாடு ஆகும். இதை புரிந்துகொள்வதற்கு நாம் பின்வரும் செயல்பாட்டினை விவரங்களை சேகரித்தல் என்ற பயிற்சியுடன் ஆரம்பிக்கலாம்.

செயல்பாடு

உங்கள் வகுப்பு மாணவர்களை நான்கு குழுக்களாக பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் பின்வருவனவற்றில் ஒன்றின் விவரங்களை சேகரிக்கும் வேலையை பிரித்துக் கொடுக்கவும்.

i. உங்கள் வகுப்பில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களின் எடைகள்.

ii. ஒவ்வொரு மாணவனின் உடன்பிறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை.

iii. சென்ற மாதத்தில் நாள் வாரியாக பள்ளிக்கு வராதவர்களின் எண்ணிக்கை.

iv. உங்கள் வகுப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு மாணவனின் வீட்டிற்கும், பள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு.

நாம் இப்போது, இம்மாணவர்கள் அவர்களுக்கு தேவையான தகவல்களை எவ்வாறு சேகரித்தார்கள் என்பதைப் பற்றி விவாதிப்போம்.

1. மாணவர்கள் இந்த தகவல்களை, ஒவ்வொரு மாணவனிடமும் நேரடியாக சென்று கேட்டறிந்ததன் மூலம் சேகரித்திருப்பார்களா? அல்லது ஒவ்வொரு வீட்டிற்கும் தனிப்பட்ட முறையில் சென்று பார்வையிட்டதன் மூலம் சேகரித்திருப்பார்களா?

2. அவர்கள் தகவல்களை, பள்ளி பதிவேடுகளில் உள்ள விவரங்கள் போன்றவற்றிலிருந்து சேகரித்திருப்பார்களா?

முதல் வகையில் ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக ஆய்வாளனால் (மாணவன்) தகவல்கள் சேகரிக்கப்படும்போது கிடைக்கும் விவரங்கள் **முதல்நிலை புள்ளிவிவரங்கள்** ((i), (ii), (iv)ல் உள்ளது போல்) எனப்படுகின்றன.

மேற்கண்டவற்றில் (iii) வது வேலையான, சென்ற மாதத்தில் பள்ளிக்கு வராதவர்களின் எண்ணிக்கையை பள்ளி வருகை பதிவேட்டைக் கொண்டு மட்டுமே தெரிந்துகொள்ளமுடியும். எனவே நாம் இங்கு வகுப்பு ஆசிரியரால் ஏற்கனவே சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை பயன்படுத்துகின்றோம். இதனை இரண்டாம் நிலை புள்ளி விவரங்கள் என்பர். பதிவேடுகள் போன்ற, ஏற்கனவே பதிவு செய்யப்பட்ட மூலாதாரத்திலிருந்து சேகரிப்படும் தகவல்கள் **இரண்டாம் நிலை புள்ளிவிவரங்கள்** எனப்படுகின்றன.

இதை செய்

பின்வருவனவற்றில் முதல்நிலை மற்றும் இரண்டாம் நிலை புள்ளி விவரங்கள் எவை?

i. 2001 முதல் 2010ம் ஆண்டு வரை உள்ள காலகட்டத்தில், உங்கள் பள்ளியில் மாணவர்களின் சேர்ப்பு பதிவுகளை பற்றிய புள்ளி விவரங்களை சேகரித்தல்.

ii. உங்கள் வகுப்பில் உடற்பயிற்சி ஆசிரியரால் பதிவு செய்யப்பட்ட மாணவர்களின் உயரங்கள்.

9.3 விவரங்களை எடுத்துக்காட்டல்

ஒருமுறை விவரங்களை சேகரித்த பிறகு, அந்த விவரங்களை அர்த்தமுள்ளதாகவும் எளிதாக புரிந்துகொள்ளுமாறும், பார்த்த உடனேயே அதன் முக்கிய அம்சங்களை தெரியப்படுத்துமாறுமான வடிவில் அளிக்க ஆய்வாளர் பல முறைகளை கண்டறிய வேண்டும். நாம் இப்போது விவரங்களை ஒழுங்கமைக்க வேண்டிய வெவ்வேறு சந்தர்ப்பங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

ஒரு கணிதத் தேர்வில் 15 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (50க்கு) பின்வருமாறு

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

இந்த வடிவில் உள்ள விவரங்களை தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் என்பர்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, நீங்கள் குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச மதிப்பெண்களை எளிதாக கண்டுகொள்ளலாம். மிக உயர்ந்த மற்றும் மிகக்குறைந்த மதிப்பெண்களின் வித்தியாசமே, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் **வீச்சு** என்பதையும் நினைவுபடுத்திக் கொள்ளவும்.

இங்கு மிகக்குறைந்த மற்றும் மிக உயர்ந்த மதிப்பெண்கள் முறையே 7 மற்றும் 50 ஆகும்.

எனவே, வீச்சு = 50 – 7 = 43,

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து நமது விவரங்கள் 7 –ருந்து 50 வரை அமைந்துள்ளது என்று கூறலாம்.

நாம் இப்போது மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கலாம்.

i. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கான மையமதிப்பைக் கண்டுபிடி.

ii. கணிதத் தேர்வில் எத்தனை மாணவர்கள் 60% அல்லது அதைவிட அதிக மதிப்பெண்கள் பெற்றனர்?

கலந்துரையாடல்

(i) தேர்வு 50 மதிப்பெண்களுக்கு நடத்தப்பட்டது. ஆகையால், விவரங்களின் மையமதிப்பு 25 என்று விக்ரம் கூறினான். இதைப்பற்றி நீங்கள் என்ன நினைக்கிறீர்கள்?

இது விவரங்களின் மையமதிப்பு அல்ல என்று மேரி கூறினாள். இங்கு 15 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் தொகுக்கப்படாத விவரங்களாக உள்ளன. எனவே விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதிய பின் கீழுள்ளவாறு கிடைக்கும்.

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

இதில் 8வது உறுப்பான 34ஐ மைய உறுப்பு என்று கூறுவோம்.

(ii) மதிப்பெண் 50ல் 60%ஐ எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்பதை நீங்கள் முன்பே அறிவீர்கள். (அதாவது $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

இங்கு 9 மாணவர்கள் 60% அல்லது அதைவிட அதிக மதிப்பெண்கள் (அதாவது 30 மதிப்பெண்கள் அல்லது அதை விட அதிகம்) பெற்றிருப்பதை நீங்கள் கண்டறியலாம்.

விவரங்களின் நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும் போது, விவரங்களை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்தல் என்பது நேரத்தை செலவிடும் செயலாகும். எனவே, நாம் மாற்று முறையை சிந்திக்க வேண்டியுள்ளது.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டை பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒரு கணித தேர்வில் 50 மாணவர்களின் 10க்கு பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு.

5, 8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2, 1, 1, 3, 4,4, 5, 8, 6, 7, 10,
2,8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6,4, 5, 8

மதிப்பெண்கள்	நேர்க்கோட்டு குறிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
1	卌 |	6
2	卌 |	6
3	|||	3
4	卌 ||||	9
5	卌 ||	7
6	卌	5
7	||	2
8	卌 |	6
9	||	2
10	||||	4
	மொத்தம்	50

அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல், நேர்க்கோட்டு குறிகளை பயன்படுத்தி புள்ளி விவரங்கள் அட்டவணைப் படுத்தப்படுகின்றனது.

ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பெண்ணை பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை, அந்த மதிப்பெண்ணின் நிகழ்வெண் என்பர் என்பதை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளவும். எடுத்துக்காட்டாக 9 மாணவர்கள் 4 மதிப்பெண்களை பெற்றுள்ளனர். எனவே மதிப்பெண் 4ன் நிகழ்வெண் 9 ஆகும்.

இந்த அட்டவணையில் தொகுக்கப்படாத விவரங்களை அட்டவணைப்படுத்த நேர்க்கோட்டுகுறிகள் பயன்படுகின்றன.

அட்டவணையில் உள்ள அனைத்து நிகழ்வெண்களின் கூட்டுப்பலன், விவரங்களின் மொத்த நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கையை கொடுக்கும்.

அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல், விவரங்களின் உண்மையான நிகழ்வு அதன் நிகழ்வெண்களுடன் காட்டப்பட்டால் அந்த அட்டவணையை வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை (Ungrouped frequency Distribution table) அல்லது நிரையிட்ட ராசிகளின் அட்டவணை (Table of weighted observations) என்பர்.

செயல்பாடு

மாணவர்களின் குடும்பப்பெயரை குறிக்கும் முதல் எழுத்துக்களுக்கான நிகழ்வெண் அட்டவணையை தயார் செய்க. மேலும் பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.

(i) உங்கள் வகுப்பு மாணவர்களின் குடும்பபெயரில் அதிக முறை வந்த முதல் எழுத்து எது?

(ii) எத்தனை மாணவர்களின் பெயர்கள் I என்ற எழுத்தால் ஆரம்பமாகின்றன?

(iii) உங்கள் வகுப்பு மாணவர்களின் குடும்பபெயரில் மிகக் குறைவாக வந்த முதல் எழுத்து எது?

ஒருகுறிப்பிட்ட காரணத்திற்காக, நாம் விவரங்களை மூன்று வகைகளாக குறிப்பிட நினைக்கிறோம். (i) எத்தனை மாணவர்களுக்கு அதிக வகுப்புகள் தேவைப்படுகின்றன. (ii) எத்தனை மாணவர்கள் சராசரியான செயல்பாட்டை கொண்டுள்ளனர் மற்றும் (iii) எத்தனை மாணவர்கள் தேர்வை நன்றாக எழுதியிருந்தனர். பின்பு, நாம் தேவைக்கு ஏற்றார் போல் குழுப்படுத்தி மேலும் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நிகழ்வெண் பட்டியலை உருவாக்கலாம்.

பிரிவு இடைவெளிகள் (மதிப்பெண்கள்)	வகை	நேர்கோட்டுக்குறிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
1 – 3	(அதிக வகுப்புகள் தேவை)	卌 卌 卌	15
4 – 5	(சராசரி)	卌 卌 卌 |	16
6 – 10	(நன்று)	卌 卌 卌 ||||	19

விவரங்களை தேவைக்கு ஏற்றார் போலும் அல்லது நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும் போதும் வகைப்படுத்திக் கொள்வதற்கு, நாம் இதனை சுருக்குவதற்காக குழுப்படுத்திக் கொள்கிறோம். விவரங்களை எளிதாக புரிந்துகொள்ள உருவாக்கப்பட்ட குழு மற்றும் நிகழ்வெண் அடங்கிய மற்றொரு எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஓர் ஆரஞ்சு பழக்கூடையிலிருந்து முறையில்லாமல் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 50 ஆரஞ்சு பழங்களின் எடைகள் (கிராம்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.:

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

இது போன்ற அதிக அளவிலான விவரங்களை ஒழுங்கமைக்கவும் மற்றும் இதை கருத்துள்ளதாக உருவாக்குவதற்கும், நாம் இவற்றை 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119 (நமது விவரங்கள் 30லிருந்து 115வரை இருப்பதனால்) என குழுக்களாக உருவாக்கிக் கொள்கிறோம். இந்த குழுக்களை பிரிவுகள் அல்லது பிரிவு இடைவெளிகள் என்றும், மேலும் இதன் அளவை பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் அல்லது பிரிவு இடைவெளியின் அகலம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த வகையில் பிரிவு இடைவெளியின் அகலம் 10 ஆகும். ஒவ்வொரு பிரிவுகளிலும் உள்ள சிறிய எண்ணை கீழ் எல்லை என்றும் மற்றும் பெரிய எண்ணை மேல் எல்லை என்றும் அழைக்கப்பர். எடுத்துக்காட்டாக பிரிவு 30-39ல் 30 என்பது பிரிவின் கீழ் எல்லை மற்றும 39 என்பது பிரிவின் மேல் எல்லை ஆகும்.

(ஆரஞ்சு பழங்களின் எடைகள்) பிரிவு இடைவெளிகள்	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	(ஆரஞ்சு பழங்களின் எண்ணிக்கை) நிகழ்வெண்
30 - 39	𝍸 |	6
40 - 49	𝍸 |||	8
50 - 59	𝍸 ||||	9
60 - 69	𝍸 |	6
70 - 79	|||	3
80 - 89	𝍸	5
90 - 99	𝍸 ||	7
100-109	|||	3
110 - 119	|||	3
	மொத்தம்	50

விவரங்களை இந்த வடிவில் வழங்குவதால், விவரங்களை சுருக்குவதற்கும் மேலும் பார்த்த உடனேயே இதன் முக்கிய அம்சங்களை கவனிப்பதற்கும் ஏதுவாக உள்ளது. இதனை **வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை** என்று அழைப்பர்.

மேலுள்ள அட்டவணையின் பிரிவுகள் ஒன்றின் மீது ஒன்று சாராமல் இருப்பதை நாம் கவனிக்கலாம். அதாவது 30-39, 40-49 ... இந்த இரண்டு பிரிவு இடைவெளிகளில் எந்த எண்ணும் திரும்ப வரவில்லை. இத்தகைய பிரிவுகள் உள்ளடக்கிய பிரிவுகள் எனப்படும். பிரிவு இடைவெளி நீளத்தை சிறியதாக்கி அதிக எண்ணிக்கையிலான பிரிவுகளையும் அல்லது பிரிவுஇடைவெளி நீளத்தை பெரியதாக்கி குறைந்த எண்ணிக்கையிலான பிரிவுகளையும் செய்திருக்கமுடியும் என்பதை அறிக. பொதுவாக வகைப்படுத்தப்படாத விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டபோது நாம் வீச்சை கண்டறியலாம். (வீச்சு = மிகஉயர்ந்த மதிப்பு - மிகக்குறைந்த மதிப்பு) வீச்சுகளின் மதிப்பை ஆதாரமாக் கொண்டு நம் வசதிக்கேற்ப பிரிவு இடைவெளியின் நீளம், பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை உருவாக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக இடைவெளிகள் 30-35, 36-40 என இருக்கலாம்.

ஒரு ஆரஞ்சு பழத்தின் எடை 39.5கிராம் என நினைத்துக்கொண்டால் இது எந்த பிரிவில் அடங்கும். 39.5ஐ 30-39 அல்லது 40-49 பிரிவில் சேர்க்கமுடியாது. இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் ஒவ்வொரு பிரிவின் உண்மையான எல்லைகளை (வரம்புகள்) அமைக்க வேண்டும்.

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவின் வரம்புகள்
20 - 29	19.5 - 29.5
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	119.5-129.5

ஒரு பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லை மற்றும் அடுத்த பிரிவு இடைவெளியின் கீழ்எல்லை இவற்றின் சராசரியே பிரிவின் மேல்வரம்பாகும். இது அடுத்தபிரிவின் கீழ்வரம்பாகும்.

இவ்வாறே அனைத்து பிரிவு இடைவெளியின் வரம்புகளும் கணக்கிடப்படுகிறது. முதல் பிரிவு இடைவெளிக்கு முன் ஒரு பிரிவு இடைவெளி இருப்பதாக நினைப்பதன் மூலம் முதல் பிரிவின் கீழ்வரம்பையும், அவ்வாறே கடைசி பிரிவு இடைவெளிக்கு அடுத்துவரும் பிரிவு இடைவெளி இருப்பதாக நினைப்பதன் மூலம் கடைசி பிரிவின் கீழ்வரம்பையும் அவ்வாறே கடைசி பிரிவு இடைவெளிக்கு அடுத்துவரும் பிரிவு இடைவெளி இருப்பதாக நினைப்பதன் மூலம் கடைசி பிரிவின் மேல் வரம்பையும் கணக்கிடுகிறோம்.

இங்கு மீண்டும் ஒரு சிக்கல் தோன்றுகிறது. அதாவது 39.5ஐ எந்த பிரிவில் சேர்ப்பது? அதாவது 29.5-39.5 சேர்ப்பதா?அல்லது 39.5-49.5ல் சேர்ப்பதா? வழக்கமாக ஏதேனும் ஒரு பதிவு குறிப்பிட்ட பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லைக்கு சமமாக இருந்தால் இந்த குறிப்பிட்ட பதிவு அடுத்த பிரிவு இடைவெளியை சார்ந்து இருக்கும். எனவே 39.5 என்பது 39.5-49.5 எனும் பிரிவு இடைவெளியைச் சார்ந்தது.

30-40, 40-50, 50-60... ஆகிய பிரிவுகள் ஒன்றன் மீது ஒன்று ஒன்றியிருக்கும் பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகள் என்கிறோம்.

உள்ளடக்கிய பிரிவுகளின் வரம்புகளை உற்று நோக்கினால் அவை விலக்கும் பிரிவுகள் வடிவில் இருக்கும். ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவின் மேல்எல்லை மற்றும் கீழ் எல்லை இவற்றின் வேறுபாடு பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் ஆகும். 90-99 என்ற பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் (அதாவது 99.5-89.5=10) 10 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தின் செப்டம்பர் மாத 30 நாட்களின் ஈரப்பதம் (சதவீதத்தில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84-86, 86,-88 ... பிரிவு இடைவெளியில் வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையை தயார் செய்.

(ii) விவரத்தின் வீச்சை கண்டுபிடி.

தீர்வு : (i) வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை பின்வருமாறு.

ஈரப்பதம்	நேர்க்கோட்டு குறிகள்	நாட்களின் எண்ணிக்கை
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	卌 ||	7
94-96	卌 |	6
96-98	卌 ||	7
98-100	||||	4

[குறிப்பு : 90-92 இடைவெளியில் 90 அடங்கும், 96-98 இடைவெளியில் 96 அடங்கும்]

(ii) வீச்சு = 99.2 - 84.9 = 14.3 (இடத்திற்கு இடம் மாறுபடும்).

பயிற்சி 9.1

1. பின்வரும் நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களை மதிப்பெண் வாரியாக எழுது.

மதிப்பெண்கள்	5வரை	6வரை	7வரை	8வரை	9வரை	10வரை
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	11	19	31	40	45

2. 9ஆம் வகுப்பில் படிக்கும் 36 மாணவர்களின் இரத்தப்பிரிவுகள் கீழ்கண்டவாறு பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளன.

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

இந்த விவரத்தை நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை வடிவில் காட்டு. இந்த மாணவர்களில் பொதுவான இரத்தப்பிரிவு, எது? மற்றும் அரிதான இரத்தப்பிரிவு எது?

3. ஒரே மாதிரியான மூன்று நாணயங்களை தொடர்ந்து 30 முறைகள் சுண்டும் போது ஒவ்வொரு முறையும் விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை கீழ்கண்டவாறு உள்ளது.

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

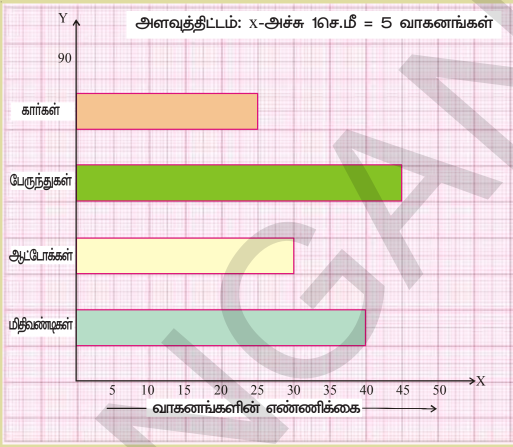
இந்த விவரத்திற்கு ஒரு நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையை தயார் செய்.

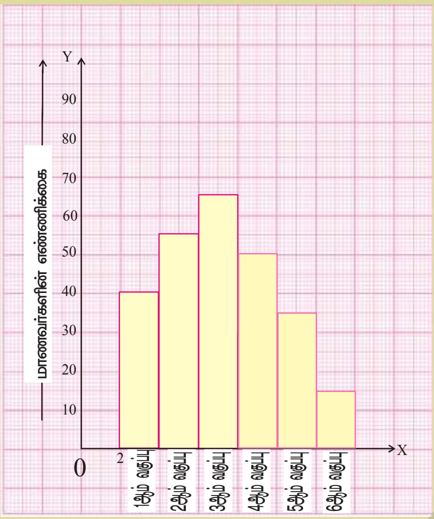
4. ஒரு தொலைக்காட்சி நிறுவனம் புகைப்பிடித்தல் மீது குறுஞ்செய்தி(SMS) ஓட்டெடுப்பு நடத்தியது. இதற்கு மூன்று தேர்ந்தெடுக்கும் வாய்ப்புகளை கொடுத்தது. அவை A-முழுமையாக தடைசெய்வது, B-பொதுஇடங்களில் மட்டும் தடைசெய்வது, C-தடைசெய்ய வேண்டிய அவசியமில்லை. ஒரு மணி நேரத்தில் கிடைத்த குறுஞ்செய்திகள் கீழ்கண்டவாறு இருந்தன.A B A B C B

A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

மேலுள்ள விவரங்களை வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை வடிவில் காட்டு. மொத்தம் எத்தனை குறுஞ்செய்திகள் பெறப்பட்டன? பெரும்பான்மையான மக்களின் கருத்து என்ன?

5. அடுத்துள்ள செவ்வக வரைபடத்திலுள்ள விவரங்களை நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை வடிவில் காட்டுக.





6. அடுத்துள்ள வரைபடத்தில் அச்சுகளில் பயன்படுத்தப்பட்ட அளவுதிட்டத்தை கண்டுபிடி. இதிலிருந்து நிகழ்வெண் பங்கீட்டை எழுதுக.

7. ஒரு வகுப்பில் 75 மதிப்பெண்களுக்கு வைக்கப்பட்ட தேர்வில் 30 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

சமமான பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் அட்டவணையை உருவாக்கு. (குறிப்பு : இதிலுள்ள ஒரு பிரிவு 0-10)

8. ஒரு பகுதியில் உள்ள 25வீடுகளின் மின்கட்டண ரசீது (ரூபாய்களில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளது. பிரிவு இடைவெளி 75 எனக் கொண்டு வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையை தயார்செய்க.

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,
530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. ஒரு நிறுவனம் ஒரு குறிப்பிட்ட வகை கார் மின்கலங்களை தயார்செய்கிறது. அவற்றில் 40மின்கலங்களின் ஆயுட்காலங்கள் (வருடங்களில்) பின்வருமாறு பதிவு செய்யப்பட்டது.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

இந்த விவரத்தை விலக்கும் பிரிவுகளாகக் கொண்டு ஒரு வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையை தயார்செய். பிரிவு இடைவெளி அளவு 0.5 எனக்கொண்டு 2-2.5 எனும் பிரிவில் இருந்து தொடங்கு.

9.4 மையப்போக்கு அளவைகள்

பின்வரும் சூழ்நிலைகளை கவனியுங்கள்:

வகை-1 : ஒரு விடுதியில் காலை உணவாக 50 மாணவர்கள் வழக்கமாக 200 இட்லியை உட்கொள்வார்கள். மேலும் 20 மாணவர்கள் அதிகமாக விடுதியில் சேர்ந்தால் உணவு பொறுப்பாளர் எத்தனை அதிகமான இட்லியை சமைக்க வேண்டும்?

வகை-2 : பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் சம்பளங்களை கவனியுங்கள். இவற்றில் எந்த சம்பளம் மொத்த தொழிலாளர்களின் சம்பளத்தை குறிக்கும்.

தொழிலாளர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சம்பளம் ₹ல் (ஆயிரங்களில்)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

வகை-3 : ஒரு நகரத்தில் உள்ள வெவ்வேறு போக்குவரத்து வாகனங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் அதிகமாக பயன்படுத்தும் போக்குவரத்து வாகனம் எது?

1. கார் 15%
2. இரயில் 12%
3. பேருந்து 60%
4. இருசக்கரவாகனம் 13%

முதல் வகையில் நாம் வழக்கமாக சராசரி கண்டுபிடித்து கணக்கை தீர்க்கலாம். ஆனால் இரண்டாவது வகையில் சராசரியை எடுத்துக்கொண்டால் அது 30.7 ஆயிரங்களாகும். ஆனால் கொடுத்த விவரங்களை பரிசோதித்தால் சராசரி மதிப்பு ஒரு சரியான தீர்வாக அமையாது. பெரும்பாலான தொழிலாளர்களின் சம்பளங்கள் 12 முதல் 18 ஆயிரங்களுக்கு இடையில் உள்ளது. எனவே இந்த சூழ்நிலைக்கு இடைநிலை அளவை காண்பதே தகுந்த தீர்வாக அமையும். மூன்றாவது வகையை எடுத்துக்கொண்டால் இதற்கு முகடு காண்பதே சரியான தீர்வு ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மொத்த விவரத்தின் தன்மைகள் மற்றும் சிறப்பியல்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட தனி எண்ணைக்குறிப்பதாகும். அத்தகைய எண் மைய்போக்கு அளவைகளான சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை குறிக்கும்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

1. சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு போன்றவற்றை தனித்தனியாகக் கணக்கிடும் மூன்று சூழ்நிலைகளை எழுது.

இந்த சூழ்நிலையை கவனியுங்கள். இரண்டு கிரிக்கெட் வீரர்கள் ரகு மற்றும் கௌதம் இருவரின் விளையாட்டுத் திறனை இவர்களின் ரசிகர்கள் கடந்த 5 போட்டிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாக்கினார்கள்.

போட்டிகள்		1வது	2வது	3வது	4வது	5வது
எடுத்த	ரகு	50	50	76	31	100
ஓட்டங்கள்	கௌதம்	65	23	100	100	10

இரண்டு விளையாட்டுவீரர்களின் ரசிகர்கள் அவர்கள் எடுத்த ஓட்டங்களை கூட்டி சராசரியை கீழ்கண்டவாறு காட்டினார்.

$$\text{ரகுவின் சராசரி} = \frac{307}{5} = 61.4$$

$$\text{கௌதமின் சராசரி} = \frac{298}{5} = 59.6$$

ரகுவின் சராசரி கௌதம் சராசரியை விட அதிகமாதலால் ரகு, கௌதமைிட அதிக திறனை பெற்றிருக்கிறான் என்று ரகுவின் ரசிகர்கள் கூறினர். ஆனால் கௌதமின் ரசிகர்கள் இதை ஏற்றுக்கொள்ளவில்லை. இவர்கள் போட்டிகளில் எடுத்த ஓட்டங்களை இறங்குவரிசையில் அமைத்து மத்தியில் உள்ள ஓட்டத்தை கீழ்கண்டவாறு காட்டினர்.

ரகு	100	76	50	50	31
கௌதம்	100	100	65	23	10

கௌதமின் மைய ஓட்டம் 65. இது ரகுவின் மைய ஓட்டத்தை விட அதிகம் அதாவது ரகுவின் மைய ஓட்டம் 50. எனவே கௌதம் தான் அதிக திறன் பெற்றவன் என்று அவனுடைய ரசிகர்கள் கூறினர்.

ஆனால் கௌதம் 5 போட்டிகளில் இரண்டு நூறு ஓட்டங்களை எடுத்துள்ளதால் கௌதம் தான் திறன் மிக்கவன் என்று நாம் கூறலாம்.

இப்போது ரகு மற்றும் கௌதம் ரசிகர்கள் வாக்குவாதத்தை முடிவுக்கு கொண்டுவர பயன்படுத்தப்பட்ட மூன்று அளவுகளைப் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

முதலில் பயன்படுத்திய சராசரி ஓட்டங்கள் சராசரி ஆகும். வாக்குவாதத்தில் பயன்படுத்திய மத்தியில் உள்ள ஓட்டங்கள் இடைநிலை அளவு ஆகும். திரும்ப திரும்ப வந்த ஓட்டங்கள் முகடு ஆகும். ரகுவின் ஓட்டங்களின் முகடு 50, கௌதம் ஓட்டங்களின் முகடு 100. மேற்கண்ட மூன்று அளவுமுறைகளில் எது சரியாக பொருந்தும்.

இப்போது நாம் முதலில் சராசரியை விரிவாக புரிந்துகொள்வோம்.

9.4.1 கூட்டுச்சராசரி (Airthimetic Mean)

ஒரு விவரத்தில் உள்ள ராசிகளின் மொத்தத்தை ராசிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கிடைப்பது சராசரி ஆகும். வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தின் கூட்டுசராசரியை நாம் ஏற்கனவே விவாதித்தோம்.

$$\text{சராசரி } \bar{x} = \frac{\text{ராசிகளின் மொத்தம்}}{\text{ராசிகளின் எண்ணிக்கை}} \text{ அல்லது } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

9.4.1.1 வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தின் கூட்டுச்சராசரி

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு வாரத்தில் ஓரிடத்தில் பெய்த மழைப்பொழிவு 4செ.மீ, 5செ.மீ, 12செ.மீ, 3செ.மீ, 6செ.மீ, 8செ.மீ, 0.5செ.மீ. எனில் ஒரு நாளின் சராசரி மழைப்பொழிவை கண்டுபிடி.

தீர்வு : ஒரு நாளின் சராசரி மழைப்பொழிவு என்பது மேலுள்ள ராசிகளின் கூட்டுசராசரி ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வாரத்தில் பெய்த மழைப்பொழிவுகள் 4செ.மீ, 5செ.மீ, 12செ.மீ, 3செ.மீ, 6செ.மீ, 8செ.மீ, 0.5செ.மீ.

ராசிகளின் எண்ணிக்கை (n) = 7

$$\text{சராசரி } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n}{n}$$ இங்கு $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பவை n ராசிகள்.

மற்றும் $\bar{x}$ என்பது அதன் சராசரி $= \dfrac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \dfrac{38.5}{7}$ = 5.5 செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 5: 10, 12, 18, 13, P மற்றும் 17 இவற்றின் சராசரி 15 எனில் Pன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$ என நமக்குத் தெரியும்

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$90 = 70 + P$

$P = 20.$

9.4.1.2 வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீட்டின் கூட்டுச்சராசரி

இந்த எடுத்துக்காட்டை கவனி : ஒரு வகுப்பிலுள்ள 40 மாணவர்களின் எடைகள் பின்வரும் நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடை கிலோகிராமில் (x)	30	32	33	35	37	41
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை(f)	5	9	15	6	3	2

40 மாணவர்களின் எடைகளின் சராசரியை கண்டுபிடி.

இந்த அட்டவணையில் இருந்து ஒவ்வொரு மாணவனின் எடை 30கிலோகிராம் என அறியலாம். அதாவது 5 மாணவர்களின் எடைகளின் மொத்தம் 5 × 30 = 150கி.கி. இதைப்போல ஒவ்வொரு நிகழ்வெண் மற்றும் எடைகளின் பெருக்கல்பலனையும் மற்றும் இதன் கூடுதலையும் கண்டறியலாம். விவரத்தில் உள்ள நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் ராசிகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

$$\text{கூட்டுச்சராசரி } (\bar{x}) = \frac{\text{ராசிகளின் மொத்தம்}}{\text{ராசிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$\text{எனவே கூட்டுச்சராசரி} = \frac{5\times30+9\times32+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2} = \frac{1336}{40} = 33.4 \text{ கி.கி.}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ என்பன ராசிகள் மற்றும் இவற்றின் ஒத்த நிகழ்வெண்கள் $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ எனில் மேற்கூறியவற்றை இவ்வாறு எழுதலாம்.

சராசரி $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_{66}} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

எடுத்துக்காட்டு 6: பின்வரும் புள்ளிவிவரத்திற்கான கூட்டுச்சராசரியை கண்டுபிடி.

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

தீர்வு ::

படி-1 : ஒவ்வொரு நிரையின் $f_i \times x_i$ கணக்கிடு

படி-2 : நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் (Σf_i)

மற்றும் $f_i \times x_i$ ன் மொத்தம் (Σf_ix_i) கண்டுபிடி

படி-3 : கூட்டுசராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_ix_i = 755$

எடுத்துக்காட்டு 7: பின்வரும் புள்ளி விவரத்தின் சராசரி 7.5 எனில், 'A'ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

மதிப்பெண்கள்	5	6	7	8	9	10
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	3	10	17	A	8	4

தீர்வு :

மதிப்பெண்கள் (x_i)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	f_ix_i
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் (Σf_i) = 42 + A

$f_i \times x_i$ ன் மொத்தம் (Σf_ix_i) = 306+8A

கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ixi}{\Sigma f_i}$

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுசராசரி = 7.5

எனவே, 7.5 = $\dfrac{306 + 8A}{42 + A}$

$306 + 8A = 315 + 7.5\,A$

$$8A - 7.5\,A = 315 - 306$$
$$0.5\,A = 9$$
$$A = 18$$

9.4.1.3 விலகல் முறையில் வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி.

எடுத்துக்காட்டு 8: பின்வரும் விவரத்தின் கூட்டுசராசரியை கண்டுபிடி:

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

தீர்வு :

(i) எளிய முறை

இந்த முறையில் வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீட்டின் கூட்டு சராசரியை சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி கண்டறியலாம்.

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

(ii) விலகல் முறை

இந்த முறையில் நாம் ஏதாவது ஒரு ராசியை நம் வசதிக்கேற்ப கூட்டுச்சராசரி என ஊகித்துக்கொள்கிறோம்.

இது ஊகித்த கூட்டுசராசரி (A) ஆகும். ஒருவேளை நாம் 16ஐ கூட்டுசராசரி என ஊகித்தால் A = 16. மற்ற ராசிகளின் விலகல், ஊகித்த கூட்டுச்சராசரியில் இருந்து கணக்கிடப்பட்டு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் = 40

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	–6	–24
12	5	–4	–20
14	8	–2	–16
16 A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		–60+42=–18

$f_i \times d_i$ ன் மொத்தம் = - 60 + 42

$\Sigma f_i d_i$ = -18

கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \frac{-18}{40}$

= 16 - 0.45

= 15.55

9.4.2 இடைநிலை அளவு (MEDIAN)

கொடுக்கப்பட்ட வகைப்படுத்தப்படா விவரங்களின் ராசிகளை ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதும் போது, வரிசையில் நடுநிலையாக அமைந்து இருக்கும் உறுப்பை இடைநிலை அளவு என்கிறோம். இது விவரங்களை இரண்டு சமமான எண்களைக் கொண்ட பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இதில் ஒரு பகுதியை இடைநிலை அளவோடு ஒப்பிடும் போது அதிகமாகவும் மற்றொரு பகுதியின் மதிப்பு இடைநிலை அளவைவிட குறைவாகவும் இருக்கும்.

நாம் ஏற்கனவே கீழ்வகுப்புகளில் வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தை வரிசைமுறையில் அமைத்து இடைநிலை அளவு கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுவதை பற்றி விவாதித்தோம்.

விவரங்களில் உள்ள ராசிகளின் எண்ணிக்கை ‘n’ மற்றும் ‘n’என்பது ஒற்றை எனில் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{வது}}$ ராசிஆகும்.

‘n’ என்பது இரட்டை எனில் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{வது}}$ மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{வது}}$ ராசிகளின் சராசரி ஆகும்.

முயன்று பார்

1. 75, 21, 56, 36, 81, 05, 42 ராசிகளின் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடி.
2. ஏறு வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட விவரம் 7, 10, 15, x, y, 27, 30 ன் இடைநிலை அளவு 17, இந்த விவரத்திற்கு 50 எனும் ஒரு ராசியை சேர்த்தால் கிடைக்கும் இடைநிலை அளவு 18எனில் X மற்றும் Y மதிப்பை கண்டுபிடி.

9.4.2.1 நிகழ்வெண் பங்கீட்டின் இடைநிலை அளவு

ஒரு விவரத்தின் நிரையிட்ட ராசிகளின் இடைநிலை அளவைக் காணும் முறையை இப்போது பார்ப்போம். ஒரு நிறுவனத்தின் 100 ஊழியர்களின் மாதச்சம்பளம் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதச்சம்பளம் (₹)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	4	18	30	20	15	8	5

கொடுக்கபபட்ட விவரத்தின் இடைநிலை அளவை எவ்வாறு காண்பாய்? முதலில் கொடுக்கப்பட்ட ராசிகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைக்க வேண்டும். அதன் பிறகு ஒத்த நிகழ்வெண்ணை அட்டவணையில் எழுத வேண்டும். மேலும் கீழின குவிவு நிகழ்வெண்ணைக் கணக்கிடு. ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட ராசியின் குவிவு நிகழ்வெண் அந்த குறிப்பிட்ட ராசிவரை உள்ள அனைத்து நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் ஆகும்.

மாதச்சம்பளம் (x)	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை (f)	குவிவு நிகழ்வெண் (cf)
7500	4	4
8000	18	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

$\frac{N}{2}$ வின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. மேலும் $\frac{N}{2}$ ஐ விடசற்று அதிகமாக உள்ள குவிவு நிகழ்வெண் கொண்டிருக்கும் இடைநிலைப்பிரிவைக் குறி. இங்கு N என்பது நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் ஆகும்

இங்கு N = 100 எனவே $\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{வது}}$ மற்றும் $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{\text{வது}}$ ராசிகள் முறையே 50 மற்றும் 51 ஆகும்.

மேற்கண்ட அட்டவணையில் 50 மற்றும் 51வது ராசிகள் ஒரே மதிப்பைப்பெற்றுள்ளன. இது மாதச்சம்பளம் 8500ன் கீழ் வருகிறது. அதாவது 8500 என்பது கொடுக்கப்பட்ட பங்கீட்டின் இடைநிலைப்பிரிவு ஆகும்.

முயன்று பார்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பெண்களின் இடைநிலை அளவை கண்டுபிடி.

மதிப்பெண்கள்	15	20	10	25	5
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	10	8	6	4	1

2. இடைநிலை அளவை காணும் போது, நிகழ்வெண் பங்கீட்டில் எந்த விவரம் வரிசைக்கிரமத்தில் இருக்கவேண்டும்? ஏன்?

9.4.3 முகடு (MODE)

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில் மற்ற ராசிகளைவிட அதிகமுறை திரும்பத்திரும்ப வரும் ராசி, அதாவது அதிக நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட ராசி அந்த விவரத்தின் முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9: ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒரு கடையில் விற்கப்பட்ட காலணிகளின் அளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. முகடைக் கண்டுபிடி.

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

தீர்வு : நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையை அமைக்க முதலில் கொடுக்கப்பட்ட ராசிகளை ஏறுவரிசையில் எழுதவேண்டும். 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10

அளவு	6	7	8	9	10
விற்கப்பட்ட காலணிகளின் எண்ணிக்கை	4	5	1	2	1

இங்கு 7 எனும் ராசி அதிக முறை வந்துள்ளது. அதாவது 5 முறைகள்.

∴ கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் முகடு (காலணிகளின் அளவு) 7 ஆகும். 7 என்பது அதிகமாக விற்பனையான காலணியின் அளவைக் குறிக்கிறது.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

1. உன்னுடைய வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை உயரங்களை பொறுத்து வகைப்படுத்து. அவ்விவரத்திற்கு முகடு காண்க.
2. மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் ஒரு கடைக்காரர் சில காலணிகளை வாங்க முன்பதிவு செய்தால் எந்த அளவுகொண்ட காலணிகளை அதிகமாக வாங்க முன்பதிவு செய்வார்?

எடுத்துக்காட்டு 10: ஒரு வகுப்பில் 100 மதிப்பெண்களுக்கு வைக்கப்பட்ட தேர்வில் 20 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95,79

(அ) 91-100, 81-90, ... என்று பிரிவு இடைவெளி கொண்டு நிகழ்வெண் அட்டவணையை தயார்செய்.

(ஆ) முகடு பிரிவை கண்டுபிடி. (மிகஉயர்ந்த நிகழ்வெண்ணைக்கொண்ட பிரிவு முகடு பிரிவு எனப்படும்).

(இ) இடைநிலை அளவுப் பிரிவை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

(a)

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்	மேலின குவிவு நிகழ்வெண்
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
மொத்தம்	**20**	

(b) முகடு பிரிவு 91-100 ஆகும். இந்த பிரிவு மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணைக் கொண்டிருக்கிறது.

(c) 20ல் மையமதிப்பு 10. கொடுக்கப்பட்ட ராசிகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதிய பிறகு 10வது ராசி 81-90 பிரிவில் உள்ளது. ஆகவே 81-90 என்ற பிரிவை இடைநிலை அளவுப்பிரிவு என்கிறோம்.

9.5 மையப்போக்கு அளவைகளின் விலகல்

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் உள்ள எல்லா ராசிகளையும் ஒரு நிலையான எண்ணுடன் கூட்டும் போதும் அல்லது ஒரே எண்ணால் பெருக்கும் போதும் மையப்போக்கு அளவைகளில் என்ன நிகழும்? பின்வரும் அட்டவணையை உற்றுநோக்கு.

அம்சம்	விவரம்	சராசரி	முகடு	இடைநிலைஅளவு
கொடுக்கப்பட்ட விவரம்	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12.2	14	13
ஒவ்வொரு ராசியுடன் 3ஐக் கூட்டினால்	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
ஒவ்வொரு ராசியையும் 3ஆல் பெருக்கினால்	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

அட்டவணையை உற்றுநோக்கிய பிறகு நாம் அறிவது.

கூட்டும் போது : விவரத்திலுள்ள அனைத்து ராசிகளுடன் ஒரே எண்ணை கூட்டுவதால் அந்த விவரத்தின் மையப்போக்கு அளவைகளிலும் அதே மாற்றம் ஏற்படும். அதாவது விவரத்தின் ஒவ்வொரு ராசியுடனும் 3ஐக் கூட்டினால் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவை 3 அதிகரிக்கும்.

பெருக்கும் போது : விவரத்திலுள்ள அனைத்து ராசிகளையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கினால் ஏற்படும் மாற்றம் அந்த விவரத்தின் மையப்போக்கு அளவைகளிலும் அதே மாற்றம் ஏற்படும். அதாவது விவரத்தின் ஒவ்வொரு ராசியையும் 2ஆல் பெருக்கினால் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடும் 2 மடங்காகும்.

பயிற்சி - 9.2

1. ஒரு சரக்கு போக்குவரத்து அலுவலகத்தில் உள்ள மூட்டைகளின் எடைகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மூட்டைகளின் சராசரி எடையை கண்டுபிடி.

எடை (கி.கி)	50	65	75	90	110	120
மூட்டைகளின் எண்ணிக்கை	25	34	38	40	47	16

2. ஒரு கிராமத்திலுள்ள ஒவ்வொரு குடும்பத்திலும் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு குடும்பத்திலும் உள்ள சராசரி குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி:

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	11	25	32	10	5	1

3. பின்வரும் நிகழ்வெண் பங்கீட்டில் சராசரி 7.2 எனில் K ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. 2011ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகை கணக்கெடுப்பின்படி இந்திய நாட்டின் கிராமங்கள், மக்கள்தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கிராமத்தின் சராசரி மக்கள்தொகை எவ்வளவு?

மக்கள் தொகை (ஆயிரங்களில்)	12	5	30	20	15	8
கிராமங்கள்	20	15	32	35	36	7

5. AFLATOUN எனும் சமூக மற்றும் நிதி கல்வித் திட்டமானது ஐதராபாத் மாவட்டத்திலுள்ள அனைத்து உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களிடையே சேமிக்கும் திட்டத்தை துவக்கி வைத்தது. மண்டல வாரியாக ஒரு மாதத்திற்கான சேமிப்புத் தொகை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மண்டலத்தின் பெயர்	பள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	சேமித்த மொத்த தொகை (ரூபாய்களில்)
அம்பர்பேட்	6	2154
திருமலகிரி	6	2478
சைதாபாத்	5	975
கைரதாபாத்	4	912
சிகிந்திராபாத்	3	600
பகதூர்புரா	9	7533

ஒவ்வொரு மண்டலத்திலும் பள்ளிவாரியாக சேமிப்பின் சராசரியை கண்டுபிடி. அனைத்து பள்ளிகளின், சேமிப்பின் கூட்டுசராசரியை கண்டுபிடி.

6. ஒரு பள்ளியிலுள்ள 9ஆம் வகுப்பு மாணவர், மாணவிகளின் உயரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

உயரம் (செ.மீ)	135	140	147	152	155	160
மாணவர்கள்	2	5	12	10	7	1
மாணவிகள்	1	2	10	5	6	5

மாணவ, மாணவிகளின் உயரங்களை ஒப்பிடு.

(குறிப்பு : மாணவ, மாணவிகளின் இடைநிலை அளவு உயரத்தை கண்டுபிடி)

7. உலக மட்டைப்பந்து வீரர்களில் சதங்கள் (100 ஓட்டங்கள்) எடுத்தவர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சதங்களின் எண்ணிக்கை	5	10	15	20	25
மட்டைபந்து வீரர்களின் எண்ணிக்கை	56	23	39	13	8

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு காண்க.

8. புத்தாண்டை முன்னிட்டு ஒரு இனிப்புக்கடை இனிப்புக் பொட்டலங்களை தயார் செய்தது. இனிப்புப் பொட்டலங்களின் எண்ணிக்கையும் மற்றும் ஒவ்வொரு பொட்டலத்தின் விலையும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பொட்டலத்தின் விலை(₹)	₹25	₹50	₹75	₹100	₹125	₹150
பொட்டலங்களின் எண்ணிக்கை	20	36	32	29	22	11

இந்த விவரத்திற்கு சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு கண்டுபிடி.

9. மூன்று மாணவர்களின் சராசரி எடை 40கி.கி. ரங்கா எனும் ஒரு மாணவனின் எடை 46கி.கி. மற்ற இரண்டு மாணவர்கள் ரகிம் மற்றும் ரேஷ்மா சமமான எடையை பெற்றிருக்கின்றனர் எனில் ரகிம் எடையை கண்டுபிடி.

10. ஒரு உயர்நிலைப் பள்ளியில் வெவ்வேறு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் ஒரு அனாதை இல்லத்திற்கு கொடுத்த அன்பளிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வகுப்பு	ஒவ்வொரு மாணவன் கொடுத்த அன்பளிப்பு (₹களில்)	அன்பளிப்பு கொடுத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

இந்த விவரத்திற்கு சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு கண்டுபிடி.

11. நான்கு எண்களில் முதல் இரண்டு எண்களின் சராசரி 4, முதல் மூன்று எண்களின் சராசரி 9, நான்கு எண்களின் சராசரி 15 மற்றும் அந்த நான்கு எண்களில் ஒரு எண் 2 எனில் மீதமுள்ள மூன்று எண்களை கண்டுபிடி.

நாம் கற்றவை

* விவரங்களில் உள்ள மொத்த ராசிகளையும் நிகழ்வெண்களுடன் காட்டும் அட்டவணையை வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை அல்லது நிரையிட்ட ராசிகளின் அட்டவணை எனப்படும்.
* பெரிய விவரங்களை நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை வடிவில் குறிப்பிடப்படுவதால் விவரங்களை பார்வையிடுதல், சுலபமாக வீச்சு காணல், எந்த விவரம் திரும்பத் திரும்ப அதிக முறை வந்துள்ளது எனக் காணல், பகுப்பாய்வு செய்தல், விவரத்தின் உட்பொருளை விளக்குதல் போன்றவற்றை செய்யமுடியும்.
* ஒரு விவரத்திலுள்ள எந்த ராசியை சுற்றி மற்ற ராசிகள் அனைத்தும் மையமாகக் கொண்டுள்ளதோ அந்த ராசியை மையப்போக்கு அளவைகள் என்பர்.
* மையப்போக்கு அளவைகளின் வகைகள், சராசரி, இடைநிலைஅளவு, முகடு.
* ஒரு விவரத்தில் உள்ள ராசிகளின் மொத்தத்தை ராசிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கிடைப்பது சராசரி ஆகும்.

$$\text{சராசரி} = \frac{\text{ராசிகளின் மொத்தம்}}{\text{ராசிகளின் எண்ணிக்கை}} \quad \text{அல்லது} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

* வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீட்டின் கூட்டுசராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.

* விலகல் முறையில் கூட்டுசராசரி $=A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ இங்கு A என்பது ஊகித்த சராசரி, Σf என்பது நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் மற்றும் Σfd என்பது நிகழ்வெண் மேலும் விலகல்லின் மொத்தம்.

* ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதப்பட்ட விவரத்தின் மத்தியிலுள்ள ராசியை இடைநிலை அளவு என்கிறோம்.

* ராசிகளின் எண்ணிக்கை 'n' ஒரு ஒற்றை எனில் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n+1}{2}\right)$வது ராசி ஆகும்.

* ராசிகளின் எண்ணிக்கை 'n' ஒரு இரட்டை எனில் $\left(\frac{n}{2}\right)$வது மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$வது ராசிகளின் சராசரி இடைநிலை அளவு ஆகும்.

* இடைநிலை அளவு கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தை இரண்டு சமமான பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. ஒரு பாகத்திலுள்ள ராசிகளின் மதிப்புகள் இடைநிலை அளவைவிட அதிகமாகவும் மற்றொரு பாகத்திலுள்ள ராசிகளின் மதிப்புகள் இடைநிலை அளவை விட குறைவாகவும் இருக்கும்.

* ஒரு விவரத்தில் மற்ற ராசிகளைவிட அதிகமுறை திரும்பத்திரும்ப வரும் ராசி அல்லது அதிக நிகழ்வெண் கொண்ட ராசி அந்த விவரத்தின் முகடு ஆகும்.

மூளைக்கு வேலை

ஒரு வரிசையில் கோபி இடமிருந்து 7வது மாணவனாகவும், சங்கர் வலமிருந்து 5வது மாணவனாகவும் அமர்ந்துள்ளனர். இவர்கள் இருக்கையை மாற்றிக் கொண்டதால் சங்கர் வலமிருந்து 8வது மாணவனாக அமர்ந்தான் எனில் அந்த வரிசையில் உள்ள மாணவர்கள் எத்தனை பேர்? உன் விடைக்கான காரணத்தை விவரி.

4.5மீ உயரமுள்ள மரத்தில் தரையிலிருந்து 1.5செ.மீ உயரத்தில் சைதன்யா எனும் மாணவன் தனது பெயரை செதுக்கினான். 10 வருடங்களுக்குப் பிறகு அந்த மரம் 6.75மீ உயரமாக ஆனது. இப்பொழுது சைதன்யா என்ற பெயர் தரையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் இருக்கும்?

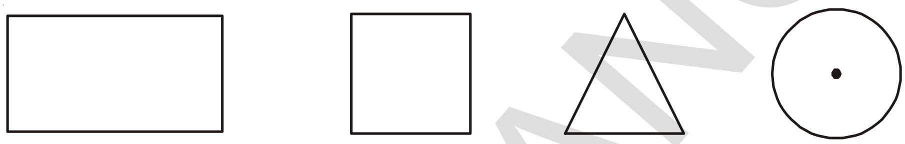
உன்னுடைய விடைக்கான காரணத்தை கூறுக.

10 புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள்

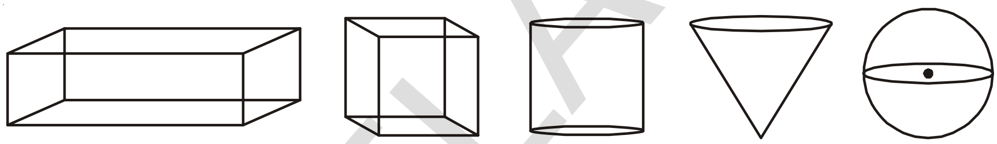
10.1 அறிமுகம்

பின்வரும் படங்களை கவனி

(a)

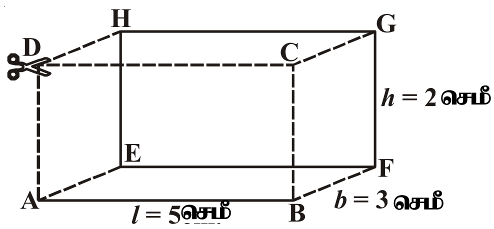


(b)



குழு (a) மற்றும் குழு (b)யில் உள்ள படங்களுக்கிடையே ஏதாவது வித்தியாசத்தை காண்கிறாயா?

மேற்கண்டவற்றில் இருந்து, குழு (a)வில் உள்ள படங்களை நாம் சுலபமாக நம்முடைய நோட்டு புத்தகத்தில் வரையலாம். இந்த படங்கள் நீளம் மற்றும் அகலங்களை மட்டும் கொண்டுள்ளன. மேலும் இவற்றை இருபரிமாணப்படங்கள் அல்லது 2-D படங்கள் எனப்படும். குழு (b)ல் உள்ள படங்கள் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரங்களை பெற்றுள்ளன. இவற்றை முப்பரிமாண படங்கள் (அ) 3-D படங்கள் எனப்படும். இவை அனைத்தும் திண்மப் படங்கள் எனப்படும். பொதுவாக நம்மைச்சுற்றி திண்மப்பொருட்கள் உள்ளதை நாம் காணலாம். நாம் சமதளப் படங்கள் மற்றும் அவற்றின் பரப்பளவுகள் பற்றி கற்றிருக்கிறோம். நாம் இப்பொழுது முப்பரிமாண பொருட்களான உருளைகள், கூம்புகள் மற்றும் கோளங்களின் புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள் கண்டுபிடிப்பதை பற்றி அறிந்துக்கொள்வோம்.

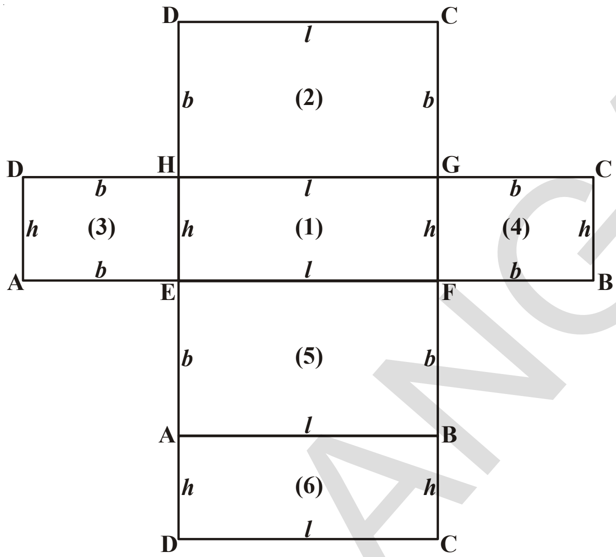


10.2 கனச் செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பு :

படத்தில் உள்ள கனச்செவ்வகத்தை கவனி. அது எத்தனை பக்கங்களை கொண்டுள்ளது என கண்டுபிடி. அது எத்தனை மூலைகள் மற்றும் எத்தனை விளிம்புகளை பெற்றுள்ளது? பக்கங்கள் அனைத்தும் சமதளங்களா என்று பார். எந்த ஜோடி பக்கங்கள் சம அளவில் உள்ளன? கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பை கண்டறிய உனக்கு ஏதாவது ஆலோசனை தோன்றுகிறதா?

இப்பொழுது நாம் கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பை கண்டுபிடிப்போம். மேற்கண்டபடத்தில் நீளம் (l) = 5 செ.மீ; அகலம் (b) = 3செ.மீ; உயரம் (h) = 2 செ.மீ.

நாம் கொடுக்கப்பட்ட கனச்செவ்வகத்தை படத்தில் காட்டியுள்ளபடி CD, ADHE மற்றும் BCGF வழியே கத்திரித்தால் நமக்கு கீழே படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு கிடைக்கும்.



இது கனச்செவ்வகத்தின் மொத்த புறப்பரப்பானது, ஆறு செவ்வகங்களால் (அதாவது மூன்று ஜோடி சர்வசம செவ்வகங்கள்) ஆனது என்பதை காட்டுகிறது. கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பை காண நாம் ஆறு செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளை கூட்ட வேண்டும். இந்த பரப்பளவுகளின் கூடுதல், கனச் செவ்வகத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு ஆகும்.

செவ்வகம் EFGHன் பரப்பளவு $= l \times h = lh$ .....(1)

செவ்வகம் HGCDன் பரப்பளவு $= l \times b = lb$ .....(2)

செவ்வகம் AEHDன் பரப்பளவு $= b \times h = bh$ .....(3)

செவ்வகம் FBCGன் பரப்பளவு $= b \times h = bh$ .....(4)

செவ்வகம் ABFEன் பரப்பளவு $= l \times b = lb$ .....(5)

செவ்வகம் DCBAன் பரப்பளவு $= l \times h = lh$ .....(6)

மேலுள்ள பரப்பளவுகளை கூட்டினால் நமக்கு கனச் செவ்வகத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு கிடைக்கும்.

கனச் செவ்வகத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பளவு

$= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$ ன் பரப்பளவுகள்

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1), (3), (4), (6) ஆகியவை கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்புகள்.

கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பளவு $= (1) + (3) + (4) + (6)$ ன் பரப்பளவுகள்

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

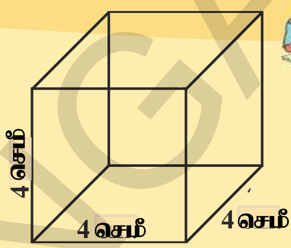
நாம் இப்பொழுது படத்தில் உள்ள அளவுகளை பயன்படுத்தி கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு மற்றும் புறப்பரப்பை கண்டுபிடிப்போம். மொத்தப்புறப்பரப்பளவு 62செ.மீ^{2} மற்றும் புறப்பரப்பளவு 32செ.மீ^{2} ஆகும்.

முயன்று பார்

'l' செ.மீ விளிம்பு உடைய கனச்சதுரத்தை எடுத்துக்கொள். இதை முந்தைய செயலில் செய்தவாறே கத்தரித்து கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பளவு மற்றும் புறப்பரப்பளவை கண்டுபிடி.

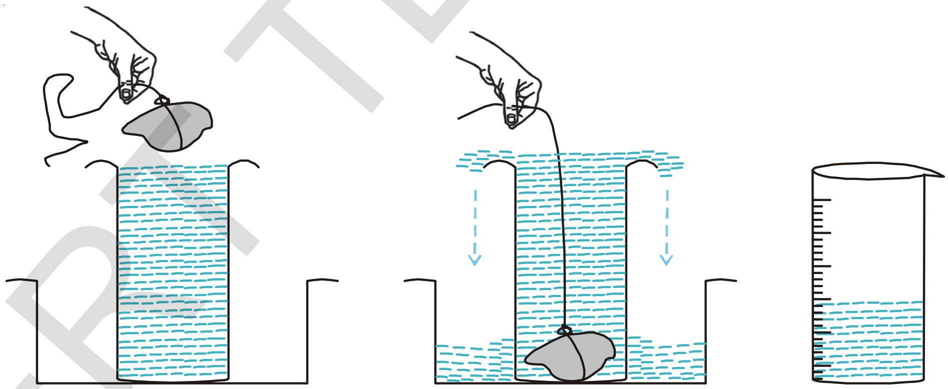
இதை செய்

1. 4செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு மற்றும் புறப்பரப்பளவு கண்டுபிடி. மேலே உள்ள "முயன்று பார்" பகுதியில் வருவித்த சூத்திரத்தை பயன்படுத்து.
2. கனச்சதுரத்தின் ஒவ்வொரு விளிம்பும் 50%அதிகரித்தால் மொத்த புறப்பரப்பானது எத்தனை சதவீதம் அதிகரிக்கும் என்பதை கண்டுபிடி.



10.2.1 கனஅளவு

கனஅளவு என்பதை நினைவுக்கொண்டுவர பின்வரும் செயலை செய்வோம்.ஒரு கண்ணாடி குடுவையை எடுத்து ஒரு அகலப்பாத்திரத்தில் வை. கண்ணாடி குடுவையை அதனுடைய மேல் விளிம்பு வரை நீரினால் நிரப்பு. ஒரு திடப்பொருளை (ஒருகல்) மெதுவாக அதில் விடு. குடுவையில் இருந்து சிறிதளவு நீர் வழிந்து பாத்திரத்தில் விழும். வழிந்த நீரை எடுத்து ஓர் அளவு ஜாடியில் ஊற்று. இதிலிருந்து ஒருதிடப்பொருள் அடைத்துக்கொள்ளும் இடம் கனஅளவு என்று அறியலாம்.

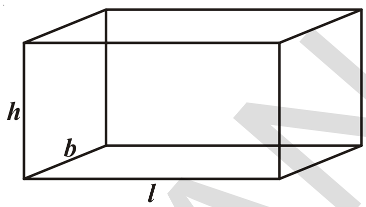


ஒவ்வொரு பொருளும் குறிப்பிட்ட இடத்தை அடைத்துக்கொள்ளும், ஒரு பொருள் அடைத்துக்கொள்ளும் இடம் அதனுடைய கனஅளவாகும். கனஅளவை கனஅலகுகளால் அளவிடுகிறோம்.

10.2.2 பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு :

ஓர் உள்ளீடற்ற பொருளின் உள்பகுதி காலியாக இருக்கும். அதை காற்று அல்லது ஏதாவது திரவப்பொருளினால் நிரப்பும் போது அவை பாத்திரத்தின் வடிவத்தை பெறுகிறது. உள்ளே நிரப்பப்பட்ட பொருளின் கனஅளவு அந்த பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு எனப்படும்.

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு : ஓர் அட்டையை சமபரிமாணங்கள் உடைய சில செவ்வகங்களாக வெட்டி எடுத்து ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும்படி அடுக்கு. உருவான வடிவத்தை பற்றி நீ கூறுவது என்ன?



இது ஒரு கனச்செவ்வக வடிவம் ஆகும்.

நாம் இப்பொழுது கனச் செவ்வகத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடிப்போம். இதனுடைய நீளமானது நாம் கத்தரித்த செவ்வகத்தின் நீளத்திற்கு சமம், மேலும் அகலமானது நாம் கத்தரித்த செவ்வகத்தின் அகலத்திற்கு சமம்.

அடுக்கப்பட்ட செவ்வகங்கள் எந்த உயரம் வரை உள்ளதோ அந்த உயரம் கனச்செவ்வகத்தின் உயரம் 'h' ஆகும்.

கனச்செவ்வகம் அடைத்துக்கொள்ளும் இடம் = செவ்வகத்தின் சமதளம் அடைத்துக்கொள்ளும் பரப்பளவு × உயரம்

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = $l\,b \times h = l\,bh$

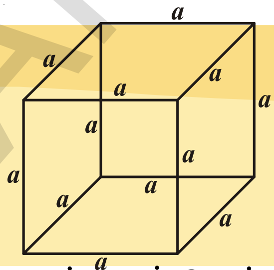
∴ கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = lbh

இங்கு $l, b,$ மற்றும் h என்பது முறையே கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் ஆகும்.

முயன்று பார்

(அ) 'a' அலகு பக்கம் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடி.

(ஆ) கனஅளவு 1000 செ.மீ^{3} உடைய கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவை கண்டுபிடி.



கனச்சதுரம் மற்றும் கனச்செவ்வகங்கள் திடப்பொருட்கள் எனக் கொள்க. இவற்றை நேர் பட்டகங்கள் என நாம் கூறலாமா? கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரங்கள் கூட நேர் பட்டகங்கள் என்று அழைக்கப்படுகிறது என்பதை நீ கவனிக்கலாம். ஏனெனில் அவைகளின் புறப்பக்கங்கள் அனைத்தும் செவ்வகம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு என்பது அதன் அடிபக்கத்தில் பரப்பளவு மற்றும் உயரத்தின் பெருக்குத் தொகை ஆகும் என நமக்கு தெரியும்.

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = அடியின் பரப்பளவு × உயரம்

$= lb \times h$

$= lbh$ க.அ

கனச்சதுரத்தில் $l = b = h = \mathrm{s}$ (அனைத்து பரிமாணங்களும் சமம்)

கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு $= \mathrm{s}^2 \times \mathrm{s}$

$= \mathrm{s}^3$ க.அ

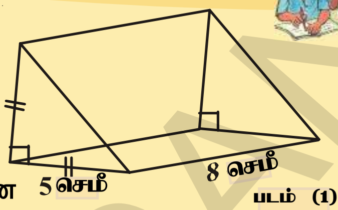
கனச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவு காணும் சுத்திரம் அனைத்து நேர்பட்டகங்களுக்கு பொருந்தும் என்று ஊகிக்கலாம். நேர்பட்டகத்தின் கனஅளவு = அடியின் பரப்பளவு × உயரம் குறிப்பாக நேர்பட்டகத்தின் அடிப்பக்கம், ஒரு சமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் கனஅளவு

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ a^2 \times \mathrm{h}$ கனஅலகுகள்.

இங்கு 'a' என்பது அடியின் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் நீளம் மற்றும் 'h' என்பது பட்டகத்தின் உயரம் ஆகும்.

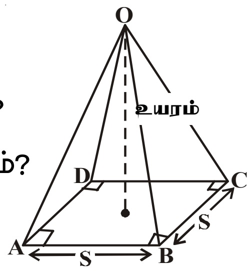
இதை செய்

1. $l = 12$ செ.மீ., $b = 10$ செ.மீ மேலும் $h = 8$ செ.மீ எனில் கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடி.
2. 10செ.மீ பக்க அளவுடைய கனச்சதுரத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடி.
3. படம் (1)ல் உள்ள இருசமபக்க செங்கோண முக்கோண பட்டகத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடி.



படம் (1)

பட்டகத்தை போலவே பிரமிடும் முப்பரிமாண படம். பழங்காலத்தில் இருந்தே இந்த வடிவங்கள் மனிதர்களை கவர்ந்திருக்கிறது. ஏழு உலக அதிசயங்களில் ஒன்றான எகிப்தின் பிரமிடுகள் பற்றி நீ படித்திருப்பாய். அவைகள் சதுரவடிவ அடிப்பக்கத்தை கொண்ட பிரமிடுகளுக்கு குறிப்பிடத்தக்க சரியான எடுத்துக்காட்டு ஆகும். அவைகள் எவ்வாறு கட்டப்பட்டன? இது மனித அறிவுக்கு எட்டாதது. இந்த மாபெரும் கட்டிடம் எவ்வாறு கட்டப்பட்டது என்பது உண்மையிலேயே எவருக்கும் தெரியாது.



பிரமிடின் வடிவத்தை உன்னால் வரைய முடியுமா?

பட்டகம் மற்றும் பிரமிடுகளுக்கு இடையே நீ காணும் வேறுபாடுகள் என்ன?

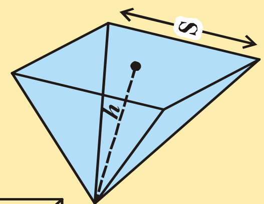
சதுர வடிவ அடிப்பக்கம் கொண்ட பிரமிடை நாம் என்னவென்று கூறுகிறோம்?

இங்கு OABCD என்பது S அலகு பக்கம் மற்றும் h அலகு உயரம் கொண்ட சதுரவடிவ பிரமிடு ஆகும்.

சமமான அடிப்பக்கத்தையும், சமமான உயரங்களை பெற்றுள்ள கனச்சதுரம் மேலும் சதுர பிரமீடின் கனஅளவுகள் சமமாக இருக்கும் என நீ நினைக்கிறாயா?

செயல்பாடு

ஒரே அடிப்பக்கம் மற்றும் சமமான உயரங்கள் உடைய கனச்சதுர பாத்திரங்கள் மற்றும் சதுர வடிவ பிரமிடு எடுத்துக்கொள். பிரமிடை திரவத்தினால் நிரப்பு. அந்த திரவத்தை கனச்சதுரத்தில் (பட்டகம்) முழுவதுமாக ஊற்று. அந்த கனச்சதுரம் நிரம்புவதற்கு எத்தனை முறை ஊற்றவேண்டி உள்ளது? இவற்றிலிருந்து நீ என்ன முடிவுக்கு வருகிறாய்?

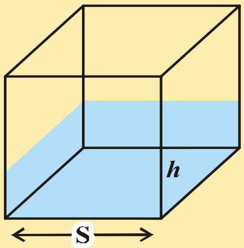


எனவே பிரமிடின் கனஅளவு

$=$ நேர்பட்டகத்தின் கனஅளவில் $\frac{1}{3}$ பங்கு

$= \frac{1}{3} \times$ நேர்பட்டகத்தின் கனஅளவு.

$= \frac{1}{3} \times$ அடியின் பரப்பளவு $\times$ உயரம்



குறிப்பு : ஒரு நேர்பட்டகம், புற விளிம்புகளுக்கு செங்குத்தாக உள்ள அடிப்பக்கங்களை பெற்றிருக்கும் மற்றும் அதன் எல்லா புறப்பக்கங்களும் செவ்வகங்கள் ஆகும்.

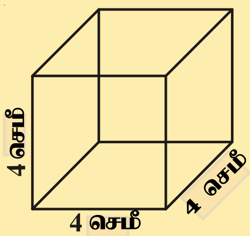
இதை செய்

1. சதுரத்தின் அடிப்பக்கம் 10செ.மீ மேலும் உயரம் 8செ.மீ உள்ள பிரமிடின் கனஅளவை கண்டுபிடி.
2. கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு 1200கன செ.மீ சமமான உயரம் கொண்ட சதுர பிரமிடின் கனஅளவை கண்டுபிடி.

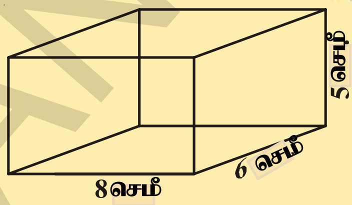
பயிற்சி - 10.1

1. பின்வரும் நேர்பட்டகங்களின் புறப்பரப்பளவு மற்றும் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு கண்டுபிடி.

(i)



(ii)



2. கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு 1350ச.மீ எனில் அதன் கனஅளவு கண்டுபிடி.
3. நீளம் 12மீ, அகலம் 10மீ, உயரம் 7.5மீ அளவுகளை கொண்ட அறையின் 4 சுவர்களின் பரப்பளவை கண்டுபிடி. (கதவுகள் மற்றும் ஜன்னல்கள் எதுவும் இல்லை என் நினைத்துக்கொள்)
4. கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு 1200செ.மீ^{3}. அதன் நீளம் 15செ.மீ மேலும் அகலம் 10செ.மீ எனில் அதன் உயரத்தை கண்டுபிடி.
5. கீழ்கண்ட சூழ்நிலைகளில் ஒரு பெட்டியின் மொத்த புறப்பரப்பு எவ்வாறு மாறுபடுகிறது எனக் கூறு.

(i) ஒவ்வொரு பரிமாணமும் இருமடங்கானால் (ii)ஒவ்வொரு பரிமாணமும் மும்மடங்கானால். ஒவ்வொரு பரிமாணத்தையும் n மடங்கிற்கு உயர்த்தினால் உன்னால் பரப்பளவு காணமுடியுமா? என்பதை கூறு.

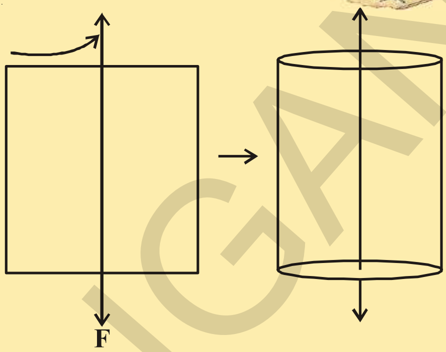
6. ஒரு பட்டகத்தின் அடிப்பக்கமானது 3செ.மீ, 4செ.மீ, மற்றும் 5செ.மீ பக்க அளவுகளை கொண்ட முக்கோண வடிவம் ஆகும். அதனுடைய உயரம் 10செ.மீ எனில் பட்டகத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடி.
7. ஓர் ஒழுங்கான சதுர பிரமிடின் உயரம் 3மீ மற்றும் அதன் அடிச்சுற்றளவு 16மீ எனில் பிரமிடின் கனஅளவை கண்டுபிடி.
8. கனச்செவ்வக வடிவில் உள்ள ஓர் ஒலிம்பிக் நீச்சல் குளத்தின் அளவுகள், 50மீ நீளம், 25மீ அகலம். அது 3மீ ஆழம் கொண்டிருந்தால், அக்குளத்தை நிரப்புவதற்கு எத்தனை லிட்டர்கள் தண்ணீர் தேவைப்படும்?

செயல்பாடு

செவ்வக வடிவ காகிதத்தை வெட்டி எடு. படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு கோட்டின் மீது தடினமான கயிற்றை ஒட்டு. செவ்வகத்தின் இரு புறங்களிலும் உள்ள கயிற்றை பிடித்து, உன்னால் முடிந்த வேகத்தில் செவ்வக காகிதத்தை சுற்று.

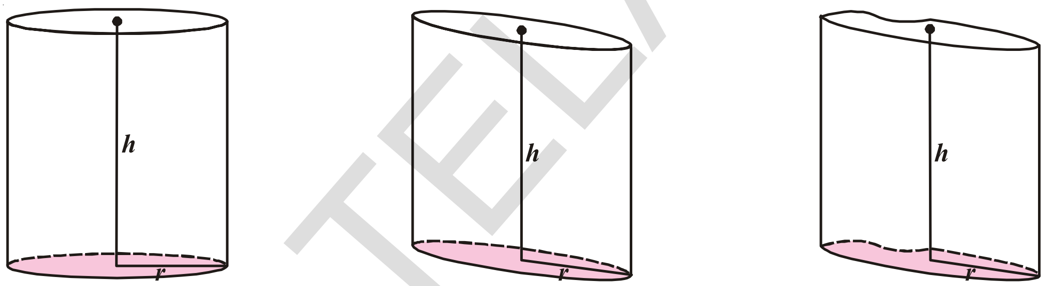
செவ்வகத்தை சுற்றுவதால் உருவாகும் வடிவத்தை உன்னால் அறிய முடிகிறதா?

அது உருளையின் வடிவம் என்பதை உன்னால் நினைவுபடுத்த முடிகிறதா?



10.3 நேர் வட்ட உருளை

பின்வரும் உருளைகளை கவனி.



(i) (ii) (iii)

(i) படம் (i), (ii), (iii) ல் நீ காணும் ஒற்றுமைகள் என்ன?

(ii) படம் (i), (ii), (iii)ல் நீ காணும் வேற்றுமைகள் என்ன?

(iii) எந்த படத்தில், கோட்டுத்துண்டு அடிக்கு செங்குத்தாக உள்ளது?

ஒவ்வொரு உருளையும் ஒரு வளைதளப்பரப்பு மற்றும் இரண்டு சர்வசம வட்டமுகப்புகளை இரண்டு முடிவுகளிலும் கொண்டிருக்கும். வட்டப்பகுதிகளின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு, அதன் அடிக்கு செங்குத்தாக இருந்தால் அவ்வகையான உருளை நேர்வட்ட உருளை எனப்படும்.

மேலே உள்ள படத்தில் எது நேர்வட்ட உருளை? எவை அல்ல? காரணங்கள் கூறு. உருளையை உருவாக்கும் ஒரு செயலை நாம் செய்யலாம்.

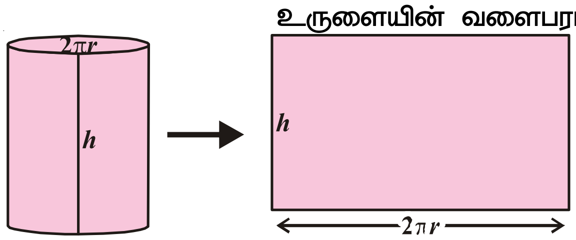
10.3.1 உருளையின் வளைதளப்பரப்பு :

ஒரு அட்டையில் உருவாக்கப்பட்ட நேர் வட்ட உருளையை எடுத்துக்கொள். வளைந்த பகுதியை செங்குத்தாக வெட்டி பிரி. இப்பொழுது பிரிக்கப்பட்ட உருளையின் வட்ட அடிப்பகுதி மற்றும் உயரத்தின் மாற்றத்தை கவனி. பிரிக்கப்பட்ட உருளையில் நீ காணும் வடிவம் என்ன?

இது செவ்வக வடிவம் என நாம் அறியலாம். இந்த செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, உருளையின் வளைபரப்பிற்கு சமம். உருளையின் உயரம் செவ்வகத்தின் அகலத்திற்கு சமம், மேலும் அடிபக்கத்தின் சுற்றளவு செவ்வகத்தின் நீளத்திற்கு சமம்.

உருளையின் உயரம் = செவ்வகத்தின் அகலம் ($h = b$)

'r' அலகு ஆரம் கொண்ட உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் சுற்றளவு = செவ்வகத்தின் நீளம் ($2\pi r = l$)



உருளையின் வளைபரப்பு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

= நீளம் × அகலம்

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$ **ச.அ**

எனவே உருளையின் வளைபரப்பு = $2\pi rh$ச.அ

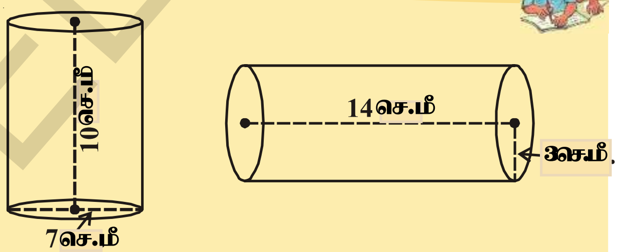
இதை செய்

பின்வரும் உருளைகளின் வளைதளபரப்புகளை கண்டுபிடி

(i) $r = x$ **செ.மீ.**, $h = y$ **செ.மீ.**

(ii) $d = 7$ **செ.மீ.**, $h = 10$ **செ.மீ.**

(iii) $r = 3$ **செ.மீ.**, $h = 14$ **செ.மீ.**



10.3.2 உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு

அருகில் உள்ள படத்தை கவனி.

இது ஒரு நேர்வட்ட உருளையா? மொத்தப்புறப்பரப்பை அடைய நீ எந்தெந்த பகுதிகளை சேர்க்க வேண்டும்? அவைகள் வளைபரப்பு மற்றும் இரண்டு வட்டப்பகுதிகள். இப்பொழுது உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு

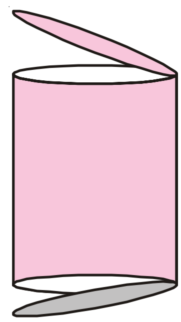
= வளைபரப்பு + மேல்பக்க பரப்பு + அடிப்பக்கப்பரப்பு

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2\pi r\,(r + h)$



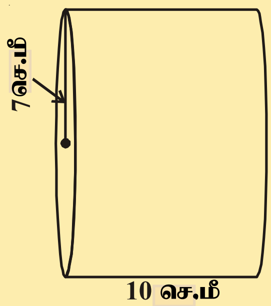
∴ உருளையின் மொத்தப்பபுறப்பரப்பு = $2\pi r\,(r + h)$

இங்கு 'r' என்பது உருளையின் ஆரம் மற்றும் 'h' என்பது அதன் உயரம்.

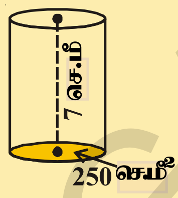
இதை செய்

பின்வரும் உருளைகளின் மொத்தப்புறப்பரப்பை கண்டுபிடி.

(i)



(ii)



10.3.3 உருளையின் கனஅளவு :

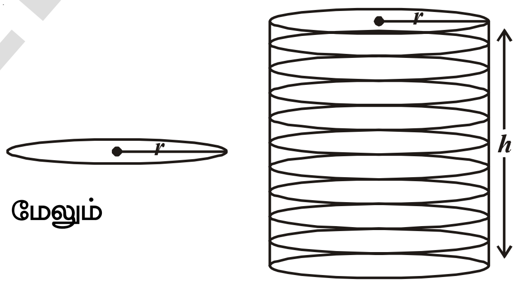
சம ஆரங்களுடைய வட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டு, அதை ஒன்றின் மீது ஒன்றாக அடுக்கு. இச்செயலில் நாம் பெறும் வடிவம் உருளையா? இல்லையா? எனக்கண்டுபிடி.

இந்த படத்தில் 'r' என்பது வட்டத்தின் ஆரம். மேலும் 'h' என்பது அடுக்கப்பட்ட வட்டங்கள் முடிவடையும் உயரமாகும்.

உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 \times$ உயரம்

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

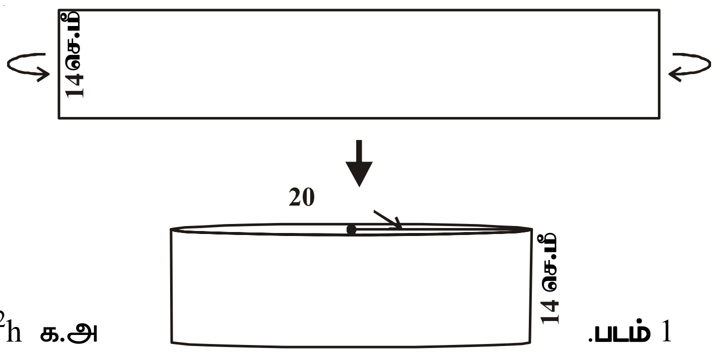


எனவே உருளையின் கனஅளவு = $\pi r^2 h$

இங்கு 'r' என்பது உருளையின் ஆரம், மேலும் 'h' என்பது அதன் உயரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: 14செ.மீ அகலமுடைய செவ்வக வடிவத்தாளை, அதன் அகலங்களை பொருத்து சுருட்டும் போது 20செ.மீ ஆரமுடைய உருளை உருவாகிறது. அந்த உருளையின் கனஅளவை கண்டுபிடி படம் ① ? $\pi = \dfrac{22}{7}$ **என எடுத்துக்கொள்.**

தீர்வு : ஒரு செவ்வகத்தை அதன் அகலத்தை பொறுத்து சுருட்டும்போது உருளை வடிவம் கிடைக்கிறது. இப்பொழுது அந்த தாளின் அகலமானது உருளையின் உயரமாகிறது. மேலும் உருளையின் ஆரம் 20செ.மீ.



உருளையின் உயரம் $= h = 14$ செ.மீ.

ஆரம் (r) = 20 செ.மீ.

உருளையின் கனஅளவு $V = \pi r^2 h$ க.அ

.படம் 1

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$$= 17600 \text{ செ.மீ}^3.$$

ஆகையால் உருளையின் கனஅளவு 17600செ.மீ^{3}.

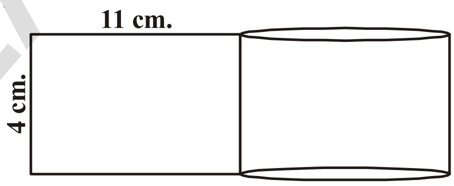
எடுத்துக்காட்டு 2: 11செ.மீ $\times$ 4செ.மீ அளவுடைய செவ்வகத்தாள் (ஒரு முனை மற்றொரு முனையுடன் பொருந்துமாறு) 4செ.மீ உயரமுடைய உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. அந்த உருளையின் கனஅளவை கண்டுபிடி.

தீர்வு : தாளின் நீளம் உருளையின் சுற்றளவாகிறது. மேலும் அகலம் உயரமாகிறது.

உருளையின் ஆரம் = r மற்றும் உயரம் = h

உருளையின் அடிசுற்றளவு = $2\pi r$ = 11 செ.மீ.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$



$\therefore$ $r = \frac{7}{4}$ செ.மீ.

$h = 4$ செ.மீ

உருளையின் கனஅளவு (v) = $\pi r^2 h$ க.அ

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3$$

$$= 38.5 \text{ செ.மீ}^3.$$

எடுத்துக்காட்டு 3: 44செ.மீ $\times$ 18செ.மீ அளவுகளுடைய செவ்வகத்தாள், அதன் நீளத்தை பொருத்து சுருட்டப்பட்டு உருளையாக்கப்படுகிறது. உருளை ஒரு திண்மப்பொருள் என நினைத்துக் கொள். (முழுவதுமாக நிரப்பப்பட்டுள்ளது). அதனுடைய மொத்தப்புறப்புரப்பு மற்றும் ஆரம் கண்டுபிடி.

தீர்வு : உருளையின் உயரம் = 18 செ.மீ

உருளையின் அடிச்சுற்றளவு = 44 செ.மீ

$2\pi r$ = 44 செ.மீ

$$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7\text{cm.}$$

மொத்தப்புறப்பரப்பு = $2\pi r\,(r + h)$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(7+18)\text{செ.மீ}^2$$

$$= 1100 \text{ செ.மீ}^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 4: 5மி.மீ தடிமன்உடைய வட்டவட்டுகளை ஒன்றன் மீது ஒன்றாக அடுக்கி, 462செ.மீ^{2}. வளைபரப்பு உடைய உருளையாக அமைக்கப்படுகிறது. ஆரம் 3.5செ.மீ எனில் வட்டவட்டுகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : வட்டவட்டின் தடிமன் = 5மி.மீ = $\frac{5}{10}$ செமீ $= 0.5$ செமீ

வட்டவில்லையின் ஆரம் = 3.5செ.மீ.

உருளையின் வளைபரப்பு = 462செ.மீ^{2}

$\therefore \quad 2\pi rh = 462 \qquad \text{..... (i)}$

வட்டவில்லைகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

$\therefore$ உருளையின் உயரம் = h = வட்டவில்லைகளின் தடிமன் $\times$ வட்டவில்லைகளின் எண்ணிக்கை

= 0.5 x

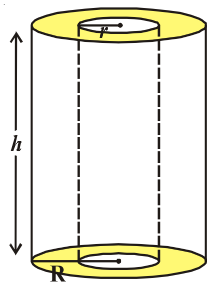
$\therefore \quad 2\pi rh = 2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x \quad \text{..... (ii)}$

(i) மற்றும் (ii)ல் இருந்து நாம் பெறுவது

$$2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x = 462$$

$$\therefore \; x = \frac{462\times 7}{2\times 22\times 3.5\times 0.5} = 42 \text{ வட்டவட்டுகள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 5: வெளிஆரம் 8செ.மீ உயரம் 10செ.மீ உடைய ஒரு உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பு 338πசெ.மீ^{2}. உள்ளீடற்ற உலோக உருளையின் தடிமனை காண்க.



தீர்வு : வெளிஆரம் = R = 8செ.மீ

உள்ஆரம் = r

உயரம் = 10செ.மீ

மொத்தபுறரப்பரப்பளவு = 338π செ.மீ^{2}

ஆனால் மொத்தபுறப்பரப்பளவு = வெளிப்பக்க உருளையின் பரப்பளவு
+உள்பக்க உருளையின் பரப்பளவு
+இரண்டு அடிப்பக்கங்களின் பரப்பளவு (வளையம்)

$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$

$= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2)$

$2\,\Pi\,(Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\,\Pi$

$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow r^2 - 10r + 25 = 0$

$\Rightarrow (r - 5)^2 = 0$

$r = 5$

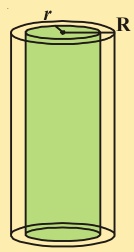
உலோகத்தின் தடிமன் = $R - r = (8 - 5)$ செ.மீ = 3 செ.மீ.

முயன்று பார்

1. ஒரு உருளையின் வளைபரப்பு மாறாமல் ஆரத்தை இருமடங்காக்கினால் அதன் உயரம் என்ன?
2. நீரை வெப்பப்படுத்தும் கலனில் உள்ள உருளை வடிவ குழாயின் நீளம் 14மீ, மற்றும் விட்டம் 5செ.மீ. நீரை வெப்பப்படுத்தும் கலனின் மொத்த வெப்பப்படுத்தும் பகுதியின் பரப்பளவை காண்க.

பயிற்சி - 10.2

1. 1.4செ.மீ உயரமும் அடிஆரம் 56செ.மீ உள்ள மூடிய உருளைவடிவ நீர்த்தொட்டி ஒரு தடிமனான உலோ தகட்டினால் செய்யப்படுகிறது. எவ்வளவு உலோகத்தகடு தேவைப்படும். (ச.மீ.ல் கூறு)
2. ஓர் உருளையின் கனஅளவு 308செ.மீ^{3}. அதன் உயரம் 8செ.மீ எனில் அதன் புறப்பரப்பளவு மற்றும் மொத்த புறப்பரப்பளவு கண்டுபிடி.
3. 22செ.மீ $\times$ 15 செ.மீ. $\times$ 7.5செ.மீ அளவுகள் கொண்ட கனசெவ்வக உலோகம், உருக்கப்பட்டு உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் உயரம் 14செ.மீ எனில் அதன் ஆரம் என்ன?
4. ஒரு மேல்நீர்த்தொட்டி 61.6கனலிட்டர் கொள்ளளவு உள்ள உருளை வடிவில் உள்ளது அந்த தொட்டியின் விட்டம் 5.6மீ எனில் தொட்டியின் உயரத்தை கண்டுபிடி.
5. ஒரு உலோக குழாயின் நீளம் 77செ.மீ. அதன் உள்விட்டம் 4செ.மீ, வெளிவிட்டம் 4.4செ.மீ (படத்தைபார்) எனில் அதன்
   (i) உள்வளைப்பரப்பளவு
   (ii) வெளி வளைப்பரப்பளவு
   (iii) மொத்தப் புறப்பரப்பளவு ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.



6. ஓர் உருளை வடிவ தூணின் விட்டம் 56செ.மீ மற்றும் உயரம் 35மீ. ஒரு கட்டிடத்தைச் சுற்றி 16 தூண்கள் உள்ளன. ஒரு ச.மீ ₹5.50வீதம் அந்த தூண்கள் மொத்தத்திற்கும் வண்ணம் பூச்சு செய்ய ஆகும் செலவு எவ்வளவு?

7. 120செ.மீ நீளமும், 84செ.மீ விட்டமும் கொண்ட ஒரு சாலை சமன்படுத்தியைக் கொண்டு ஒரு விளையாட்டுத்திடல் சமப்படுத்தப்படுகிறது. விளையாட்டுத்திடலை சமப்படுத்த அது 500முழுச்சுற்றுகள் சுழல வேண்டும் எனில் அந்த விளையாட்டுத்திடலின் பரப்பளவை மீ^{2}ல் கண்டுபிடி.

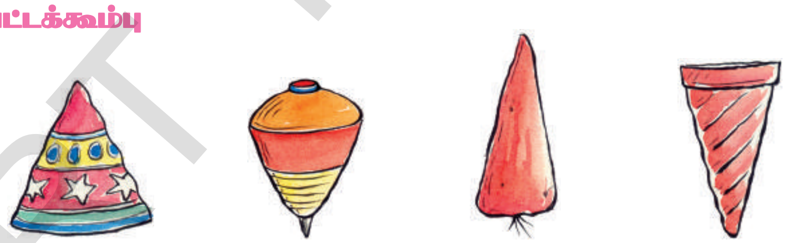
8. வட்டவடிவ கிணற்றின் உள்விட்டம் 3.5மீ. அதன் ஆழம் 10மீ எனில்
   (i) அதன் உள் வளைபரப்பு
   (ii) ச.மீக்கு ரூ40வீதம் சுவர்கள் சுற்றி சிமெண்ட்பூச ஆகும் செலவு எவ்வளவு?

9. (i) 4.2மீ விட்டம் மற்றும் 4.5மீ உயரம் கொண்ட மூடிய உருளைவடிவ பெட்ரோலை தேக்கி வைக்கும் தொட்டியின் மொத்த புறப்பரப்பை கண்டுபிடி.
   (ii) தொட்டி தயாரிக்கப்படும் போது $\frac{1}{12}$ பாகம் எஃகு வீணாகிவிட்டது எனில் அத்தொட்டி தயாரிக்க உண்மையாக எவ்வளவு எஃகு பயன்படுத்தப்பட்டது?

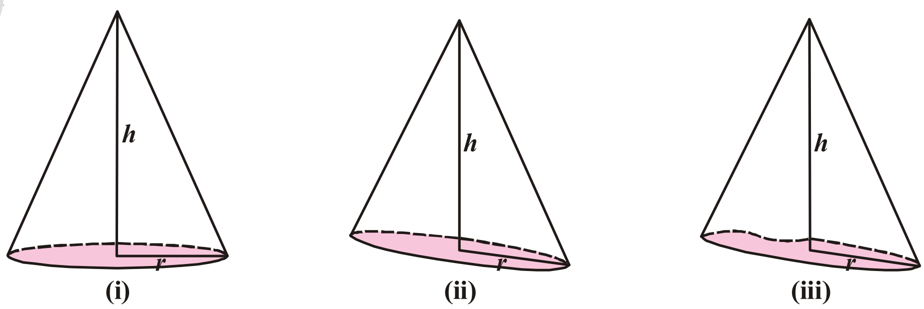
10. ஒரு பக்கம் திறந்துள்ள உருளை வடிவ பாத்திரத்தின் உள் ஆரம் 28செ.மீ மற்றும் உயரம் 2.1மீ. அந்த பாத்திரத்தில் எவ்வளவு நீரை தேக்கி வைக்கலாம். லிட்டரில் கூறு. (1லிட்டர் = 1000கனசெ.மீ)

11. உருளையின் வளைபரப்பு 1760 செ.மீ^{2} அதன் கனஅளவு 12320 செ.மீ^{3} எனில் அதன் உயரத்தை கண்டுபிடி.

10.4 நேர் வட்டக்கூம்பு



மேற்கண்ட படங்களை கவனி மேலும் அவை எந்த திடவடிவத்தை ஒத்திருக்கிறது. அவை அனைத்தும் கூம்பு வடிவங்கள். கீழ்கண்ட கூம்புகளை கவனி.



(i) இந்த கூம்புகளில் நீ காணும் பொதுவான பண்புகள் என்ன?

(ii) இவற்றில் நீ காணும் வித்தியாசம் என்ன?

படம் (i)ல் புறப்பரப்பானது வளைந்தும் அதன் அடிப்பக்கம் வட்டவடிவிலும் உள்ளது. கூம்பின் வட்டவடிவ அடிப்பாகத்தின் மையத்திற்கு செங்குத்தாக உச்சி அமைந்தால் அது நேர்வட்டக் கூம்பு எனப்படும்.

படம் (ii)ல் அடிப்பக்கம் வட்டமாக இருந்தபோதிலும் அதன் குத்துயரம் கூம்பின் ஆரத்திற்கு செங்குத்தாக இல்லை. எனவே இவ்வகையான கூம்புகள் நேர்வட்டக்கூம்புகள் அல்ல.

படம் (iii)ல் குத்துயரம் அடிக்கு செங்குத்தாக இருந்தபோதிலும் அடிவட்ட வடிவில் இல்லை. எனவே இது நேர்வட்டக்கூம்பு அல்ல.

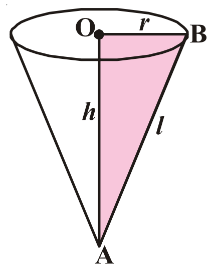
10.4.1 கூம்பின் சாயுயரம்

அருகில் உள்ள படம் (கூம்பு) $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ க்கு செங்குத்தாக இருக்கிறது.

ΔAOB ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

$\overline{AO}$ கூம்பின் உயரம் (h) ஆகும். மேலும் கூம்பின் ஆரம் (r) $\overline{OB}$ க்கு சமம்.

ΔAOB ல் இருந்து



$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (AB சாயுயரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது $= l$)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

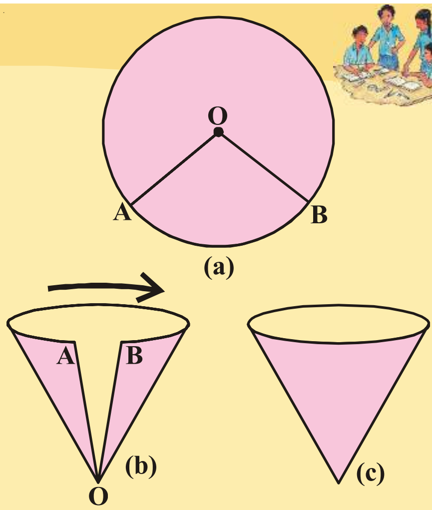
செயல்பாடு

வட்டக்கோண பகுதியில் இருந்து கூம்பை உருவாக்குவோம். பின்வரும் குறிப்புகளை பின்பற்றி படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு செய்.

(i) ஒரு காகிதத்தின் மேல் ஒரு வட்டம் வரை (படம் a)

(ii) அதிலிருந்து AOB வட்டகோண பகுதியை வெட்டி எடு.

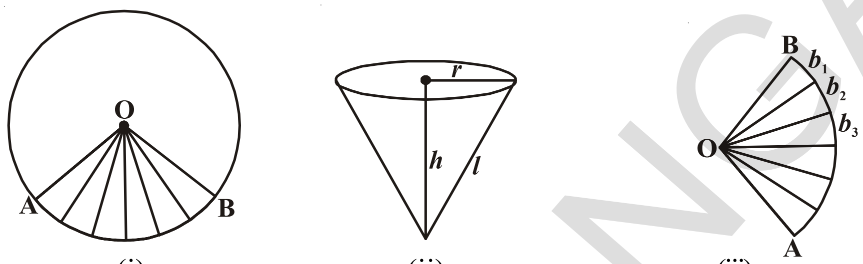
(iii) A,B முனைகள் ஒன்றுடன் ஒன்று ஒன்றும்படி மெதுவாக இணை. A,B ஒன்றின் மீது ஒன்று சேராதபடி பார்த்துக்கொள். A,Bயை இணைத்தபின் அதனை பசை நாடா போட்டு ஒட்டு (படம் c).



(iv) நீ பெற்ற வடிவம் என்ன? இது ஒரு நேர் கூம்பா?

கூம்பை உருவாக்கும்போது OA மற்றும் OB ன் முனைகள் மேலும் AB ன் வட்டக்கோண பகுதியின் வில்லின் நீளம் AB ஆகியவற்றிற்கு என்ன நிகழ்கிறது. எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை கவனி.

10.4.2 கூம்பின் வளைபரப்பு



(i) (ii) (iii)

இதற்கு முந்தைய செயலில் விவாதித்தபடி காகிதத்தால் செய்யப்பட்ட நேர் வட்டக்கூம்பின் வளைபரப்பை நாம் காணலாம்.

வட்டகோணப்பகுதியை கூம்பாக மடிக்கும் போது, OA, OB ஆகியவை ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துவதையும், அது கூம்பின் சாயுயரமாக மாறுவதையும் நீ கவனித்திருப்பாய். மேலும் வில்லின் நீளம் AB கூம்பின் அடியின் சுற்றளவாகவும் மாறுகிறது.

இப்பொழுது கூம்பின் மடிப்பை பிரித்து AOB வட்டகோணப்பகுதியை படத்தில் காட்டியவாறு உன்னால் முடிந்தவரை வெட்டி எடு. நாம் வெட்டி எடுத்த ஒவ்வொரு பகுதியும் ஏறக்குறைய b_1, b_2, b_3 ..... ஐ அடியாக கொண்ட சிறிய முக்கோணங்கள் போன்றுஇருக்கும். மேலும் உயரம் 'l' ஆனது கூம்பின் சாயுயரத்திற்கு சமம் ஆகும்.

இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளை கண்டுபிடித்து அவற்றை கூட்டினால் கிடைக்கும் பரப்பளவு, வட்டகோணப்பகுதியின் பரப்பளவாகும். வட்டகோணப்பகுதி ஒரு கூம்பை உருவாக்கும் என நமக்குத் தெரியும். எனவே வட்டகோணப்பகுதியின் பரப்பளவு, அந்த வட்டகோண பகுதியால் உருவாக்கப்பட்ட கூம்பின் பரப்பளவுக்கு சமம்.

கூம்பின் பரப்பளவு = முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதல்

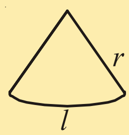
$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

$= \frac{1}{2}l$ (Aயிலிருந்து Bவரை உள்ள வளைவுபகுதியின் நீளம் அல்லது கூம்பின் அடியின் சுற்றளவு)

முயன்று பார்

ஒரு வட்டவடிவ காகிதத்தில் இருந்து 'r' அலகு ஆரமும், 'l' அலகு வட்டவில்லும் கொண்ட வட்டகோண பகுதியை வெட்டி எடு. இதை கூம்பாக மடி. அதன் வளைபரப்பு $A = \pi r l$ என்ற சூத்திரத்தை நீ எவ்வாறு வருவிப்பாய்?



$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ ($\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$, 'r' என்பது கூம்பின் ஆரம்)

AB ஒரு வட்டத்தை ஏற்படுத்தும்.

எனவே கூம்பின் வளைபரப்பு அல்லது கூம்பின் புறப்பரப்பளவு = πrl

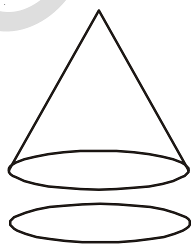
இங்கு கூம்பின் சாயுயரம் 'l' மேலும் ஆரம் 'r'.

10.4.3 கூம்பின் மொத்தப்பரப்பு

கூம்பின் அடிப்பகுதியை மூடுவதற்கு நமக்கு கூம்பின் அடி ஆரத்திற்கு சமமான ஆரமுள்ள வட்டம் தேவை.

கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவை கண்டுபிடிப்பது எவ்வாறு? எத்தனை புறத்தளங்களை இணைத்தால் நீ மொத்தப் பரப்பளவை பெறுவாய்?

வட்டத்தின் பரப்பளவு = πr^2



கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவு = வட்டத்தின் வளைபரப்பு + அடிபக்கத்தின் பரப்பளவு

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r\,(l + r)$$

∴ **கூம்பின் மொத்தபரப்பளவு = $\pi r\,(l + r)$**

இங்கு கூம்பின் ஆரம் 'r' சாயுயரம் 'l'.

இதை செய்

1. ஒரு தடித்த தாளிலிருந்து செங்கோண முக்கோணத்தை வெட்டி எடுத்து, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான பக்கங்களில் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தில் கெட்டியான நூலை ஒட்டுக. நூலை கையில் பிடித்துக்கொண்டு நூலை அச்சாகக் கொண்டு முக்கோணத்தை ஏதேனும் ஒரு திசையில் சுழற்றுக. நீ கவனித்தது என்ன?
2. பின்வரும் நேர்வட்டக்கூம்புகளின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப்பரப்பளவு கண்டுபிடிக்க.

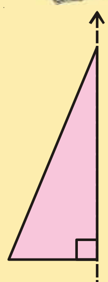
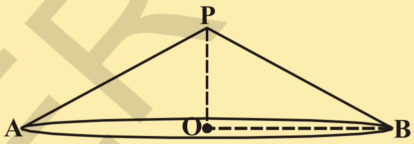
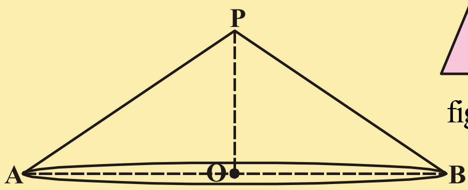


fig. (i)

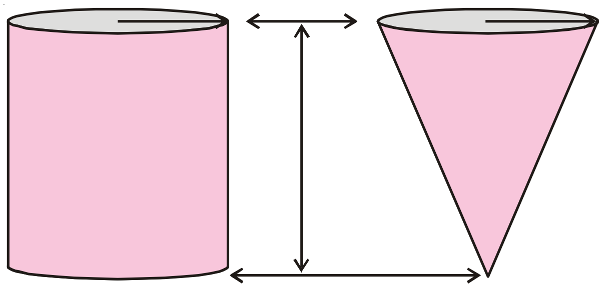


OP = 2 செ.மீ; OB = 3.5 செ.மீ

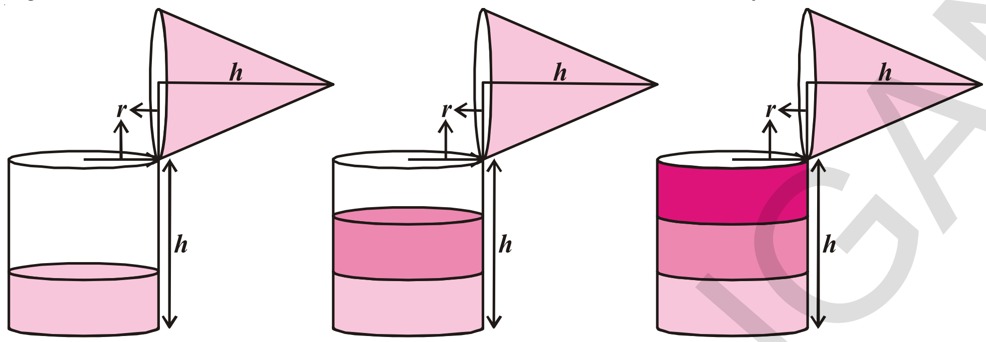


OP = 3.5 செ.மீ; AB = 10 செ.மீ

10.4.4 நேர்வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு :



கீழ்கண்ட படத்தில் காட்டியவாறு சமஅளவு ஆரம் மற்றும் சமஅளவு உயரம் கொண்ட உள்ளீடற்ற கூம்பு மற்றும் உள்ளீடற்ற உருளை ஆகியவற்றை தயாரிக்கவும். இப்பொழுது நாம் கீழ்கண்ட செயல்மூலம் கூம்பின் கனஅளவினைக் கண்டறியலாம்.



i. கூம்பு நிரம்ப நீரை எடுத்தக்கொண்டு அதை உருளையில் ஊற்றினால் அது உருளையில் சிறிது பாகத்தை நிரப்பும்.

ii. மறுபடியும் கூம்பு நிரம்பநீரை எடுத்துக்கொண்டு உருளையில் ஊற்றினால் அது உருளையில் மேலும் சிறிது பாகத்தை நிரப்பும். முழுமையாக நிரப்பாது.

iii. மூன்றாவதாக அவ்வாறே செய்தால் உருளையில் நீர் நிரம்பிஇருக்கும்.

இந்த பரிசோதனையிலிருந்து நீங்கள் அறிந்தது என்ன? உருளையின் கனஅளவிற்கும் கூம்பின் கனஅளவிற்கும் இடையே ஏதேனும் உறவு உண்டா?

மூன்று முறை கூம்பு நிரம்ப நீரை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை உருளையில் ஊற்றிய பிறகு அந்த உருளை நிரம்பியது. ஒரே அடிப்பகுதி, ஒரே உயரம் உடைய உருளை கூம்பு ஆகியவற்றில் உருளையின் கொள்ளளவு கூம்பின் கொள்ளளவைபோல் 3 மடங்கு அதிகம். அதாவது கூம்பின் கொள்ளளவு உருளையின் கொள்ளளவைபோல் $\frac{1}{3}$ மடங்கு.

கூம்பின் கனஅளவு = $\frac{1}{3}$ உருளையின் கனஅளவு.

எனவே கூம்பின் கனஅளவு = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ க.அலகுகள் என அறியலாம்.

இங்கு 'r' என்பது கூம்பின் அடி ஆரமாகும். 'h' என்பது அதன் உயரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6: ஒரு மக்காச்சோளம் (படம் (i) காட்டி உள்ளவாறு) கூம்பு வடிவில் உள்ளது. அதிகமான அகலம் கொண்ட பகுதியின் ஆரம் 1.4செ.மீ மற்றும் நீளம் 12செ.மீ ஒவ்வொரு ச.செ.மீ பகுதியிலும் சராசரியாக 4 பருப்புகள் பெற்றிருந்தால் அந்த முழு மக்காச்சோளத்தில் தோராயமாக எத்தனை செ.மீ பருப்புகள் இருக்கும்?

தீர்வு : இங்கு $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2}\, cm.$

$= \sqrt{145.96}$ = 12.08 செ.மீ (தோராயமாக)

எனவே மக்காச்சோளத்தின் வளைபரப்பு = $\pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08$ செ.மீ²

(i)

$= \quad 53.15$ செ.மீ^{2}

$= 53.2$ செ.மீ^{2} (தோராயமாக)

1ச.செ.மீ மக்காசோளபரப்பில் இருக்கும் பருப்புகளின் எண்ணிக்கை = 4

எனவே, மக்காச்சோளத்தில் உள்ள மொத்த பருப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= \quad 53.2 \times 4 = 212.8 \quad = 213$ (தோராயமாக)

எனவே, அந்த மக்காச்சோளத்தில் தோராயமாக 213 பருப்புகள் இருக்கும்.

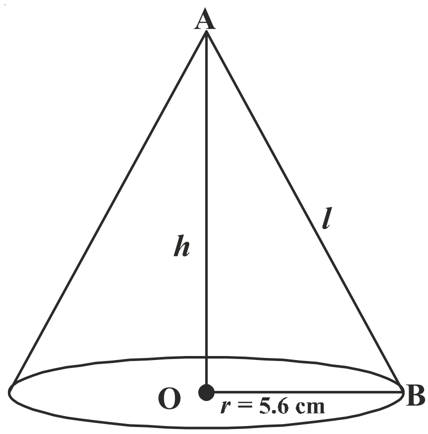
எடுத்துக்காட்டு 7: 5.6செ.மீ ஆரமும் 158.4 செ.மீ^{2} வளைபரப்பு கொண்டுள்ள கூம்பின் சாயுயரம் மற்றும் குத்துயரம் கண்டுபிடி.

தீர்வு : ஆரம் = 5.6 செ.மீ, குத்துயரம் = h, சாயுயரம் = l

கூம்பின் வளைபரப்பு = $\pi r l$ = 158.4 செ.மீ^{2}

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9 \text{ செ.மீ}$$



$l^2 = r^2 + h^2$ என நமக்குத்தெரியும்

$$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$= 49.64$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$h = 7.05$ செ.மீ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 8: ஒரு கூடாரமானது ஓர் உருளையின் மீது கூம்பு அமைந்தது போல் உள்ளது. அடிபாகத்தின் விட்டம் 24மீ. உருளை வடிவபாகத்தின் உயரம் 11மீ, மேலும் உருளையின் மீதுள்ள கூம்பு உயரம் 5செ.மீ. 1ச.மீ கித்தான் துணி விலை ₹10 எனில் கூடாரம் அமைக்க தேவையான கித்தான் துணியின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு : உருளைவடிவின் அடிப்பக்கத்தின் விட்டம் = கூம்பு வடிவின் விட்டம் = 24மீ

∴ அடியின் ஆரம் = 12 மீ

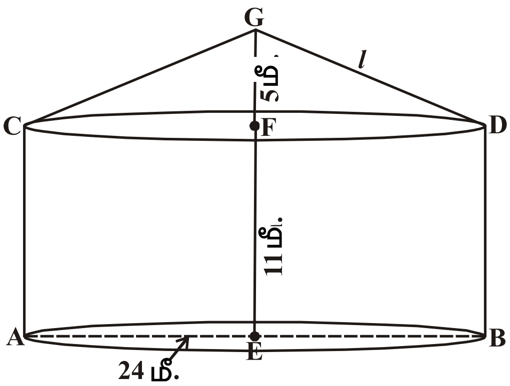
உருளையின் உயரம் = 11 மீ = h_1

கூம்பின் உயரம் = 5மீ = h_2

கூம்பின் சாயுயரம் l என்க.

l = GD = $\sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{12^2+5^2} = 13$ மீ

தேவையான கித்தான் துணியின் பரப்பளவு = உருளையின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளைபரப்பு



$= 2\pi rh_1 + \pi rl$

$= \pi r\,(2h_1 + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(2 \times 11 + 13)$ மீ^{2}

$= \frac{22 \times 12}{7} \times 35$ மீ^{2}

$= 22 \times 60$ மீ^{2}

$= 1320$ மீ^{2}

1ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை = ₹10.

∴ தேவையான கித்தான் துணியின் விலை = 1ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை × கீத்தான் துணியின் பரப்பளவு

= ₹10 × 1320

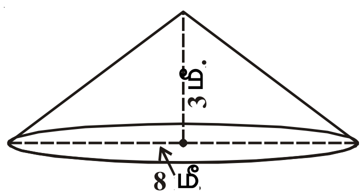
= ₹13,200.

எடுத்துக்காட்டு 9: தரையிலிருந்து 3மீ உயரம் மற்றும் அடிவிட்டம் 8மீ கொண்ட கூம்பு பயிற்சி கூடாரம் ஒன்று இராணுவத்தினரால் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) கித்தான் துணியின் விலை ச.மிக்கு ₹70 எனில் அந்த கூடாரம் அமைக்க தேவையான கித்தான் துணியின் விலையை கண்டுபிடி.

(ii) ஒவ்வொரு நபருக்கும் 3.5 மீ^{3} காற்று தேவைப்படுகிறது எனில், அந்த கூடாரத்தில் எத்தனை பேர் உட்கார முடியும்.

தீர்வு : கூடாரத்தின் விட்டம் = 8 மீ.



$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$ மீ

உயரம் = 3 மீ.

சாயுயரம் (l) $= \sqrt{h^2+r^2}$

$= \sqrt{3^2+4^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ மீ.

∴ கூடாரத்தின் வளைபரப்பு = πrl ச.அ

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7}$ மீ^{2}

கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$

$= \frac{352}{7}$ மீ^{3}

(i) கூடாரம் அமைக்க தேவைப்படும் கித்தான் துணியின் விலை

= கூம்பின் வளைபரப்பு $\times$ விலை

$= \frac{440}{7} \times 70$

= ₹4400

(ii) கூடாரத்தில் உட்காரக் கூடிய நபர்களின் எண்ணிக்கை

$= \frac{\text{கூம்பு வடிவ கூடாரத்தின் கனஅளவு}}{\text{ஒவ்வொருவருக்கும் தேவையான காற்று}}$

$= \frac{352}{7} \div 3.5$

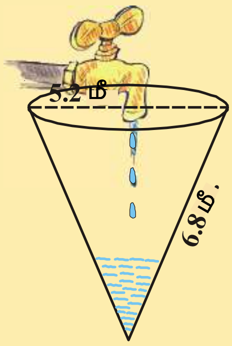
$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$

= 14 நபர்கள் (தோராயமாக)

பயிற்சி - 10.3

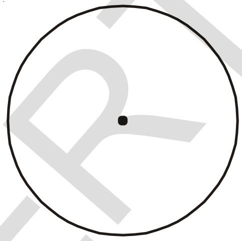
1. ஓர் கூம்பின் அடிப்பரப்பளவு 38.5 செ.மீ^{2}. அதன் கனஅளவு 77 செ.மீ^{3} எனில் அதன் உயரத்தை கண்டுபிடி.
2. ஓர் கூம்பின் கனஅளவு 462 மீ^{3}. அதன் அடிஆரம் 7மீ எனில் அதன் உயரதத்தை கண்டுபிடி.
3. கூம்பின் வளைபரப்பு 308 செ.மீ^{2} மேலும் அன் சாயுயரம் 14செ.மீ எனில்.
   (i) அதன் அடியின் ஆரம் (ii) கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவை கண்டுபிடி.
4. ஒரு கூம்பின் மொத்த புறப்பரப்பிற்கும் வர்ணம் பூச ச.செ.மீக்கு 25பைசா வீதம் ₹176 ஆகிறது. கூம்பின் சாயுயரம் 25செ.மீ எனில் அதன் கனஅளவை கண்டுபிடி.
5. ஒரு வட்டத்தில் இருந்து 15செ.மீ ஆரமும், $216°$ கோணமும் உள்ள வட்டக்கோணப்பகுதி வெட்டி எடுக்கப்பட்டு, அதன் ஆரங்களை ஒன்றாக இணைத்து கூம்பாக்கினால், அக்கூம்பின் கனஅளவு கண்டுபிடி.
6. ஒரு கூடாரத்தின் உயரம் 9மீ. அதன் அடிவிட்டம் 24மீ. அதனுடைய சாயுயரம் என்ன? ஒரு ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை ₹14 எனில் அக்கூடாரத்திற்கு தேவைப்படும் கித்தான் துணியின் விலை என்ன?

7. கூம்பின் வளைபரப்பு $1159\frac{5}{7}$ செ.மீ^{2}. அதன் அடியின் பரப்பளவு $254\frac{4}{7}$ செ.மீ^{2}. எனில் அதன் கனஅளவை கண்டுபிடி.
8. ஓர் கூடாரம் உருளையின் மீது கூம்பு வடிவில் உள்ளது. உருளை பகுதியின் உயரம் 4.8மீ. அதன் அடியின் ஆரம் 4.5மீ மேலும் கூடாரத்தின் மொத்த உயரம் 10.8மீ எனில் அந்த கூடாரம் அமைக்க தேவையான கித்தான் துணியின் அளவை சதுரமீட்டரில் கூறு.
9. 8மீ உயரம் 6மீ அடி ஆரம் கொண்ட கூம்பு வடிவ கூடாரம் அமைக்க 3மீ அகலம் கொண்ட தார்ச்சீலை எவ்வளவு நீளம் கொண்டிருக்க வேண்டும். ஓரத்தை தைப்பதற்கு கூடுதலான நீள துணி தேவைப்படுகிறது என்றும் கத்தரிக்கும்போது வீணாக்கப்பட்ட துணி 20செ.மீ என்றும் நினைத்துக்கொள்க. (π = 3.14)
10. நேர்வட்டக்கூம்பு வடிவிலுள்ள ஒரு கோமாளி தொப்பியின் அடி ஆரம் 7செ.மீ உயரம் 27செ.மீ எனில் அவ்வகையான தொப்பிகள் 10 தயாரிக்க தேவைப்படும் காகிதத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி.
11. அருகில் உள்ள படத்தில் காட்டி உள்ளவாறு 5.2மீ விட்டம், 6.8மீ உயர கூம்புவடிவ பாத்திரத்தில் ஒரு நிமிடத்திற்கு 1.8மீ^{3} நீர் ஊற்றப்படுகிறது இந்த கூம்புவடிவ பாத்திரத்தின் விட்டம் 5.2மீ சாய்வு உயரம் 6.8மீ எனில் அப்பாத்திரம் முழுவதும் நிரம்ப எவ்வளவு நேரம் ஆகும்.
12. இரண்டு வடிவொத்த கூம்புகளின் கனஅளவுகள் 12π கனஅலகுகள் மற்றும் 96πகன அலகுகள். சிறிய கூம்பின் வளைபரப்பு 15πச.அலகுகள். பெரிய கூம்பின் வரைபரப்பு என்ன?



குறிப்பு: வடிவொத்த கூம்புகள் எனில் $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^3 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$

10.5 கோளம்


(i)


(ii)


(iii)

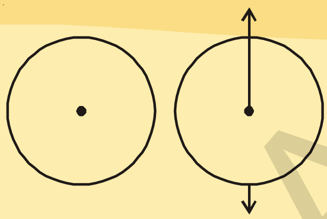
மேலே உள்ள படங்கள் அனைத்தும் உனக்கு நன்கு தெரிந்தவை. அவற்றிக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டை உன்னால் அடையாளம் காணமுடிகிறதா?

படம்(i) ஒரு வட்டம். உன்னால் இதனை ஒருசாதாரண காகிதத்தில் எளிதாக வரையமுடியும். ஏனெனில் இது ஒருசமதளபடம். வட்டம் ஒரு மூடிய சமதளபடம். அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் நிலையான புள்ளியில் (மையம்) இருந்து சமமான தூரத்தில் (ஆரம்) இருக்கும். மேலே உள்ள மீதி படங்கள் முப்பரிமாண படங்கள். இந்த முப்பரிமாண பொருட்கள் வட்டவடிவம் கொண்டவை. இவற்றை கோளங்கள் என்கிறோம்.

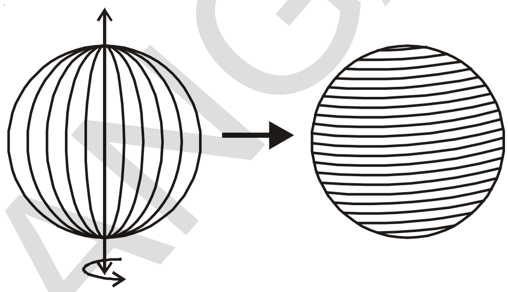
கோளம் முப்பரிமாணப்படம் தளத்தில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளும் ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து சமமான தூரத்தில் இருக்கும். அந்த நிலையான புள்ளியை கோளத்தின் மையம் என்று அழைக்கப்படும். மையத்தில் இருந்து வளைபரப்பின் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு இடையே உள்ள தூரம் கோளத்தின் ஆரம் ஆகும்.

செயல்பாடு

ஒரு தடிமனான காகிதத்தில் வட்டத்தை வரைந்து கத்தரித்துக்கொள். அதன் விட்டத்தின் வழியே ஒரு நூலை ஒட்டுக. பின்பு விட்டத்தை அச்சாக கொண்டு காகிதத்தை 360^{0}சுழற்றுக. அப்போது தோன்றும் வடிவத்தை கவனி.



10.5.1 கோளத்தின் வளைபரப்பு



கோளத்தின் வளைபரப்பை பின்வரும் செயல்மூலம் கண்டுபிடிப்போம்.

படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஒரு இரப்பர் பந்தை எடுத்துக்கொண்டு ஒரு நூலினால் அந்த பந்தை சுற்றுக. அந்த நூலின் ஆரம்பம் மற்றும் முடிவு புள்ளிகளை குறித்துகொள். மெதுவாக அந்த நூலினை பந்தில் இருந்து கழற்றி விடுக.

கோளத்தின் ஆரத்தை கண்டுபிடி. படத்தில் காட்டியவாறு பந்தின் ஆரத்திற்கு சமமான ஆரமுடைய நான்கு வட்டங்களை வரைக. பந்தை சுற்றிய நூலைக் கொண்டு ஒன்றன்பின் ஒன்றாக வட்டங்களை நிரப்பு. கோளத்தை (பந்தை) முழுவதுமாக சுற்றிய நூலானது நான்கு வட்டங்களின் பரப்பளவுகளையும் முழுவதுமாக நிரப்புகிறது.

r அலகு ஆரமாக உடைய கோளத்தின் வளைபரப்பானது அதே r அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தின் பரப்பளவின் 4 மடங்கிற்கு சமம்.

∴ கோளத்தின் வளைபரப்பு = 4 × வட்டத்தின் பரப்பளவு

$= 4\pi r^2$

கோளத்தின் வளைபரப்பு = $4\,\pi r^2$

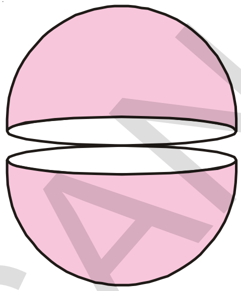
இங்கு கோளத்தின் ஆரம் 'r'

முயன்று பார்

வேறு ஏதாவது வழிகளில் கோளத்தின் வளைபரப்பை உன்னால் காணமுடியுமா?

10.5.2 அரைக்கோளம்

ஒரு திண்ம கோளத்தை எடுத்துகொண்டு, அதனுடைய மையம் வழியாக செல்லும் ஒரு தளத்தை அடிப்படையாக கொண்டு வெட்டு.



அது படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு இரண்டு சம பகுதிகளாக இருக்கும். ஒவ்வொரு சமபகுதியும் அரைக்கோளம் எனப்படும்.

கோளமானது ஒரே ஒரு வளைந்த பகுதியை மட்டும் கொண்டிருக்கும். அது இரண்டு சமமான பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டால் அதன் வளைந்த பகுதியும் இரண்டு சமமான வளைந்த பகுதிகளாக பிரிக்கப்படும்.

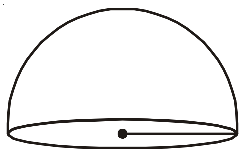
அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பை குறித்து நீ என்ன நினைக்கிறாய்?

தெளிவாக, அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பானது, கோளத்தின் வளைபரப்பில் பாதி.

எனவே, அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு = $\frac{1}{2}$ கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

$= 2\ \pi r^2$



❖ **அரைகோளத்தின் வளைபரப்பு = $2\ \pi r^2$ ச.அ.**

அரைக்கோளத்தின் அடி ஒரு வட்டபகுதி. அதன் பரப்பளவு πr^2 க்கு சமம்.

இப்போது வளைபரப்பையும், அடியின் பரப்பையும் கூட்டினால், நாம் அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவை பெறலாம்.

அரைக்கோளத்தின் மொத்த்புறப்பரப்பளவு = வளைபரப்பு + அடிபரப்பு

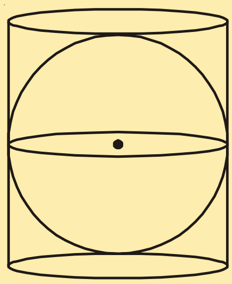
$= 2\ \pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\ \pi r^2.$

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு = $3\pi r^2$.

இதை செய்

1. படத்தில் காட்டியவாறு, r அலகு ஆரமுள்ள கோளமானது ஒரு நேர்வட்ட உருளையால் மூடப்பட்டுள்ளது.

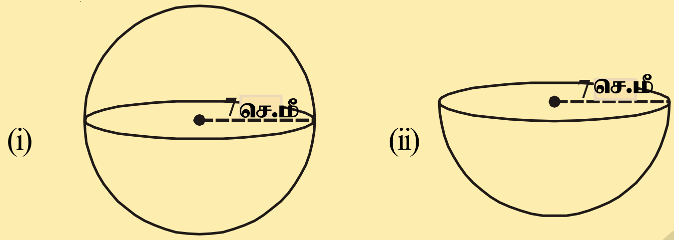


(i) கோளத்தின் வளைபரப்பு

(ii) உருளையின் புறப்பரப்பளவு

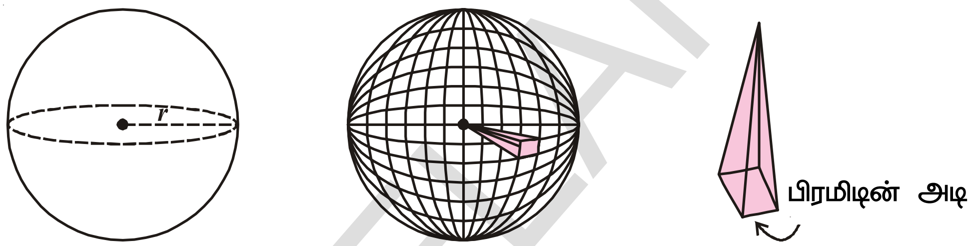
(iii) (i) மற்றும் (ii)ல் பெற்ற பரப்பளவுகளின் விகிதம் ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.

2. பின்வரும் படங்களின் மொத்தப்பரப்பை கண்டுபிடி.



10.5.3 கோளத்தின் கனஅளவு :

கோளத்தின் கனஅளவைக் காண, அதிக எண்ணிக்கையிலான வடிவொத்த பிரமிடுகளின் உச்சிகள் அனைத்தும் ஒரே மையத்தில் இணைந்து கோளம் உருவானது என்று கற்பனை செய்துகொள்.



(i) (ii) (iii)

பின்வரும் படிகளை பின்பற்றுவோம் :

1. படம் (i)ல் திண்ம கோளத்தின் ஆரம் 'r' என்க.
2. படம் (ii)ல் காட்டியுள்ளவாறு, ஆரம் 'r' உடைய கோளம் சமமான அளவுள்ள 'n' எண்ணிக்கையாலான பிரமிடுகளால் உருவாக்கப்படுகிறது என நினைத்துக்கொள்.
3. அவற்றில் (பிரமிடின்) ஒரு பகுதியை எடுத்துக்கொள். ஒவ்வொரு பிரமிடும் அடிப்பக்கங்களை கொண்டுள்ளது. மேலும் பிரமிடுகளின் அடிப்பக்கங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே $A_1, A_2, A_3.....$ என்க.

   பிரமிடின் உயரமானது கோளத்தின் ஆரத்திற்கு சமம்.

   எனவே ஒரு பிரமிடின் கனஅளவு $= \frac{1}{3} \times$ அடி பரப்பளவு $\times$ உயரம்

   $= A_1 r$

4. 'n' பிரமிடுகள் உள்ளதால்

   'n' பிரமிடுகளின் கனஅளவு$= \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + ...$ n முறைகள்

$$= \frac{1}{3} r\,[A_1 + A_2 + A_3 + ... n \text{ முறைகள்}]$$

$$= \frac{1}{3} \times A\,r$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$ n முறைகள்
= 'n' பிரமிடுகளின் புறப்பரப்பளவுகள்

5. அனைத்து பிரமிடுகளின் கனஅளவுகளின் கூடுதல், கோளத்தின் கனஅளவிற்கு சமம், மேலும் பிரமிடுகளின் அனைத்து அடிப்பக்கங்களின் பரப்பளவு, கோளத்தின் வளைபரப்பிற்கு மிகவும் அருகில் இருக்கும். (i.e. $4\pi r^2$).

எனவே கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{1}{3}(4\pi r^2)\,r$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ கனஅளவுகள்

கோளத்தின் கனஅளவு = $\frac{4}{3}\pi r^3$

இங்கு 'r' என்பது கோளத்தின் ஆரம்.

அரைக்கோளத்தின் கனஅளவை நீ எவ்வாறு காண்பாய்? இது கோளததின் கனஅளவில் பாதி.

∴ அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு = $\frac{1}{2}$ கோளத்தின் கனஅளவு

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$

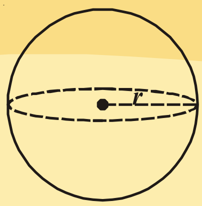
$= \frac{2}{3}\pi r^3$ க.அ

குறிப்பு : தர்பூசணி அல்லது அவ்வடிவில் உள்ளவற்றை பயன்படுத்தி மேற்கண்ட சூத்திரங்களை வருவிக்க நீங்கள் கூட முயற்சி செய்யலாம்.

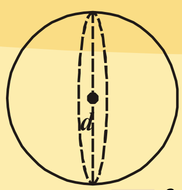
இதை செய்

1. படத்திலுள்ள கோளங்களின் கன அளவை கண்டுபிடி.

2. 6.3செ.மீ ஆரம் கொண்ட கோளத்தின் கனஅளவை கண்டுபிடி.



$r = 3$ செ.மீ



$d = 5.4$ செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 10: கோளத்தின் வளைபரப்பு 154 செ.மீ^{2} எனில் அதன் ஆரத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : கோளத்தின் வளைபரப்பு = $4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

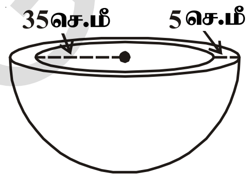
$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ செ.மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு 11: கல்லால் ஆன ஒரு அரைக்கோள வடிவ கிண்ணத்தின் தடிமண் 5செ.மீ. அதன் உள் ஆரம் 35செ.மீ எனில் அந்த கிண்ணத்தின் மொத்த புறப்பரப்பை கண்டுபிடி.

தீர்வு : வெளிஆரம் 'R' உள்ஆரம் 'r'உடைய வளையத்தின் தடிமண் = 5செ.மீ

∴ $R = (r + 5)$செ.மீ $= (35 + 5)$ செ.மீ $= 40$ செ.மீ

மொத்தப்புறப்பரப்பளவு = வெளிஅரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு + உள்அரைக்கோளத்தின் பரப்பளவு+வட்டவளையத்தின் பரப்பளவு



$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7}(3R^2 + r^2) = \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2) \text{ செ.மீ}^2$$

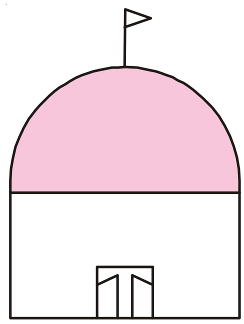
$$= \frac{6025 \times 22}{7} \text{ செ.மீ}^2$$

$= 18935.71$ செ.மீ^{2} (தோராயமாக).

எடுத்துக்காட்டு 12: படம் (1)ல் காட்டியவாறு ஒரு கட்டிடத்தின் அரைகோளவடிவ வளையத்திற்கு வர்ணம் பூசவேண்டும். வளையத்தின் அடிச்சுற்றளவு 17.6மீ எனில் 100செ.மீ^{2}க்கு வர்ணம் பூச ₹5 வீதம் அந்த வளைதளத்திற்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவை கண்டுபிடி.

தீர்வு : அரைகோளத்தின் வளைந்த பகுதிக்கு மட்டும் வர்ணம் பூசப்படுகிறது. எனவே அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பை கண்டுபிடிப்பதன் மூலம் வர்ணம் பூசவேண்டிய பகுதியை நாம் கண்டறியலாம்.

வளைதளத்தின் அடிச்சுற்றளவு = 17.6மீ எனவே 17.6 = $2\pi r$



படம் 1

வளைதளத்தின் ஆரம் $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ மீ

= 2.8 மீ

வளைதளத்தின் மண்டபத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ மீ}^2$$

= 49.28 மீ^{2}.

100 செ.மீ^{2} வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு = ₹ 5

1மீ^{2} வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு = ₹500

∴ வளைதளம் முழுவதும் வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு

= ₹500 × 49.28

= ₹ 24640.

எடுத்துக்காட்டு 13: 7மீ விட்டமுள்ள ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உட்புறமாக ஒரு சர்க்கஸ் வீரர் மோட்டார் சைக்கிளில் சாகசம் செய்கிறார். அந்த சாகசவீரர் சாகசம் செய்யக்கிடைத்திடும் உள்ளீடற்றக்கோளத்தின் உட்புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : கோளத்தின் விட்டம் = 7மீ. எனவே ஆரம் 3.5மீ. மோட்டார் சைக்கில் ஒருதளமானது கோளத்தின் வளைபரப்பு ஆகும்.

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ மீ}^2$$

$$= 154 \text{ மீ}^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 14: கோளவடிவில் உள்ள உலோக எறிகுண்டின் ஆரம் 4.9செ.மீ உலோகத்தின் அடர்த்தி 7.8கி/செ.மீ^{3} எனில் அந்த எறிகுண்டின் நிறையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : எறிகுண்டானது உலோகத்தால் ஆன திண்ம கோளம். மேலும் இதன் நிறையானது அதனுடைய கனஅளவு மற்றும் அடர்த்தியின் பெருக்கற்பலனுக்கு சமம். நாம் இப்பொழுது கோளத்தின் கனஅளவை காண வேண்டியது அவசியம்.

இப்பொழுது, கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ செ.மீ}^3$$

$$= 493 \text{ செ.மீ}^3 \text{ (தோராயமாக)}$$

1செ.மீ^{3} உலோகத்தின் நிறை 7.8கிராம்.

எனவே எறிகுண்டின் நிறை $= 7.8 \times 493$ கி

$= 3845.44$கி $= 3.85$ கி.கி. (அருகில்)

எடுத்துக்காட்டு 15: ஓர் அரைக்கோள வடிவ கிண்ணத்தின் ஆரம் 3.5செ.மீ அவற்றுள் நிரப்பப்படும் நீரின் கனஅளவு என்ன?

தீர்வு : கிண்ணத்தில் நிரப்பப்படும் நீரின் கனஅளவு = அரைக்கோணத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ செ.மீ}^3$$

$$= 89.8 \text{ செ.மீ}^3. \text{ (தோராயமாக)}$$

பயிற்சி - 10.4

1. கோளத்தின் ஆரம் 3.5செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பு மற்றும் கனஅளவு கண்டுபிடி.
2. கோளத்தின் வளைபரப்பு $1018\frac{2}{7}$ செ.மீ. அதனுடைய கனஅளவு என்ன?
3. உலக உருண்டையில் பூமத்திய ரேகையின் நீளம் 44செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பை கண்டுபிடி.
4. ஒரு கோள வடிவபந்தின் விட்டம் 21செ.மீ. அவ்வகையான 5 பந்துகள் தயாரிக்க எவ்வளவு தோல் தேவைப்படும்?
5. இரண்டு கோளங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் 2:3 எனில் அவற்றின் வளைபரப்பு மற்றும் கனஅளவுகளின் விகிதத்தை கண்டுபிடி.
6. 10செ.மீ ஆரம் கொண்ட அரை கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பை கண்டுபிடி.
7. கோளவடிவ பலூனை காற்றால் நிரப்பப்படும் போது அதனுடைய விட்டம் 14செ.மீ ல் இருந்து 28செ.மீ ஆக உயருகிறது. எனில் இரண்டு நிலைகளிலும் பலூனின் வளைபரப்புகளின் விகிதத்தை கண்டுபிடி.
8. ஓர் அரைக்கோள வடிவ பித்தளை கிண்ணத்தின் தடிமன் 0.25செ.மீ. அதன் உட்புற ஆரம் 5செ.மீ எனில் அக்கிண்ணத்தின் வெளிப்புற வளைபரப்பு மற்றும் உட்புற வளைபரப்புகளின் விகிதத்தை கண்டுபிடி.
9. ஓர் ஈயப்பந்தின் விட்டம் 2.1செ.மீ. அதனுடைய அடர்த்தி 11.34 g/c^3 எனில் ஈயத்தின் எடை எவ்வளவு?
10. 5செ.மீ விட்டமும், $3\frac{1}{3}$ செ.மீ உயரமும் கொண்ட உருளைவடிவ உலோகமானது உருக்கப்பட்டு கோளமாக்கப்படுகிறது. அதன் விட்டம் என்ன?
11. 10.5செ.மீ விட்டம் கொண்ட ஒரு அரைக்கோள கிண்ணத்தில் எவ்வளவு பால் பிடிக்கும்?
12. 9செ.மீ விட்டம் கொண்ட கோளவடிவ கிண்ணம் நிறைய திரவம் உள்ளது. அதனை 3செ.மீ விட்டமும், 3செ.மீ உயரமும் உள்ள புட்டிகளில் நிரப்பினால், முழுவதும் நிரப்ப எத்தனை புட்டிகள் தேவைப்படும்?

நாம் கற்றவை

1. கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரம் போன்றவை ஆறுபக்கங்களை கொண்ட நேர் பட்டகங்கள். அவற்றில் நான்கு புறப்பக்கங்கள் மேலும் ஒரு அடி மற்றும் ஒரு மேல்பாகம் ஆகும்.
2. கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் l, அகலம் 'b' உயரம் 'h' எனில்

   கனச்செவ்வகத்தின் மொத்த புறப்பரப்பளவு = $2(lb + bh + lh)$

   கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பளவு = $2h(l + b)$

   கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = lbh

3. கனச்சதுரத்தின் விளிம்பின் நீளம் 'l' அலகுகள் எனில்
கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு = $6l^2$ ச.அ
கனச்சதுரத்தின் புறப்பரப்பளவு = $4l^2$ ச.அ
கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு = l^3 க.அ

4. பிரமிடின் கனஅளவு, அதே அளவு சமமான அடிபாகம் மற்றும் சமமான உயரம் கொண்ட நேர்வட்ட பட்டகத்தின் கனஅளவில் $\frac{1}{3}$ பாகம்.

5. ஓர் உருளையானது இரண்டு வட்டப்பகுதிகளுடன் கூடிய வளைபரப்பை பெற்றிருக்கும் ஒரு திண்மப்பொருள். வட்டப்பகுதிகளின் மையத்தை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு அதன் அடிக்கு செங்குத்தாக இருக்கிறது எனில் அவ்வகையான உருளை நேர்வட்டஉருளை எனப்படும்.

6. ஒரு நேர்வடட உருளையின் ஆரம் 'r' மற்றும் உயரம் 'h' எனில்
   - உருளையின் வளைபரப்பு = $2\pi rh$ ச.அ
   - உருளையின் மொத்தப்பரப்பு = $2\pi r(r+h)$ ச.அ
   - உருளையின் கனஅளவு = $\pi r^2 h$ க.அ

7. ஒரு வட்டவடிவ அடிபாகத்தையும், மேல் பாகத்தில் உச்சியையும் கொண்ட ஒரு வடிவியல் வடிவம் கூம்பு எனப்படும். கூம்பின் உச்சியையும் அடிபாகத்தின் மையப்புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோட்டுத்துண்டு அடிக்கு செங்குத்தானால் அது நேர்வட்ட கூம்பு எனப்படும்.

8. வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்தால் அந்த ஆரத்தை கூம்பின் சாயுயரம் (l) என்பர்.

$$l^2 = h^2 + r^2$$

9. ஒரு கூம்பின் ஆரம் 'r' உயரம் 'h' சாயுயரம் 'l' எனில்
   - கூம்பின் வளைபரப்பு = πrl ச.அ
   - கூம்பின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு = $\pi r(r+l)$ ச.அ

10. கூம்பின் கனஅளவு சமமான ஆரம் மற்றும் சமமான உயரம் கொண்ட உருளையின் கனஅளவில் $\frac{1}{3}$ பாகம்.
அதாவது கூம்பின் கனஅளவு = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ க.அ

11. ஒரு தளத்தின் நிலையான புள்ளிகள் இருந்து சமமான தூரத்தில் இருக்கும். புள்ளிகளின் தொகுப்பைக் கொண்ட ஒரு வடிவியல் பொருள் கோளம். அந்த நிலையான புள்ளி கோளத்தின் மையம் என்றும், சமமான தூரத்தை கோளத்தின் ஆரம் என்றும் அழைக்கப்படும்.

12. கோளத்தின் ஆரம் ‘r’ எனில்

- கோளத்தின் வளைபரப்பு = $4\pi r^2$ ச.அ.
- கோளத்தின் கனஅளவு = $\frac{4}{3}\pi r^3$ க.அ.

13. கோளத்தின் மையம் வழியாக செல்லும் ஒருதளம், அதனை இருசமமான பாகங்களாக பிரிக்கும். அவை ஒவ்வொன்றையும் அரைக்கோளம் எனப்படும்.

- அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு = $2\pi r^2$ ச.அ.
- அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பளவு = $3\pi r^2$ச.அ.
- அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு = $\frac{2}{3}\pi r^3$க.அ.

உனக்கு தெரியுமா?

8 × 8 ஆல் உருவாகும் மாய சதுரம்

சதுரக்கட்டங்களில் 1 முதல் 64 வரை உள்ள எண்களை வரிசையாக இடதுபுறம் காட்டியுள்ளவாறு எழுதவும். மூலைவிட்டங்களை இணைக்குமாறு கோடுகள் வரையவும். மாயாஜால சதுரம் ஏற்படுவதற்கு இந்த மூலைவிட்டங்களின் மீதுள்ள எண்களை அவற்றின் நிரப்பிகளுடன் படம் (ii)ல் காட்டியபடி முன்பின் மாற்றவும். மிகச்சிறிய, மிகப்பெரிய எண்களின் மொத்தங்கள் சமமான உள்ள இரண்டு எண்கள் மாயாஜால சதுரத்தில் நிரப்பிகள் எனப்படும்.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

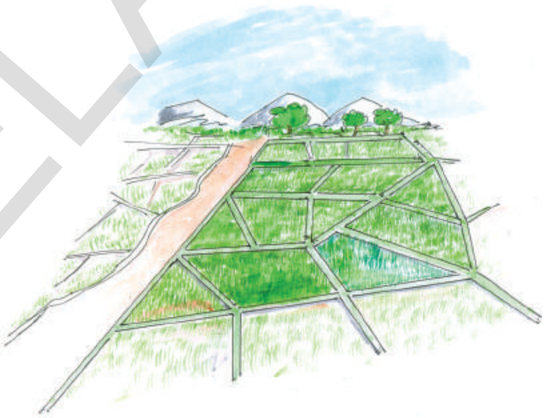
* மாயசதுரம் என்பது சதுரஅமைப்பில் அமைக்கப்பட்ட எண் அமைப்பாகும். இங்கு எந்த நிரை, நிரலின் மொத்தமும் ஒரே மதிப்பாக இருக்கும். இதுபோன்று மேலும் சில மாயசதுரங்களை நீங்களும் தயாரிக்க முயலுங்கள்.

11 பரப்பளவுகள்

11.1 அறிமுகம்

உன்னுடைய கிராமம் அல்லது நகரத்தில் விவசாய நிலங்களை பார்த்திருக்கிறாயா? அந்த நிலமானது பல விவசாயிகளுக்கு சொந்தமானதாக இருக்கும். மேலும் அவை அதிக பாகங்களாக பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். அந்த நிலங்கள் அனைத்தும் ஒரே வடிவம் மற்றும் ஒரே அளவை கொண்டுள்ளனவா? ஒரே பரப்பளவை கொண்டுள்ளதா? இந்த நிலங்களை மேலும் பல பகுதிகளாக பிரிக்க வேண்டும் எனில் அவர்கள் எவ்வாறு பிரிப்பர்? அவர்களுக்கு சமமான பரப்பளவு உடைய நிலம் வேண்டும் எனில் என்ன செய்ய வேண்டும்?

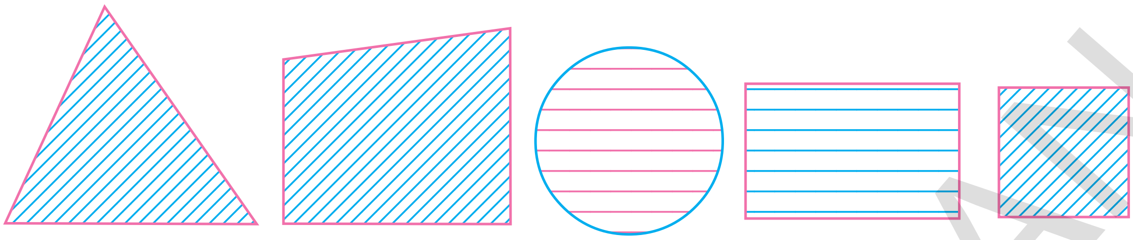
ஒரு நிலத்தில் எத்தனை விதைகள் விதைக்க வேண்டும்? எவ்வளவு உரமிட வேண்டும்? என விவசாயிக்கு எவ்வாறு தெரிகிறது. நிலத்தின் பரபப்ளவிற்கும் இதற்கும் ஏதாவது தொடர்பு உள்ளதா?



சமீப காலத்தில் வடிவியல் கற்பிக்க ஆரம்பித்ததின் முக்கிய நோக்கம் விவசாய அமைப்புகள் குறித்து தெரிந்து கொள்ளுதல் ஆகும். இவற்றில் நிலத்தை அளவிடுதல், அவற்றை பல பாகங்களாக பிரித்தல், எல்லைகளை நமக்கு தேவையான அளவில் மாற்றி அமைத்தல் போன்றவைகள் அடங்கும். பண்டைய காலத்தில் நைல் நதி (எகிப்து) யின் வெள்ளம் பாயும் நிலங்களின் எல்லைகள் சிதறிவிட்டது. பின்னர் அதை சரியாக அமைத்தனர். சில நிலங்கள் சதுரம், செவ்வகம், சரிவகம், இணைகரம் போன்ற அடிப்படை வடிவங்களை ஒத்திருக்கும். மற்றும் சில ஒழுங்கற்ற வடிவிலும் இருக்கும். அடிப்படை வடிவங்கள் கொண்டவற்றை அவற்றின் நீளங்கள் மற்றும் அளவுகளை கொண்டு பரப்பளவை கண்டுபிடிக்கும் விதிகளை நாம் உருவாக்குவோம். இவ்வாறான சிலவற்றை இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கற்போம். சூத்திரங்களை பயன்படுத்தி எவ்வாறு முக்கோணங்கள், சதுரங்கள், செவ்வகங்கள் மேலும் நாற்கரங்களின் பரப்பளவை கணக்கிடுவது என்பதை நாம் பார்ப்போம். சூத்திரங்களின் அடிப்படைகளையும் நாம் பரிசோதிப்போம். அவற்றை எவ்வாறு வருவித்தல்? பரப்பளவு என்றால் என்ன? என்பதை பற்றி நாம் கலந்தாலோசிப்போம்.

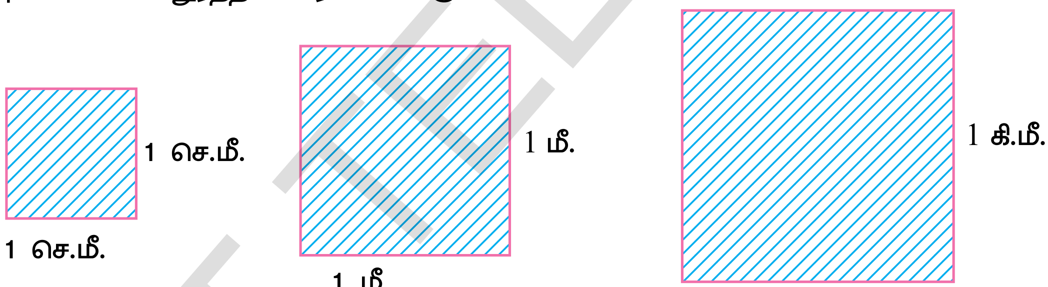
11.2 சமதள பரப்பு பகுதிகளின் பரப்பளவு

ஒரு சமதளத்தில் ஒரு சிறிய மூடிய படத்தில் அடைத்துக் கொள்ளப்படும் பகுதி சமதள பரப்பு பகுதி என்பதையும் அவற்றிற்கு தொடர்புடைய படங்களையும் நினைவு கூறுவோம். சமதள பரப்பு பகுதிகளின் பரப்பளவு என்பது அதனுடைய அளவு (அ) எண் அளவு ஆகும்.



ஒரு சமதள பரப்பு பகுதி என்பது அவற்றின் எல்லைகள் மற்றும் உட்புறம் ஆகியவற்றின் சேர்ப்பு ஆகும். இதன் பரப்பளவை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது? இப்பகுதியின் அளவுகளை (பரப்பளவு) அதாவது 10 செ.மீ.^{2}, 215 செ.மீ.^{2}, 2 செ.மீ.^{2} 3 ஹெக்டார்கள் போன்ற மிகை மெய் எண்ணால் குறிப்பிடுகிறோம். ஆகவே ஒரு படத்தின் பரப்பளவு (சில பரப்பளவு அலகு) என்பது மூடிய படத்தின் பகுதிகளோடு தொடர்புடைய ஒரு எண்ணாக இருக்கும்.

ஒரு சதுர அலகு பரப்பளவு என்பது ஓர் அலகு பக்க நீளம் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு ஆகும். சதுர சென்டி மீட்டர் (அ) (1செ.மீ^{2}) பரப்பளவு என்பது 1 செ.மீ. பக்க அளவு கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவாகும்.



பரப்பளவு = 1ச.செ.மீ.

பரப்பளவு = 1 ச.மீ.

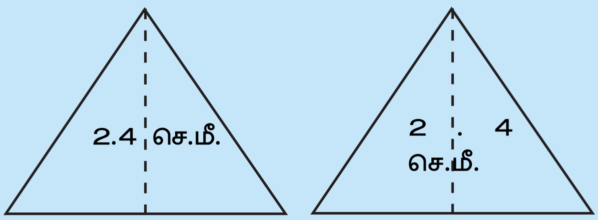
பரப்பளவு = 1 ச.கி.மீ.

இவ்வாறாகவே 1 சதுர மீட்டர் (1மீ^{2}), சதுர கிலோ மீட்டர் (1கி.மீ.^{2}), சதுர மில்லி மீட்டர் (1மி.மீ^{2}) என புரிந்து கொள்ள வேண்டும். சர்வசம கருத்தை நாம் கீழ் வகுப்புகளில் பார்த்திருக்கிறோம். இரண்டு படங்கள் ஒரே வடிவம் மற்றும் ஒர அளவு கொண்டிருந்தால் அவற்றை சர்வ சமம் என்பர்.

செயல்பாடு

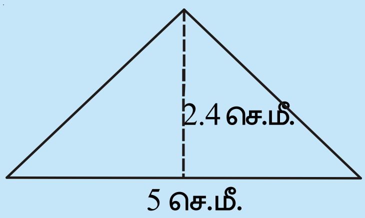
படம் I மற்றும் II ஐ கவனி. இரண்டின் பரப்பளவுகளை கண்டுபிடி. பரப்பளவுகள் சமமா?

இந்த படங்களை ஒரு காகிதத்தின் மீது வரைந்து, வெட்டி எடு. படம் I ஐ படம் II ன் மேல் வை. அவை ஒன்றோடு ஒன்று முழுவதும் பொருந்துகிறதா? அவைகள் சர்வசமமா?

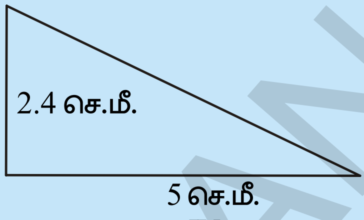


படம். III , IVஐ கவனி. இவை இரண்டின் பரப்பளவுகளை கண்டுபிடி. நீ கவனித்தது என்ன?

இவை இரண்டும் சர்வசமமா?

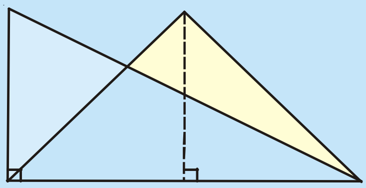


III



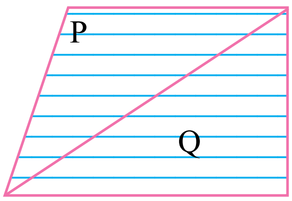
IV

இப்பொழுது இரண்டு படங்களை ஒரு காகிதத்தின் மீது வரைந்து கத்தரித்து எடு. பின்னர் படம் III ஐ படம் IVன் மீது அவற்றின் அடிப்பக்கங்கள் ஒன்றோடொன்று பொருந்துமாறு வை.

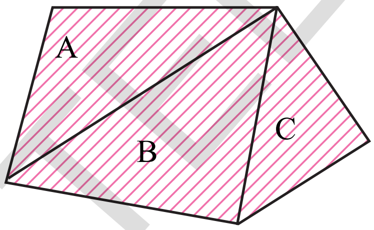

V

படம் V ல் காட்டியவாறு அவை ஒன்றோடொன்று முழுவதுமாக பொருந்துகிறதா? எனவே படம் I மற்றும் II சர்வசமம் மேலும் சமான பரப்புகள் உடையவை. ஆனால் படம் III மற்றும் IV சமான பரப்புகளை கொண்டவை. ஆயினும் அவை சர்வசமம் அல்ல.

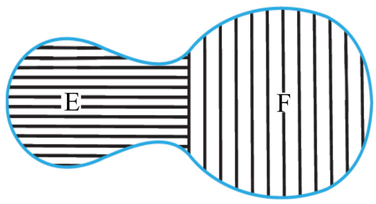
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களை கவனி.



X



Y



Z

சமதள படங்கள் X, Y மேலும் Z ஆகியவை இரண்டு அல்லது அதைவிட அதிகமான சமதள படங்களால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

X படத்தின் பரப்பளவு = P படத்தின் பரப்பளவு + Q படத்தின் பரப்பளவு

இவ்வாறே, Y படத்தின் பரப்பளவு = (A) ன் பரப்பளவு + (B)ன் பரப்பளவு +(C)ன் பரப்பளவு

(Z) ன் பரப்பளவு = (E)ன் பரப்பளவு + (F)ன் பரப்பளவு.

எனவே படத்தின் பரப்பளவு என்பது ஓர் எண். இது படத்தின் ஒவ்வொரு பகுதியோடும் தொடர்புடையது. இதிலிருந்து பின்வரும் பண்புகளை கூறலாம்.

(குறிப்பு : X படத்தின் பரப்பளவை சுருக்கமாக நாம் ar(X) என பயன்படுத்துவோம்**)**

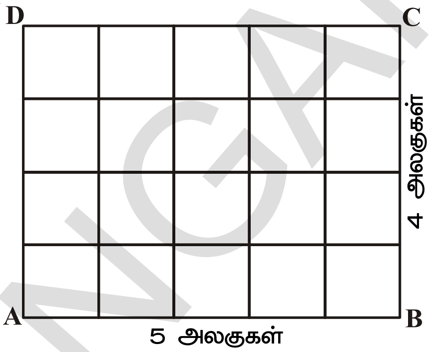
(i) இரண்டு சர்வசம படங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

A,B இரண்டு சர்வசம படங்கள் எனில் ar(A) = ar(B)

(ii) ஒரு படத்தின் பரப்பளவு என்பது அந்த படத்தில் உள்ள அனைத்து பகுதிகளின் பரப்பளவின் கூடுதல் ஆகும்.
சமதள படம் X ஆனது P,Q என்ற இரண்டு படங்களின் சேர்க்கையால் உருவானது.
எனவே படம் X ன் பரப்பளவு = Pன் பரப்பளவு + Qன் பரப்பளவு

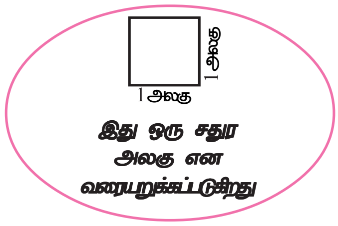
11.3 செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தினுடைய சதுர அலகுகளின் எண்ணிக்கையின் அளவை அதன் அகலத்தினுடைய சதுர அலகு எண்ணிக்கையின் அளவோடு பெருக்கினால் நாம்பெறும் சதுர அலகுகளின் எண்ணிக்கையே அச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவு ஆகும்.



ABCD எனும் செவ்வகத்தின் நீளம் $\overline{AB}$ 5 அலகுகள் மேலும் அகலம் $\overline{BC}$ 4 அலகுகள் என்க.

$\overline{AB}$ ஐ 5 சம பாகங்களாக பிரி மேலும் $\overline{BC}$ ஐ 4 சம பாகங்களாக பிரித்து நீள, அகலங்களுக்கு இணையாக கோடுகளை வரை. இந்த செவ்வகத்தின் ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு சதுர அலகு ஆகும். (ஏன்?)



எனவே செவ்வகத்தில் (5அலகுகள் $\times$ 4 அலகுகள்) உள்ளன.

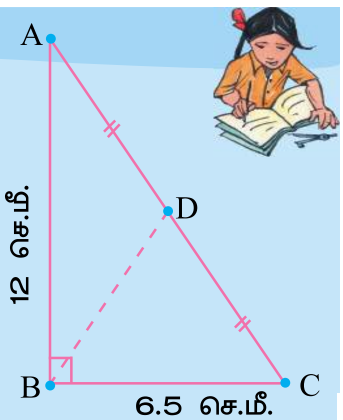
இவ்வாறே ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் 'a' அலகுகள் மற்றும் அகலம் 'b' அலகுகள் எனில் அச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 'ab' சதுர அலகுகள் ஆகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்பது அதன் நீளம்$\times$ அகலம் சதுர அலகுகள் ஆகும்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

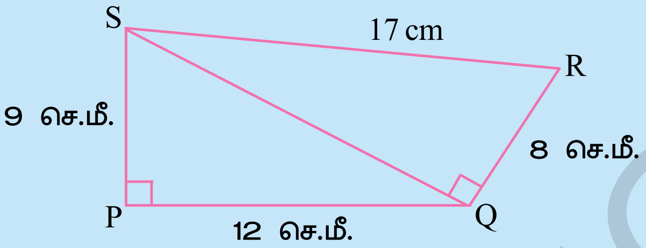
1. 1 செ.மீ. அளவை 5மீ என குறிப்பிட்டால், 6 செ.மீ.பரப்பளவு எதை காட்டுகிறது.
2. 1 ச.மீ. = 100^2 ச.செ.மீ. என ரஜினி கூறினார். இதை நீ ஏற்றுக் கொள்கிறாயா? விவரி.

பயிற்சி : 11.1

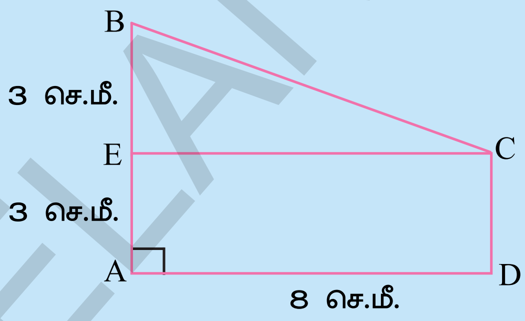
1. ΔABCல், $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = DC$, $AB = 12$ செ.மீ. மேலும் $BC = 6.5$ செ.மீ. எனில் ΔADBன் பரப்பளவை கண்டுபிடி.



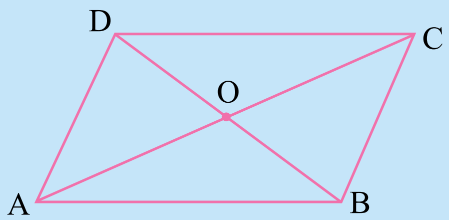
2. PQRS நாற்கரத்தில் $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, PQ = 12 செ.மீ. PS = 9 செ.மீ., QR = 8 செ.மீ. மேலும் SR = 17 செ.மீ. எனில் நாற்கரத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி. (குறிப்பு: PQRS ல் இரண்டு பகுதிகள் உள்ளன)



3. கீழ்கண்ட படத்தில் ADCE ஒரு செவ்வகம் எனில் சரிவகம் ABCD யின் பரப்பளவை கண்டுபிடி (குறிப்பு : ABCD ல் இரண்டு பகுதிகள் உள்ளன)



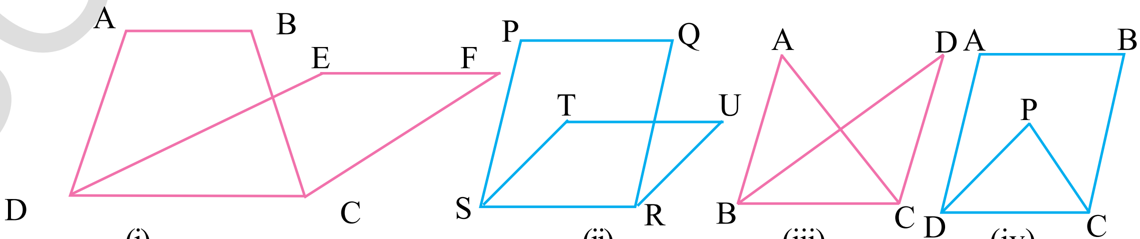
4. ABCD ஓர் இணைகரம் ‘O’ எனும் புள்ளியில் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. எனில், ar(ΔAOD) = ar(ΔBOC) என நிரூபி. (குறிப்பு : சர்வசம படங்கள் சமமான பரப்பளவை கொண்டிருக்கும்)



11.4 ஒரே அடிப்பக்கம் மற்றும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள படங்கள்

நாம் இப்பொழுது ஒரே அடிப்பக்கம் மீதும் மற்றும் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையிலும் உள்ள வடிவியல் படங்கள் சிலவற்றின் பரப்பளவு மற்றும் அவற்றிற்கிடையே உள்ள உறவுகள் குறித்து கற்போம். இது சில முக்கோணங்களுக்கிடையே உள்ள ஒப்புமைகளை நாம் புரிந்து கொள்வதற்கு மிகவும் பயனுள்ளதாக அமையும்.

பின்வரும் படங்களை கவனி.

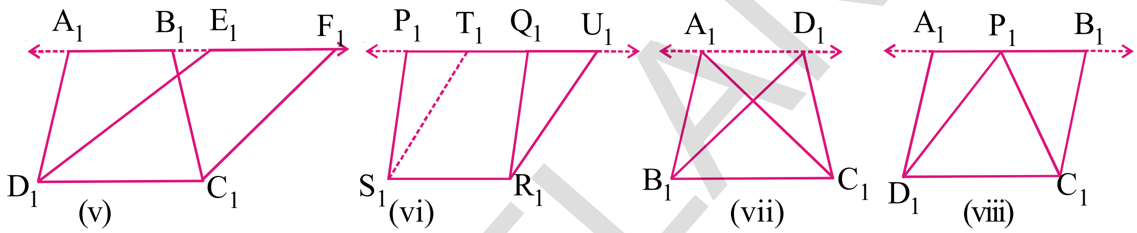


(i) (ii) (iii) (iv)

படம்(i) ல் சரிவகம் ABCD மற்றும் இணைகரம் EFCD பொதுவான பக்கம் CDஐ பெற்றுள்ளது. சரிவகம் ABCD யும் இணைகரம் EFCD யும் ஒரே அடிப்பக்கம் CDன் மேல் அமைந்துள்ளது என நாம் கூறலாம்.

இவ்வாறே படம் (ii)ல் இணைகரம் PQRS மற்றும் இணைகரம் TURS ன் அடிப்பக்கம் ஒன்றே. படம் (iii) ல் முக்கோணம் ABC மற்றும் முக்கோணம் DBC ஒரே அடிப்பக்கம் BCஐ கொண்டுள்ளது. படம் (iv) ல் இணைகரம் ABCD மற்றும் முக்கோணம் PCD யும் DC ன் மீது உள்ளன. இந்த படங்கள் அனைத்தும் ஒரே அடிப்பக்கம் கொண்டுள்ள வடிவியல் வடிவங்கள் ஆகும். ஆனால் இவை அனைத்தும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையில் இல்லை. ஏனெனில் AB, EF மேல் அமையவில்லை. மேலும் PQ, TU மேல் அமையவில்லை. மேலும் A, B, E, F புள்ளிகள் P, Q, T, U. புள்ளிகள் நேர்க்கோட்டில் அமையவில்லை. படம் (iii) மற்றும் படம் (iv)ஐ பற்றி நீ என்ன கூறுகிறாய்?

இப்பொழுது பின்வரும் படங்களை கவனி.



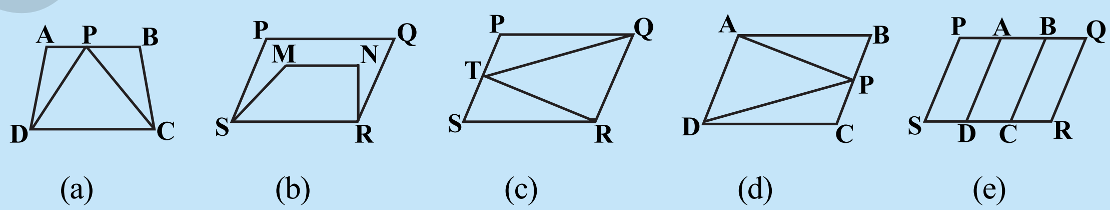
இந்த படங்களில் நீ என்ன வேறுபாட்டை காண்கிறாய்? படம் (v)ல் சரிவகம் $A_1B_1C_1D_1$ மற்றும் இணைகரம் $E_1F_1C_1D_1$ முதலியன ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக்கோடுகள் A_1F_1 மற்றும் D_1C_1க்கு இடையில் உள்ளன. A_1, B_1, E_1, F_1 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன. மேலும் $A_1F_1 \parallel D_1C_1$இதை போலவே படம் (vi) ல் இணைகரங்கள் $P_1Q_1R_1S_1$ மற்றும் $T_1U_1R_1S_1$ ஆகியன S_1R_1 என்ற ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும், மேலும் இணைகோடுகள் P_1U_1 மற்றும் S_1R_1க்கு இடையிலும் உள்ளன. படம்(vii) மற்றும் படம்(viii) போன்றவற்றின் அடிப்பக்கங்களையும், இணைபக்கங்களையும் கண்டுபிடி?

இரண்டு படங்கள் பொதுவான அடிப்பக்கம் பெற்றும், பொது அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள உச்சிகள் அனைத்தும் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் மீது அமைந்தால், அவற்றை ஒரே அடியின் மீதும், ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையிலும் உள்ள படங்கள் எனக் கூறலாம்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

பின்வரும் படங்களில் எவை ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக் கோட்டிற்கு இடையிலும் உள்ளன.?

அவற்றின் பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும், இரண்டு இணைக் கோடுகளையும் எழுதுக.

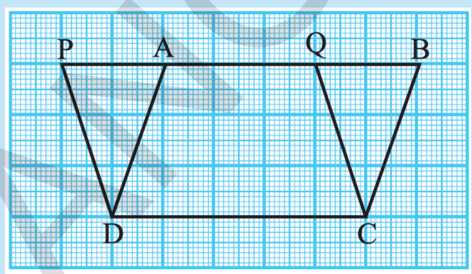


11.5 ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையிலும் அமைந்த இணைகரங்கள்

நாம் இப்போழுது ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையிலும் அமைந்த இரண்டு இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை காண முயற்சி செய்வோம். இதை காண கீழ்கண்ட செயலை செய்வோம்.

செயல்பாடு

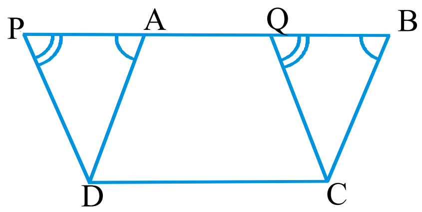
ஒரு வரைப்பட தாளை எடுத்துக்கொண்டு இரண்டு இணைகரங்கள் ABCD மற்றும் PQCD படத்தில் காட்டியவாறு வரை.



இந்த இணைகரங்கள் ஒரே அடிப்பக்கம் DC மற்றும் இணைக்கோடுகள் PB மற்றும் DC க்கு இடையில் உள்ளன. DC, QA பகுதி இரண்டு இணைகரங்களுக்கும் பொதுவானது. எனவே நாம் இப்பொழுது ΔDAP மற்றும் ΔCBQ ஒரே பரப்பளவை கொண்டுள்ளது என காட்டினால் பரப்பளவு (PQCD) = பரப்பளவு (ABCD) எனக் கூறலாம்.

தேற்றம் 11.1 : ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைகோடுகளுக்கு இடையிலும் அமையும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

நிரூபணம் : ஒரே அடிப்பக்கம் ABCD மற்றும் PQCD எனும் இரண்டு இணைகரங்கள் ஒரே அடிப்பக்கம் DC ன் மீதும் ஒரே இணைகோடுகள் DC மற்றும் PBக்கு இடையிலும் உள்ளது என்க.



ΔDAP மற்றும் ΔCBQல்

$PD \parallel CQ$ மற்றும் PB குறுக்குவெட்டி ஆகும்.

$\angle DPA = \angle CQB$

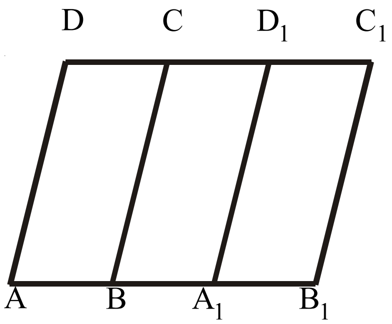
மேலும் $AD \parallel CB$ மற்றும் PB ன் குறுக்குவெட்டி ஆகும்.

$\angle DAP = \angle CBQ$

மேலும் PQCD இணைகரமானதால் $PD = QC$ ஆகும்.

ஆகையால் ΔDAP, ΔCBQ ஆகியவை சர்வசம முக்கோணங்கள் ஆகும். மேலும அவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம்.

எனவே $$\text{ar}(PQCD) = \text{ar}(AQCD) + \text{ar}(DAP)$$
$$= \text{ar}(AQCD) + \text{ar}(CBQ) = \text{ar}(ABCD)$$



வரைபடத்தாளின் மீது வரையப்பட்டுள்ள இணைகரத்தினுள் உள்ள சதுரங்களை கணக்கிட்டு விடையை சரிபார்க்கலாம்.

வரைப்படத்தாளில் உள்ள முழு சதுரங்கள், அரை சதுரங்களை விட குறைவானவை, அரை சதுரங்களை விட அதிகமானவற்றை எவ்வாறு கணக்கிடுவாய் என உன்னால் கூற முடியுமா?

ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமமாக இருக்க அவை பொதுவான அடிப்பக்கத்தை கொண்டிருக்க தேவை இல்லை என்று ரேஷ்மா விவாதித்தாள். அவை சமமான அடிப்பக்கத்தை மட்டும் கொண்டிருந்தால் போதும் என்றாள். அவளுடைய கருத்தை புரிந்துகொள்ள அருகில் உள்ள படத்தை பார்.

$AB = A_1B_1$ எனில் $A_1B_1C_1D_1$ இணைகரத்தை வெட்டி எடுத்து ABCD மீது பொருந்தும் படி அமைத்தால், A, A_1 உடனும் B, B_1 உடனும் மேலும் C_1D_1, CD உடனும் பொருந்தும் எனவே இவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம்.

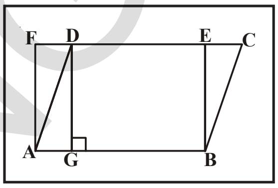
வடிவியல் பண்புகளை கற்பிக்கும் நோக்கத்திற்காக சமமான அடிப்பக்கத்தை கொண்ட இணைகரத்தை ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மேல் அமைந்த இணைகரமாக கருதுகிறோம்.

இப்பொழுது நாம் இந்த தேற்றத்தின் பயன்பாட்டை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ABCD ஓர் இணைகரம் மேலும் ABEF ஒரு செவ்வகம் AB ன் மேல் அமைந்த செங்குத்து கோடு DG.

(i) ar (ABCD) = ar(ABEF)

(ii) ar (ABCD) = AB × DG என நிருவுக.



தீர்வு : (i) செவ்வகம் ஓர் இணைகரம் ஆகும். (பரப்பளவை பொருத்து)

$\therefore$ ar(ABCD) = ar(ABEF) ..... (1)

(இணைகரங்கள் ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையில் அமைந்துள்ளது)

(ii) ar(ABCD) = ar(ABEF) ($\because$ (1) மூலம்)

= AB × BE ($\because$ ABEF ஒரு செவ்வகம்)

= AB × DG ($\because DG \perp AB$ மேலும் DG=BE)

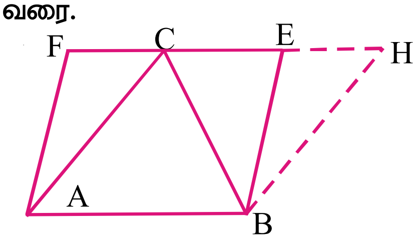
எனவே ar(ABCD) = AB × DG

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து இணைகரத்தின் பரப்பளவு என்பது அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கம் மற்றும் அந்த பக்கத்தின் செங்குத்து உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: முக்கோணம் ABC மற்றும் நாற்கரம் ABEF ஒரே ‹ ன் மேல் உள்ளது. மேலும் AB மற்றும் EF ஒரே இணைக்கோடுகள் எனில்

$$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(|| gm\ ABEF) \text{ என நிரூபி.}$$

தீர்வு : B வழியே FEன் நீட்சியை Hல் வெட்டுமாறு BH || AC வரை.



$\therefore$ ABHC ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

மூலைவிட்டம் இந்த இணைகரத்தை இரு சர்வசமம் முக்கோணங்களாக பிரிகிறது.

$$\therefore\ ar(\Delta ABC) = ar(\Delta BCH)$$

$$= \frac{1}{2} ar\ (|| gm\ ABHC)$$

(இணைகரம் ABHC)

குறிப்பு: || gm என்பது இணைகரத்தின் சுருக்கமாகும்

ஆனால் இணைகரம் ABHC மற்றும் இணைகரம் ABEF ஒரே அடிப்பக்கம் AB ன் மீதும் மற்றும் இணைக்கோடுகள் AB, EF க்கு இடையே உள்ளது.

$\therefore$ ar(இணைகரம் ABHC) = ar(இணைகரம் ABEF)

ஆகையால் $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(|| gm\ ABEF)$

மேற்கண்ட முடிவி-ருந்து ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைகோடுகளுக்கு இடையிலும் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது இணைகரத்தின் பரப்பளவில் பாதியாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு : 3 : 12செ.மீ, 16செ.மீ மூலைவிட்டங்களாக் கொண்ட ஒரு சாய்சதுரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் ஏற்படும் வடிவத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி?

தீர்வு : சாய்சதுரம் ABCDன் பக்கங்களான AB, BC, CD, DAன் மையப்புள்ளிகள் முறையே M,N,O,P என்க. ,இவற்றை இணைப்பதால் ஏற்படும் வடிவம் MNOP ஆகும்.

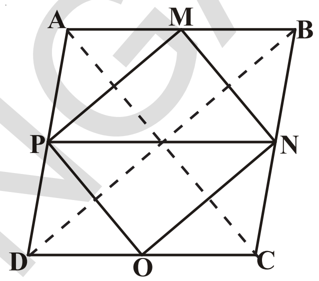
MNOPன் வடிவம் என்ன? காரணம் கூறு.

PNஐ இணைத்தால் PN || AB மற்றும் PN || DC ஆகிறது. (எவ்வாறு?)

ஒரு முக்கோணம் மற்றும் ஒரு இணைகரம் ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையிலும் இருந்தால், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, இணைகரத்தின் பரப்பளவில் பாதி என்று நமக்கு தெரியும்.

கிடைத்த முடிவிலிருந்து, இணைகரம் ABNP ம் மற்றும் முக்கோணம் MNP ம் PN என்ற ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் PN மற்றும் AB என்ற ஒரே இணைகோடுகளுக்கு இடையிலும் இருக்கின்றன.

$\therefore$ ar ΔMNP= $\frac{1}{2}$ ar ABPN .....(i)



இவ்வாறே ar ΔPON = $\frac{1}{2}$ ar PNCD .....(ii)

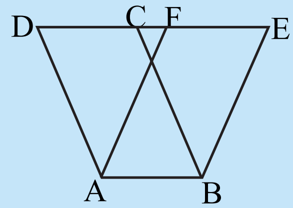
மேலும் சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு = $\frac{1}{2} \times d_1 d_2$

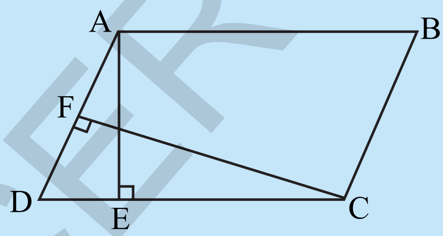
(1), (ii) மற்றும் (iii) ல் இருந்து

$$\begin{aligned} ar(MNOP) &= ar(\Delta MNP) + ar(\Delta PON) \\ &= \frac{1}{2} ar(ABNP) + \frac{1}{2} ar(ABCD) \\ &= \frac{1}{2} ar(\text{சாய்சதுரம் } ABCD) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48 \text{ செ.மீ.}^2 \end{aligned}$$

பயிற்சி : 11.2

1. இணைகரம் ABCD ன் பரப்பளவு 36 செ.மீ.^{2} AB = 4.2 செ.மீ. எனில் இணைகரம் ABEF உயரத்தை கண்டிடுக.

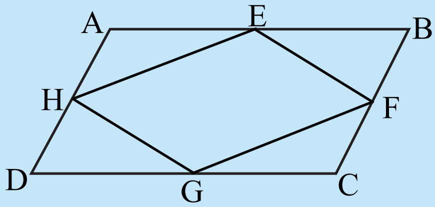




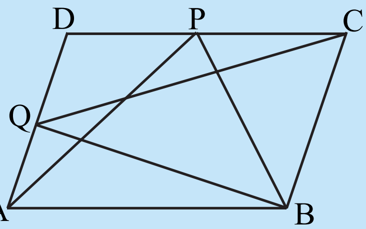
2. இணைகரம் ABCDல் DCன் செங்குத்து AE மற்றும் AD ன் செங்குத்து CF.

   AB = 10 செ.மீ., AE = 8 செ.மீ. மேலும் CF = 12 செ.மீ. ADஐ கண்டுபிடி.

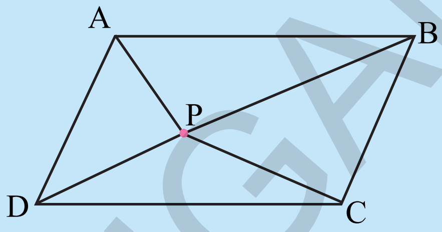
3. இணைகரம் ABCDல் AB, BC, CD மற்றும் AD E, F G மற்றும் H எனில் ar(EFGH) = $\frac{1}{2}$ar(ABCD) எனக்காட்டு.



4. எடுத்துக்காட்டு 3ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN மற்றும் ΔMNB ஐ கத்தரித்து ஒன்று சேர்த்தால் கிடைக்கும் நாற்கரம் எது?



5. இணைகரம் ABCDல் P மற்றும் Q எனும் இருபுள்ளிகள் முறையே DC மற்றும் AD பக்கத்தின் மீது உள்ளது எனில் ar(ΔAPB) = ar Δ(BQC) எனக்காட்டு.



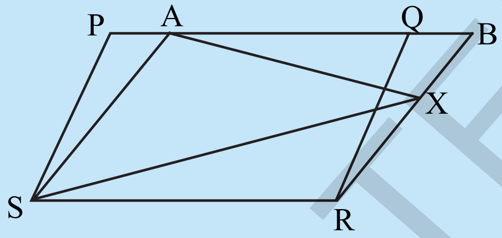
6. இணைகரம் ABCDன் உள்ளே புள்ளி Pஎனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $ar(\Delta APB) + ar(\Delta PCD) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

(ii) $ar(\Delta APD) + ar(\Delta PBC) = ar(\Delta APB) + ar(\Delta PCD)$

(குறிப்பு : Pவழியே ABக்கு இணையாக ஒரு கோடு வரை.)

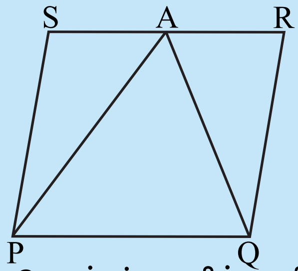
7. ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு இணைகோடுகளின் கூடுதல் மற்றும் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரத்தின் பெருக்கல் பலனில் பாதி என்று நிரூபி.



8. PQRS மற்றும் ABRS ஆகியவை இரண்டு இணைகரங்கள் மேலும் BRன் மீதுள்ள புள்ளி X எனில்

(i) $ar(PQRS) = ar(ABRS)$

(ii) $ar(\Delta AXS) = \frac{1}{2} ar(PQRS)$ எனக்காட்டு.

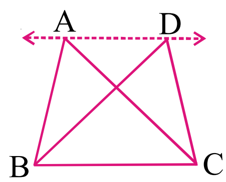


9. ஒரு விவசாயிடம் படத்தில் காட்டியவாறு இணைகரம் PQRS வடிவில் நிலம் உள்ளது. அவர் RS ன் மையப்புள்ளி Aஐ Pமற்றும் Qஉடன் இணைத்தார். இப்பொழுது இந்த நிலமானது எத்தனை பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த பகுதியின் வடிவங்கள் என்ன?

10. சாய் சதுரத்தின் பரப்பளவு அவற்றின் மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற்பலனில் பாதி என நிருவுக.

11.6 ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள முக்கோணங்கள்

ஒரே அடிப்பக்கத்தின மீதும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள படங்களை நாம் பார்த்திருக்கிறோம். இரண்டு முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DBC ஒரே அடிப்பக்கம் BCன் மீதும் ADமற்றும் BCஎன்ற இணைகோடுகளுக்கு இடையே எண்ணற்ற முக்கோணங்களை வரையலாம் எனத் தெளிவாகிறது.



இவ்வகை முக்கோணங்களின் பரப்பளவை குறித்து நீ என்ன கூறுவாய்? ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையே எண்ணற்ற முக்கோணங்களை வரையலாம் எனத் தெளிவாகிறது.

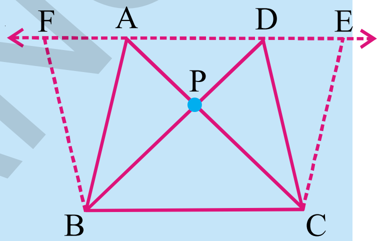
நாம் ஒரு செயலை செய்து பார்ப்போம்

செயல்பாடு

படத்தில் காட்டி உள்ளவாறு ஒரு ஜோடி முக்கோணங்களை ஒரே அடிப்பக்கம் (அல்லது) (சமான அடிப்பக்கம்) மற்றும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ளவாறு வரைப்படத்தில் வரைக.

ஒரே அடிப்பக்கம் BC மீதும் இரண்டு இணைக்கோடுகள் BCமற்றும் ADக்கு இடையிலும் உள்ள இரண்டு முக்கோணங்கள் ΔABC மற்றும் ΔDBC என்க.

AD யை இருபக்கமும் நீட்டி $CE \parallel AB$ மற்றும் $BF \parallel CD$ வரைக. இணைகரம் AECB மற்றும் FDCB ஆகியவை ஒரே அடிபக்கம் BC ன் மீதும் இணைகோடுகள் BC மற்றும் EFக்கு இடையிலும் உள்ளது.



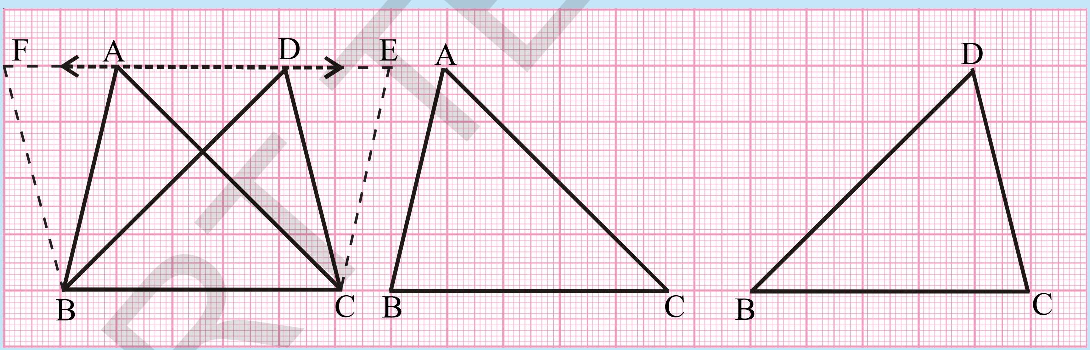
எனவே AECB ன் பரப்பளவு = FDCBன் பரப்பளவு (எவ்வாறு)

இதிலிருந்து ΔABCன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ (இணைகரம் AECB ன் பரப்பளவு) ...(i)

மேலும் (ΔDBC) ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ (இணைகரம் FDCBன் பரப்பளவு).... (ii)

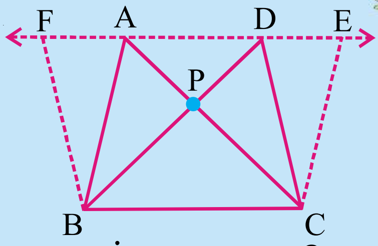
(i), (ii)ல் இருந்து (ΔABC)ன் பரப்பளவு $= (\Delta DBC)$ன் பரப்பளவு என்று பெறுகிறோம்.

நாம் ΔABC மற்றும் ΔDBCன் பரப்பளவை முந்தைய செயலில் செய்தவாறே வரைபடத்தாளில் சதுரங்களை எண்ணி கணக்கிடும் முறையில் பரப்பளவை நீ கணக்கிடலாம். இரண்டு பரப்பளவுகளும் சமமா என சரிபார்.



சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

படத்தில் காட்டியவாறு, ஒரே அடிப்பக்கம் மற்றும் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள இரண்டு முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DBC ஐ வரை. AC, BD வெட்டும் புள்ளியை P எனக்குறி. $CE \parallel BA$ மற்றும் $BF \parallel CD$ஐ AD கோட்டின் நீட்சியின் மீது E மற்றும் F உள்ளவாறு $CE \parallel BA$ மற்றும் $BF \parallel CD$ களை வரைக.



(ΔPAB)ன் பரப்பளவு $= (\Delta PDC)$ ன் பரப்பளவு எனக்கூற முடியுமா?

குறிப்பு : இந்த முக்கோணங்கள் சர்வசமம் அல்ல. ஆனால் சமமான பரப்பளவை கொண்டுள்ளவை.

கிளைத் தேற்றம் 1 : முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, அதன் அடிப்பக்கம் (அல்லது ஏதாவது ஒரு பக்கம்) மற்றும் அதற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு (உயரம்) ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனில் பாதி ஆகும் என நிரூபி.

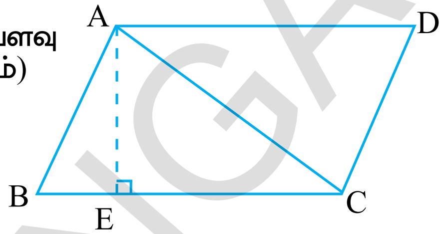
நிரூபணம் : ABC ஒரு முக்கோணம் என்க. CD=BA ஆக இருக்குமாறு $AD \parallel BC$ ஐ வரை.

இப்பொழுது ABCD ஓர் இணைகரம் மேலும் AC அதன் ஒரு மூலைவிட்டம் ஆகும்.

$\Delta ABC \cong \Delta ACD$ என நமக்கு தெரியும்.

எனவே ΔABCன் பரப்பளவு $= \Delta ACD$ ன் பரப்பளவு (சர்வசம முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்)

எனவே ΔABCன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\,ar(ABCD)$



$AE \perp BC$ வரை.

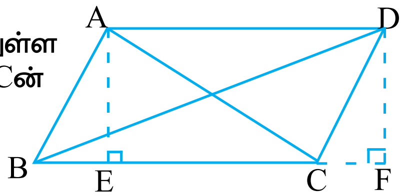
(ABCD)ன் பரப்பளவு $= BC \times AE$ என நமக்கு தெரியும்

(ΔABC)ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\,ar(ABCD)$ ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BC \times AE$

எனவே ΔABCன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BC$ அடிப்பக்கம் $\times$ குத்துயரம் AE.

தேற்றம் 11.2 : இரண்டு முக்கோணங்கள் ஒரே அடிபக்கம் (அல்லது சமான அடிபக்கம்) மற்றும் சமான பரப்பளவுகளை கொண்டிருந்தால், அவை இணைகோடுகளுக்கு இடையே அமையும்.

பின்வரும் படத்தை கவனி அடிபக்கம் BC யின்மீதுள்ள முக்கோணங்களின் பெயரை கூறு. ΔABC மற்றும் ΔDBCன் உயரங்கள் என்ன?



இரண்டு முக்கோணங்கள் சமமான பரப்பளவு மற்றும் சமமான அடிப்பக்கத்தை கொண்டு இருந்தால் அவற்றின் உயரங்கள் என்ன? A மற்றும் D ஒரே கோட்டின் மீது உள்ளதா? இப்போது சில எடுத்துக்காட்டுகளை பரிசீலிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு முக்கோணத்தில் வரையப்படும் மையக்கோடு, அந்த முக்கோணத்தை சமபரப்பளவு உடைய இரண்டு முக்கோணங்களாக பிரிக்கும் எனக்காட்டு.

தீர்வு : முக்கோணம் ABC ன் ஒரு மையக்கோடு ADஎன்க.

ΔABD மற்றும் ΔADC முக்கோணங்களுக்கு முனை பொதுவானது. அதன் அடிபக்கங்கள் BD மற்றும் DC கள் சமம்.

$AE \perp BC.$ வரைக

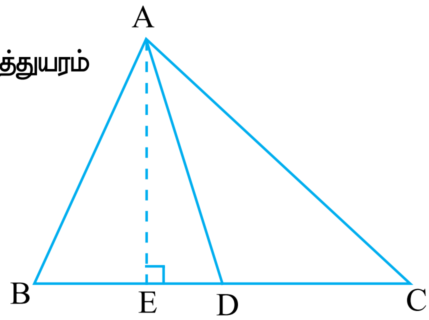
இப்பொழுது (ΔABD)ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BD$ அடிப்பக்கம் $\times \Delta ABD$ குத்துயரம்

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

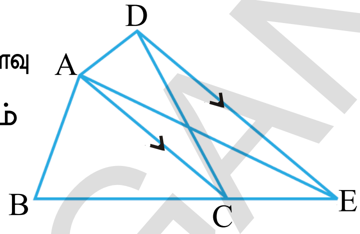
$= \frac{1}{2} \times BDC$ன் அடிப்பக்கம் $\times \Delta ACD$ ன் குத்துயரம்

$= \Delta ACD$ன் பரப்பளவு.



எனவே ΔABD ன் பரப்பளவு $= \Delta ACD$ ன் பரப்பளவு

எடுத்துக்காட்டு 5: படத்தில் ABCD ஒரு நாற்கரம், AC ஒரு மூலைவிட்டம், DE || AC மேலும் DE, BC ன் நீட்சியை E ல் வெட்டுகிறது, எனில் (ABCD)ன் பரப்பளவு = (ΔABE)ன் பரப்பளவு எனக்காட்டு.



தீர்வு : (ABCD)ன் பரப்பளவு = (ΔABC) ன் பரப்பளவு + (ΔDAC)ன் பரப்பளவு

ΔDAC மற்றும் ΔEAC ஆகியவை ஒரே அடிபக்கம் $\overline{AC}$ ன்மீதும் இணைக்கோடுகள் DE || AC க்கு இடையிலும் உள்ளன.

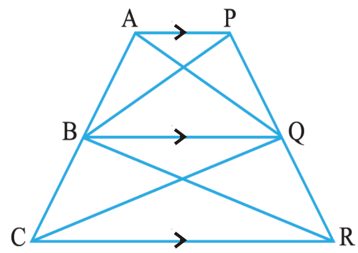
(ΔDAC)ன் பரப்பளவு = (ΔEAC) ன் பரப்பளவு (ஏன்)

இருபுறமும் சமமான பரப்பளவுகளை கூட்டு.

(ΔDAC)ன் பரப்பளவு + (ΔABC)ன் பரப்பளவு = (ΔEAC)ன் பரப்பளவு + (ΔABC)ன் பரப்பளவு

எனவே (ABCD)ன் பரப்பளவு = (ΔABE)ன் பரப்பளவு

எடுத்துக்காட்டு 6: படத்தில் AP || BQ || CR. (ΔAQC)ன் பரப்பளவு = (ΔPBR)ன் பரப்பளவு எனக்காட்டுக.



தீர்வு : ΔABQ மற்றும் Δ PBQ ஆகியவை ஒரே அடிபக்கம் BQன் மீதும் ஒரே இணைக் கோடுகள் AP || BQக்கு இடையிலும் அமைகின்றன.

(ΔABQ) ன் பரப்பளவு = (ΔPBQ)ன் பரப்பளவு ...(1)

இவ்வாறே

(ΔCQB) ன் பரப்பளவு = (ΔRQB)ன் பரப்பளவு
ஒரே அடிபக்கம் BQ மற்றும் BQ || CR) ...(2)

(1) மற்றும் (2)ன் விடைகளை கூட்டுக.

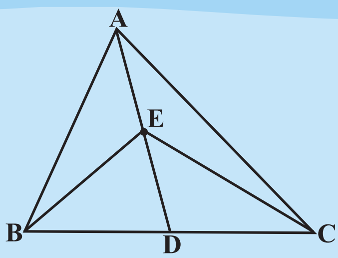
(ΔABQ) ன் பரப்பளவு+ ar(ΔCQB) ன் பரப்பளவு = (ΔPBQ)ன் பரப்பளவு + (ΔRQB)ன் பரப்பளவு

எனவே ΔAQC ன் பரப்பளவு = ΔPBR ன் பரப்பளவு

பயிற்சி - 11.3

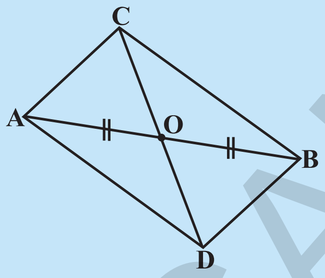
1. ΔABCல் (படத்தில் காட்டியவாறு) மையக்கோடு ADன் மையப்புள்ளி E எனில் (i) ΔABEன் பரப்பளவு = ΔACEன் பரப்பளவு

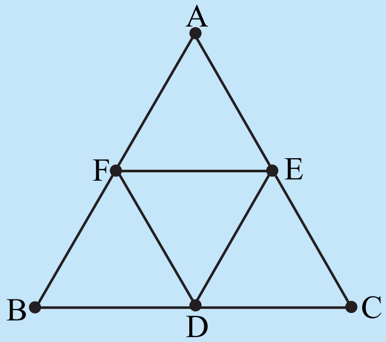
(ii)ΔABEன் பரப்பளவு = $\frac{1}{4}$ × ABCன் பரப்பளவு



2. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள், அந்த இணைகரத்தை சமபரப்பளவு உடைய நான்கு முக்கோணங்களாக பிரிக்கும் எனக்காட்டு.

3. அருகில் உள்ள படத்தில், ΔABC மற்றும் ΔABD க்கள் ஒரே அடிபக்கம் ABன் மீதுள்ள இரண்டு முக்கோணங்கள். $\overline{AB}$ கோட்டுத்துண்டு CD ஐ Oஎனும் இடத்தில் இருசம கூறிடுகிறது, எனில் ar (ΔABC) = ar (ΔABD) எனக்காட்டு.





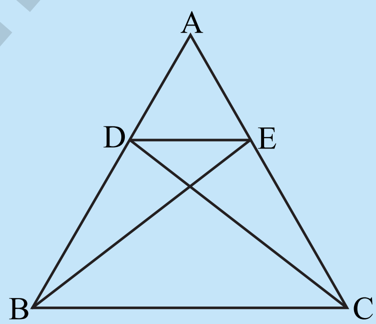
4. ΔABCல், BC, CA மற்றும் AB பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F எனில்.

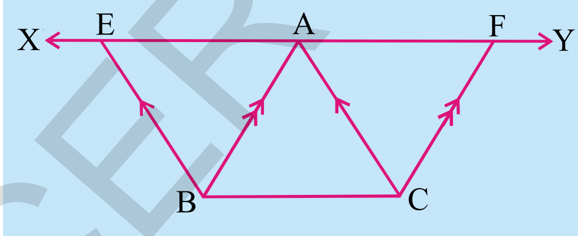
(i) BDEF ஒரு இணைகரம்

(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

(iii) $ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$ எனக்காட்டு

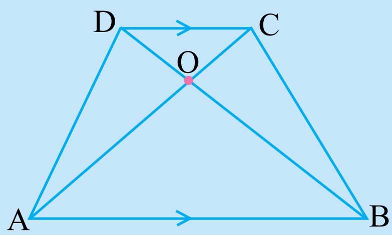
5. அருகில் உள்ள படத்தில் ΔABCல் $ar(\Delta DBC) = ar(\Delta EBC)$ என்றவாறு D மற்றும் E புள்ளிகள் முறையே AB மற்றும் AC பக்கங்களின் மேல் உள்ள புள்ளிகள். DE || BC எனக்காட்டு.

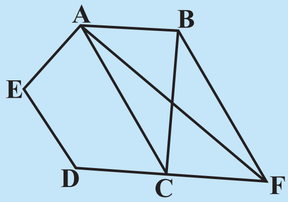




6. அருகில் உள்ள படத்தில் Aன் வழியே BCக்கு இணையாக XY எனும் கோடு வரையப்பட்டுள்ளது. BE || CA மற்றும் CF || BA ஆகியவை XYஐ முறையே E மற்றும் F ல் வெட்டுமாறு வரையப்படுகிறது எனில். $ar(\Delta ABE) = ar(\Delta ACF)$.

7. படத்தில் AB || DC ஆக உள்ள சரிவகம் ABCDன் மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆகியவை ஒன்றையொன்று Oல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $ar(\Delta AOD) = ar(\Delta BOC)$.

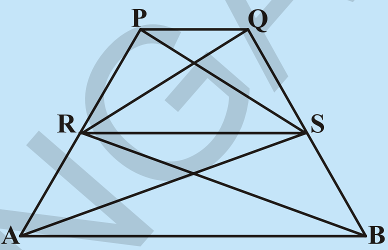




8. அருகில் உள்ள படத்தில், ABCDEஓர் ஐங்கோணம். B எனும் புள்ளி வழியே ACக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு, DCன் நீட்சியை Fல் வெட்டுகிறது.

(i) (ΔACB)ன் பரப்பளவு $= (\Delta ACF)$ன் பரப்பளவு

(ii)(AEDF) ன் பரப்பளவு = (ABCDE) ன் பரப்பளவு எனக்காட்டு.



9. அருகில் உள்ள படத்தில், ΔRASன் பரப்பளவு = ΔRBS ன் பரப்பளவு $[(\Delta QRB)$ன் பரப்பளவு $= (\Delta PAS)$ன் பரப்பளவு] எனில் நாற்கரங்கள் PQRS மற்றும் RSBA இரண்டும் சரிவகங்கள் எனக்காட்டு.

10. ஒரு கிராமத்தில் ராமையியா என்பவருக்கு நாற்கர வடிவில் ஒரு நிலம் உள்ளது. அவ்வூரில் உள்ள கிராம பஞ்சாயத்து பள்ளிக்கூடம் கட்டுவதற்காக அவருடைய நிலத்தின் ஒரு மூலையில் சில பகுதிகளை எடுத்துக்கொள்ள முடிவு செய்தது. ராமையா, தான் கொடுக்கும் நிலத்திற்கு சமமான பரப்புடைய முக்கோண வடிவ நிலத்தை கொடுக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனையின் படி கொடுக்க ஒப்புக் கொண்டாள். (நிலத்தின் மாதிரி படம் வரைக.)

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

செங்கோணமுக்கோணம் ABCல் A செங்கோணம். BC, CA மற்றும் AB ன் மீது முறையே BCED, ACFG மற்றும் ABMN எனும் சதுரங்கள் உள்ளன. கோட்டுத்துண்டு $AX \perp DE$, BC ஐ Yயிலும், DE ஐ Xயிலும், வெட்டுகிறது. AD, AE மற்றும் BF, CM படத்தில் காட்டிஉள்ளவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது எனில்.

(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$

(ii) (BYXD)ன் பரப்பளவு $= 2\,(\Delta MBC)$ன் பரப்பளவு

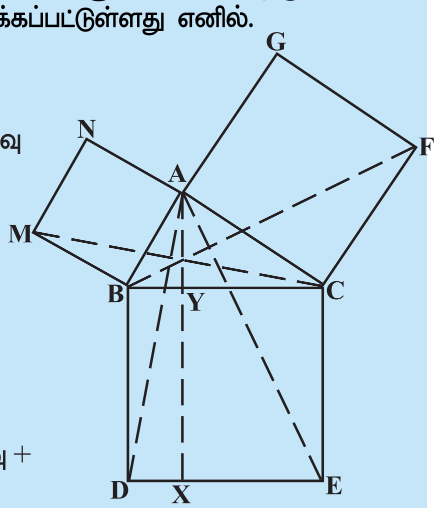
(iii) (BYXD)ன் பரப்பளவு = (ABMN)ன் பரப்பளவு

(iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) (CYXE)ன் பரப்பளவு = 2(FCB)ன் பரப்பளவு

(vi) (CYXE)ன் பரப்பளவு = (ACFG)ன் பரப்பளவு

(vii) (BCED)ன் பரப்பளவு = (ABMN)ன் பரப்பளவு + (ACFG)ன் பரப்பளவு



(vii)ன் விடையை எழுத்தால் எழுதமுடியுமா? இது புகழ்பெற்ற பிதாகரஸின் தேற்றம் ஆகும். இதன் எளிய நிருபணத்தை நாம் 10ஆம் வகுப்பில் கற்றுக்கொள்ளலாம்.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கீழ்கண்டவற்றை குறித்து விவாதித்தோம்.

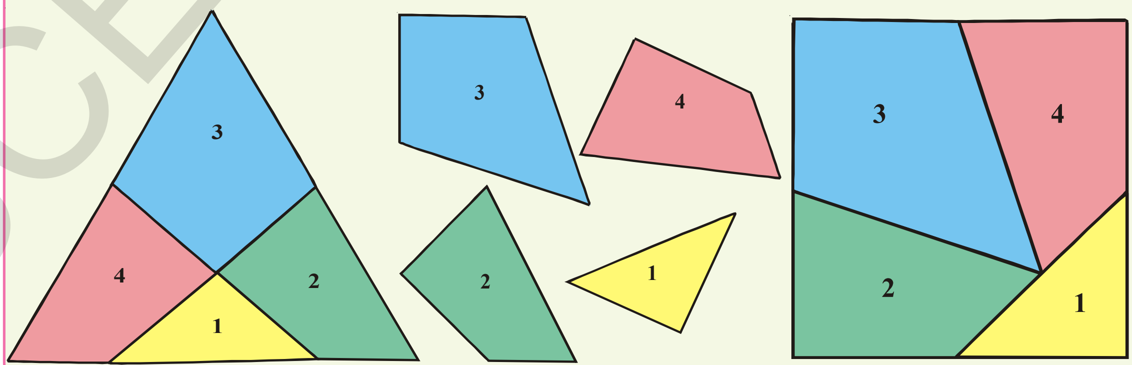
1. ஒரு படத்தின் பரப்பளவு (ஏதாவது ஒரு அலகில்) என்பது ஓர் எண். இது அந்த படம் அடைத்துக் கொண்ட பகுதியை குறிக்கிறது.
2. இரண்டு சர்வசம படங்கள் ஒரே பரப்பளவை கொண்டிருக்கும். ஆனால் இதன் மறுதலை எப்பொழுதும் உண்மை அல்ல.
3. x எனும் சமதளபரப்பு பகுதி இரண்டு பகுதிகள் P மேலும் Q களின் சேர்க்கையால் உருவாக்கப்பட்டால் $ar(X) = ar(P) + ar(Q)$ ஆகும்.
4. இரண்டு படங்கள் பொதுவான அடிபக்கம் பெற்றும், அடிபக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள உச்சிகள் அனைத்தும் அடிபக்கத்திற்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் மீது அமைந்தால் அவற்றை ஒரே அடியின் மீதும் ஒரே இணைகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள படங்கள் எனப்படும்.
5. ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதும் (அல்லது சமமான அடிப்பக்கம்) ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள இரண்டு இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.
6. இணைகரத்தின் பரப்பளவு என்பது அதன் அடிப்பக்கம் மற்றும் குத்துயரத்தின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.
7. ஒரே அடிபக்கம் (அல்லது சமமான அடிபக்கம்) மற்றும் சமமான பரப்பளவு உடைய இரண்டு இணைகரங்கள் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையே இருக்கும்.
8. ஒரே அடிபக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையிலும் ஒரு இணைகரம் மற்றும் ஒரு முக்கோணம் இருந்தால், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு இணைகரத்தின் பரப்பளவில் பாதியாக இருக்கும்.
9. ஒரே அடிபக்கத்தின் மீதும் ஒரே இணைக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.
10. ஒரே அடிபக்கத்தின் மீதும் (அல்லது சமமான அடிபக்கம்) சமமான பரப்பளவுகள் உடைய முக்கோணங்கள், ஒரே இணைக்கோடுகளுக்கு இடையில் இருக்கும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரு புதிர் (பரப்பளவுகள்)

ஜெர்மன் கணித மேதை டேவிட் ஹில்பர்ட் (1862-1943) என்பவர் எந்த ஒரு பல கோணத்தையும் முடிவுறு எண்ணிக்கை கொண்ட துண்டுகளால் ஆன சமபரப்பளவுடைய பல கோணமாக மாற்றி அமைக்கலாம் என்பதை முதன் முதலில் கண்டுபிடித்தார்.

இதை கண்டறிய ஆங்கில கணித மேதை ஹென்றி எர்னிஸ்ட் டுடென்சி (1847 - 1930) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை நான்கு பாகங்களாக பிரித்து, மீண்டும் அதை ஒரு சதுரமாக அமைத்தார்.



நீங்களும் இம்மாதிரியாக சில புதிர்களை உருவாக்கி, மகிழுங்கள்.

12

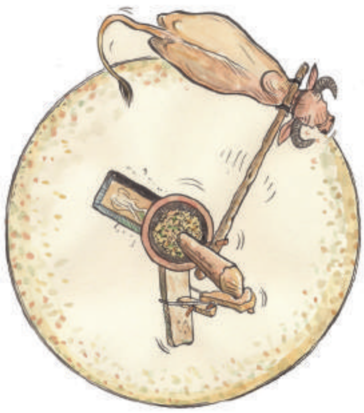
வட்டங்கள்

12.1 அறிமுகம்

நாம் நம் சுற்றுப்புறங்களில் நாணயங்கள், வளையல்கள், கடிகாரங்கள், சக்கரங்கள், பொத்தான்கள் போன்ற பல பொருட்களை தினமும் பார்க்கிறோம். இவை அனைத்தும் வட்டவடிவில் உள்ளன. உங்கள் சிறு வயதில் நீங்கள் நாணயம், வளையல்,

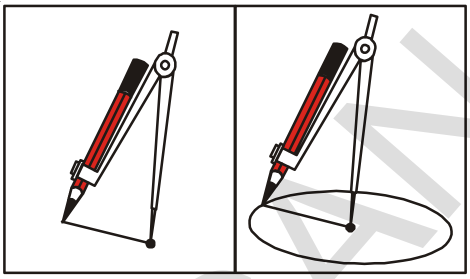
பொத்தான் போன்றவற்றின் ஓரங்களை வரைந்து வட்டத்தை வரைந்திருப்பீர்கள். எனவே, வட்டவடிவமான பொருட்களுக்கும், இந்த பொருட்களைக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டத்திற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டை உன்னால் கூறமுடியுமா? மேலே கூறப்பட்ட பொருட்கள் தடிமனை கொண்டிருக்கும் மேலும் அவை முப்பரிமாணப்பொருட்கள் ஆனால் வட்டம் என்பது தடிமன் இல்லாத இருபரிமாணப்படம்.

வட்டத்திற்கு மற்றொரு எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம். நீங்கள் எண்ணெய் ஆலையில் செக்கு ஆட்டுவதைப் பார்த்திருப்பீர்கள். இந்த படத்தில், எருது ஒன்று செக்கின் மையத்தில் இணைக்கப்பட்ட கொம்பில் கட்டப்பட்டுள்ளது. எருது நடக்கும் பாதையின் வடிவத்தை உன்னால் குறிப்பிடமுடியுமா? அது வட்டவடிவில் இருக்கும். எருது நடக்கும் பாதையின் வழியே வரையப்படும் எல்லைக் கோடு ஒரு வட்டமாகும். எண்ணெய் அழுத்தி, வட்டத்தின் மையமான உரலின் மத்தியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கொம்பின் (நெம்புகோல்) நீளம் அந்த வட்டத்துடன் ஒப்பிடும் போது அதன் ஆரத்தைக் குறிக்கிறது. நம் அன்றாட வாழ்கையில் காணும் வட்டத்தைப் பற்றிய சில எடுத்துக்காட்டுகளைச் சற்று சிந்தனை செய்.



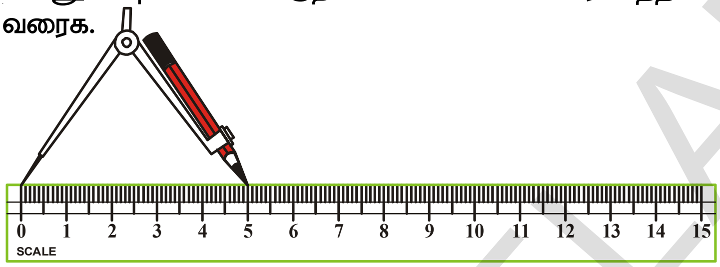
இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் வட்டங்கள், வட்டங்களுக்கு சம்பந்தப்பட்ட சொற்கள் மற்றும் வட்டத்தின் பண்புகள் ஆகியவற்றைக் கற்போம். முதலில் நீங்கள் கவராயம் உதவியால் வட்டம் வரைய கற்றுக்கொள்ள வேண்டும்.

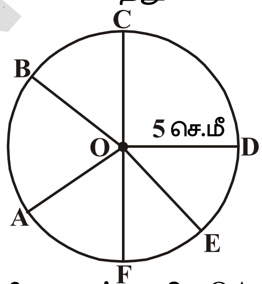
இப்பொழுது இதை செய்வோம்.



கவராயத்தில் பென்சிலைப் பொருத்தி திருகாணியின் உதவியால் இருக்கமாக செய். காகிதத்தின் மேல் O என்னும் புள்ளியைக் குறி. கவராயத்தின் கூர்முனையை Oவின் மேல் வை. கவராயத்தை கெட்டியாக பிடித்துக்கொண்டு பென்சிலை காகிதத்தின் மேல் (படத்தில் காட்டியதைப் போல்) திருப்பி வட்டத்தை வரைக.

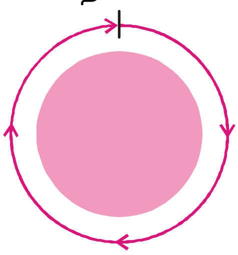
கொடுக்கப்பட்ட ஆரத்திற்கு வட்டம் வரையவேண்டுமெனில் அளவுகோலின் உதவியைக் கொண்டு வரையலாம். தேவையான அளவு ஆரத்தை கணக்கிட, அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியின் மேல் கவராயத்தின் கூர்முனையை வைத்து பென்சிலின் முனையை தேவையான அளவிற்கு சரிசெய். (படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் ஆரம் 5செ.மீ O என்னும் புள்ளியைக் குறி. Oவின் மேல் கவராயத்தின் கூர்முனையை வைத்து வட்டம் வரைக.





வட்டத்தின் பரிதியின் மேல் A, B, C, D & E என்னும் 5 புள்ளிகளைக் குறி. OA, OB, OC, OD, OE & OF என்னும் ஒவ்வொரு கோட்டுத் துண்டின நீளம் 5செ.மீ ஆகும். இது வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு சமம். வட்டத்தின் மேல் மற்றும் சில புள்ளிகளைக் குறித்து, O விலிருந்து அவற்றின் நீளத்தை அளந்து எழுது. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து நிலையான தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் தொகுப்பை வட்டம் என்று நாம் சொல்லலாம்.

நிலையான புள்ளி Oஐ வட்டத்தின் மையம் என்றும், நிலையான தூரம் OAஐ வட்டத்தின் ஆரம் என்று சொல்கிறோம்.

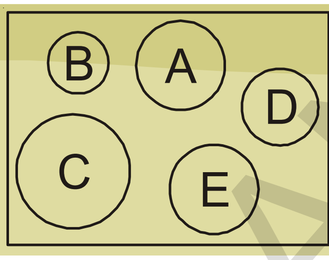


நரசிம்மன் ஒரு வட்டமான பூங்காவின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து நடக்கத் தொடங்கி, பூங்காவை ஒரு முழு சுற்று முடித்தார். நரசிம்மன் நடந்த தூரத்தை என்னவென்கிறோம்? இது வட்டமான பூங்காவின் எல்லையின் முழுநீளமாகும். இதையே நாம் பூங்காவின் சுற்றளவு என்கிறோம். எனவே வட்டத்தின் முழுமையான நீளத்தை அதன் சுற்றளவு என்கிறோம்.

செயல்பாடு

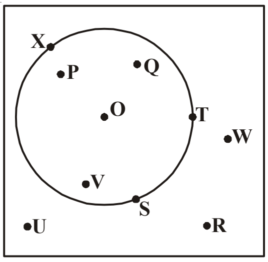
நாம் இப்பொது இந்த செயல்பாட்டை செய்வோம். ஒரு காகிதத்தாளின் மேல் ஒரு புள்ளியைக்குறி. இந்த புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு, ஏதேனும் ஒரு ஆரத்திற்கு ஒரு வட்டம் வரை, இப்பொது ஆரத்தை குறைத்தோ அல்லது மிகைப்படுத்தியோ மற்றும் பல வட்டங்களை அதே வட்டமையத்தைக் கொண்டு வரைக. இந்த செயல்பாட்டில் வரையப்பட்ட வட்டங்களை என்னவென்கிறோம்? வெவ்வேறு ஆர அளவுகளுடன் ஒரே வட்டமையத்தை கொண்ட வட்டங்களை **பொதுமையவட்டங்கள்** என்கிறோம்.

இதை செய்



1. இந்த படத்தில் வட்டம் Aவுக்கு சர்வசமமான வட்டங்கள் எவை?

2. வட்டங்களை சர்வசமம் ஆக்கும் அளவு என்ன?



ஒரு வட்டம் அது அமைந்துள்ள தளத்தை மூன்று பாகங்களாப்பிரிக்கிறது. அவை (i) வட்டத்தின் உள்பகுதி, இதை வட்டத்தின் உட்பக்கம் என்கிறோம். (ii) வட்டத்தின் மேல்பகுதி, இதை வட்டத்தின் பரிதி என்கிறோம். (iii) வட்டத்தின் வெளிப்புறம், இதை வட்டத்தின் வெளிப்பக்கம் என்கிறோம். அடுத்துள்ள படத்திலிருந்து, உட்பக்கம், வெளிப்பக்கம், வட்டத்தின் மேல் அமைந்துள்ள புள்ளிகளை எடுத்தெழுது.

வட்டமும், அதன் உட்புறமும் சேர்த்தது வட்டப்பகுதி ஆகும்.

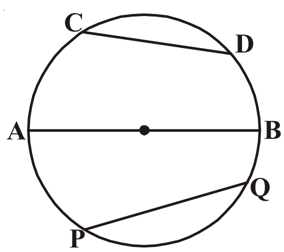
செயல்பாடு

ஒரு மெல்லியதான வட்டவடிவ தாளை எடுத்துக்கொள். அதை சரிபாதியாக மடித்து பிறகு திற. மறுபடியும் மற்றொரு அரைபாகமாக மடித்துத் திற. இவ்விதமாக பலமுறை செய். முடிவாக, நீ திறந்து பார்க்கும் போது என்ன கவனிக்கிறாய்?

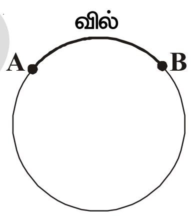
எல்லாமடிப்புகளும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்வதை நீ கவனிக்கலாம். இந்த புள்ளியை என்னவென்று கூறுவோம் என்பதை நினைவுப்படுத்திக்கொள். இது வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

ஒவ்வொரு மடிப்பின் அளவையும் கவையின் உதவியால் அளந்துபார். நீ என்ன கவனிக்கிறாய்? அவை எல்லாம் ஒரே அளவினை உடையதாய் இருக்கிறது. ஒவ்வொரு மடிப்பும் வட்டத்தை இருசமமான அரைபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. இந்த மடிப்பையே வட்டத்தின் விட்டம் என்கிறோம். வட்டத்தின் விட்டம் என்பது ஆரத்தின் இருமடங்காகும்.

இப்போது மேற்கண்ட செயல்பாட்டை பாதியாக அல்லாமல், வேறு எந்த முறையிலாவது மடி, இப்போது அந்த மடிப்பு வட்டத்தின் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைப்பதாக இருக்கும். இத்தகைய மடிப்புகளை வட்டத்தின் நாண்கள் என்கிறோம்.



எனவே, வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு நாண் எனப்படும். மிகப்பெரிய நாணை என்னவென்று அழைக்கிறோம்? இது வட்டத்தின் மையம் வழியே செல்கிறதா?

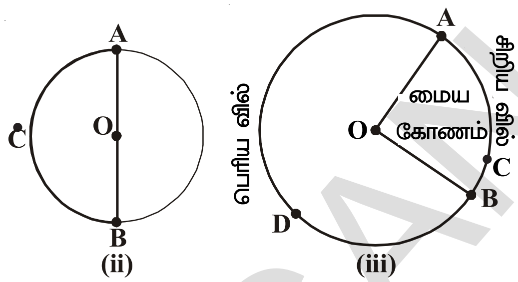


(i)

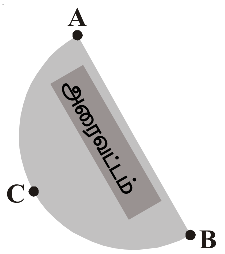
இந்தபடத்தில், CD, AB மேலும் PQ என்பவை வட்டத்தின் நாண்கள் ஆகும். படம் (i)ல் A மேலும் B என்பவை வட்டத்தின் மேல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள் அவை வட்டத்தின் பரிதியை இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள வட்டத்தின் பகுதியை வில் என்கிறோம். படம்(i)ல் $\overset{\frown}{AB}$என்பதை வில் என்கிறோம் மற்றும் அதை $\overset{\frown}{AB}$ எனக்குறிக்கிறோம். இந்த வில்லின் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்தின்

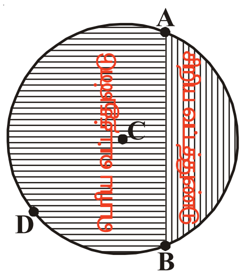
விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் அந்த வில்லை அரைவட்டவில் அல்லது அரைவட்டம் என்கிறோம். படம் (ii)$\overset{\frown}{ACB}$ ஒரு அரைவட்டம் ஆகும்.

ஒரு வில்லானது அரைவட்டத்தை விட சிறியதானால் அதை சிறிய வில் எனவும் அரைவட்டத்தை விட பெரியதானால் பெரியவில் எனவும் கூறுகிறோம். படம் (iii)ல்$\overset{\frown}{ACB}$ ஒரு சிறியவில் மேலும் $\overset{\frown}{ADB}$ என்பது பெரிய வில்.

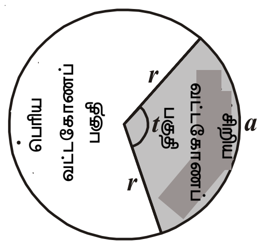


ஒரு வில்லின் முனைப்புள்ளிகளை ஒரு நாணின் மூலம் இணைத்தால், நாண் என்பது வட்டத்தை இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. நாணிற்கும், சிறிய வில்லிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை சிறிய வட்டத்துண்டு எனவும், நாணிற்கும் பெரியவில்லிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதி பெரிய வட்டத்துண்டு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. அந்த நாண் என்பது வட்டத்தின் விட்டமாக இருந்தால், விட்டம், வட்டத்தை இரண்டு சம துண்டுகளாகப் பிரிக்கிறது.





ஒரு வில்லிற்கும், வில்லின் முனைப்புள்ளியிலிருந்து வட்டமையத்தை இணைக்கும் இரண்டு ஆரங்களுக்கும் இடைப்பட்ட பகுதி வட்டகோணப்பகுதி எனப்படும். இதில் ஒன்று சிறிய வட்ட கோணப்பகுதி, மற்றொன்று பெரிய வட்டக்கோணப்பகுதி ஆகும். (அடுத்துள்ள படத்தை பார்)



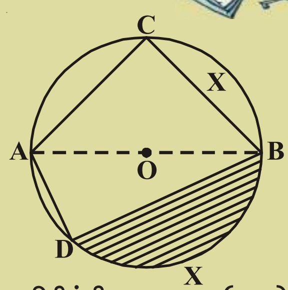
பயிற்சி -12.1

1. அடுத்துள்ள படத்தில் O ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பகுதிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் பெயர்களை எழுது.

(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\overset{\frown}{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) $\overset{\frown}{DCB}$ (vi) $\overset{\frown}{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ (viii) நிழலிட்டபகுதி



2. கீழ்கண்டவை மெய்யா, மெய்யற்றதா எனக்கூறு :

i. ஒரு வட்டம், அது அமைந்துள்ள தளத்தை மூன்று பகுதிகளாப் பிரிக்கிறது ( )

ii. ஒரு நாண் மற்றும் ஒரு சிறிய வில்லால் அடை பட்ட பரப்பு சிறிய வட்டத்துண்டு ஆகும். ( )

iii. ஒரு நாண் மற்றும் ஒரு பெரிய வில்லால் ஏற்படும் பரப்பு பெரிய வட்டத்துண்டு ஆகும். ( )

iv. ஒரு விட்டம் வட்டத்தின் பகுதியை இரண்டு சமமில்லாத பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது ( )

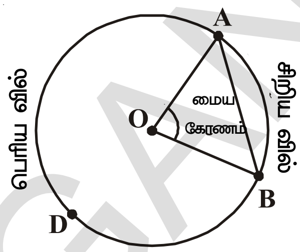
v. ஒரு வட்டகோணப்பகுதி என்பது இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் ஒரு நாணினால் ஏற்படும் பரப்பு ஆகும். ( )

vi. வட்டத்தின் மிகப்பெரிய நாணை விட்டம் என்கிறோம். ( )

vii. விட்டத்தின் மையப்புள்ளி வட்டத்தின் மையம் ஆகும். ( )

12.2 ஒரு நாண் வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தாங்கும் கோணம்

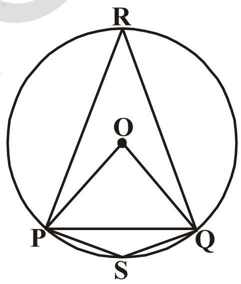
A, B என்பவை O ஐ மையமமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள் என்க. OA மற்றும் OBகளை இணை. வட்டமையம் Oல் $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ஆல் ஏற்படும் கோணம். அதாவது $\angle AOB$வை $\overline{AB}$ என்னும் நாண் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம் என்கிறோம்.

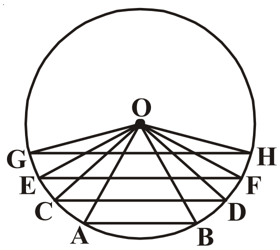


அடுத்துள்ள படத்தில் கோணங்கள் $\angle POQ$, $\angle PSQ$ மற்றும் $\angle PRQ$ஐ என்னவென்று அழைக்கிறோம்?

i. $\angle POQ$ என்பது PQ என்னும் நாண் வட்டமையம் 'O'ல் தாங்கும் கோணம்.

ii. $\angle PSQ$ மேலும் $\angle PRQ$ என்பவை முறையே நாண் PQ சிறிய வில்லில் S என்னும் புள்ளியிலும், பெரிய வில்லில் R என்னும் புள்ளியிலும் தாங்கும் கோணங்கள் ஆகும்.





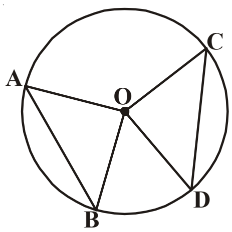
படத்தில் நீங்கள் கவனித்தது என்ன?

இந்தபடத்தில், O என்பது வட்டமையம் மேலும் AB, CD, EF மேலும் GH என்பவை வட்டத்தின் நாண்கள்.

இந்தபடத்திலிருந்து $GH > EF > CD > AB$ என்பதை நாம் கவனிக்கலாம்.

இப்போது இந்த நாண்கள் மையத்தில் தாங்கும் கோணங்களைப் பற்றி நீ என்ன கூறுவாய்? இந்த கோணங்களை கவனிக்கும் போது, நாண்களின் நீளங்கள் அதிகரிக்கும் போது அவை மையத்தில் தாங்கும் கோணங்களும் அதிகரித்துக் கொண்டு செல்கிறது என்பதை நீ காணலாம்.

இப்போது ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்ளும் போது அவை வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணங்களைப்பற்றி நீ என்ன நினைக்கிறாய்? O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் AB மேலும் CD என்னும் சமமான நாண்களை கவராயம் மற்றும் அளவுகோலின் உதவியுடன் வரைக.



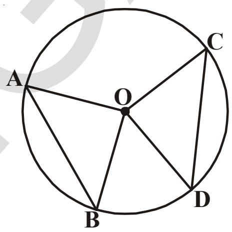
வட்டமையம் Oவை A, B உடன் மேலும் C, D உடன் இணை. இப்போது AOB மேலும் COD ஐ அளந்து எழுது. அவை ஒன்றுக்கொன்று சமமாக உள்ளனவா? இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சமமான நாண்களை வரைந்து அவை வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணங்களை அளந்து எழுது. அவைகளால் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணங்கள் சமம் என்பதை நீ காணலாம். நாம் இந்த உண்மையை நிருபிக்க முயற்சி செய்வோம்.

தேற்றம் 12.1 : ஒரு வட்டத்தின் சமமான நாண்கள் வட்டமையத்தில் சமமான கோணங்களைத் தாங்கும்.

தரவு : 'O' என்பது வட்டத்தின் மையம் என்க. $\overline{AB}$ மேலும் $\overline{CD}$ என்பவை வட்டத்தின் சமமான நாண்கள் மற்றும் $\angle AOB$ மேலும் $\angle COD$ என்பவை அந்த நாண்கள் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணங்கள்.

நிருபிக்கவேண்டியது : $\angle AOB \cong \angle COD$

அமைப்பு : ஒவ்வொரு நாணின் முனைகளையும் வட்டமையத்துடன் இணைத்தால் ΔAOB மற்றும் ΔCOD என இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்.



நிருபணம் : ΔAOB மற்றும் ΔCODல்

$AB = CD$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$OA = OC$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்கள்)

$OB = OD$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்கள்)

எனவே $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS பண்பு)

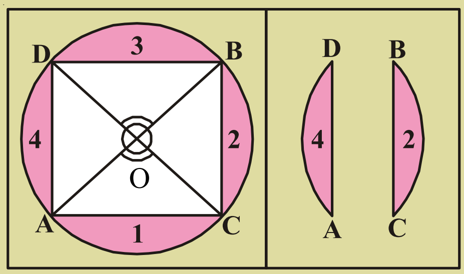
இவ்வாறு $\angle AOB \cong \angle COD$ (சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்களின் பண்பு)

குறிப்பு : C.P.C.T. என்பதை "சர்வசமமுக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்களின் பண்பு" என்பதற்கு பதிலாக குறிக்கலாம்.

மேலேயுள்ள தேற்றத்தின்மூலம், ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு நாண்கள் சமமான கோணங்களை வட்டமையத்தில் ஏற்படுத்தினால் அந்த நாண்களைப் பற்றி என்ன தெரிந்துக்கொள்ளலாம்? அதை கீழ்கண்ட செயல்பாட்டின் மூலம் ஆராயலாம்.

செயல்பாடு

ஒரு வடிவ காகிதத்தை எடுத்துக்கொள். அதன் ஓரங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருத்தும்படி விட்டத்தின் வழியே மடி. இப்போது திறந்து மறுபடியும் மற்றொரு விட்டத்தின் வழியே மடி. இப்போது திறந்து பார்த்தால் இரண்டு விட்டங்களும் வட்டமையம் Oல் சந்திக்கின்றன. இதனால் Oல் ஏற்படும் இரண்டு ஜோடி குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம். விட்டத்தின் முனைகளை A, B, C, மேலும் D என பெயரிடு.



$\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ என்னும் நாண்களை வரை. படத்தில் உள்ளதைப்போல் நான்கு வட்டத்துண்டுகளை 1, 2, 3, 4களை வெட்டிஎடு.

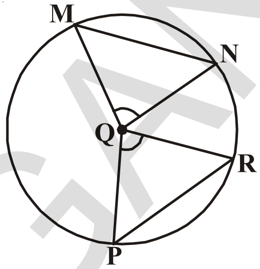
அந்த வட்டத்துண்டு ஜோடிகளை ஒன்றின்மேல் ஒன்று வைத்தால் (1,3), (2,4) ஜோடிகளின் ஓரங்கள் ஒன்றோடொன்று சரியாக பொருந்தும்.

$\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$ என இருக்குமா?

ஒரு குறிப்பிட்ட வகையில் மேலே செய்ததைப்போல், மற்றும் சில சமமான கோணங்களை எடுத்துக்கொண்டு முயற்சி செய். பின்வரும் தேற்றத்தின்படி நாண்கள் சமமானவையாக இருக்கும்.

(12.1) தேற்றத்தின் மறுதலையை உன்னால் கூறமுடியுமா?

தேற்றம் 12.2 : ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணங்கள் சமம் எனில் அவற்றின் நீளங்கள் சமம்.



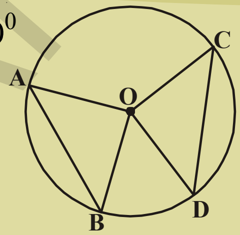
இது 12.1 தேற்றத்தின் மறுதலை ஆகும். அருகில் கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $\angle PQR = \angle MQN$ எனக் கொள்.

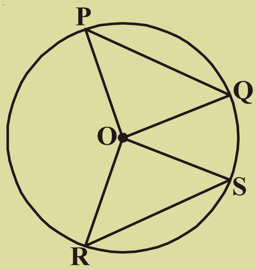
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (ஏன்?)

PR = MN ஆகுமா? (சரிபார்)

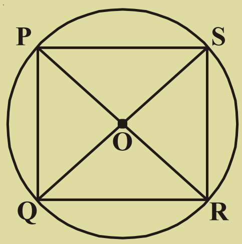
பயிற்சி - 12.2

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் AB =CD மேலும் $\angle AOB = 90^0$ எனில் $\angle COD$ஐ கண்டுபிடி.





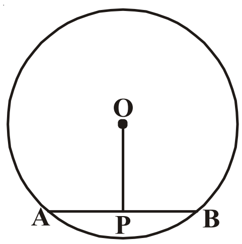
2. அடுத்துள்ள படத்தில் PQ = RS மேலும் $\angle ORS = 48^0$. $\angle OPQ$ மேலும் $\angle ROS$ஐ கண்டுபிடி.



3. அடுத்துள்ள படத்தில் PR மேலும் QS என்பவை விட்டங்கள். PQ = RSஆக இருக்குமா?

12.3 வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள செங்குத்து தூரம்

- Oஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டத்தை அமைக்க. $\overline{AB}$ என்னும் நாண் வரைக. $\overline{AB}$ க்கு O விலிருந்து ஒரு செங்குத்துகோடு வரைக.
- செங்குத்துக்கோடு, $\overline{AB}$ ஐ வெட்டும் புள்ளி P என வை.
- PA, PB ஐ அளந்தபிறகு PA = PB என அறியலாம்.



தேற்றம்-12.3 : வட்டவமையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து கோடு அந்த நாணை இரு சமக்கூறிடும்.

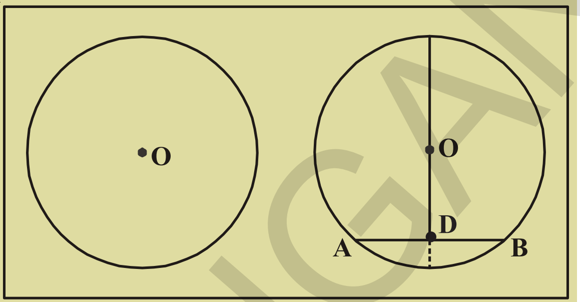
O ஐ A மேலும் B யுடன் இணைத்து

$\Delta OPA \cong \Delta OPB$ என நிருபணத்தை நீயே எழுது. 12.3 தேற்றத்தின் மறுதலை என்ன?

வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்பட்ட கோடு, அந்த நாணை இருசமக்கூறிட்டால் அந்த கோடு நாணிற்கு செங்குத்து கோடாகும்.

செயல்பாடு

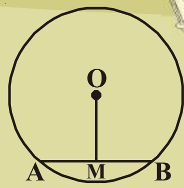
வட்டவடிவ தாளை எடுத்துக்கொள். அதன் மையத்தை O எனக்குறி. அதை இருசமபாகங்களாக அல்லாமல் இருக்கும்படி மடி. திறந்து பார்த்து, அந்த மடிப்புக் கோட்டை நாண் AB என வை. A என்பது Bன் மேல் அமையுமாறு மறுபடியும் மடி. இருமடிப்புகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியை D எனக்குறி. AD=DBஆக இருக்குமா? $\angle ODA = ?$ $\angle ODB = ?$ இரண்டு மடிப்புகோடுகளின் மத்தியில் உள்ள கோணத்தை அளந்து எழுது. அவை செங்கோணங்களாக இருக்கும். இதிலிருந்து ஒரு கருதுகோள் எழுதுவோம். வட்ட மையத்திலிருந்து நாணை இருசமக்கூறிடுமாறு வரையப்பட்ட கோடு, நாணிற்கு செங்குத்து கோடாகும்.



முயன்று பார்

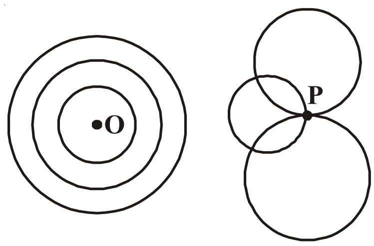
Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் $\overline{AB}$ என்பது நாண் மற்றும் M அதன் மையப்புள்ளி. $\overline{OM}$, ABக்கு செங்குத்து என நிரூபி.

(குறிப்பு : OA, OBஐ இணைத்து ΔOAM மற்றும் ΔOBMஐ எடுத்துக்கொள்)



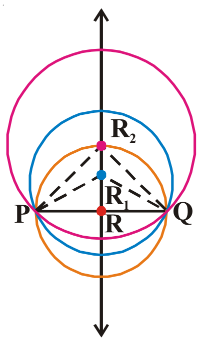
12.3.1 ஒரு வட்டத்தை விவரிக்கும் மூன்று புள்ளிகள்

O என்பது ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி என எடுத்தக்கொள். Oஐ மையமாகக் கொண்டு எத்தனை வட்டங்கள் வரையமுடியும்? நமக்கு விருப்பமான எத்தனை வட்டங்கள் வேண்டுமானாலும் வரையலாம். இவ்விதமாக வரையப்பட்ட வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் என்பதை நாம் படித்துள்ளோம். இப்போது P என்பது வட்டமையம் அல்லாத மற்றொரு புள்ளி எனக் கொள்க. அப்போது Pன் வழியேவும் பல வட்டங்களை வரையலாம். இப்போது P மேலும் Q என்பவை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் என எடுத்தக்கொள்வோம்.

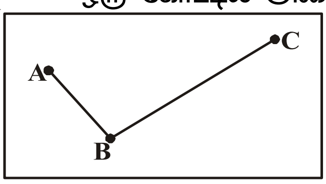


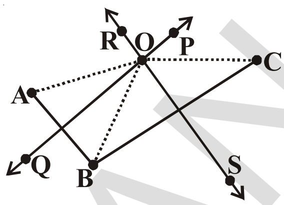
இரண்டு புள்ளிகள் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரையலாம்? P மேலும் Q வழியே பல வட்டங்களை வரையலாம் என்பதை நாம் பார்க்கிறோம்.

இப்போது P,Qஐ இணைத்து PQன் செங்குத்து இருசமவெட்டியை வரைவோம். இந்த செங்குத்து இருசமவெட்டியின் மேல் R, R_1, R_2 என்னும் மூன்று புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள். R, R_1, R_2 ஆகியவற்றை மையங்களாக் கொண்டு முறையே RP, R_1P, R_2Pஐ ஆரங்களாகக் கொண்டு வட்டங்களை வரைக. இந்த வட்டங்கள் Qன் வழியே செல்கின்றனவா? (ஏன்)



ஒரு கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றின் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரையலாம்? இதை பரிசோதிப்போம். ஒரு தளத்தில் ஏதேனும் மூன்று ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் A, B, Cஐ எடுத்துக்கொள். AB மற்றும் BCஐச் சேர். $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ க்கு முறையே $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ என்னும் செங்குத்து

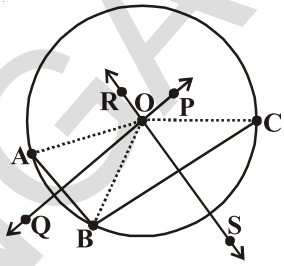




இருசமவெட்டிகளை வரைக. அவை இரண்டும் Oல் வெட்டுகின்றன. (ஏனெனில் இரண்டு கோடுகளுக்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பொதுப்புள்ளிகள் இருக்கமுடியாது) Oஎன்பது $\overline{AB}$ ன் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் மேல் அமைந்துள்ளதால் $OA = OB$. .....(i)

$\overleftrightarrow{PQ}$ ன் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் A மற்றும் Bயிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.

மேலும் O என்பது $\overline{BC}$ ன் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் மேலும் அமைந்தள்ளது. எனவே $OB = OC$ ..... (ii)



சமன்பாடுகள் (i), (ii) லிருந்து

$OA = OB = OC$ (தொடர்உறவு விதி)

எனவே, A, B மேலும் Cயிலிருந்து O மட்டுமே சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளியாக இருக்கமுடியும். இப்போது நாம் O ஐ மையமாகவும் OA ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தால் அவை B,C வழியே செல்லும். அதாவது A, B, C வழியே ஒரே ஒரு வட்டம் மட்டுமே வரையமுடியும்.

மேலே செய்த செயல்பாட்டின் அடிப்படையில் ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம் மட்டுமே வரையமுடியும் என்ற கருதுகோள் கிடைக்கிறது.

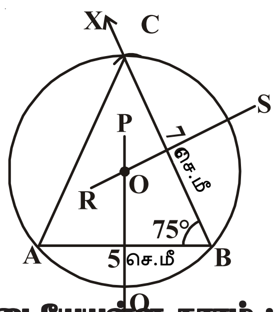
(குறிப்பு : ACஐ இணைத்தால் ΔABCஏற்படுகிறது. அதன் உச்சிகள் A, B, C என்பவை வட்டத்தின் மேல் அமையும். இந்த வட்டத்தை முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் என்கிறோம். O என்பது சுற்றுவட்டமையம் மற்றும் OA அல்லது OB அல்லது OC என்பவை சுற்றுவட்ட ஆரங்கள்)

முயன்று பார்

மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டு புள்ளிகள் எனில் இவற்றின் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரையலாம்? இந்த மூன்று புள்ளிகள் வழியே வட்டம் வரையமுயற்சிசெய்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $AB = 5$செ.மீ, $\angle B = 75^0$ மேலும் $BC = 7$ செ.மீ. உள்ள ΔABC வரைந்து அதன் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்க.

தீர்வு : AB= 5செ.மீ உள்ள கோட்டுத்துண்டு வரைக. B ல் $\angle B = 75^0$ இருக்குமாறு BX என்னும் கோணக்கோடுவரைக. Bயை மையமாகமவும் 7செ.மீ ஆரத்துடனும் BX ஐ Cல் வெட்டுமாறு ஒரு வில் வரைக. CAஐ இணைத்து ΔABCஐ அமைக்க. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ க்கு முறையே $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ என்னும் செங்குத்து இருசமவெட்டிகளை வரைக. $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ என்பவை 'O'ல் வெட்டுகின்றன. 'O'ஐ மையமாகவும் OA ஆரமாகவும் உள்ள வட்டம் வரைக. இந்த வட்டம் B, C வழியே செல்லும். இது நமக்குத் தேவையான சுற்றுவட்டம் ஆகும்.

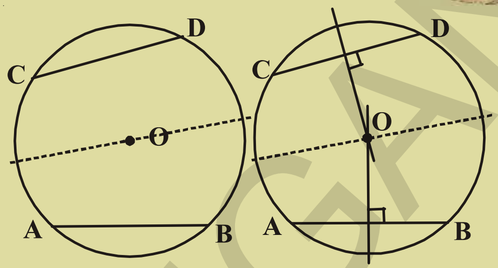


12.3.2 நாண்கள் மற்றும் வட்டமையத்திலிருந்து அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தூரம் :

ஒரு வட்டத்திற்கு எண்ணற்ற நாண்கள் இருக்கும். ஒரு வட்டத்தில் சமமாக அளவுடைய பல நாண்களை எடுத்துக்கொள்ளலாம். சமமான அளவுகளை உடைய நாண்கள் வட்டமையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கமுடியும்? இதை ஒரு செயல்பாட்டின் மூலம் பரிசீ-ப்போம்.

செயல்பாடு

ஒரு காகித்தின் மேல் பெரிய வட்டத்தை வரைந்து அதை வெட்டி எடு. அதனுடைய மையம் Oஐ குறித்துக்கொள். அதைை இரண்டாகமடி. இப்போது அரைவட்ட முனைக்கு அருகில் இன்னொரு மடிப்பை மடி. இப்போது திறந்துபார். உனக்கு இரண்டு சர்வசம நாண்களின் மடிப்புக்கோடுகள் கிடைக்கும். அவற்றை AB, CDஎன பெயரிடு.

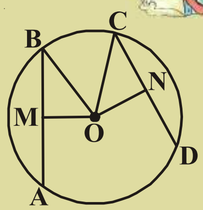


இப்போது வட்டமையம் Oவின் வழியே செல்லுமாறு செங்குத்து மடிப்பை மடி. கவை உதவியால் வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு இடையேயுள்ள செங்குத்து தூரங்களை அள. மற்றும் சில சர்வசமநாண்களை மடித்து அவற்றிற்கு மேலே உள்ள செயல்பாட்டைச் செய். மேற்கண்ட கவனிப்புகளிலிருந்து ஒரு கருதுகோள் எழுது.

சர்வசமநாண்கள் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.

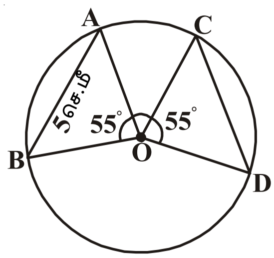
முயன்று பார்

இந்த படத்தில் O என்பது வட்டமையம் மேலும் AB = $\overline{CD}$. OM என்பது ABன் மேல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு, $\overline{ON}$ என்பது $\overline{CD}$ ன் மேல் வரையப்பட்ட செங்குத்துகோடு. எனில் OM = ON எனநிருபி.



மேலேயுள்ள கருதுகோள் தர்க்கரீதியாக நிருபிக்கப்பட்டதால் அது ஒரு தேற்றமாகிறது. சமமான அளவுகளையுடைய நாண்கள் வட்டமையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: இந்த படத்தில் O என்பது வட்டமையம். AB=5செ.மீ எனில் CDன் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.



தீர்வு : Δ AOB மேலும் Δ CODல்,

OA = OC (ஏன்?)

OB = OD (ஏன்?)

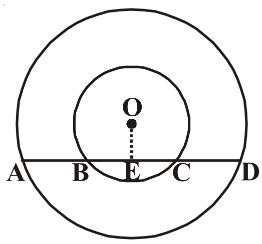
$\angle AOB = \angle COD$

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\because$ AB = CD (CPCT)

$\therefore$ AB = 5 செ.மீ எனில் CD = 5 செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 3: அடுத்துள்ள படத்தில் Oஐ மையமாகக் கொண்ட இரண்டு பொதுமைய வட்டங்கள் உள்ளன. பெரிய வட்டத்தின் நாண் AD, சிறிய வட்டத்தை B, Cல் வெட்டுகிறது. AB=CDஎனக்காட்டு.



தீர்வு : Oஐ மையமாகக் கொண்ட இரண்டு பொதுமைய வட்டங்களில் $\overline{AD}$ என்பது பெரியவட்டத்தின் நாண். $\overline{AD}$, சிறிய வட்டத்தை B மேலும் Cல் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க : AB = CD

அமைப்பு : $\overline{AD}$ க்கு $\overline{OE}$ என்னும் செங்குத்துக்கோடு வரைக.

நிருபணம் : AD என்பது 'O' ஐ மையமாக உடைய பெரிய வட்டத்தின் நாண். மேலும் $\overline{OE}$ என்பது $\overline{AD}$ க்கு செங்குத்து.

$\because$ OE என்பது AD ஐ இருசமக்கூறிடும் (வட்டமையத்திலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு நாணை இருசமகூறிடும்)

$\therefore$ AE = ED ..... (i)

$\overline{BC}$ என்பது 'O' ஐ மையமாக உடைய சிறிய வட்டத்தின் நாண். மேலும் $\overline{OE}$ என்பது ADக்கு செங்குத்து.

$\because$ $\overline{OE}$ என்பது $\overline{BC}$ ஐ இருசமக்கூறிடும் (அதே தேற்றத்தின்படி)

$\therefore$ BE = CE ..... (ii)

சமன்பாடு (ii)ஐ (i)லிருந்து கழிக்க

AE - BE = ED - EC

AB = CD

பயிற்சி - 12.3

1. கீழ்கண்ட முக்கோணங்களை வரைந்த அவற்றின் சுற்றுவட்டங்களை வரைக.

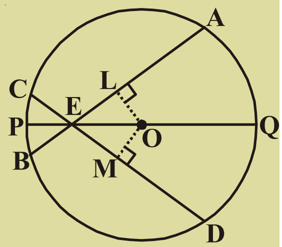
   (i) Δ ABCல், AB = 6செ.மீ, BC = 7செ.மீ, மேலும் $\angle A = 60^{o}$

   (ii) Δ PQRல், PQ = 5செ.மீ, QR = 6செ.மீ, மேலும் RP = 8.2செ.மீ

   (iii) Δ XYZல், XY = 4.8செ.மீ, $\angle X = 60^{o}$ மேலும் $\angle Y = 70^{o}$

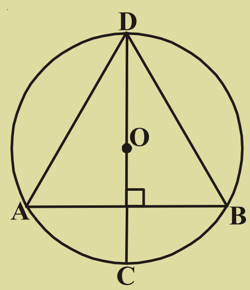
2. AB=5.4செ.மீ எனில், A, B வழியே இரண்டு வட்டங்களை வரைக.

3. இரண்டு வட்டங்கள் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டால், அவற்றின் மையங்கள் அவற்றின் பொதுவான நாணின் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் மேல் அமையும் எனநிருபி.

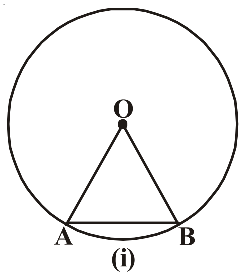


4. ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் நாண்கள், வெட்டும் புள்ளி வழியே செல்லும் விட்டத்துடன் சமமான கோணங்களை ஏற்படுத்தகின்றன. அந்த நாண்கள் சமம் என நிருபி.

5. அடுத்துள்ள படத்தில், AB என்பது O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஒரு நாண். CD என்பது ABக்கு செங்குத்தான விட்டம். AD=BD எனக்காட்டு.



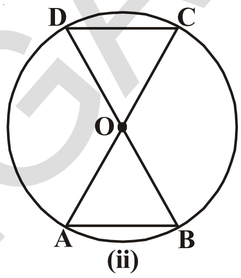
12.4 ஒரு வட்ட வில் தாங்கும் கோணம்



(i)

படம்(i)ல் $\overline{AB}$ ஒரு நாண் மேலும் $\overset{\frown}{AB}$ ஒருவில் (சிறியவில்) நாண் மற்றும் வில்லின் முனைப்புள்ளிகள் A, Bஆகும். எனவே, வட்டமையத்தில் நாண் தாங்கும் கோணமும், வில் தாங்கும் கோணமும் ஒன்றேயாகும்.

படம்(ii)ல் $\overline{AB}$ மேலும் $\overline{CD}$ என்பவை O ஐ மையமாக உடைய வட்டத்தின் இரண்டு நாண்கள். $AB = CD$, எனில் $\angle AOB = \angle COD$



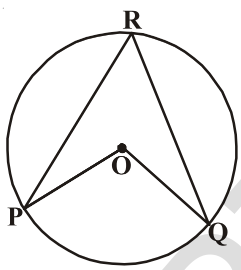
(ii)

எனவே வில் $\overset{\frown}{AB}$ மையத்தில் தாங்கும் கோணமும், வில் $\overset{\frown}{CD}$ மையத்தில் தாங்கம் கோணமும் சமம். ($\Delta AOB \cong \Delta DOC$ எனநிருபி)

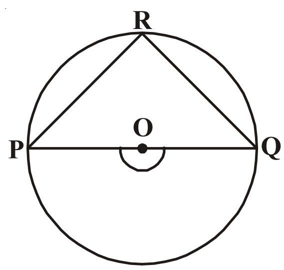
மேலே கண்ட உற்றுநோக்களிலிருந்து சமமான நீளமுடைய வில்கள் வட்டமையத்தில் சமமான கோணங்களைத் தாங்கும் என முடிவு செய்கிறோம்.

12.4.1 ஒருவில் வட்டத்தின் மீதியுள்ள பகுதியில் ஒரு புள்ளியில் தாங்கும் கோணம்.

'O'ஐ மையமாக உடைய வட்டத்தை எடுத்தக்கொள். படம் (i)ல் $\overset{\frown}{PQ}$ என்பது சிறியவில், படம் (ii)ல் $\overset{\frown}{PQ}$ ஓர் அரைவட்டம் மற்றும் படம் (iii)ல் PQ என்னும் பெரியவில் வட்டப்பரிதியின் மேல் R என்னும் புள்ளியை எடுத்துக்கொள். R ஐ P மற்றும் Q உடன் இணை.



(i)

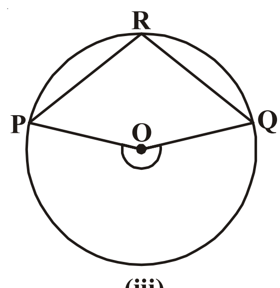


(ii)

$\angle PRQ$ என்து வில் PQ வட்டத்தின் மேல் R என்னும் புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணம் மற்றும் $\angle POQ$ என்பது வட்டமையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம்.

கொடுக்கப்பட்ட படங்களை கொண்டு அட்டவணையை நிரப்பு

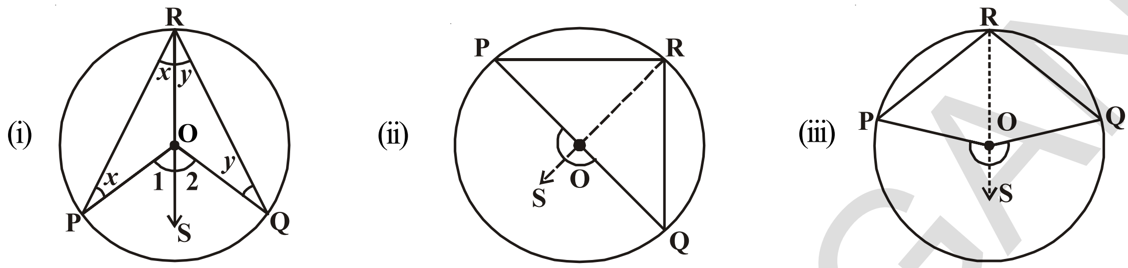
கோணம்	படம்(i)	படம்(ii)	படம்(iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			



(iii)

இவ்வாறாகவே சில வட்டங்களை வரைந்து சில வில்கள், மையத்தில் தாங்கும் கோணம் மற்றும் அவை பரிதியில் தாங்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுது. நீ என்ன கவனிக்கிறாய்? ஒரு வில் மையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் மேலும் வட்டத்தின் மீது ஏற்படுத்தும் கோணம் ஆகியவற்றை பற்றிய ஒரு கருதுகோள் கூறமுடியுமா? எனவே மேல் உள்ள உற்றுநோக்களிலிருந்து ஒரு வில் அதன் மையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் அதன் மீதி வில்லில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்கு என நாம் கூறலாம்.

தேற்றம்: ஒரு வில் அதன் மையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் அதன் மீதி வில்-ல் ஏற்படுத்தும் கோணத்தை போல் இரு மடங்கு ஆகும்.



தரவு : O என்பது வட்டத்தின் மையம் என்க. $\overset{\frown}{PQ}$ எனும் வில் POQ ஐ மையத்தில் தாங்குகிறது.

R என்பது வட்டத்தின் மீதி வில்லில் உள்ள ஒரு புள்ளி ($\overset{\frown}{PQ}$ ன் மேல் அல்ல)

நிரூபணம் : இங்கு மூன்று வெவ்வேறு நிலைகள் இருக்கின்றன. (i) $\overset{\frown}{PQ}$ என்பது சிறியவில் (ii) $\overset{\frown}{PQ}$ ஒரு அரைவட்டம் (iii) $\overset{\frown}{PQ}$ ஒரு பெரியவில்

முதலில் R என்னும் புள்ளியை வட்டமையம் 'O' உடன் இணைத்து அதை S என்னும் புள்ளிக்கு நீட்டுவோம். (எல்லா நிலைகளிலும்)

எல்லா நிலைகளிலும் Δ ROPல்

RO = OP (ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்கள்)

எனவே $\angle ORP = \angle OPR$ (ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்).

$\angle POS$ என்பது Δ ROPன் வெளிக்கோணம் (அமைப்பு)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR$ அல்லது $2\ \angle ORP$ ..... (1)

($\because$ வெளிகோணம் உள்எதிர்கோணங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம்) இவ்வாறே Δ ROQல்

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ அல்லது $2\ \angle ORQ$ ..... (2)

($\because$ ஒரு வெளிக்கோணம் அதன் உள்எதிர்கோணங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம்)

(1) மற்றும் (2)லிருந்து

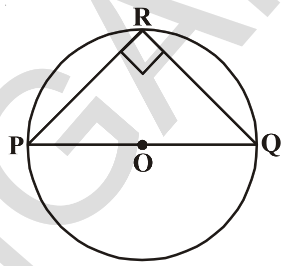
$\angle POS + \angle SOQ = 2\ (\angle ORP + \angle ORQ)$

$\angle POQ = 2\ \angle QRP$ ..... (3)

> எளிமையாக,
> $\angle ORP = \angle OPR = x$ எனவே
> $\angle POS = \angle 1$
> $\angle 1 = x + x = 2x$
> $\angle ORQ = \angle OQR = y$ என்க
> $\angle SOQ = \angle 2$
> $\angle 2 = y + y = 2y$
> இப்போது $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$
> $= 2\ (x+y) = 2\ (\angle PRO + \angle ORQ)$
> (i.e.) $\angle POQ = 2\ \angle PRQ$

எனவே தேற்றம் வட்டத்தில் ஒரு வில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம். அதன் மீதி வில்லில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தாங்கும் கோணத்தை போல் இரண்டு மடங்கு.

எடுத்துக்காட்டு 4: ‘O’ என்பது வட்டத்தின் மையம், PQ ஒரு விட்டம் எனில் $\angle PRQ = 90^o$ எனநிருபி. (அல்லது) ஓர் அரைவட்டத்தில் தாங்கும் கோணம் செங்கோணம் என நிருபிக்க.



தீர்வு : PQ ஒரு விட்டம் மற்றும் O என்பது வட்டமையம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \ \angle POQ = 180^o$ [நேர்க்கோணம்]

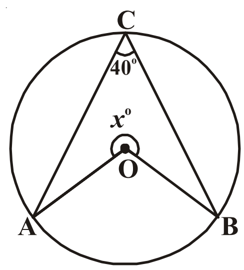
மேலும் $\angle POQ = 2 \ \angle PRQ$ [ஒருவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம், அது வட்டத்தின் மீதிவில்லில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்கு]

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

எடுத்துக்காட்டு 5: அடுத்துள்ள படத்தில் x° ன் மதிப்பைக் காண்.

தீர்வு : $\angle ACB = 40^{\circ}$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\angle AOB = 2 \ \angle ACB = 2 \times 40^{\circ} = 80^{\circ}$



$\because \quad x^{\circ} + \angle AOB = 360^{\circ}$

$\because \quad x^{\circ} = 360^{\circ} - 80^{\circ} = 280^{\circ}$

12.4.2 ஒரு வட்டத்துண்டில் உள்ள கோணங்கள் :

ஒரு வட்டத்தின் ஒருவில் ஒரே வட்டத்துண்டில் ஏற்படும் கோணங்களைப் பற்றி விவாதிப்போம்.

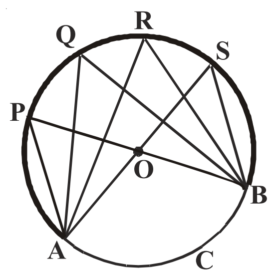
ஒரு வட்டத்தின் மையம் ‘O’ மற்றும் ABஎன்பது சிறிய வில் என எடுத்துக்கொள். (படத்தைப்பார்) P, Q, R, S என்பவை ABன் பெரிய வில்லில் அல்லது வட்டத்தின் மீதிவில்லில் உள்ள புள்ளிகள் என்க. வில் ABன் முனைப்புள்ளிகளை P,Q,R,S உடன் இணை. இவை $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ $\angle ASB$ என்னும் கோணங்களை ஏற்படுத்துகின்றன.

$\because \quad \angle AOB = 2\angle APB$ (ஏன்?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (ஏன்?)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (ஏன்?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (ஏன்?)



எனவே $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

இதிலிருந்து ஒருவில் ஒரே வட்டத்துண்டில் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் சமம்.

குறிப்பு : மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் P,Q,R,S மேலும் A,B என்பவை ஒரே வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள். இவற்றை என்னவென்று அழைக்கிறோம். ஒரே வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகளை ஒரு வட்டப்புள்ளிகள் என்கிறோம்.

இந்த தேற்றத்தின் மறுதலையை கீழ்கண்டவாறு கூறலாம்.

தேற்றம் 12.4 : ஒரு வட்டத்தில் மேல் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்தண்டு அதே பக்கத்தில் மற்ற இரு புள்ளிகளில் சமமான கோணத்தை தாங்குமானால், அந்த நான்கு புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மேல் அமையும். (அதாவது அவை ஒரு வட்டப்புள்ளிகள்).

தரவு : A மற்றும் B புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு $\overline{AB}$ ன் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த இரண்டு கோணங்கள் $\angle ACB$ மற்றும் $\angle ADB$ ஆகும்.

நிரூபிக்க : A,B,C,D என்பவை ஒரே வட்டத்தின் மேல் அமைந்துள்ள புள்ளிகள்.

அமைப்பு : ஒரே கோட்டில் அமையாத A,B,C, என்னும் மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லுமாறு ஒரு வட்டம் வரைக.

நிரூபணம் : D என்பது வட்டத்தின் மேல் இல்லை என்று கொள்வோம்.

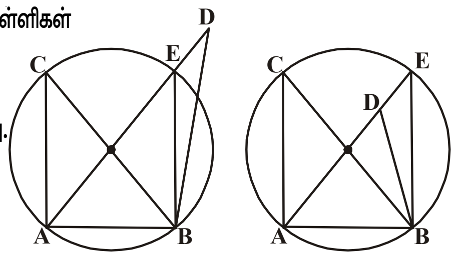
E என்பது ADஐ வெட்டும் புள்ளி (அல்லது ADன் நீட்சியை வெட்டும்புள்ள) எனக் கொள்வோம்.

A,B,C மேலும் E என்பவை ஒரே வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள்

எனில் $\angle ACB = \angle AEB$ (ஏன்?)

ஆனால் $\angle ACB = \angle ADB$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

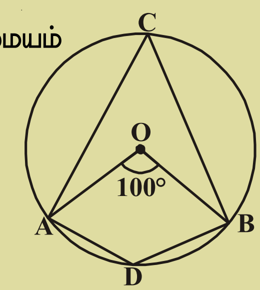
எனவே $\angle AEB = \angle ADB$

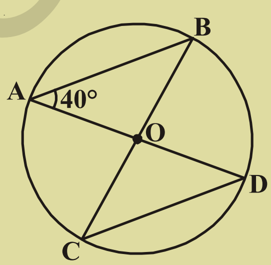


E என்னும் புள்ளி Dன் மேல் பொருந்தினால் ஒழிய இது சாத்தியமல்ல. எனவே A,B,C,D என்பவை ஒரே வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் (ஏன்?)

பயிற்சி - 12.4

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் 'O' என்பது வட்டத்தின் மையம் $\angle AOB = 100^{\circ}$ எனில் $\angle ADB$ ஐக் கண்டுபிடி.

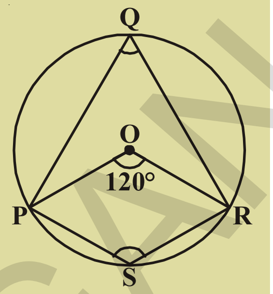


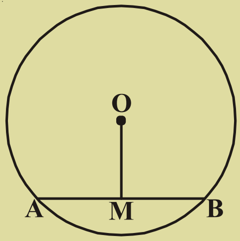


2. அடுத்துள்ள படத்தில் $\angle BAD = 40^{\circ}$ எனில் $\angle BCD$ ஐக் கண்டுபிடி.

3. படத்தில் O என்பது வட்டமையம் $\angle POR = 120^{\circ}$ எனில் $\angle PQR$, $\angle PSR$ஐக் கண்டுபிடி.

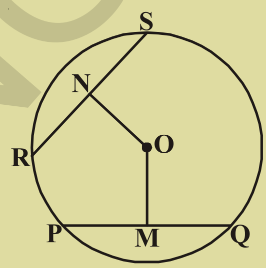
4. ஓர் இணைகரம் வட்டநாற்கரம் எனில் அது ஒரு செவ்வகம். இதை நிரூபி.

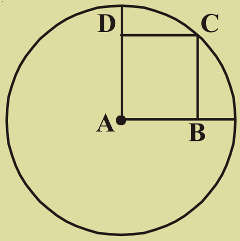




5. படத்தில் 'O' என்பது வட்டமையம். $OM = 3$செ.மீ, $AB = 8$செ.மீ எனில் வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.

6. படத்தில் 'O' என்பது வட்டமையம். OM, ON என்பவை வட்டமையத்திலிருந்து PQ, RS என்னும் நாண்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடுகள். $OM = ON$ மேலும் $PQ = 6$செ.மீ எனில் RSஐக் கண்டுபிடி.

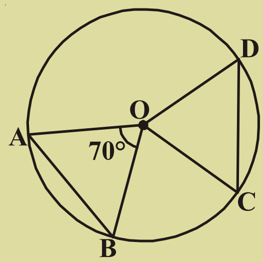




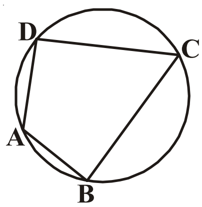
7. A என்பது வட்டத்தின் மையம். மற்றும் ABCD என்பது ஒரு சதுரம் $BD = 4$செ.மீ எனில் வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.

8. ஏதேனும் ஒரு ஆரத்துடன் ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இரண்டு நாண்களை வரைக.

9. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் 'O' என்பது வட்டமையம் மேலும் AB, CD என்பவை சமமான நாண்கள். $\angle AOB = 70^{\circ}$ எனில் ΔOCDன் கோணங்களை எழுது.



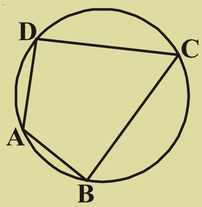
12.5 வட்ட நாற்கரம்



கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், நாற்கரம் A,B,C,Dன் உச்சிகள் ஒரே வட்டத்தின் மேல் அமைந்தால் நாற்கரம் A,B,C,Dஐ வட்ட நாற்கரம் என்கிறோம்.

செயல்பாடு

ஒரு தாளின் மீது வட்டத்தை வரைக. அந்த வட்டத்தின் மேல் A,B,C,D என்னும் நான்கு புள்ளிகளைக்குறி. A,B,C,D என்னும் நாற்கரத்தை வரைக. அவற்றின் கோணங்களை அளந்து அதை அட்டவணையில் எழுது. இதே விதமாக இன்னும் மூன்று முறை செய்க.

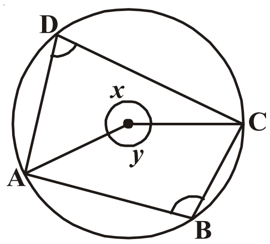


வ.எண்	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						

இந்த அட்டவணையிலிருந்து என்ன அறிகிறாய்?

தேற்றம் 12.5 : ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் ஒரு ஜோடி எதிர்கோணங்கள் மிகைநிரப்பி.

தரவு : ABCD **ஒரு வட்டநாற்கரம்**



நிரூபிக்க : $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

நிரூபணம் : $\angle D = \frac{1}{2} \angle y$ (**ஏன்**?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2} \angle x$ (**ஏன்**?) ..... (ii)

(i), (ii)**ஐக் கூட்டு**

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle x$$

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}(\angle y + \angle x)$$

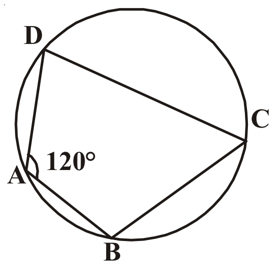
$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

இவ்வாறே $\angle A + \angle C = 180°$

எடுத்துக்காட்டு 6: கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $\angle A = 120^{\circ}$ எனில் $\angle C$ஐக் கண்டுபிடி?

தீர்வு : ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம்



எனவே $\angle A + \angle C = 180^{\circ}$

$120^{0} + \angle C = 180^{\circ}$

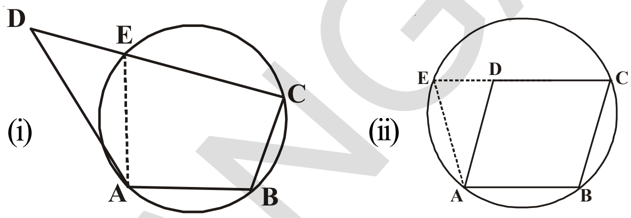
எனவே $\angle C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$

மேற்கண்ட தேற்றத்தின் மறுதலை என்ன?

ஒரு ஜோடி எதிர்கோணங்களின் மொத்தம் 180^{0},எனில் அந்த நாற்கரம் வட்டநாற்கரமாகும்.

மறுதலையும் உண்மையாகிறது.

தேற்றம்-12.6 : ஒரு நாற்கரத்தின் ஏதேனும் ஒரு ஜோடி எதிர்கோணங்களின் மொத்தம் 180^{o}, எனில் அது ஒரு வட்டநாற்கரம்.



தரவு : ABCD ஒரு வட்டநாற்கரம் இதில்

$\angle ABC + \angle ADC = 180^{o}$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^{o}$

நிருபிக்க : ABCD**ஒரு வட்டநாற்கரம்**

அமைப்பு : ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகளில் ABCD **வழியே ஒரு வட்டம் வரை. இந்த வட்டம்** D **வழியே சென்றால் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. ஏனெனில்** ABCD **என்பவை ஒரே வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். ஆனால் வட்டம்** D**வழியே செல்லவில்லை எனில் அது** $\overline{CD}$ ன் நீட்சியை E ல் வெட்டுகிறது. படம்(ii) $\overline{AE}$ ஐ வரைக.

நிருபணம் : ABCE ஒரு வட்டநாற்கரம் (அமைப்பு)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^{o}$ (வட்டநாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களின் மொத்தம்)

ஆனால் $\angle ABC + \angle ADC = 180^{o}$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

ஆனால் இதில் ஒன்று ΔADE ன் வெளிக்கோணம், மற்றொன்று அதன் உள் எதிர்கோணம்.

ஒரு வெளிக்கோணம் எப்போதும் ஏதேனும் ஒரு உள்ளெதிர் கோணத்தை விடபெரியது.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ என்பது ஒரு முரண்பாடு

எனவே நாம் எடுத்துக்கொண்ட கூற்றான, A, B, C வழியே செல்லும் வட்டம் D வழியே செல்லவில்லை என்பது மெய்யல்ல.

எனவே A,B,C, வழியே செல்லும் வட்டம் D வழியாகவும் செல்கிறது.

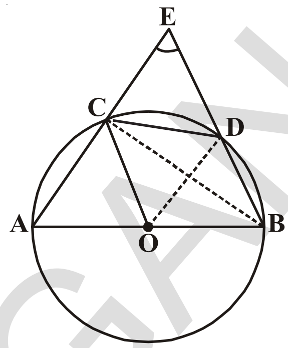
எனவே A, B, C,D என்பவை ஒரே வட்டத்தின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள்.

எனவே A, B, C, D ஒரு வட்ட நாற்கரம்

எடுத்துக்காட்டு 7: கொடுத்துள்ள படத்தில் $\overline{AB}$ என்பது வட்டத்தின் விட்டம், $\overline{CD}$ என்பது வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு சமமான நாண். $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ என்பவை E ல் வெட்டுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. $\angle AEB = 60°$ என நிருபி.

தீர்வு : OC, OD, BC ஐச் சேர்.

ΔODC என்பது சமபக்க முக்கோணம் (ஏன்?)



எனவே, $\angle COD = 60°$

இப்போது, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (ஏன்?)

இதிலிருந்து $\angle CBD = 30°$

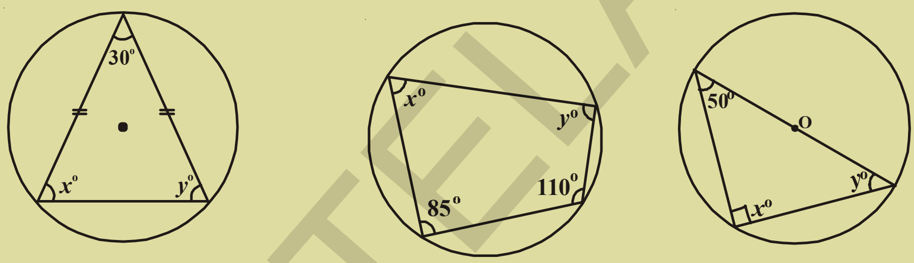
இதிலிருந்து $\angle ACB = 90°$ (ஏன்?)

எனவே, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

இதிலிருந்து $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, அதாவது $\angle AEB = 60°$

பயிற்சி 12.5

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட படங்களில் x, yன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.



(i) (ii) (iii)

2. நாற்கரம் A, B, C,Dல் A,B,C, எனும் உச்சிகள் வட்டத்தின் மேல் உள்ளன. மேலும் $\angle A + \angle C = 180°$, எனில் D என்னும் உச்சியும் அதை வட்டத்தின் மேல் உள்ளது என நிருபி.

3. ஒரு வட்ட சாய்சதுரம் ஒரு சதுரம் என நிருபி.

4. கீழ்கண்ட ஒவ்வொன்றையும் வட்டம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட படத்தை வரைக. ஏதேனும் வட்டத்தில் வரைய முடியாத பல கோணம் எனில் வரையமுடியாது என எழுதுக.

(அ) செவ்வகம்

(ஆ) சாய்சதுரம்

(இ) விரிகோண முக்கோணம்

(ஈ) செவ்வகம் அல்லாத இணைகரம்

(உ) இருசமபக்க குறுங்கோண முக்கோணம்

(ஊ) $\overline{PR}$ ஐ வட்டத்தின் விட்டமாக உடைய PQRS என்னும் நாற்கரம்.

இதுவரை கற்றவை

- ஒரு தளத்தில் நிலையான புள்ளியிலிருந்து நிலையான தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் தொகுப்பு வட்டம் எனப்படும். நிலையான புள்ளியை வட்டமையம் மற்றும் நிலையான தூரத்தை வட்டத்தின் ஆரம் என்கிறோம்.
- வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை நாண் என்கிறோம்.
- நாண்களில் மிகப்பெரியதும், மற்றும் வட்டமையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் விட்டம் ஆகும்.
- ஒரே ஆரத்தையுடைய வட்டங்கள் சர்வசம வட்டங்கள் எனப்படும்
- ஒரே வட்டமையத்தையும் வெவ்வேறு ஆரங்களையும் உடைய வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் ஆகும்.
- ஒரு விட்டம் வட்டத்தை இரண்டு அரை வட்டங்களாகப்பிரிக்கிறது.
- வட்டத்தின் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளின் மத்தியில் உள்ள பகுதி வில் எனப்படும்.
- ஒரு வட்டத்தின் ஒரு வில் மற்றும் ஒரு நாணினால் அடைவுப்பட்ட வட்டத்தின் பகுதி வட்டத்துண்டு ஆகும். வில்லானது சிறிய வில்லானால் அது சிறிய வட்டத்துண்டு எனவும், வில்லானது பெரியவில் எனில் அது பெரிய வட்டத்தண்டு எனவும் அழைக்கப்படும்.
- ஒரு வில் மற்றும் வில்லின் முனைப்புள்ளிகளில் உள்ள ஆரத்தால் அடைவுப்பட்ட வட்டத்தின் பகுதி வட்டகோணப்பகுதி எனப்படும்
- சமமான நாண்கள் வட்டமையத்தில் சமமான கோணங்களைத் தாங்கும்
- ஒரே வட்டத்துண்டில் உள்ள கோணங்கள் சமம்
- ஓர் அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் செங்கோணம்
- இரண்டு நாண்கள் வட்டமையத்தில் சமமான கோணங்களை ஏற்படுத்தினால் அவை சர்வசமம்
- ஒரு வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அதை இருசமக்கூறிடும். அதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.
- ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம் தான் வரையமுடியும்
- ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் வழியே செல்லும் வட்டம் சுற்றுவட்டம் எனப்படும்
- சமமான நாண்கள் வட்டமையத்திலிருந்து சமமான தூரத்தில் இருக்கும் மறுதலையாக வட்டமையத்திலிருந்து சமமான தூரத்தில் உள்ள நாண்கள் சமமான நீளமுள்ளவை.
- ஒருவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அதன் மீதி வில் வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப்போல் இருமடங்கு.
- ஒருவில் வட்டத்தில் 90^{o} ஐ தாங்கினால் அது ஓர் அரைவட்டம்.
- இரண்டு புள்ளியை இணைக்கும் நாண் ஒரே வட்டத்துண்டில் சமமான கோணங்;களைத் தாங்கினால் அந்த நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள்.
- ஒரு வட்டநாற்கரத்தின் ஒரு ஜோடி எதிர் கோணங்களின் மொத்தம் மிகை நிரப்பி.

13 செயல்முறை வடிவியல்

13.1 அறிமுகம்

கோட்டுத்துண்டு, கோணம், முக்கோணம், நாற்கரம் போன்ற வடிவியல் படங்களை வரைவதற்கு சில வடிவியல் கருவிகள் அவசியம். உங்களிடம் உள்ள வடிவியல் பெட்டியில் ஒரு அளவுகோல் ஒரு ஜோடி மூலைமட்டங்கள், ஒரு கவை, ஒரு கவராயம், ஒரு பாகைமாணி போன்றவை இருக்கும்.

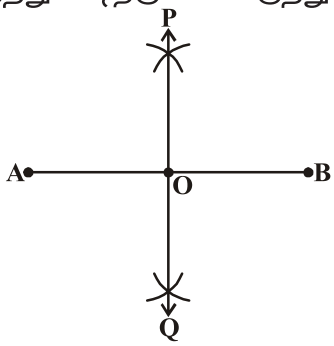
சாதாரணமாக இக்கருவிகள் அனைத்தும் படங்கள் வரைவதற்கு தேவைப்படுகிறது. ஆனாலும் வடிவியல் படங்களை வரைவதற்கு முக்கியமாக அளவுகள் இல்லாத உருட்டுக்கட்டை (ruler) மற்றும் பாகைமாணி ஆகிய இரண்டு கருவிகளை பயன்படுத்துகிறோம். நாம் முன் வகுப்புகளில் முக்கோணம் வரைவதற்கும், நாற்கரம் வரைவதற்கும் அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தை பயன்படுத்தினோம். சில சமயங்களில் அவசியம் ஏற்பட்டால் அளவுகோலையும் பாகைமானியையும் பயன்படுத்திக் கொண்டோம். கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு செய்ய முடியாத சில செயல்முறைகள் இருக்கின்றன. முக்கோணத்தின் 3 அளவுகள் தெரிந்தாலும் அவற்றை நேரடியாக பயன்படுத்த வாய்ப்பிருக்காது. நமக்கு தேவையான அளவுகளை எவ்வாறு தேர்ந்தெடுப்பது, செயல்முறையை எவ்வாறு முழுமை செய்வது என்பதை இந்த அத்தியாயத்தில் தெரிந்துகொள்வோம்.

13.2 அடிப்படை செய்முறை

(i) ஒரு கோட்டுத்துண்டுக்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைதல் (ii) கொடுக்ககப்பட்ட கோணங்கள் 30°, 45°, 60°, 90°, 120° போன்றவற்றிற்கு, அல்லது ஏதாவது ஒரு கோணத்திற்கு கோண இருசமவெட்டி கோட்டை வரைதல் ஆகியவற்றை நீங்கள் கீழ் வகுப்புகளில் தெரிந்துகொண்டீர்கள். ஆனால் இந்த செயல்முறைகளுக்கான சரியான காரணங்களை ஆராயவில்லை. இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் ஒவ்வொரு செயல்முறையையும் பகுப்பாய்வு செய்து, வரைந்து, அதை தகுந்த நிரூபணம் மூலம் நிரூபிப்போம்.

13.2.1 கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டுத்துண்டிற்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 1: AB எனும் கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டுத்துண்டிற்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைந்து, செய்முறையை தர்க்கமாக உறுதிசெய்க.



தீர்வு : செய்முறைப்படிகள் அல்லது வரைமுறைப்படிகள்

படி 1 : நேர்க்கோட்டுத்துண்டு AB யை வரைக.

படி 2 : A ஐ மையமாகவும் $\frac{1}{2}\overline{AB}$ ஐ விட அதிக ஆரத்துடன் ABகோட்டுத்துண்டிற்கு இரு புறங்களிலும் ஒரு வில் வரைக.

படி 3 : B யை மையமாகக் கொண்டு அதே ஆரத்துடன் ஏற்கனவே வரைந்த அவ்விரண்டு வில்களையும் வெட்டும்படியாக வரைக.

படி 4 : வெட்டுப்புள்ளிகளை P, Q என குறித்து, அவற்றை இணைக்கவும்.

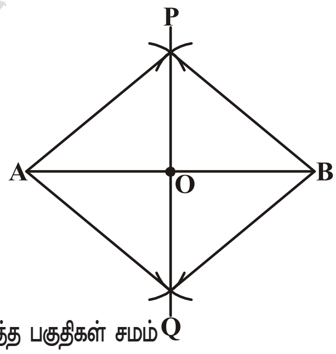
படி 5 : PQ, $\overline{AB}$ ஐ Oவில் வெட்டுகிறது என்க. எனவே AB கோட்டிற்கு தேவையான செங்குத்து இருசமவெட்டி POQ ஆகும். மேற்கண்ட செய்முறை படிகளிலிருந்து AB கோட்டிற்கு PQ ஒரு செங்குத்து இருசமவெட்டியாகும் என்பதை காரணங்களுடன் எவ்வாறு நிரூபிப்பாய்?

செய்முறை படம் வரைந்து A புள்ளியை PQபுள்ளிகளுடன், B புள்ளியை PQ புள்ளிகளுடனும் இணைக்க வேண்டும்.

முக்கோண சர்வசம பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு நாம் இந்த கூற்றை நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம் :

படிகள்	**காரணங்கள்**
ΔPAQ, ΔPBQ களில்	எடுத்துக்கொண்ட முக்கோணங்கள்
$AP = BP$; $AQ = BQ$	சமமான ஆரங்கள்
$PQ = PQ$	பொதுப்பக்கம்
$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	ப.ப.ப. பண்பு
ஆகவே $\angle APO = \angle BPO$	சர்வசம முக்கோணங்களில் ஒத்த பகுதிகள் சமம்
இப்போது ΔAPO, ΔBPOகளில்	எடுத்துக்கொண்ட முக்கோணங்கள்
$AP = BP$	முன்பு போலவே சமமான ஆரங்கள்
$\angle APO = \angle BPO$	மேலே நிரூபிக்கப்பட்டது
$OP = OP$	பொதுப்பக்கம்
$\therefore \Delta APO \cong \Delta BPO$	ப.கோ.ப. பண்பு
ஆகவே $OA = OB$, $\angle APO = \angle BPO$	சர்வசம முக்கோணங்களில் ஒத்த பகுதிகள் சமம்
$\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$	ஒரு கோட்டுஜோடி
$\angle AOP = \angle BOP = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$	மேற்கண்ட படிகளின்
ஆகவே PO அதாவது POQ கோடு AB கோட்டிற்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி	முடிவிலிருந்து நிரூபிக்கப்பட்டது.



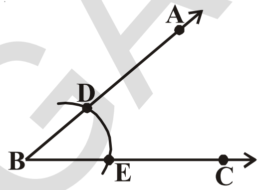
13.2.2 கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு இருசமவெட்டி வரைதல்

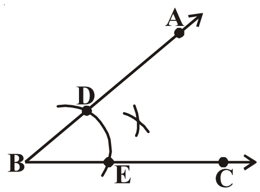
எடுத்துக்காட்டு 2: கொடுக்கப்பட்ட கோணம் $\angle ABC$க்கு இருசமவெட்டி வரைக.

தீர்வு : செய்முறைப்படிகள்

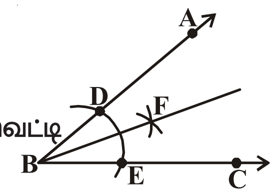
படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட கோணம் $\angle ABC$ ஐ வரைக.

படி 2 : B ஐ மையமாகவும் ஏதேனும் ஒரு ஆரத்துடனும், படத்தில் காட்டியவாறு $\overrightarrow{BA}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC}$ கதிர்களை முறையே D மற்றும் Eல் வெட்டுமாறு ஒரு வில் வரைக.



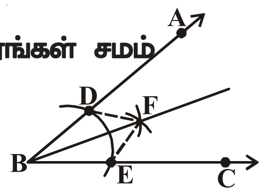


படி 3 : E,D புள்ளிகளை மையங்களாகக் கொண்டு சமமான ஆரத்துடன் Fல் வெட்டும்படி இரண்டு வில்கள் வரைக.



படி 4 : BF கதிரை வரைக. இதுவே $\angle ABC$ ன் கோண இருசமவெட்டி ஆகும். மேற்கண்ட செய்முறையயின் தர்க்க நிரூபணத்தை ஆராய்வோம். D,F புள்ளிகளையும், E, F புள்ளிகளையும் இணைக்கவும். முக்கோணம் சர்வசம பண்புகளை ஆதாரமாக கொண்டு கீழ்கண்டவாறு நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம் :

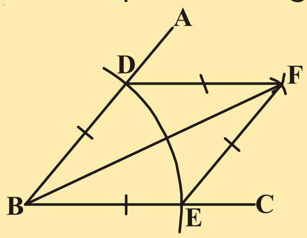


படிகள்	**காரணங்கள்**
Δ BDF, Δ BEF **களில்**	**எடுத்துக்கொண்ட முக்கோணங்கள்**
BD = BE	**வரைந்த வில்களின் ஆரங்கள் சமம்**
DF = EF	**சமமான ஆரங்கள்**
BF = BF	**பொதுப்பக்கம்**
$\therefore \Delta BDF \cong \Delta BEF$	**ப.ப.ப. விதி**
ஆகவே $\angle DBF = \angle EBF$	சர்வசம முக்கோணங்களில் ஒத்த பகுதிகள் சமம்
ஆகவே BF **என்பது** $\angle ABC$**ன் இருசமவெட்டி**	**என நிரூபிக்கப்பட்டது.**

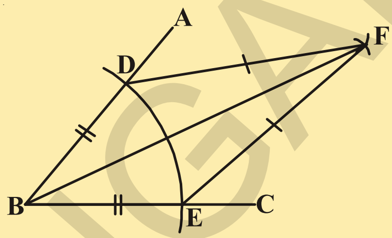
முயன்று பார்

BEFD என்ற நாற்கரங்களின் பக்கங்கள், கோணங்கள், மூலைவி ட்டங்கள் ஆகியவற்றை கவனித்து அவற்றின் பெயர்களை எழுதுக. அவ்வாறே அவற்றின் பண்புகளையும் எழுதுக.

1.



2.

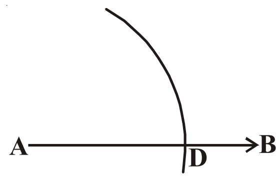


13.2.3 கொடுக்கப்பட்ட கதிரின் ஆரம்பப்புள்ளியில் 60° கோணத்தை அமைத்தல்.

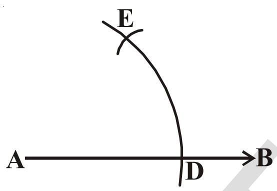
எடுத்துக்காட்டு 3: ஆரம்பப் புள்ளி A விலிருந்து AB கதிரை வரைந்து, $\angle BAC = 60^\circ$.இருக்குமாறு AC கதிரை வரைக.

தீர்வு : செய்முறைப்படிகள்

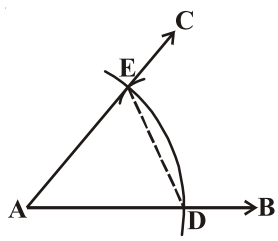
படி 1 : AB கதிரை வரைந்து A ஐ மையமாக கொண்டு ஏதேனும் ஒரு ஆரத்திற்கு AB யை Dபுள்ளியில் வெட்டுமாறு ஒரு வில் வரைக.



படி 2 : D மையமாகவும் அதே ஆரத்துடன் முதலில் வரைந்தவில்லை E புள்ளியில் வெட்டுமாறு மற்றொரு வில் வரைக. (படத்தில் காட்டியபடி)



படி 3 : AC கதிரை E புள்ளி வழியே செல்லுமாறு வரைந்தால் $\angle BAC$ என்பது தேவையான 60° கோணமாகும். நாம் செய்த செய்முறையை நிரூபிக்க வேண்டுமெனில் படத்திலுள்ள D, E புள்ளிகளை இணைக்க வேண்டும். நிரூபணத்தை கீழ்கண்டவாறு செய்யலாம்.



நாம் செய்த செய்முறையை நிரூபிக்க வேண்டுமெனில் படத்திலுள்ள D, E புள்ளிகளை இணைக்க வேண்டும். நிரூபணத்தை
கீழ்கண்டவாறு செய்யலாம்.

நிரூபணம் :

படிகள்	**காரணங்கள்**
Δ ADE	எடுத்துக்கொண்ட முக்கோணம்
AE = AD	வரைந்த வில்லின் ஆரங்கள் சமம்
AD = DE	சம ஆரமுள்ள வில்கள்
ஆகவே AE = AD = DE	ஒரே ஆரங்கள் கொண்ட அதே வில்
∴ Δ ADE ஓர் சமபக் முக்கோணம்	அனைத்து பக்கங்களும் சமம்
Δ EAD = 60°	சமபக்க முக்கோணத்தில் ஒவ்வொரு கோணமும் 60°
$\angle BAC = \angle EAD$	$\angle BAC$.ன் பாகம் $\angle EAD$
$\angle BAC = 60^\circ$.	நிரூபிக்கப்பட்டது.

முயன்று பார்

ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியை குறிக்கவும். இப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு வட்ட ஆரத்திற்கு சமமான வில் ஒன்று அந்த வட்டத்தை வெட்டுமாறு வரைக. வெட்டிய புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு அதே வட்ட ஆரத்துடன் மறுபடியும் மற்றொரு வில் வரைக. இவ்வாறு செய்து கொண்டே சென்றால் அந்த வட்டத்தை எத்தனை பகுதிகளாக பிரிக்கமுடியும்? காரணம் கூறுக.

பயிற்சி - 13.1

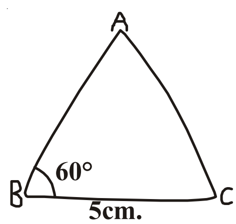
1. கொடுக்கப்பட்ட கதிரின் ஆரம்பப்புள்ளியில் கீழ்கண்ட கோணங்களை வரைந்து நிரூபிக்கவும்.
   (a) 90^{o} (b) 45^{o}
2. அளவுகோல், கவராயம் ஆகியவற்றின் உதவியுடன் கீழ்கண்ட கோணங்களை வரைந்து, அவற்றை பாகைமாணியால் அளந்து சரிபார்க்கவும்.
   (a) 30^{o} (b) $22\frac{1}{2}^{o}$ (c) 15^{o}
   (d) 75^{o} (e) 105^{o} f) 135^{o}
3. 4.5செ.மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து, அமைப்பை சரிபார்க்கவும்.
4. கொடுக்கப்பட்ட பக்கத்தையும், கோணத்தையும் ஆதாரமாகக் கொண்டு ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் வரைந்து, அமைப்பை சரிபார்க்கவும். (குறிப்பு : எந்த பக்க அளவையும், கோண அளவையும் எடுத்துக்கொண்டு நீங்கள் வரையலாம்)

13.3 முக்கோணங்கள் வரைதல் (சிறப்பு வகைகள்)

இதுவரை நாம் சில அடிப்படை செய்முறைகளை செய்து, அவற்றை நிரூபித்தோம். இப்போது நாம் சில சிறப்பு வகை அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சில முக்கோணங்கள் வரைதலை பார்ப்போம். முக்கோண சர்வசம பண்புகளான ப.கோ.ப., ப.ப.ப.; கோ.ப.கோ; செ.க.ப. ஆகியவற்றை நினைவிற்கு கொண்டு வரவும். இந்த விதிகளை பயன்படுத்தி முக்கோணங்கள் வரைதலை நீங்கள் 7ஆம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறீர்கள்.

ஒரு முக்கோணம் வரைய குறைந்தது 3 அளவுகள் தேவை என நமக்குத் தெரியும். ஆனாலும் சில நிலைகளில் இம்மூன்று அளவுகளைக் கொண்டு முக்கோணத்தை எளிதில் வரைய முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக இரண்டு பக்கங்கள், ஒரு கோணம் (உள்ளடங்கிய கோணமாக இல்லாதது) கொடுக்கப்பட்டால், முக்கோணத்தை எளிதில் வரைய முடியாது. இவ்வாறான வரைதலுக்கு பல எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்க முடியும். இவ்வாறான வகைகளில் நாம் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளோடு, ப.கோ.ப., ப.ப.ப, கோ.ப.கோ மற்றும் செ.க.ப. போன்றவைகளின் தேவைப்பட்ட சேர்பை பயன்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும்.

13.3.1 வரைமுறை : அடிபக்கம், அடிப்பக்க கோணம், மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மொத்தம் தரப்பட்டுள்ள போது முக்கோணம் வரைதல்.



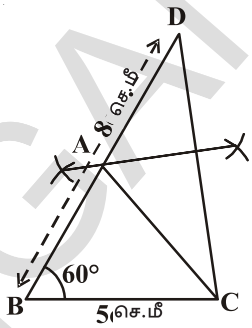
எடுத்துக்காட்டு 4: BC = 5செ.மீ., AB + AC = 8செ.மீ., $\angle ABC = 60^{o}$ அளவுகளைக் கொண்ட ΔABC வரைக.

தீர்வு : செய்முறைப்படிகள்

படி 1 : ΔABC க்கு மாதிரிபடம் வரைந்து கொடுத்த அளவுகளை குறிக்கவும். ($AB + AC$ = 8செ.மீ என எவ்வாறு குறிப்பாய்?)

மூன்றாம் முனைப்புள்ளி A வை எவ்வாறு குறிப்பாய்?

பகுப்பாய்வு : $AB + AC$ = 8 செ.மீ., ஆகவே BAவை BD = 8 செ.மீ உள்ளவாறு D வரை நீட்டு.



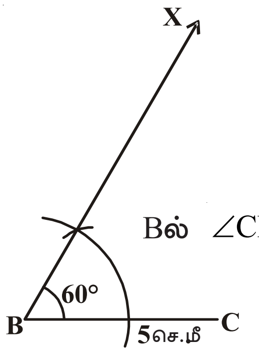
ஃ $BD = BA + AD = 8$ செ.மீ

ஆனால் $AB + AC = 8$ செ.மீ (கொடுக்கப்பட்டது)

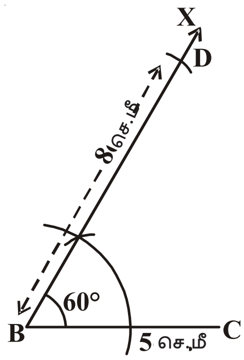
$\because \; AD = AC$

BD மீது Aவை குறிக்க நீ என்ன செய்வாய்?

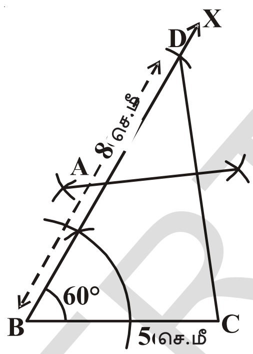
A புள்ளி C, D புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் இருப்பதால் BD ன் மேல் Aஐ குறிப்பதற்கு $\overline{CD}$ ன் செங்குத்து இருசமவெட்டியை வரை. $AB + AC = BD$ என எவ்வாறு நிரூபிப்பாய்?



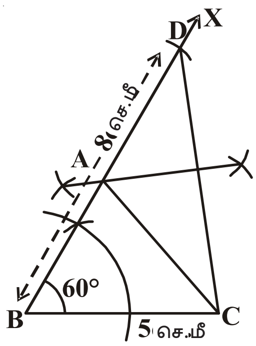
படி 2 : அடிபக்கம் $\overline{BC}$ = 5செ.மீ வரைந்து Bல் $\angle CBX = 60^\circ$ இருக்குமாறு அமைக்கவும்.



படி 3 : Bஐ மையமாக கொண்டு 8செ.மீ ஆரத்துடன் ($AB + AC = 8$ செ.மீ) $\overrightarrow{BX}$ ஐ Dல் வெட்டுமாறு ஒரு வில் வரைக.



படி 4 : C,D களைச் சேர். BDஐ Aல் வெட்டுமாறு CDக்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைக.



படி 5 : A, C புள்ளிகளை இணைப்பதால் நமக்கு தேவையான முக்கோணம் ABC ஏற்படும். இப்போது நாம் வரைமுறையை நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம் : **A புள்ளி** $\overline{CD}$ ன் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் மீது உள்ளது.

$$\because \; AC = AD$$

$$AB + AC = AB + AD$$
$$= BD$$
$$= 8 \text{ cm.}$$

ஆகவே நமக்குத் தேவையான ΔABC ஆகும்.

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

$BC=6$செ.மீ, $\angle B = 60^o$, $AB + AC = 5$செ.மீ. அளவுகளுடன் ΔABC யை வரைய முடியுமா? அப்படி வரைய முடியாவிட்டால் அதற்கான காரணங்களைக் கூறுக.

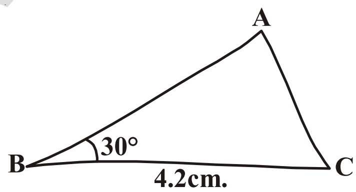
13.3.2 வரைமுறை : அடிபக்கம், அடிப்பக்க கோணம், மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வித்தியாசம் தரப்பட்டுள்ள போது முக்கோணம் வரைதல்

ΔABC ன் அடிப்பக்கம் BC அடிப்பக்க கோணம் $\angle B$ மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வித்தியாசம் $AB - AC$ இவ்வகையில் $AB > AC$ அல்லது $AC - AB$ இவ்வகையில் $AB<AC$ கொடுக்கப்பட்டால் ΔABC ஐ நீ வரையவேண்டும். ஆகவே நாம் இந்த இரண்டு வகை முக்கோணம் வரைதலை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் விவாதிப்போம்.

வகை (i) $AB > AC$ என்க

எடுத்துக்காட்டு 5: $BC = 4.2$ செ.மீ, $\angle B = 30^o$, மேலும் $AB - AC = 1.6$ செ.மீ அளவுகளுடைய ΔABC வரைக.

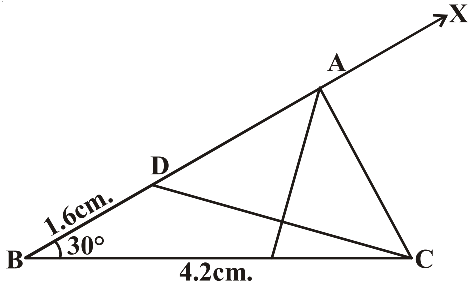
தீர்வு : செய்முறைப்படிகள்

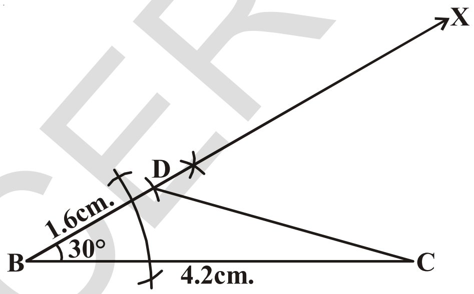


படி 1 : ΔABCக்கு மாதிரிப்படம் வரைந்து கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை குறிக்கவும்.

($AB - AC = 1.6$ செ.மீ அளவை எவ்வாறு குறிப்பாய்?)

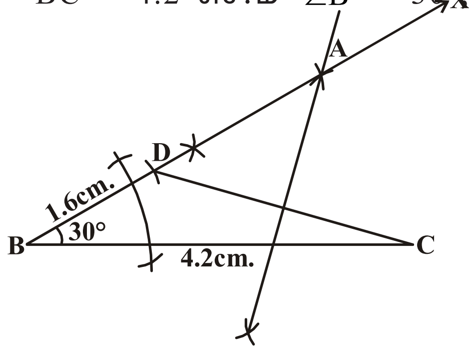
பகுப்பாய்வு : $AB - AC = 1.6$செ.மீ ஆகவே $AB > AC$ ஆகும். $AD = AC$ என்றவாறு AB மீது D எனும் புள்ளியை குறிக்க வேண்டும். இப்போது $BD = AB - AC = 1.6$ செ.மீ. CD புள்ளிகளை இணை. BD ன் நீட்சியின் மேல் முனை A ஐ குறிக்க, C, D ன் செங்குத்து இருசமவெட்டியை வரைக. AC ஐ இணை தேவையயான முக்கோணம் ABC ஆகும்.



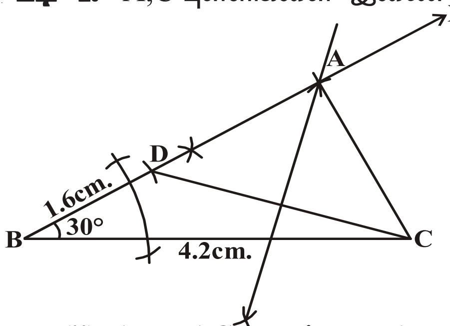


படி 2: ப.கோ.ப எனும் முக்கோண விதியின்படி $BC = 4.2$ செ.மீ $\angle B = 30^0$, $BD = 1.6$ செ.மீ. (அதாவது $AB - AC$) அளவுகளுடைய ΔBCD வரைக

படி 3 : CDன் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரை. அது BDX கதிரை A புள்ளியில் வெட்டும்.



படி 4: A,C புள்ளிகளை இணை ΔABC தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.



சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

எடுத்துக்காட்டில் கொடுத்த முக்கோண அளவுகளில் கோணம் $\angle B$ க்கு பதிலாக கோணம் $\angle C$ யைக் கொண்டு முக்கோணம் ஏற்படுமா? மாதிரிப்படம் வரைந்து அம்முக்கோணத்தை வரைக.

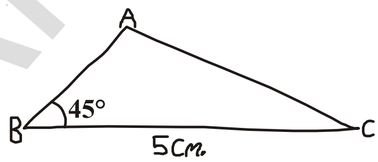
வகை (ii) $AB < AC$ எனக் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 6: $BC = 5$செ.மீ, $\angle B = 45^o$, மேலும் $AC - AB = 1.8$ செ.மீ அளவுகளுடன் ΔABC வரைக.

தீர்வு : வரைமுறைப்படிகள்

படி 1 : ΔABC க்கு மாதிரிப்படம் வரைந்து கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை குறி.

$AC - AB = 1.8$செ.மீ அளவை எவ்வாறு குறிப்பாய் என பகுப்பாய்க?



பகுப்பாய்வு : $AC - AB = 1.8$ செ.மீ ஆதலால் $AB < AC$, $AD = AC$ ஆக உள்ளவாறு AB ன் நீட்சியின் மேல் D ஐ காணவேண்டும்.

இப்போது $BD = AC - AB = 1.8$ செ.மீ ($\because$ $BD = AD - AB$ மேலும் $AD = AC$)

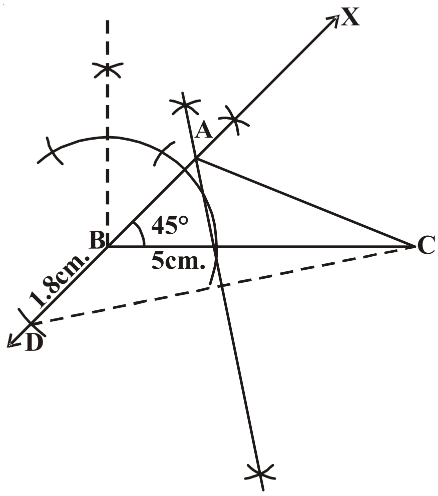
DC ன் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் மேல் A வைகான CD களை இணை.

படி 2 : $BC = 5$செ.மீ கோட்டுத்துண்டை வரைந்து $\angle CBX = 45°$ ஐ வரை.

B ஐ மையமாகவும், 1.8செ.மீ ஆரமாகவும் $(BD = AC - AB)$ கொண்டு XBன் நீட்சியை புள்ளி D ல் வெட்டுமாறு ஒரு வில்வரை.

படி 3 : D, C புள்ளிகளை இணைத்து அதற்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரை.

படி 4 : இது BX கோட்டை A புள்ளியில் வெட்டுகிறது. A,C புள்ளிகளை இணைத்தால் நமக்கு தேவையான முக்கோணம் ABC கிடைக்கும்.



இப்போது நாம் இந்த வரைமுறையை தீர்க்கமாக நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம் : ΔABC ல் DC ன் செங்குத்து இருசமவெட்டி மீது A புள்ளி உள்ளது. ஆகவே

$\therefore AD = AC$ ஆகும்

அதாவது $AB + BD = AC$

ஆகவே $BD = AC - AB$

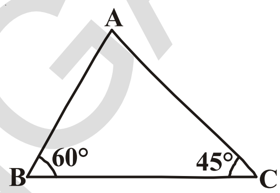
$= 1.8$ செ.மீ இதுவே நமக்கு தேவையான முக்கோணம் ABC ஆகும்.

13.3.3 வரைமுறை : முக்கோண சுற்றளவு, இரண்டு அடிப்பக்கக்கோணங்கள் தரப்பட்டுள்ள போது முக்கோணம் வரைதல்.

ΔABC ல் அடிப்பக்க கோணங்கள் $\angle B$, $\angle C$ மற்றும் அதன் சுற்றளவு $AB + BC + CA$, கொடுக்கப்பட்டால் அம்முக்கோணத்தை வரைக.

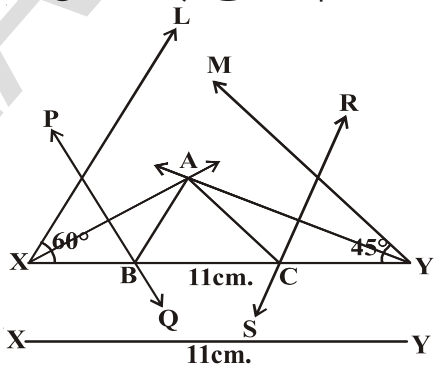
எடுத்துக்காட்டு 7: ΔABCல் $\angle B = 60^o$, $\angle C = 45^o$ $AB + BC + CA = 11$ செ.மீ. அளவுகளுடன் ΔABC வரைக.

தீர்வு : வரைமுறைப்படிகள்



படி 1 : ΔABCக்கு மாதிரிபடம் வரைந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளை குறிக்க வேண்டும். (முக்கோண சுற்றளவை எவ்வாறு குறிப்பாய்?)

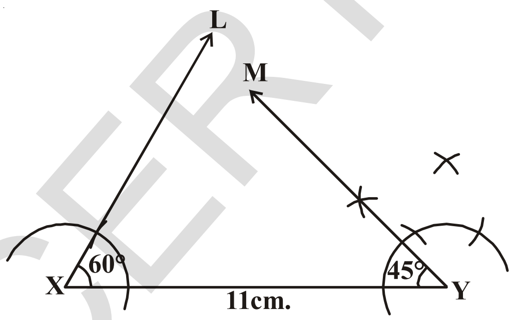
பகுப்பாய்வு : முக்கோண சுற்றளவு $AB + BC + CA$ க்கு சமமான அளவுள்ள கோட்டுத்துண்டு XY வரை. $\angle B$ க்கு சமமாக $\angle YXL$ ஐயும், $\angle C$ க்கு சமமாக $\angle XYM$ஐயும் வரைந்து, அவற்றிற்கு கோண இருசமவெட்டிகள் வரை. இவ்விரண்டு கோண இருசமவெட்டிகளும் A புள்ளியில் வெட்டுக்கொள்கின்றன. AXன் செங்குத்து இருசமவெட்டி XY யை B புள்ளியிலும், AY ன் செங்குத்து இருசமவெட்டி, XY யை C புள்ளியிலும் வெட்டுமாறு வரைக. A,B புள்ளிகளையும், A,C புள்ளிகளையும் இணைத்தால் நமக்கு தேவையான முக்கோணம் ABC ஏற்படும்.



படி 2: XY= 11 செ.மீ கோட்டுத்துண்டு வரைக.

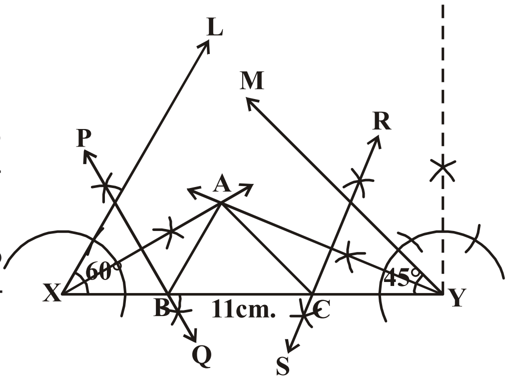
($XY = AB + BC + CA$ஆக இருக்கும்படி)

படி 3 : $\angle YXL = 60^o$, $\angle XYM = 45^o$ அளவுகளுடன் கோணங்களை வரைந்து, அவற்றிற்கு கோண இருசமவெட்டி வரைக.



படி 4 : இவ்விரண்டு கோண இருசமவெட்டிகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிக்கு A என பெயரிடவும்.

படி 5 : AX மற்றும் AYகளை இணை. $\overrightarrow{XY}$ யை முறையே B , C புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளுமாறு AX, AY களின் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைக. A,B புள்ளிகளையும், A, C புள்ளிகளையும் இணை. இதுவே நமக்கு தேவையான முக்கோணம் ABC ஆகும்.



இந்த வரைமுறையை நாம் கீழ்கண்டவாறு நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம் : AX ன் செங்குத்து இருசமவெட்டி PQ மீது B புள்ளி இருக்கிறது.

$\therefore$ XB = AB ஆகும். அவ்வாறே CY = AC ஆகும்.

இதிலிருந்து $AB + BC + CA = XB + BC + CY = XY$ என அறியலாம்

மீண்டும் $\angle BAX = \angle AXB$ ($\because$ ΔAXB ல் XB = AB மேலும்)

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$

(ΔABC ன் வெளிக்கோணம்)

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^{o}$.

இவ்வாறே $\angle ACB = \angle XYM = 45^{o}$ ஆகும்

$\because$ $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ ஆகும்.

முயன்றுபார்

இந்த முக்கோணத்தை நீங்கள் மற்றொரு முறையில் வரைய முடியுமா?

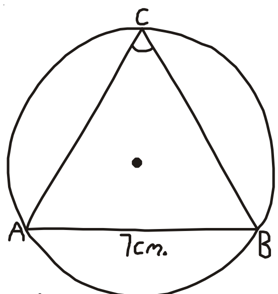
(குறிப்பு : $\angle YXL = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, $\angle XYM = \dfrac{45^\circ}{2} = 22\frac{1}{2}^\circ$ எனும் அளவுகளை எடுத்துக்கொள்ளவும்)

13.3.4 வரைமுறை : நாண், கோணம் தரப்பட்டுள்ள போது வட்டத்துண்டு வரைதல்.

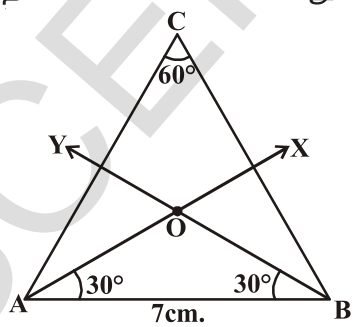
எடுத்துக்காட்டு 8: 7செ.மீ நீளமுள்ள வட்டநாண் மீது 60° கோணம் உள்ள வட்டத்துண்டு வரைக.

தீர்வு : வரைமுறைப்படிகள்

படி 1: ஒரு வட்டம் மற்றும் 60°கோணமுள்ள வட்டதுண்டின் (பெரிய வட்டத்துண்டு வரைய வேண்டும். ஏன்) மாதிரிப்படம் வரைக. மையம் இல்லாத வட்டத்தை வரைய முடியுமா?



பகுப்பாய்வு : ‘O’ வட்டமையம் என்க. AB என்பது கொடுக்கப்பட்ட நாண் என்க. ACB என்பது $C = 60^\circ$ கோணஅளவுள்ள தேவையான வட்டத்துண்டு என்க. C ல் கோணத்தை தாங்கும் வட்டவில் $\overset{\frown}{AXB}$ என்க.



$\angle ACB = 60^\circ$, ஆகவே $\angle AOB = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$ ஆகும்.

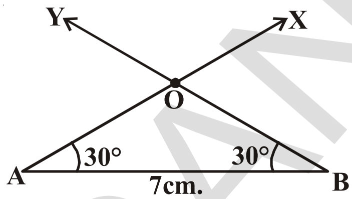
$\therefore$ ΔOAB,ல் OA=OB (சமமான ஆரங்கள்)

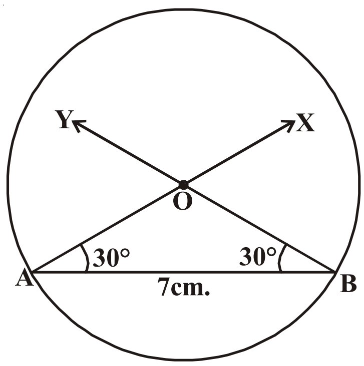
$\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

அதனால் நம்மால் ΔOAB வரைய முடியும். OA அல்லது OB க்கு சமமான ஆரமுள்ள வட்டம் வரை.

படி 2 : AB = 7செ.மீ. கோட்டுத்துண்டு வரைக.

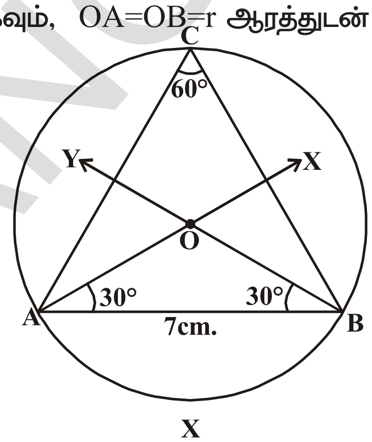
படி 3 : $\angle BAX = 30°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{AX}$ யும் $\angle YBA = 30°$ இருக்குமாறு $\overrightarrow{BY}$ யையும் வரை. அவை O புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.





(குறிப்பு : பாகைமாணியை பயன்படுத்தி 60° கோணம் வரைந்து, அதை இருசமக்கூறிட்டால் 30° கோணம் ஏற்படும்)

படி 4 : O வை மையமாகவும், OA=OB=r ஆரத்துடன் வட்டம் வரைக.



படி 5 : பெரிய வட்டவில்லின் மீது C புள்ளியை குறி. A, C புள்ளிகளையும், B, C, புள்ளிகளையும் இணை. $\angle ACB$ = 60° கிடைக்கும். இந்த வட்டத்துண்டை நமக்குத் தேவையான வட்டத்துண்டு ஆகும். இந்த வரைமுறையை கீழ்கண்டவாறு நிரூபிக்கலாம்.

நிரூபணம் : OA = OB (வட்ட ஆரங்கள்)

$$\angle OAB + \angle OBA = 30° + 30° = 60°$$

$$\angle AOB = 180° - 60° = 120°$$

$\overset{\frown}{AXB}$ வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 120°

$$\angle ACB = \frac{120°}{2} = 60°$$

இதுவே நமக்குத் தேவையான ACB வட்டத்துண்டு ஆகும்.

முயன்று பார்

வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணம் செங்கோணம் எனில் அது எவ்வாறான வட்டத்துண்டு ஆகும்? படம் வரைந்து காரணங்களைக்கூறுக.

பயிற்சி - 13.2

1. BC = 7 செ.மீ, $\angle B = 75^{\circ}$, AB + AC = 12 செ.மீ அளவுகளுடன் முக்கோணம் ABC வரைக.
2. QR = 8 செ.மீ, $\angle Q = 60°$, PQ - PR = 3.5 செ.மீ அளவுகளுடன் ΔPQR வரைக.
3. $\angle Y = 30^{\circ}$, $\angle Z = 60^{\circ}$, XY + YZ + ZX = 10 செ.மீ அளவுகளுடன் ΔXYZ வரைக.

4. அடிப்பக்கம் 7.5செ.மீ, கர்ணம் மற்றும் மற்றொரு பக்கம் இவ்விரண்டின் மொத்தம் 15செ.மீ அளவுகளுடன் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை வரைக.
5. 5செ.மீ அளவுடன் நாண் வரைந்து, அதன் மீது கீழ்கண்ட கோணங்களை பெற்றுள்ளவாறு வட்டத்துண்டுகளை வரைக.

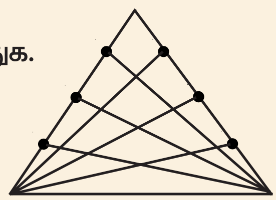
   i. 90° ii. 45° iii. 120°

நாம் கற்றவை

1. வடிவியல் படங்கள் அமைப்பிற்கு நாம் முக்கியமாக இரண்டு கருவிகளை பயன்படுத்துவோம். அவை 1. அளவுகளற்ற உருட்டுக்கட்டை 2. கவராயம்.
2. கீழ்கண்டவற்றிற்கு வடிவியல் படங்கள் வரைந்து, அவற்றை தர்க்கமாக நிரூபித்தல்
   - கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைதல்.
   - கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு கோண இருசமவெட்டி வரைதல்.
   - கொடுக்கப்பட்ட கதிரின் ஆரம்பப்புள்ளியில் 60° கோணம் வரைதல்.
3. அடிப்பக்கம், அடிப்பக்க கோணம், மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மொத்தம் தரப்பட்டுள்ள போது முக்கோணம் வரைதல்.
4. அடிப்பக்கம், அடிப்பக்க கோணம், மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வித்தியாசம் தரப்பட்டுள்ள போது முக்கோணம் வரைதல்.
5. முக்கோண சுற்றளவு, இரண்டு அடிப்பக்க கோணங்கள் தரப்பட்டுள்ள போது முக்கோணம் வரைதல்.
6. நாண், கோணம் தரப்பட்டுள்ள போது வட்டத்துண்டு வரைதல்.

மூளைக்கு வேலை

கீழ்கண்ட படத்தில் மொத்தம் எத்தனை முக்கோணங்கள் உள்ளன? "செவ" எனும் கணிதமேதையை கௌரவபடுத்தும் நோக்கத்துடன் பெரிடப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தின் சூத்திரத்தை எழுதுக.



குறிப்பு : ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் எதிர்பக்கத்திற்கு வரைந்த கோட்டுத்துண்டுகளின் எண்ணிக்கை n என கொள்ளவும்.)

14

நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவு கோட்பாடு என்பது கணக்கிடுவதற்கான பொது நிகழ்வுகளின் சுருக்கமாகும்.

– பியரி–சைமன்லாப்லாஸ்

14.1 அறிமுகம்

சிவா மற்றும் விவேக் வகுப்பு தோழர்கள். ஒரு நாள் உணவு இடைவெளியின் போது கீழ்கண்டவாறு பேசிக்கொண்டனர்.

அவர்களின் உரையாடலை உற்றுநோக்குங்கள்.

சிவா : வணக்கம் விவேக், இன்று மாலை நீ என்ன செய்யப்போகிறாய்?

விவேக் : தொலைக்காட்சியில் இந்தியா, ஆஸ்திரேலியா அணிகளுக்கிடையே நடக்கும் கிரிக்கெட் போட்டியை பார்க்கும் வாய்ப்பு அதிகம்.

சிவா : சுண்டுதலில் யார் வெற்றிபெறுவார்கள் என நினைக்கிறாய்?

விவேக் : இரு அணிகளும் சுண்டுதலில் வெற்றிபெறும் வாய்ப்பு சமமாக உள்ளது. நீ உங்கள் வீட்டில் கிரிக்கெட் போட்டியை பார்ப்பாயா?

சிவா : எங்கள் வீட்டில் கிரிக்கெட் போட்டியை பார்க்கும் வாய்ப்பு இல்லை. ஏனெனில் எங்களுடைய தொலைக்காட்சிப்பெட்டி பழுதடைந்துள்ளது.

விவேக் : அப்படியா! என் வீட்டிற்கு வா! நாமிருவரும் சேர்ந்து கிரிக்கெட் போட்டியை பார்க்கலாம்.

சிவா : வீட்டுவேலை முடித்துவிட்டு வருகிறேன்.

விவேக் : நாளை அக்டோபர் 2 காந்திஜெயந்தியை முன்னிட்டு விடுமுறை அல்லவா! உன்னுடைய வீட்டுவேலைகளை நாளை ஏன் செய்யகூடாது?

சிவா : இல்லை, முதலில் வீட்டுவேலை செய்தபிறகே கிரிக்கெட் பார்ப்பேன்.

விவேக் : சரி.

மேலுள்ள உரையாடலில் இருந்து பின்வரும் கூற்றுகளை கவனியுங்கள்:

(i) இந்தியா, ஆஸ்திரேலியா அணிகளுக்கிடையே நடக்கும் கிரிக்கெட் போட்டியை பார்க்கும் **வாய்ப்பு அதிகம்.**

(ii) எனக்கு கிரிக்கெட் போட்டியை பார்க்கும் **வாய்ப்பு இல்லை.**

(iii) சுண்டுதலில் வெற்றிபெற இரண்டு அணிகளுக்கும் **சமமான வாய்ப்பு** உள்ளது.

இங்கு சிவா மற்றும் விவேக் நடைபெற இருக்கும் நிகழ்வுகள் குறித்தும் அவை ஏற்படும் வாய்ப்புகள் குறித்தும், முடிவுகளை எடுக்கின்றனர்.

பல சமயங்களில் நாம் முடிவெடுக்கும் போது முன் அனுபவங்கள் மேலும் தர்க்க முறையை பயன்படுத்துவோம். உதாரணமாக.

இது ஒரு பிரகாசமான மேலும் ரம்யமான சூரிய வெளிச்சமுள்ள நாள். இன்று நான் குடை இல்லாமல் வெளியே செல்வேன்.

நாம் மேற்கொள்ளும் முடிவுகள் சிலசமயங்களில் நமக்கு சாதகமாக இல்லாமல் போகலாம். மற்றொரு சூழ்நிலையை பார்ப்போம். மேரி மழைக்காலங்களில் ஒவ்வொரு நாளும் தன்னுடைய குடையை எடுத்துக்கொண்டு பள்ளிக்கு நடந்து செல்வாள். ஆனால் எந்த நாளும் மழைப்பொழியவில்லை. எதிர்ப்பாராமல் ஒரு நாள் குடையை மறந்துவிட்டு பள்ளிக்கு சென்றாள். அன்று பலத்த மழை பொழிந்தது.

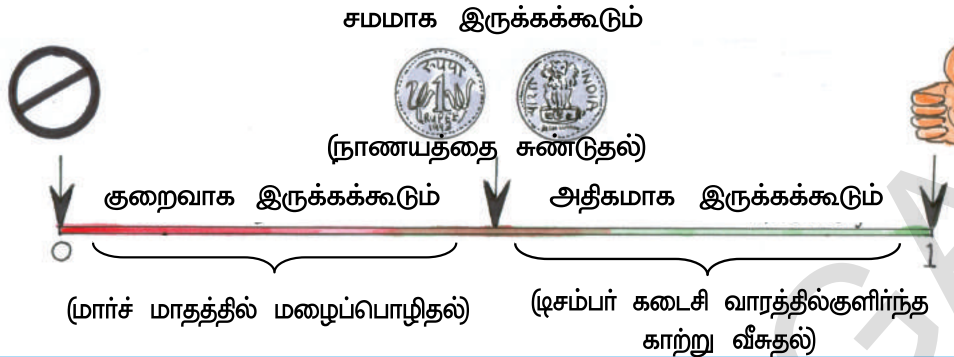
மற்றொரு சந்தர்ப்பத்தில் மார்ச் மாதத்தில் ஒரு நாள் வானம் மேகமூட்டமாக உள்ளதை கவனித்தாள். அது ஒரு கோடைக்காலமாக இருந்தாலும் கூட குடையை எடுத்துக்கொண்டு வெளியே சென்றாள். சிறிது நேரத்தில் மழை வேகமாக பொழிந்தது. குடையை எடுத்துச்சென்றதால் அவளுக்கு எவ்வளவோ பயன்பட்டது. அவள் நனையாமல் வீட்டிற்கு வந்தாள்.

வருங்காலத்தில் நடைபெறவிருக்கும் செயல்கள் நாம் மேற்கொள்ளும் செயல்களுக்கு சாதகமாக நடைபெறலாம் அல்லது சில சமயம் நடைபெறாமலும் போகலாம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் மேரி ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் மழைப்பொழியும் என்றும் மற்றொரு சந்தர்ப்பத்தில் மழைப்பொழியாது என்றும் ஊகித்தாள். இவ்வாறாக நாம் எடுக்கும் முடிவுகள் கூட சிலசமயம் உண்மையாகும். மற்றொரு சமயம் உண்மையாகாது. ஏன்?

நாம் அன்றாட வாழ்கையில் நீளம், முகத்தலளவை போன்றவற்றை எவ்வாறு அளக்கிறோமோ, வருங்காலத்தில் நிகழும் நிகழ்ச்சிகள் அவை நடைபெற வாய்ப்புகள் அல்லது நடைபெறவிருக்கும் வாய்ப்புகளை கூட சோதனை செய்வதற்கு முயற்சி செய்வோம். இந்த சோதனை நாம் ஒழுங்கான (முறையான) முடிவுகள் மேற்கொள்வதற்கு பயன்படுகிறது. எனவே ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கு எத்தனை விதமான வாய்ப்புகள் இருக்கின்றன என்பதை குறிப்பிடுவதற்கு நிகழ்தகவை படிக்கிறோம்.

மேலே நாம் விவாதித்த சூழ்நிலையில் இருந்து வாய்ப்புகள் நிகழ்வதை எண்களில் அளவிடுவதற்கு முன்பு கீழே அட்டவணையில் உள்ள சொற்கள் நமக்கு பயன்படும். பின்வரும் அட்டவணையை உற்றுநோக்கு.

சொல்	வாய்ப்பு	உரையாடலில் இருந்துபெறும்எடுத்துக்காட்டுகள்
உறுதியான	ஏதாவது கண்டிப்பாக நடக்கும் வாய்ப்பு	காந்திஜெயந்தி அக்டோபர் 2ம்தேதி
அதிகமாக இருக்கக்கூடும்	ஒருசில நிகழ்ச்சி நடைபெறும் வாய்ப்பு அதிகம்	விவேக் தொலைக்காட்சியில் கிரிக்கெட் போட்டியை பார்த்தல்
சமமாக இருக்கக்கூடும்	சில நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கு சமமான வாய்ப்புகள் இருத்தல்	இரு அணிகளும் சுண்டுதல் வெற்றிபெற சம வாய்ப்பு
குறைவாக இருகக்கூடும்	ஒருசில நிகழ்வுகள் நடைபெற வாய்ப்புகள் மிகவும் குறைவு	கிரிக்கெட் போட்டி அன்று விவேக் வீட்டுவேலையை செய்தல்
முடியாது	ஒருசில நிகழ்வுகள் நடைபெற வாய்ப்பு இல்லை	சிவா தனது வீட்டில் தொலைக்காட்சியில் கிரிக்கெட் போட்டியை பார்த்தல்



இதை செய்

1. முன்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் ஒவ்வொரு சொல்லுக்கும் மேலும் சில உதாரணங்களை எழுதுங்கள்.

2. பின்வரும் வாக்கியங்களில் குறைவாக இருக்கக்கூடும், சமமாக இருக்கக்கூடும், அதிகமாக இருக்கக்கூடும் என்பவற்றை வகைப்படுத்துக.

அ) ஒரு பகடையை உருட்டும் போது அதன் முகப்பகுதியில் 5 என்ற எண் கிடைத்தது.

ஆ) நவம்பர் மாதத்தில் உங்கள் ஊரில் குளிர்ந்த காற்று வீசும்.

இ) இந்தியா அடுத்த உலகக்கோப்பை கால்பந்தில் வெற்றிபெறுதல்.

ஈ) நாணயத்தை சுண்டும் போது தலை அல்லது பூ விழுதல்.

உ) நீ வாங்கிய லாட்டரி டிக்கட்டுக்கு அதிர்ஷ்ட பரிசு விழுதல்.

14.2 நிகழ்தகவு

14.2.1 சமவாய்ப்புச் சோதனை மேலும் விளைவுகள் பலன்கள்

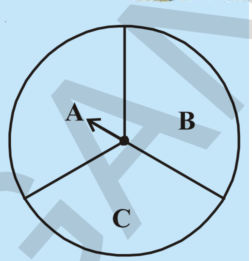
சுழலட்டை

ஏதாவது ஒரு செயலில் ஏற்படும் வாய்ப்புகளை புரிந்துகொள்வதற்கு மற்றும் அளப்பதற்கு நாம் நாணயம் சுண்டுதல், பகடையை உருட்டுதல், சுழலட்டையை சுழற்றுதல் போன்றவற்றை செய்துகாட்டுகிறோம். ஒரு நாணயத்தை சுண்டும் போது இரண்டு முடிவுகள் கிடைக்க வாய்ப்பு உள்ளது. அவை பூ அல்லது தலை எடுத்துக்காட்டாக உங்கள் பள்ளியில் ஒரு கிரிக்கெட் அணிக்கு நீ தலைவனாகவும் மற்றொரு அணிக்கு உன்னுடைய நண்பன் தலைவனாகவும் இருக்குமாறு நினைத்துக்கொள்வோம். விளையாட்டு மைதானத்தில் நாணயத்தை சுண்டும் போது உன்னுடைய நண்பனை தலை அல்லது பூ வேண்டுமென்று கேட்பான். இந்த சுண்டுதலை உன்னால் கட்டுப்படுத்த முடியுமா? ஒருவேளை உனக்கு தலை அல்லது பூ வேண்டுமானால் அது உனக்கு கிடைக்குமா? சாதாரண நாணயத்தால் இது முடியாது. இங்கு தலை மற்றும் பூ விழுவதற்கு சமமான வாய்ப்புகள் உள்ளது ஆனால் சரியாக எது விழும் என்று கூறமுடியாது. இத்தகைய சோதனைகளையே சமவாய்ப்புச் சோதனைகள் என்கிறோம். இத்தகைய சோதனைகளில் நிகழக்கூடிய அனைத்து விளைவுகளும் முன்னரே தெரிந்திருந்தாலும் சோதனை செய்யும் சமயத்தில் எந்த விளைவு நிகழப்போகிறது என்பதை முன்னரே சரியாக ஊகிக்கமுடியாது. சமவாய்ப்புச் சோதனைகளின் விளைவுகள் ஏற்படும் வாய்ப்புகள் சமமாக இருக்கலாம், இல்லாமலும் இருக்கலாம். நாணயத்தை சுண்டும் போது ஏற்படும் விளைவுகள் தலை அல்லது பூ மட்டுமே.

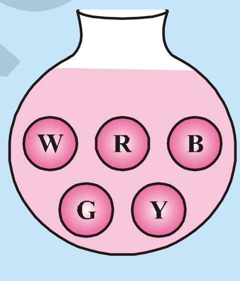
* பகடை என்பது ஆறுமுகங்களை கொண்ட ஒரு கனச்சதுரமாகும். ஒவ்வொரு முகத்திலும் ஒரு எண் உள்ளவாறு 1 லிருந்து 6 வரையுள்ள எண்கள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். சில சமயங்களில் எண்களுக்கு பதிலாக புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும்.

முயன்று பார்

1. ஒரு இருசக்கர மோட்டாரை இயக்க முயற்சி செய்யும் போது ஏற்படும் சாத்தியமான விளைவுகள் யாவை?



2. ஒரு பகடையை உருட்டும் போது ஏற்படும் 6 சாத்தியமான விளைவுகள் யாவை?
3. படத்தில் காட்டிய சக்கரத்தை சுழற்றும் போது சாத்தியமான விளைவுகள் யாவை? (அம்புக்குறி எந்த வட்டக்கோணப்பகுதியில் நிற்கிறதோ அந்த விளைவுகளாக எடுத்துக்கொள்கிறோம்)



4. ஒரு ஜாடியில் ஐந்து வெவ்வேறு வண்ணங்களை உடைய ஒரே மாதிரியான பந்துகள் உள்ளன. (வெள்ளை, சிவப்பு, நீலம், சாம்பல் மேலும் மஞ்சள்) ஜாடியை பார்க்காமல் ஒரு பந்தை வெளியே எடுக்கும்போது உனக்குக் கிடைத்த சாத்தியமான விளைவு எது?

சிந்தித்து, கலந்துரையாடி எழுது

ஒரு பகடையை உருட்டும்போது

- முதலில் விளையாடுபவருக்கு பகடையின் மேல் முக எண் 6 கிடைக்க வாய்ப்புகள் அதிகமா?
- இரண்டாவதாக விளையாடுபவருக்கு பகடையின் மேல் முக எண் 6 கிடைக்க வாய்ப்புகள் குறையுமா?
- ஒரு வேளை இரண்டாவதாக விளையாடுபவருக்கு பகடையின் மேல்முக எண் 6 கிடைத்தால் அதன் பிறகு பகடையை உருட்டும் மூன்றாவதாக விளையாடுபவருக்கு மேல் முக எண் 6 கிடைப்பதற்கான வாய்ப்புகள் இல்லையா?

14.2.2 சமவாய்ப்பு விளைவுகள் (Equally likely outcomes)

நாம் ஒரு நாணயத்தை சுண்டும் போதும், பகடையை உருட்டும்போதும் நாணயத்தை, பகடையை பாரபட்சமில்லாமல் எடுத்துக்கொள்கிறோம். அதாவது சுண்டுதல் அல்லது உருட்டுதல் விளைவுகள் ஏற்படுவதற்கு சமமான வாய்ப்புகள் இருக்கும். நாம் சோதனைகள் செய்து விவரங்களை சேகரித்துக்கொள்கிறோம். சேகரித்த விவரங்களை பயன்படுத்தி சாத்தியமான வாய்ப்புகளை மதிப்பீடு செய்கிறோம்.

ஒரு நாணயத்தை பலமுறை சுண்டும்போது கிடைத்த தலை, பூ இவைகளின் எண்ணிக்கை பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளது. நாணயத்தின் சுண்டுதலை அதிகப்படுத்தும் போது ஏற்படும் முடிவுகளை அட்டவணையில் பாருங்கள்.

சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள் (தலைகள்)	தலைகளின் எண்ணிக்கை	நேர்கோட்டுக்குறிகள் (பூ)	பூக்களின் எண்ணிக்கை
50	卌 卌 卌 卌 II	22	卌 卌 卌 卌 卌 III	28
60	卌 卌 卌 卌 卌 I	26	卌 卌 卌 卌 卌 卌 IIII	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

மேலுள்ள அட்டவணையை உற்றுநோக்கும் போது மேலும் பலமுறை சுண்டும் போது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையும், பூக்களின் எண்ணிக்கையும் ஒன்றுக்கொன்று நெருங்கி வரும்.

இதை செய்

அட்டவணையில் காட்டியவாறு சிலமுறை நாணயத்தை சுண்டு. மேலும் கிடைத்த விளைவுகளை அட்டவணையில் பதிவுசெய்.

சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை	தலைகளின்எண்ணிக்கை	பூக்களின் எண்ணிக்கை
10		
20		
30		
40		
50		

சுண்டுதலின் எண்ணிக்கையை மேலும் மேலும் அதிகப்படுத்தினால் என்ன நிகழும்?

மேற்கண்ட அட்டவணையை பகடையை பயன்படுத்தியும் செய்யலாம். பகடையை அதிகப்படியான முறைகள் உருட்டு மேலும் உற்றுநோக்கு.

பகடை உருட்டுதலின் எண்ணிக்கைகள்	ஒவ்வொரு விளைவும் ஏற்பட்டதை காட்டும் எண்ணிக்கைகள் (அதாவது மேல்முகம் மீது காணப்படும் எண்)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

மேலே உள்ள அட்டவணையில் இருந்து பகடை உருட்டுதலின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்கும் போது சாத்தியமான ஆறு விளைவுகளின் எண்ணிக்கையும் ஏறக்குறைய ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆகும்.

மேலே காட்டப்பட்ட இரண்டு பரிசோதனைகளிலும், பரிசோதனையின் வெவ்வேறு விளைவுகள் சமவாய்ப்பாக இருக்கும் எனக்கூறலாம். அதாவது ஒவ்வொரு விளைவும் சமவாய்ப்பை பெற்றிருக்கும்.

14.2.3 முயற்சிகளும் நிகழ்ச்சிகளும் (Trial and Events)

மேலே உள்ள பரிசோதனையின் மூலம் ஒருமுறை நாணயத்தை சுண்டிதல் அல்லது பகடையை உருட்டுதல் என்ற முயற்சி அல்லது செயல் வாய்ப்புச்சோதனை எனப்படும்.

ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது பகடையின் மேல்முகம் 5ஐவிட அதிகமாக கிடைக்க சாத்தியமான விளைவுகள் எத்தனை?

ஒன்று மட்டும் (அதாவது 6)

பகடையின் மேல்முகம் இரட்டைஎண் கிடைக்க சாத்தியமான விளைவுகள் எத்தனை?

மூன்று விளைவுகள் (2,4 மேலும் 6)

இவ்வாறாக ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட விளைவு அல்லது சில குறிப்பிட்ட விளைவுகளின் தொகுப்பை **நிகழ்ச்சி** என்பர்.

மேலுள்ள முயற்சியில் பகடையின் மேல்முகம் 5ஐவிட அதிகமாக பெறுவது. மேலும் இரட்டை எண்களை மேல் முகத்தில் பெறுவது ஆகியவை இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியிலும் ஒரே விளைவு இருக்கத்தேவையில்லை ஆனால் ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

இங்கு நிகழ்ச்சியின் அடிப்படை கருத்தை புரிந்துகொண்டோம். நிகழ்ச்சியைப் பற்றி மேலும் விரிவாக மேல் வகுப்புகளில் பார்க்கலாம்.

14.2.4 வாய்ப்புகளை நிகழ்தகவோடு தொடர்புபடுத்துதல்

ஒரு நாணயத்தை சுண்டும் சோதனையை மீண்டும் ஒருமுறை பார்ப்போம் இதன் விளைவுகள் என்ன? தலை அல்லது பூ என்ற இரண்டு விளைவுகள் மட்டுமே இருக்கும். மேலும் இரண்டு விளைவுகளும் சமவாய்ப்பாக இருக்கும்.

தலை விழுவதற்கான வாய்ப்புகள் எத்தனை?

இரண்டு சாத்தியமான விளைவுகளில் தலைவிழுவதற்கான வாய்ப்பு அதாவது $\frac{1}{2}$

இதையே வேறுவிதமாக ஒரு நாணயத்தை சுண்டும் போது தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனக் காட்டலாம். இதை சுருக்கமாக

$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$ அல்லது 50% என எழுதலாம்.

பூ விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இப்பொழுது பகடையை உருட்டும் எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒருமுறை உருட்டும்போது கிடைக்கும் சாத்தியமான விளைவுகள் எத்தனை? ஆறு சமவாய்ப்பு விளைவுகள் இருக்கக்கூடும். அவை 1,2,3,4,5, மற்றும் 6. பகடையை உருட்டும் போது மேல் முகம் ஒற்றை எண் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

மொத்தம் 6 சாத்தியமான விளைவுகளில் மூன்று சாதகமான விளைவுகள் கிடைக்கும் அவை 1,3 அல்லது 5. நிகழ்தகவு $\frac{3}{6}$ அல்லது $\frac{1}{2}$

'A' எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு சூத்திரத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$P(A) = \frac{\text{'A' நிகழ்ச்சியின் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சாத்தியமான மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

இப்போது சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம் :

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒரே மாதிரி இருக்கும் இரண்டு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும் போது (அ) சாத்தியமான விளைவுகள் (ஆ) மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை (இ) இரண்டு தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு (ஈ) குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு (உ) தலை இல்லாமல் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு (ஊ) ஒரே ஒரு தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவுகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : (அ) சாத்தியமான விளைவுகள்

1வது நாணயம்	2வது நாணயம்
தலை	தலை
தலை	பூ
பூ	பூ
பூ	தலை

ஆ) சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 4

இ) இரண்டு தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\text{இரண்டு தலைகள் விழுவதற்கான சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சாத்தியமான மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{1}{4}$$

ஈ) குறைந்தபட்சம் ஒருதலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

(குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை என்பது ஒன்று அல்லது அதைவிட அதிகமான தலைகள்)

உ) தலைகள் இல்லாமல் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$.

ஊ) ஒரே ஒருதலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

இதை செய்

1. மூன்று நாணயங்களை ஒரே முறை சுண்டும் போது அவற்றின் விளைவுகளை எழுது.

அ) அனைத்து சாத்தியமான விளைவுகளை எழுது

ஆ) சாத்தியமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை

இ) குறைந்தபட்சம் ஒரு தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு கண்டுபிடி? (ஒன்று அல்லது அதைவிட அதிகமான தலைகளை பெற்றிருப்பது)

ஈ) அதிகபட்சம் இரண்டு தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி?

உ) பூக்கள் இல்லாமல் விழுவதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி?

எடுத்துக்காட்டு 2: (அ) ஒரு பகடையை உருட்டும் போது அதன் மேல் முகம் மீது கிடைக்கும் எண்ணின் நிகழ்தகவை பின்வரும் அட்டவணையில் எழுது.
(ஆ) அனைத்து விளைவுகளின் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : (அ) பகடையை உருட்டும் போது சாத்தியமாகும் மொத்த 6விளைவுகளில் 4 என்ற எண் ஒரு முறை விழுவதற்கு சாத்தியம். எனவே இதன் நிகழ்தகவு 1/6 ஆகும். இதைப்போலவே மீதியுள்ளவற்றை நிரப்பு.

விளைவுகள்	1	2	3	4	5	6
நிகழ்தகவு(P)				1/6		

(ஆ) அனைத்து நிகழ்தகவுகளின் மொத்தம்

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

நாம் இதை பொதுப்படியாக கூறலாம்.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் அனைத்து விளைவுகளின் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தம் எப்போதும் 1 ஆகும்.

முயன்று பார்

பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது ஏற்படும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை பின்வரும் அட்டவணையில் எழுது.

நிகழ்ச்சி	சாதகமான விளைவுகள் (Favorable outcomes)	சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை	சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்தம் (Possible outcomes)	சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு = $\frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$
மேல் முகம் மீது 5விழுவதற்கான வாய்ப்பு	5	1	1,2,3,4,5 மேலும்6	6	1/6
மேல் முகம் மீது 3ஐவிட அதிகமாக விழுவதற்கான வாய்ப்பு					
மேல் முகம் மீது பகா எண்கள் விழுவதற்கான வாய்ப்பு					
மேல் முகம் மீது 5ஐவிட குறைவாக விழுவதற்கான வாய்ப்பு					
மேல் முகம் மீது 6ன் காரணிகள் விழுவதற்கான வாய்ப்பு					
மேல் முகம் மீது 7ஐவிட அதிகமாக விழுவதற்கான வாய்ப்பு					
மேல் முகம் மீது 3ன் மடங்கிகள் விழுவதற்கான வாய்ப்பு					
மேல் முகம் மீது 6 அல்லது 6ஐவிட குறைவாக விழுவதற்கான வாய்ப்பு					

பின்வருவனவற்றை உற்றுநோக்கு

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எப்போதும் 0 விருந்து 1க்கு இடையில் இருக்கும். (0 மேலும் 1 சேர்ந்து)

$$0 \leq \text{ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு} \leq 1$$

அ) குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = 1

ஆ) சாத்தியமில்லாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = 0

14.2.5 சுயமாக சோதனைகளை நிர்வகித்தல்

1. ஒவ்வொரு குழுவிலும் 3-4 மாணவர்கள் இருக்குமாறு இந்த சோதனையை செய்வோம். ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் ஒரு நாணயத்தை கொடு. இந்த நாணயங்கள் அனைத்து குழுக்களுக்கும் ஒரே மாதிரி இருக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு குழுவிலிருந்தும் ஒரு மாணவன் நாணயத்தை 20 முறைகள் சுண்டி விளைவுகளை பதிவுசெய்ய வேண்டும். இவ்வாறே அனைத்து குழுக்களும் விளைவுகளை பின்வரும் அட்டவணையில் பதிவு செய்ய வேண்டும். (அட்டவணையில் எடுத்துக்காட்டு தரப்பட்டுள்ளது)

குழு எண்	சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை	குழுக்கள் சுண்டுதலின் குவிவு	தலைகளின் எண்ணிக்கை	தலைகளின் குவிவுகளின் எண்ணிக்கை	தலைகளின் குவிவு / மொத்த சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை	பூக்களின் குவிவு / மொத்த சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20}=\frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40}=\frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

மேலுள்ள அட்டவணையில் நாணயம் சுண்டுவதை அதிகரிக்கும் போது நிரல்கள் (6) மற்றும் (7)ன் பின்ன மதிப்பு என்னவாகும்? இந்த மதிப்புகள் நாணயத்தை சுண்டும் போது கிடைக்கும் தலை அல்லது பூக்களின் நிகழ்தகவுகளுக்கு அருகில் இருப்பதை பார்த்தாயா?

(2) இந்த சோதனையை 3-4 மாணவர்கள் குழுக்களாக ஏற்பட்டு செய்வர். ஒவ்வொரு குழுவிலுள்ள ஒரு மாணவன் பகடையை 30முறை உருட்டுவான். மற்ற மாணவர்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் பதிவு செய்வார்கள். அனைத்து குழுக்களுக்கும் ஒரே விதமான பகடையை தரவேண்டும். எனவே எல்லா உருட்டுதலும் ஒரே பகடையை சேர்ந்ததாகக் கொண்டு கணக்கிடுவோம்.

பகடை உருட்டுதலின் எண்ணிக்கை	பகடை திரும்பும் போது ஏற்படும் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை					
	1	2	3	4	5	6
30						

அனைத்து குழுக்களிடம் இருந்து பெறப்பட்ட விவரங்களை பின்வரும் அட்டவணையில் நிரப்புக.

குழுக்கள்	பகடையில் 1 கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு	பகடையில் உருட்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை	$\frac{\text{பகடையில் 1 கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு}}{\text{பகடை உருட்டுதலின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1வது 1வது + 2வது 1வது+2வது+3வது 1வது+2வது+3வது+4வது 1வது+2வது+3வது+4வது+5வது			

பகடையை பலமுறை உருட்டும்போது நீ என்ன உற்றுநோக்குகிறாய், (4)வது நிரலில் உள்ள பின்னங்கள் $\frac{1}{6}$ க்கு அருகில் அமையும். மேலுள்ள பரிசோதனை யை விளைவு 1 **கிடை**க்குமாறு செய்தனர். இவ்வாறு பகடையின் மேல்முகம் விளைவு 2விழும்போதும் மேல்முகம் 5விழும்போதும் சரிபார்.

(4)வது நிரலில் வரும் பின்ன மதிப்புகள் பற்றி என்ன முடிவுசெய்கிறாய்? மேலும் பகடையை உருட்டும் போது 1,2 மேலும் 5 **கிடைப்ப**தற்கான நிகழ்தகவோடு ஒப்பிடு.

(3)இரண்டு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும் போது என்ன நிகழும்? இரண்டும் தலையாகவும், இரண்டும் பூவாகவும் காட்டும் அல்லது ஒன்று தலையாகவும், ஒன்று பூவாகவும் காட்டும். இந்த மூன்றும் ஒரேமுறை நிகழ்வதற்கு சாத்தியமுள்ளதா? குழு செயல்பாட்டில் செய்யும் போது இது குறித்து ஆலோசியுங்கள்.

வகுப்பை 4 மாணவர்கள் கொண்ட சிறிய குழுக்களாகப் பிரி. ஒவ்வொரு குழுவும் இரண்டு நாணயங்களை எடுத்துக்கொள்ளும். வகுப்பில் பயன்படுத்தப்பட்ட அனைத்து நாணயங்களும் ஒரே மாதிரி இருக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு குழுவும் இரண்டு நாணயங்களையும் ஒரே சமயத்தில் 20முறை சுண்டி பின்வரும் அட்டவணையில் பதிவு செய்.

இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை	தலை தவிர்த்து விழுந்த எண்ணிக்கை	ஒருதலை விழுந்ததின் எண்ணிக்கை	இரண்டும் தலைகள் விழுந்ததின் எண்ணிக்கை
20			

இப்பொழுது அனைத்து குழுக்களும் குவிவு அட்டவணையை தயார்செய்யவேண்டும்.

குழுக்கள்	இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை	தலை தவிர்த்து விழுந்ததின் எண்ணிக்கை	ஒரு தலை விழுந்ததின் எண்ணிக்கை	இரண்டு தலைகள் விழுந்ததின் எண்ணிக்கை
1வது				
1வது+ 2வது				
1வது+2வது+3வது				
1வது+2வது+3வது+4வது				
....				

தலை தவிர்த்து விழுந்ததிற்கான எண்ணிக்கை, இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டுதலின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதத்தை கணக்கிடுவோம். இவ்வாறே ஒருதலை விழுந்ததின் எண்ணிக்கை, இரண்டும் தலைகள் விழுந்ததின் எண்ணிக்கை ஆகிய நிகழ்ச்சிகளையும் ஒப்பிடுவோம்.

பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக:

குழுக்கள்	$\frac{\text{தலை தவிர்த்து விழுந்ததின் எண்ணிக்கை}}{\text{சுண்டுதலின் மொத்தம்}}$	$\frac{\text{ஒருதலை விழுந்ததின் எண்ணிக்கை}}{\text{சுண்டுதலின் மொத்தம்}}$	$\frac{\text{இரண்டும் தலைகள் விழுந்ததின் எண்ணிக்கை}}{\text{சுண்டுதலின் மொத்தம்}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1வது			
1வது+ 2வது			
1வது+2வது+3வது			
1வது+2வது+3வது+4வது			
....			

சுண்டுதலின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்கும் போது (2), (3), (4) ஆகிய நிரல்களின் தசம மதிப்பு வரிசையாக 0.25, 0.5, 0.25க்கு அருகில் அமைவதை கவனிக்கலாம்.

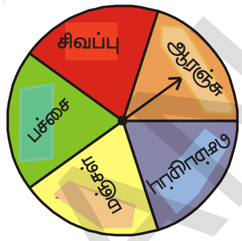
எடுத்துக்காட்டு 3: ஒரு சக்கரம் சுற்றுபவர் 1000 முறைகள் சுற்றி கிடைத்த நிகழ்வெண் விளைவுகளை பின்வரும் அட்டவணையில் பதிவு செய்தார்.

விளைவு	சிவப்பு	ஆரஞ்சு	செம்பழுப்பு	மஞ்சள்	பச்சை
நிகழ்வெண்	185	195	210	206	204

(அ) சக்கரம் சுற்றுபவரிடம் இருந்து பெற்ற சாத்தியமான விளைவுகளைக்கூறு.
(ஆ) ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடி?
(இ) ஒவ்வொரு விளைவுக்கும், சக்கரம் சுற்றுபவர் சுற்றிய மொத்த எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதத்தை கண்டுபிடி (அட்டவணையை பயன்படுத்து)

தீர்வு :

(அ) இங்கு சாத்தியமான விளைவுகள் 5 ஆகும். அவை சிவப்பு, ஆரஞ்சு, செம்பழுப்பு, மஞ்சள், பச்சை. இங்கு எல்லா 5 வண்ணங்களும் சமமான பரப்பளவைக் கொண்டிருக்கும். இவை அனைத்தும் சமவாய்ப்பாக இருக்கும்.



(ஆ) ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P(\text{சிவப்பு}) = \frac{\text{சிவப்பு விழுதலின் சாதகமான விளைவுகள்}}{\text{சாத்தியமான விளைவுகள் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2.$$

இவ்வாறே

P(ஆரஞ்சு), P(செம்பழுப்பு), P(மஞ்சள்) மேலும் P(பச்சை) ஆகியவையும் $\frac{1}{5}$ அல்லது 0.2.

(இ) பரிசோதனையில் இருந்து அட்டவணையில் உள்ள நிகழ்வெண்ணை பதிவு செய்.

$$\text{சிவப்புகளின் விகிதம்} = \frac{\text{மேலுள்ள பரிசோதனையில் சிவப்பு கிடைக்க விளைவுகள் எண்ணிக்கை}}{\text{சக்கரம் சுற்றுபவர் சுற்றுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

இவ்வாறே, அடுத்துள்ள விகிதங்களான ஆரஞ்சு, செம்பழுப்பு, மஞ்சள் மேலும் பச்சை முறையே 0.195, 0.210, 0.206 மேலும் 0. 204 என கண்டறியலாம்.

நமக்கு கிடைத்த தீர்வின்படி ஒவ்வொரு விகிதமும் அதன் நிகழ்தகவிற்கு ஏறக்குறைய சமமாக இருப்பதை காணமுடிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு திரையரங்கிற்கு வந்த பார்வையாளர்களின் வயதுகள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. சிறப்புப் பரிசு பெறுவதற்காக ஒவ்வொரு பார்வையாளருக்கும் வரிசை எண் தரப்பட்டது. இந்த வரிசை எண்களிலிருந்து தற்செயலாக ஓர் எண் எடுக்கப்படகிறது. கீழே தரப்பட்ட ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.

வயது	ஆண்	பெண்
2வயதைவிட குறைவு	3	5
3-10 வருடங்கள்	24	35
11-16 வருடங்கள்	42	53
17-40வருடங்கள்	121	97
41-60வருடங்கள்	51	43
60வயதைவிட அதிகம்	18	13

மொத்த பார்வையாளர்களின் எண்ணிக்கை = 505

கீழே தரப்பட்ட ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

அ) 10 அல்லது அதைவிட குறைவான வயதையுடைய பார்வையாளர்களின் நிகழ்தகவு

10 அல்லது அதைவிட குறைவான வயதையுடைய பார்வையாளர்கள்

= 24 + 35 + 5 + 3 = 67

மொத்த பார்வையாளர்களின் எண்ணிக்கை = 505

P(பார்வையாளர்களின் வயது $\leq$ 10 வருடங்கள்) = $\frac{67}{505}$

ஆ) 16 அல்லது அதைவிட குறைவான வயதையுடைய பெண் பார்வையாளர்களின் நிகழ்தகவு.

16 அல்லது அதைவிட குறைவான வயதையுடைய பெண் பார்வையாளர்கள்

= 53 + 35 + 5 = 93

P(பெண் பார்வையாளர்களின் வயது $\leq$ 16 வருடங்கள்) = 93/505

இ) 17 வயது அல்லது அதைவிட அதிகமாக உள்ள ஆண் பார்வையாளர்களின் நிகழ்தகவு = 121 + 51 + 18 = 190

P(ஆண் பார்வையாளர்களின் வயது $\geq$ 17 வருடங்கள்) = $\frac{190}{505} = \frac{38}{101}$

ஈ) 40வயதைவிட அதிகமாக உள்ள பார்வையாளர்களின் நிகழ்தகவு

= 51+43+18+ 13 = 125

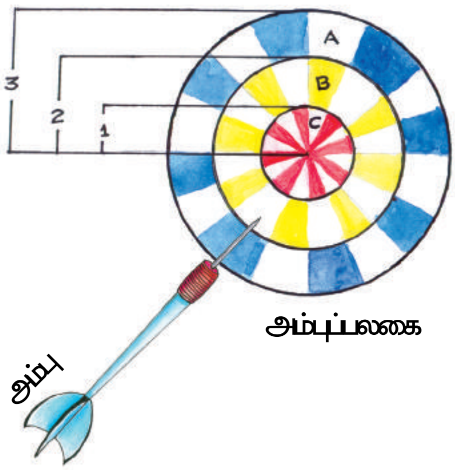
P(பார்வையாளர்களின் வயது > 40 வருடங்கள்) = $\frac{125}{505} = \frac{25}{101}$

உ) ஆண்கள் இல்லாத பார்வையாளர்களின் நிகழ்தகவு

= 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246

P(ஆண்கள் இல்லாத பார்வையாளர்கள்) = $\frac{246}{505}$

எடுத்துக்காட்டு 5: அம்புப்பலகையில் மீது எரியப்பட்ட அம்பு அதில் குத்துகிறது எனக்கொள். படத்தில் காட்டியவாறு 3செ.மீ, 2செ.மீ, 1செ.மீ ஆரங்கள் உடைய மூன்று பொதுமைய வட்டங்களாக உள்ள அம்புப்பலகையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் குத்துபட சமவாய்ப்புகள் உள்ளது.



அம்புப்பலகை

எரியப்பட்ட அம்பு பகுதி A ல் குத்துவதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.
வட்ட வலையம் A ன் பரப்பளவு = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

எரியப்பட்ட அம்பு பகுதி A ல் குத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{\text{வட்டவலையம் A ன் பரப்பளவு}}{\text{மொத்த பரப்பளவு}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi}$$

$$\frac{5}{9} = 0.556$$

வட்டத்தின் பரப்பளவு= πr^2
வட்டவலயத்தின் பரப்பளவு
= $\pi R^2 - \pi r^2$ என்பதை
நினைவுகூறுவோம்

முயற்சி செய்

எடுத்துக்காட்டு 5ல் தரப்பட்ட படத்திலிருந்து

1. எரியப்பட்ட அம்பு வட்டவலையப்பகுதி Bல் குத்துவதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.
2. எரியப்பட்ட அம்பு வட்டவலையப்பகுதி C ல் குத்துவதற்கான நிகழ்தகவு சதவீதத்தை கணக்கிடாமலேயே கண்டுபிடி.

14.3 அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழ்தகவின் பயன்கள் :

* பல ஆண்டுகளாக சேகரித்த விவரங்களை வைத்து வானிலைத்துறை வரும் நாட்களில் வானிலை எவ்வாறு இருக்கும் என்பதை ஊகிப்பார்கள்.

* காப்பீட்டு நிறுவனங்கள் விபத்துகள் மற்றும் மரணங்களின் நிகழ்தகவை கருத்தில் கொண்டு காப்பீட்டுத்தொகையை நிர்ணயிப்பர்.

* தேர்தல் முடிந்தபிறகு கருத்துக்கணிப்பை நடத்துவர். இதனை வாக்களித்த மக்கள் எந்த காட்சிக்கு வாக்களித்தார்கள் என கேட்டறிவர். இதை பயன்படுத்தி வெற்றிபெற வாய்ப்பள்ள ஒவ்வொரு வேட்பாளரையும் தேர்தல் முடிவிற்கு முன்னரே ஊகிப்பார்கள்.

பயிற்சி - 14.1

1. 1 முதல் 6 எண்களை மேல் முகமாகக் கொண்ட ஒரு பகடையை உருட்டும் போது மேல் முகம் மீது விழும் எண்கள் குறிக்கபடுகிறது. இதை ஒரு சமவாய்ப்பு முயற்சி எனக்கருதினால்.
   அ) சாத்தியமான விளைவுகள் யாவை?
   ஆ) அவை சமவாய்ப்புகளா? எதற்கு?
   இ) பகடையின் மேல்முகம் மீது பகுஎண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி?
2. ஒரு நாணையத்தை 100 முறைகள் சுண்டும் போது கிடைத்த விளைவுகள் கீழே பதிவுசெய்யப்பட்டுள்ளது. தலை : 45 முறைகள் பூக்கள் : 55 முறைகள்
   அ) ஒவ்வொரு விளைவின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.
   ஆ) அனைத்து விளைவுகளின் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தத்தை கண்டுபிடி.
3. படத்தில் காட்டியவாறு நான்கு வண்ணங்களைக் கொண்ட ஒரு சுழல் அட்டையை ஒருமுறை சுற்றும் போது

   அ) அம்புகுறி நிற்பதற்கு அதிக வாய்ப்புகள் கொண்ட வண்ணம் எது?
   ஆ) அம்புகுறி நிற்பதற்கு குறைந்த வாய்ப்புகள் கொண்ட வண்ணம் எது?
   இ) அம்புகுறி நிற்பதற்கு சமமான வாய்ப்புகள் கொண்ட வண்ணம் எது?
   ஈ) அம்புகுறி ஏதாவது ஒரு வண்ணத்தின் மீது நிற்கும் என உறுதியாக கூறமுடியுமா?
4. ஒரு பையில் ஒரே மாதிரியான ஐந்து பச்சைநிற கோலிகள், மூன்று நிலநிற கோலிகள், இரண்டு சிவப்புநிற கோலிகள், இரண்டு மஞ்சள்நிற கோலிகள் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து சமவாய்ப்பாக ஒருகோலியை எடுத்தால்.
   அ) நான்கு வெவ்வேறு வண்ணங்களின் விளைவுகள் சமவாய்ப்பாக இருக்குமா? விவரி.
   ஆ) ஒவ்வொரு வண்ண கோலிகளையும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு அதாவது P(பச்சை), P(நீலம்), P(சிவப்பு) மேலும் P(மஞ்சள்) கண்டுபிடி.
   இ) விளைவுகளின் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தம் கண்டுபிடி.
5. ஆங்கில எழுத்துக்களின் வரிசையில் இருந்து ஓர் எழுத்தை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பின்வரும் எழுத்துக்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.
   அ) ஓர் உயிரெழுத்து ஆ) Pக்கு அடுத்துவரும் எழுத்து
   இ) உயிரெழுத்து அல்லது உயிர்மெய் எழுத்து
   ஈ) உயிரெழுத்து அல்லாதது

6. 5கிலோகிராம் என குறிக்கப்பட்ட கோதுமை மாவு உள்ள 11 பைகளின் எடைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

இவைகளில் ஏதாவது ஒருபையை சமவாய்ப்பாக எடுத்தபோது அது 5கிலோகிராமை விட அதிகமாக எடை கொண்டதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடி.

7. ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் காப்பீட்டுக்கழகம் 2000 ஓட்டுநர்களை சமவாய்ப்பில் தேர்வு செய்தது. (அதாவது யாருக்கும் முன்னுரிமை வழங்காமல்) இவர்களின் வயதுக்கும் இவர்கள் செய்த விபத்துகளுக்கும் இடைப்பட்ட உறவை கண்டறிந்து இந்த தகவல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

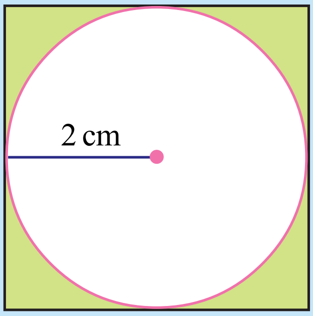
ஓட்டுநர்களின் வயது (வருடங்களில்)	ஒரு வருடத்தில் செய்த விபத்துகள்				3ஐவிட அதிகமான விபத்துகள்
	0	1	2	3	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
Over 50	360	45	35	15	9

நகரத்தில் ஒரு ஓட்டுநரை சமவாய்ப்பில் தேர்ந்தெடுத்தால் பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை கண்டுபிடி:

(i) ஓட்டுநரின் வயது 18-29 வருடங்களுக்கு இடையில் இருந்து ஒரு வருடத்திற்கு சரியாக மூன்று விபத்துக்களை செய்தால்.

(ii) ஓட்டுநரின் வயது 30-50 வருடங்களுக்கு இடையில் இருந்து ஒரு வருடத்தில் ஒன்று அல்லது அதிகமான விபத்துக்களை செய்தால்.

(iii) விபத்துகளே இல்லாத வருடம்.



8. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு அம்பை படத்தில் காட்டியபடி சதுரவடிவ பலகையில் மீது எரியும் போது அது வண்ணம் தீட்டப்பட்ட பகுதியில் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன.

(πன் மதிப்பு = $\frac{22}{7}$ எனக்கொண்டு தீர்வை சதவீதத்தில் காட்டு)

நாம் கற்றவை

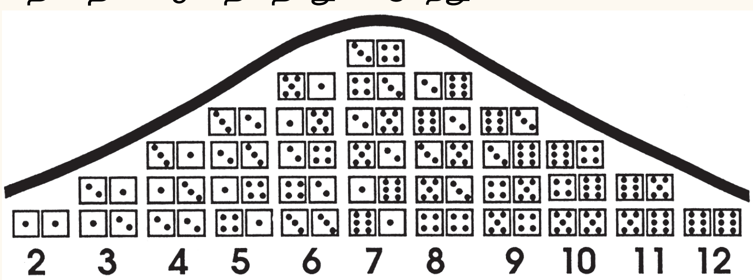
- அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் ஏதாவது ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறும் வாய்ப்புகளை கூறுவதற்கு அதிகவாய்ப்புகள், வாய்ப்பு இல்லை, சமவாய்ப்பு போன்ற சொற்களை பயன்படுத்துகிறோம்.
- சிலகுறிப்பிட்ட பரிசோதனைகளில் விளைவுகள் ஏற்படுவதற்கு சமமான வாய்ப்புகள் இருக்கும். இத்தகைய பரிசோதனைகளை நாம் சமவாய்ப்பு விளைவுகள் என்கிறோம்.
- ஒரு சோதனையின் குறிப்பிட்ட விளைவு அல்லது சில குறிப்பிட்ட விளைவுகளின் தொகுப்பு நிகழ்ச்சி என்கிறோம்.
- சில சம வாய்ப்புச் சோதனைகளில் அனைத்து விளைவுகளும் சமமான வாய்ப்பை கொண்டிருக்கும்.
- முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்கும் போது, அனைத்து சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் நிகழ்தகவும் ஒன்றுக்கொன்று அருகில் அமையும்.
- 'A' எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சாத்தியமான மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

- சரியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = 1.
- முடியாது எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = 0
- ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எப்பொழுதும் 0 மற்றும் 1க்கு இடையில் அமையும் (0 மற்றும் 1 சேர்த்து)

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

ஒரு ஜோடி பகடையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் 36 சாத்தியமான விளைவுகள் கீழே உள்ள படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வெவ்வேறு சாத்தியமான எண்களின் விளைவுகளின் நிகழ்வெண்கள் (2 முதல் 12) அனைத்தும் காஸின் வளைவரையை உருவாக்கும் விதம் நம் ஆர்வத்தை தூண்டுகிறது.



இந்த வளைவு காசியன் வளைவு எனப்படும். 19ஆம் நூற்றாண்டிற்கு பிறகு புகழ்பெற்ற கணிதமேதை காரல் பிரடரிச் காஸ் பெயரால் இதற்கு இப்பெயர் இடப்பட்டது.

15 கணிதத்தில் நிரூபணங்கள்

15.1 அறிமுகம்

நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் பலவிதமான கூற்றுகளை எதிர்கொள்கிறோம். அந்த கூற்றுகளில் எவை உண்மை என்று நமக்கு தெரியும். நாம் சில கூற்றுகளை உண்மை என்ற அறிந்து ஏற்றுக்கொள்கிறோம். மற்றவற்றை நாம் நீக்கிவிடுகிறோம். சில வாக்கியங்கள் மெய் என்றோ மெய்யல்ல என்றோ முடிவெடுக்க முடியாது. இந்த வாக்கியங்கள் மெய் அல்லது மெய்யல்ல என்பதை எவ்வாறு தெரிந்துக்கொள்வது? உதாரணமாக ஒருவர் வங்கியிலிருந்து கடன்தொகை வாங்கிக்கொள்ளம்போது அவர் வங்கிக்கு சிறிது தொகை கட்டியபிறகு மீதி கடன்தொகை எவ்வளவு என்பதை வங்கி அலுவலர்கள் தரும் விவரங்களைக் கொண்டு தெரிந்துக்கொள்ளலாம். வாழ்க்கையில் நாம் எதிர்கொள்ளும் கூற்றுக்கள் மெய் அல்லது மெய்யல்ல என அறிந்துக்கொள்ள நிரூபணங்கள் அவசியம். ஆனால் சில நேரங்களில் நாம் நிரூபணங்கள் இல்லாமல் ஏற்றுக்கொள்கிறோம். ஆனால் கணிதத்தில் இவ்வாறு ஏற்றுக்கொள்ளப்படுவதில்லை.

கீழ்கண்டவற்றை கவனியுங்கள்.

1. சூரியன் கிழக்கில் உதிக்கிறான்
2. $3 + 2 = 5$
3. நியுயார்க் நகரம் USAன் தலைநகரம்
4. $4 > 8$
5. உன்னுடைய உடன்பிறந்தோர் எத்தனைப்பேர்?
6. கோவாவில் வங்காளத்தை விட சிறந்த கால்பந்து அணிகள் உள்ளன.
7. செவ்வகம் 4 சமச்சீர் கோடுகளை கொண்டுள்ளது.
8. $x + 2 = 7$
9. தயவுசெய்து வாருங்கள்
10. 6 முகங்கள் கொண்ட பகடைக் காயை சுண்டும்போது இரண்டுமுறை 6வது முகம் வருவதற்கான நிகழ்தகுவ யாது ?
11. நீங்கள் நலமாக இருக்கிறீர்களா?
12. சூரியன் நிலையாக இல்லாமல் எப்பொழுதும் அதிக வேகத்தில் சுழன்றுக்கொண்டே இருக்கிறது.
13. $x < y$
14. உங்கள் இருப்பிடம் எது?

மேற்கண்டவாக்கியங்களில் சில வாக்கியங்கள் தவறு. உதாரணமாக 4>8. இவ்வாறே, தற்போது நியுயார்க் நகரம் USAன் தலைநகரம் அல்ல. நமக்கு இருக்கும் அறிவைக்கொண்ட சில வாக்கியங்களை சரி என்று சொல்ல முடியும். கீழ்கண்டவை இதற்கு உதாரணங்கள் (1) சூரியன் கிழக்கில் உதிக்கிறான். (10) 6 முகங்கள் கொண்ட பகடைக்காயை........ (12) சூரியன் நிலையாக இல்லாமல், ...

சில வாக்கியங்கள் ஒரு சில சமயங்களில் மெய்யாகவும், வேறு சில சமயங்களில் மெய்யற்றதாகவும் இருக்கும்.

உதாரணமாக $x + 2 = 7$ என்பது $x = 5$ என்றால் மட்டுமே மெய் ஆகும். $x < y$ என்பது xன் மதிப்பு yன் மதிப்பைவிட சிறியது என்றால் மட்டுமே மெய்யாகும்.

ஒரு வாக்கியம் மெய் அல்லது மெய்யற்றது, ஆனால் இரண்டும் அல்ல எனில் அது ஒரு **கூற்று** ஆகும். சில விதிகளுக்கு அல்லது நியமங்களுக்கு உட்பட்டு நிருபணம் செய்யக்கூடிய இதுபோன்ற வாக்கியங்கள் மெய் அல்லது மெய்யற்ற கூற்றுக்களாக இருக்கலாம்.

கீழ்கண்ட வாக்கியங்களைப்பற்றி சிந்தித்துப்பார் :

1. இந்த அறிவிப்பை தயவு செய்து தவிர்த்துவிடவும்.
2. நான் கூறுகின்ற வாக்கியம் மெய்யல்ல
3. இந்த வாக்கியம் சில சொற்களை கொண்டுள்ளது.
4. உன்னால் நிலவில் தண்ணீர் உள்ளதை காணமுடியும்.

இந்த வாக்கியங்கள் மெய் அல்லது மெய்யற்றது என உன்னால் கூறமுடியுமா? இது மெய் அல்லது மெய்யற்றது எனக்கூற ஏதாவது ஒரு நியமவிதி உள்ளதா?

முதல் வாக்கியத்தைப்பார். நீ அந்த அறிவிப்பை தவிர்க்க விரும்பினால் நீ அதை பின்பற்றலாம். நீ அந்த அறிவிப்பை தவிர்க்க விரும்பவில்லை எனில் அதன்மீது நீ கவனத்தை செலுத்த வேண்டும். ஆகவே இந்த வாக்கியம் மெய் அல்லது மெய்யற்றது என நிர்ணயிக்கவேண்டியது இல்லை. 2 மற்றும் 3வது வாக்கியங்கள் தன்னைப்பற்றி சொல்லிக்கொள்வது. 4வது வாக்கியம் மெய்யாகவோ அல்லது மெய்யற்றதாகவோ இருக்கலாம்.

தன்னைப்பற்றி தானே கூறிக்கொள்ளும் வாக்கியங்களும் திறந்த வாக்கியங்களும் கூற்றுகள் ஆகாது.

இதை செய்

ஏதேனும் 5 வாக்கியங்களை எழுதி அவை கூற்றா அல்லது கூற்று இல்லையா என கூறி, காரணங்களை எழுதுக.

15.2 கணித கூற்றுகள் :

நாம் எண்ணற்ற வாக்கியங்களை எழுதுகிறோம். இவைகளில் சிலவற்றை பேசுகிறோம். வேறு சிலவற்றை எழுதுகிறோம். இவற்றை நியமவிதிகளைக்கொண்டு சரியா? தவறா? என்று தீர்மானிப்பதில்லை.

உதாரணம் : கவனி, தயவு செய்து உள்ளே வாருங்கள், நீங்கள் எங்கே வசிக்கின்றீர்கள்? என்றவாறு பல வாக்கியங்களை எழுதலாம்.

இந்தவகை வாக்கியங்கள் எல்லாம் கூற்றுகள் அல்ல. மெய் அல்லது மெய்யற்றது ஆனால் இரண்டும் அல்ல என்று தீர்மானிக்கக்கூடிய வாக்கியங்கள் மட்டுமே கூற்றுக்கள் ஆகும். கணித கூற்றில் கூட மெய் அல்லது மெய்யற்றதாக மட்டுமே இருத்தல் வேண்டுமே தவிர இரண்டும் அல்ல. கீழ்கண்ட கூற்றுக்களை ஆராய்க.

1. 3 ஒரு பகா எண்.
2. இரண்டு ஒற்றைப்படை முழுக்களின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண்.
3. ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் xக்கு $4x + x = 5x$
4. பூமி ஒரு சந்திரனைக் கொண்டுள்ளது.
5. ராமு ஒரு சிறந்த ஓட்டுநர்
6. பாஸ்கரா என்பவர் லீலாவதி எனும் புத்தகத்தை எழுதியிருக்கிறார்.
7. எல்லா இரட்டைப்படை எண்களும்.
8. ஒரு சாய்சதுரம் என்பது ஒரு சதுரம்
9. $x > 7$.
10. 4 மற்றும் 5 என்பன சார்பகா எண்கள்
11. வெள்ளிமீன், வெள்ளியால் செய்யப்பட்டது.
12. மனிதர்கள் பூமியை ஆளபிறந்தவர்கள்.

13. ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் x க்கு $2x > x$. 14. ஹவானா எனும் நகரம் கியூபாவின் தலைநகர்.

மேற்கண்டவைகளில் எவை கணிதக்கூற்று? எவை கணிதக்கூற்று அல்ல?

15.3 கூற்றுக்களை சரிபார்த்தல்

மேற்கண்டவைகளில் சிலவற்றை எடுத்துக்கொண்டு ஆராயலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: பகா எண்களின் வரையறைப்படி 3 என்பது பகா எண் எனும் வாக்கியம் சரி.

மேற்கண்டவைகளில் எந்தெந்த வாக்கியங்களை கணிதமுறையில் கூற்று என நிருபிக்க முடியும்? (முயற்சி செய்)

எடுத்துக்காட்டு 2: இரண்டு ஒற்றைப்படை முழுக்களின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண். 3 மற்றும் 5 எனும் ஒற்றைப்படை எண்களை எடுத்தக்கொள்வோம். அவைகளின் பெருக்கல்பலன் 15. இது இரட்டைப்படை எண் அல்ல. எனவே இந்த கூற்றின் மெய்மை மதிப்பீடு தவறு ஆகும். ஆகவே மறுப்பு உதாரணம் மூலமாக இந்த கூற்றின் மெய்ம்மை மதிப்பீடை தீர்மானித்தோம். ஒரு உதாரணம் மூலமாக ஒரு கூற்றின் மெய்ம்மை மதிப்பீட்டை தீர்மானிக்கலாம். ஒரு உதாரணம் மூலமாக ஒரு கூற்று தவறு (மெய்யல்ல) என முடிவெடுக்கலாம். இந்த வகை உதாரணங்கள் மறுப்பு உதாரணம் என்று அழைக்கப்படும்.

முயன்று பார்

மேற்கண்டவைகளில் மறுப்பு உதாரணங்கள் மூலமாக மெய்யல்ல என்று சொல்லக்கூடிய கூற்றகள் எவை?

எடுத்துக்காட்டு 3: கீழ்கண்ட வாக்கியங்களை ஆராய்க. மனிதர்கள் பூமியை ஆள பிறந்தவர்கள். ராமு ஒரு சிறந்த ஓட்டுநர். இந்த வாக்கியங்கள் குழப்பமான வாக்கியங்களாக உள்ளது. ஒருவன் இந்த பிரதேசத்தை ஆள பிறந்தவன் என்று உறுதியாக சொல்ல இயலாது. இவ்வாறே ராமு என்பவர் வாகனம் ஓட்டுவதில் எல்லா திறமைகளையும் பெற்றுள்ளான் என சொல்ல இயலாது.

எனவே கணித கூற்று என்பது ஒவ்வொருவரும் மெய் அல்லது மெய்யல்ல அல்லது இரண்டும் அல்ல என தீர்மானிக்க கூடியதாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4: வேறு சில வாக்கியங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். (1) பூமி ஒரு சந்திரனை கொண்டுள்ளது. (2) பாஸ்கரா என்பவர் லீலாவதி எனும் புத்தகத்தை எழுதினார். இந்த வாக்கியங்கள் கூற்றுகளா? இல்லையா? என்று எவ்வாறு தீர்மானிப்பது.

இந்த வாக்கியம் குழப்பமானதாக இல்லை, ஆனால் ஆராயவேண்டியுள்ளது. இதற்கு சில குறிப்புகளும் ஆதாரங்களும் தேவைப்படுகிறது. முதல் வாக்கியத்திற்கு சூரிய குடும்பம் பற்றிய குறிப்பேடுகள் தேவைப்படுகின்றது. இரண்டாவது வாக்கியத்திற்கு குறிப்பேடுகளும் ஆலோசனைகளும் அல்லது சில பதிவேடுகளும் தேவைப்படுகிறது.

ஆனால் கணிதக்கூற்று இவற்றிலிருந்து வேறுபட்டது. நமக்கு கிடைத்த குறிப்பேடுகளை மட்டும் வைத்துக்கொண்டு தீர்வு காண முடியாதபோது ஒரு மறுப்பு உதாரணம் கொண்ட அக்கூற்றின் மெய்மதிப்பீடு மெய்யல்ல என கூறலாம்.

x ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் xக்கு $2x > x$, எனில் $x = -1$ அல்லது $-\frac{1}{2}$.... என்றவாறு பிரதியிட்டால் $2x > x$ என்பது மெய்யல்ல. ஆகவே இதை மறுப்பு உதாரணம் மூலம் மெய்யல்ல என நிருபித்தோம். ஆனால் $2x > x$ என்பது இயல் எண்கள் கணத்தை [xN] பொருத்தவரை மெய்.

எடுத்துக்காட்டு 5: கீழ்கண்ட கூற்றுகள், தகுந்த நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு மெய்கூற்றுகள் ஆகும்படி மாற்றி எழுதுக.

i. ஒவ்வொரு மெய்யெண் xக்கும், $3x > x$.

ii. ஒவ்வொரு மெய்யெண் xக்கும், $x^2 \geq x$.

iii. ஓர் எண்ணை 2ஆல் வகுத்தால் அந்த எண்ணில் பாதி கிடைக்கும்.

iv. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாண் வட்டத்தின்மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணம் $90°$.

v. ஒரு நாற்கரத்தில் எல்லா பக்கங்களும் சமம் எனில் அது ஒரு சதுரம்.

தீர்வு :

i. $x > 0$, எனில் $3x > x$.

ii. $x \leq 0$ அல்லது $x \geq 1$, எனில் $x^2 \geq x$.

iii. பூஜ்ஜியத்தை தவிர மற்ற எண்களை 2ஆல் வகுத்தால் அந்த எண்ணில் பாதி கிடைக்கும்.

iv. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு விட்டம் வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணம் $90°$.

v. ஒரு நாற்கரத்தில் எல்லா பக்கங்களும் உட்கோணங்களும் சமம் எனில் அது ஒரு சதுரம்.

பயிற்சி - 15.1

1. கீழ்கண்ட வாக்கியங்கள் எப்பொழுதும் சரியா? அல்லது எப்பொழுதும் தவறா? அல்லது நிர்ணயிக்க இயலாததா? உன்னுடைய விடையை கூறி விவரி.

i. ஒரு மாதத்திற்கு 27 நாட்கள்

ii. பொங்கல்பண்டிகை வெள்ளிக்கிழமை அன்று வரும்

iii. ஹைதராபாத்தின் உஷ்ணநிலை $2°C$.

iv. உயிரினங்கள் வாழக்கூடிய ஒரே ஒரு கிரகம் பூமி

v. நாய்கள் பறக்கும்

vi. பிப்ரவரி மாதம் 28 நாட்களை கொண்டுள்ளது

2. கீழ்கண்ட கூற்றுகள் சரியா? அல்லது தவறா? உன்னுடைய விடையே கூறி காரணத்தையும் கூறு.

i. நாற்கரத்தில் உள்கோணங்களின் $350°$.

ii. ஒவ்வொரு மெய்யெண் xக்கும், $x^2 \geq 0$.

iii. சாய்துரம் ஓர் இணைகரம்

iv. இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களின் மொத்தம் இரட்டைப்படை எண்ணே

v. ஒரு வர்க்க எண்ணை இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களின் மொத்தமாக எழுதலாம்.

3. கீழ்கண்ட கூற்றுகள் தகுந்த நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு மெய்கூற்றுகள் ஆகும்படி மாற்றி எழுதுக.

i. அனைத்து எண்களையும் பகா காரணிகளின் பெருக்கல்பலனாக எழுதலாம்.

ii. ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணின் இரண்டு மடங்கு எப்பொழுதும் இரட்டைப்படை எண்.

iii. xன் எந்த ஒரு மதிப்புக்கும், $3x + 1 > 4$.

iv. xன் எந்தஒரு மதிப்பிற்கும், $x^3 \geq 0$.

v. ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் மையக்கோடு கோண இருசமவெட்டியாகும்.

4. அனைத்து $x > y$க்கும் $x^2 > y^2$ எனும் கூற்று மெய்யற்றதாக்குவதற்கு தகுந்தவாறு மறுப்பு உதாரணம் தருக.

15.4 கணிதத்தில் காரணகாரிய நிருபணம் :

மனிதர்களுக்கு ஆசை இயல்பானது. இந்த ஆசையே (நாட்டமே) உலகத்தில் உள்ள அநேக விஷயங்களை கற்றுக்கொள்ள வழிவகுக்கிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட விஷயத்தை தெரிந்துக்கொள்ள வேண்டும் என்று ஆசையை அதிகப்படுத்திக்கொண்டால் என்ன நிகழும்? இக்குறிப்பிட்ட விஷயத்தைப்பற்றிய குறிப்புகள் மற்றும் கருத்துக்களை மற்றவர்களுடன் பகிர்ந்துக்கொண்டால் என்ன ஏற்படும்?

இந்தவித முயற்சியின் மூலமாக அக்குறிப்பிட்ட விஷயம் ஏன் நிகழ்ந்தது? எவ்வாறு நிகழ்ந்தது? எதற்காக நிகழ்ந்தது? என்று அறிந்துக்கொள்கிறோம்.

இவற்றை உலகில் உள்ள எல்லாவற்றையும் அறிந்துக்கொள்ள தன்னை ஈடுபடுத்திகொண்டால் என்ன நிகழும்?

இவ்வாறு அவ்விஷயங்களில் முழுமையாக தன்னை ஈடுபடுத்திக்கொண்டு தர்க்க சிந்தனை மூலம் ஆராய்ந்தால் புதிய கண்டுபிடிப்புகளும் புதிய கூற்றுக்களும் உருவாகும். நாம் ஏற்கனவே அறிந்துள்ள கூற்றுக்களையும் செம்மைப்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

இந்தவகை பரிசோதனை, கருதுகோளை உருவாக்குவதற்கும், அக் கருதுகோளை ஆராய்வதற்கும் பயன்படுகிறது.

- சில நிகழ்ச்சிகளை செயல்படுத்தி உற்றுநோக்கி கருத்துக்களை சேகரித்துக்கொள்ளவேண்டும்.
- உற்றுநோக்கிய கருத்துக்களின் அடிப்படையில் கருதுகோளை உருவாக்குதல் வேண்டும்.
- நாம் உருவாக்கிய கருதுகோளை சார்ந்த மேலும் பல நிகழ்வுகளை ஆராய்தல் வேண்டும்.
- ஒரு கூற்று அல்லது ஒரு கருத்தை பல உற்றுநோக்கல்களின் அடிப்படையில் விளக்கி கூறுதல் கருதுகோள் எனப்படுகிறது.

சில சமயங்களில் மேலும் சிலவற்றை உற்றுநோக்குதல்களின் மூலமாக நாம் ஏற்கனவே உருவாக்கிய கருதுகோளை நீக்கி விடுகிறோம். அல்லது செம்மைப்படுத்திக்கொள்கிறோம். ஒரு கருதுகோளை தவறு என முடிவு செய்ய ஒரே ஒரு மறுப்பு உதாரணம் போதுமானது. பொதுவாக கணிதத்தில் கருதுகோள் என்பதற்கு பதிலாக ஊககூற்று எனும் வார்த்தையை பயன்படுத்துகிறோம். இந்த இரண்டு வார்த்தைகளுக்கும் உள்ள ஒன்றுமைகளையும் வேற்றுமைகளையும் நீங்கள் மேல் வகுப்புகளில் கற்றுக்கொள்வீர்கள்.

15.4.1 கருதுகோளை ஆராய்வதற்கு பகுத்தறிமுறையை பயன்படுத்துதல் :

ஒருகுறிப்பிட்ட கூற்றை கணிதமுறையில் நிருபணம் செய்வதற்கும் அறிவியல் முறையில் பரிசோதனை செய்வதற்கும் இடையே பெரிய வித்தியாசம் ஒன்றுமில்லை.

- கணிதம் பகுத்தறிவின்மேல் ஆதாரப்பட்டுள்ளது : நமக்குத் தெரிந்த சில கருத்துக்களின் ஆதாரமாகவும் தர்க்க ஆலோசனை மூலமாகவும் நிருபணம் செய்யப்படுகிறது.
- அறிவியல் தொகுத்தறி முறையின் மேல் ஆதாரப்பட்டள்ளது : பரிசோதனை முறை மூலமாக கருதுகோள் உறுதிப்படுத்தப்படுத்தப்படுகிறது அல்லது நீக்கிவிடப்படுகிறது.

அறிவியலில் சிறந்திருக்க பகுத்தறிமுறையில் சிறந்திருக்கவேண்டும். ஆனால் பகுத்தறிமுறையில் சிறந்திருப்பவர்கள் கணிதமேதாவியாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

செர்லாக் ஹோம்ஸ் மற்றும் ஹெர்குட்பைராட் போன்றவர்கள் இந்தவகை ஆய்வில் சிறந்தவர்கள். இவர்கள் குற்ற சம்பங்களிலிருந்து ஆதாரங்களை திரட்டி கருதுகோளுக்கு வலுவூட்டுவர். இந்த தடயங்களின் அடிப்படையில் தர்க்க ஆலோசனைமுறை மூலம் சிறந்த முடிவு எடுப்பர். குற்றம் செய்வதர்கள் சம்பவ இடத்தில் கண்டிப்பாக ஏதாவது ஒரு தடயத்தை விட்டுச்செல்வர். இந்த தடயத்தை தர்க்க ஆலோசனைமுறை மூலம் பகுத்தாராய்ந்து அவர்களின் கருதுகோளுக்கு வலுவூட்டி குற்றவாளி யார் என தீர்மானிப்பர். இங்கு அறிவுநுட்பம்தான் மூலதனம்.

15.4.2 பகுத்தறிமுறை

குழப்பமில்லாத கூற்றுக்கு மெய்ம்மை மதிப்பீட்டை காணும் தர்க்கமுறையே பகுத்தறிமுறையாகும். பகுத்தறிமுறையை நன்கு விளக்கி கொள்ள கீழ்கண்டபுதிரை கவனி.

உங்களிடம் நான்கு அட்டைகள் தரப்படுகிறது. ஒவ்வொரு அட்டையிலும் ஒருபுறம் எண்ணும் மறுபுறம் எழுத்தும் அச்சிடப்பட்டிருக்கும்.

A	V	8	5

நீங்கள் கீழ்கண்ட நியமவிதிகளை கடைபிடிக்க வேண்டும் :

(1) அட்டையில் ஒருபுறம் ஒற்றைப்படை எண் இருந்தால் மறுபுறம் ஆங்கில எழுத்து இருக்கும்.

இவ்விதிகளை சரிபார்ப்பதற்கு குறைந்தபட்சம் எத்தனை அட்டைகளை திருப்பிப்பார்க்க வேண்டும்? அனைத்து அட்டைகளையும் திருப்பிப் பார்த்து ஆராய்து எளிது. ஆனாலும் சில அட்டைகளை மட்டும் திருப்பிப் பார்த்து ஆராய முடியுமா?

ஓர் அட்டையின் ஒருபுறம் ஒற்றைப்படை எண் இருந்தால் மறுபுறம் ஆங்கில எழுத்து இருக்கும் என்று தரப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஒரு அட்டையில் ஒருபுறம் ஆங்கில உயிர் எழுத்து இருந்தால் மறுபுறம் ஒன்றைப்படை எண் இருக்கவேண்டும் என்று கூறப்படவில்லை. இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம், இவ்வாறே, ஒருபுறம் இரட்டைப்படை எண் உள்ள அட்டையின் மறுபுறம் ஆங்கில எழுத்து இருக்கவேண்டும் என்று கூறபடவில்லை. இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

A உள்ள அட்டையை திருப்பலாமா? இல்லை, ஒற்றைப்படை எண்ணோ அல்லது இரட்டைப்படை எண்ணோ இருக்கக்கூடும் என்று சொல்வதற்கு இல்லை.

8 உள்ள அட்டையை திருப்பினால் மேற்கண்டவிதிப்படி இருக்கும் என்று சொல்வதற்கு இல்லை. ஆங்கில உயிர் எழுத்தோ அல்லது மெய்எழுத்தோ இருக்கக்கூடும்.

ஆனால் V மற்றும் 5 உள்ள அட்டைகளை திருப்பினால் நாம் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

இவ்விதமாக தர்க்க ஆலோசனைப்படி தீர்வுகாணும் முறையை பகுத்தறி முறை என்று அழைக்கிறோம். தரப்பட்டுள்ள கட்டுபாடுகளின் உதவிகொண்டு தேவையற்றவற்றை நீக்கி தீர்வு காண்பதால் இம்முறையை பகுத்தறிமுறை என்று அழைக்கிறோம். உதாரணமாக மேற்கண்டபுதிரில் தர்க்கரீதியான விவாதம்படி நான்கு அட்டைகளில் V மற்றும் 5 எனும் இரண்டு அட்டைகளை மட்டும் திருப்பிப்பார்த்து ஆராய்ந்தால் போதுமானது.

பகுத்தறிமுறை ஒருகுறிப்பிட்ட கூற்று சரியா அல்லது தவறா என்று நிர்ணயம் செய்ய பயன்படுகிறது. ஏனெனில் இது ஏற்கனவே நமக்குள் தர்க்க ஆலோசனைப்படி உண்மை என்று அறிந்தவையே.

உதாரணமாக, ஏதேனும் இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண்ணே எனும் கூற்று நிருபிக்கப்பட்டபிறகு, நாம் ஏதேனும் இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண்ணா அல்லது இல்லையா என்று கணக்கிடாமலேயே எளிதாக சொல்ல முடியும்.

அதாவது 56702×19992 என்பனவற்றின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண் ஏனெனில் 56702ம் 19992ம் இரட்டை எண்கள் ஆகும்.

பகுத்தறிமுறையே விளக்கும் மற்ற சில உதாரணங்களை கவனிப்போம்.

i. ஓர் எண்ணின் ஒன்றுகள் இடத்தில் 0 இருந்தால் அந்த எண் 5ஆல் வகுபடும். 30 எனும் எண்ணின் ஒன்றுகள் இடத்தில் 0 உள்ளது.

மேற்கண்ட இரண்டு கூற்றுக்களில் நாம் பகுத்தறிவது யாதெனில் 30என்பது 5ஆல் வகுபடுகிறது. ஏனெனில் அந்த எண்ணின் ஒன்றுகள் இடத்தில் 0 உள்ளது.

ii. சில பாடகர்கள் கவிஞர்கள் ஆவர். எல்லா பாடலாசியர்களும் கவிஞர்கள் ஆவர். அனைவரும் புலவர்களாக உள்ளனர்.

இங்கே இரண்டு கூற்றுகளும் தவறு (ஏன்?) எல்லா பாடலாசிரியர்களும் கவிஞர்கள் ஆவர். (தவறு) ஏனெனில் அதைப்பற்றி உண்மை என்று கூறமுடியாது. இங்கே மூன்று வாய்ப்புகள் உள்ளன.

(i) எல்லா பாடலாசிரியர்களும் கவிஞர்களாக இருக்கலாம்.
(ii) சிலர் கவிஞர்களாக இருக்கலாம். (iii) அவர்களில் ஒருவரும் கவிஞராக இல்லை.

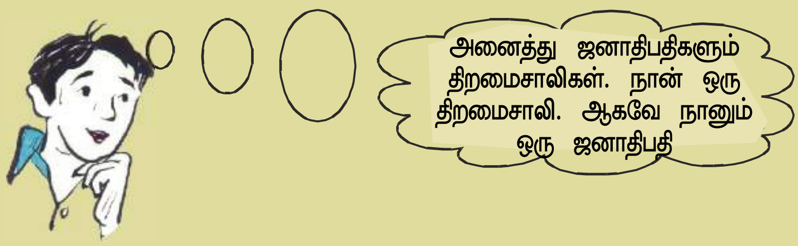
மேற்கண்டவைகளிலிருந்து நாம் முடிவுக்கு வருவது யாதெனில் (எனில்-எப்போது) எனும் நிபந்தனை கூற்றுக்கள் பகுத்தறிமுறையில் வருகிறது.

இந்த பகுத்தறிமுறையை கணிதத்தில் அதிகமாக பயன்படுத்துகிறோம். உதாரணமாக கோட்டுகோணஜோடிகளின் மொத்தம் $180°$ எனில் முக்கோணங்களின் கோணங்களின் மொத்தம் $180°$. இவ்வாறு ஒரு எண் 5ஐ எழுத தசமஎண்ணை பயன்படுத்துகிறோம். இரண்டடிமான முறையை பயன்படுத்தினால், 101 என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

நம் அன்றாட வாழ்வில் நடக்கும் நிகழ்வுகளுக்கு நாம் கூறும் ஆலோசனைகள் எப்பொழுதும் சரியாக அமைவதில்லை. தவறான காரணங்களின் அடிப்படையில் நாம் பலமுடிவுகளுக்கு வருகிறோம். உதாரணமாக உன்னுடைய நண்பன் ஒருநாள் முழுவதும் உன்னை சந்தித்து பேசவில்லை எனில் அவன் உன்மேல் கோபம் கொண்டிருக்கிறான் என்ற முடிவுக்கு வந்துவிடுகிறாய். அவன் உன்மீது கோபம் காரணமாக உன்னுடன் பேசவில்லை எனில் நீ எடுத்த முடிவு சரியானது. அவ்வாறு இல்லாமல் அன்று முழுவதும் அதிக வேலை காரணமாக உன்னுடன் பேச இயலவில்லை எனில் நீ எடுத்த முடிவு தவறு. தகுந்த காரணங்களின் அடிப்படையில் பரிசோதிக்காமல் நாம் எடுக்கும் சில முடிவுகள் தவறாக இருக்கலாம். ஏன்?

பயிற்சி - 15.2

1. பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளிக்க பகுத்தறிமுறையை பயன்படுத்துக.
   i. மனிதர்கள் அழியக்கூடியவர்கள். ஜீவன் என்பவன் மனிதன். இந்த இரண்டு கூற்றுக்களின் அடிப்படையில் ஜீவனைப் பற்றி நீ கூறுவது யாது?
   ii. தெலுங்கு மக்கள் அனைவரும் இந்தியர்கள். x என்பவர் ஓர் இந்தியர். x என்பவர் தெலுங்குகாரர் என்று உன்னால் கூறமுடியுமா.
   iii. செவ்வாய் கிரகத்தில் வாழும் மக்கள் சிவப்பு நாக்கு கொண்டவர்கள். மணி என்பவர் செவ்வாய் கிரகத்தில் வாழும் மனிதர். மணி என்பவர் பற்றி நீ கூறுவது யாது?
   iv. கீழ்கண்ட கேலி சித்திரத்தில் ராஜா ஆலோசனையில் உள்ள தவறு யாது?



2. உனக்கு நான்கு அட்டைகள் கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு அட்டையிலும் ஒருபுறம் எண்ணும் மறுபுறம் எழுத்தும் அச்சிடப்பட்டுள்ளது. எந்த இரண்டு அட்டைகளை மட்டும் திருப்பிபார்த்து கீழ்கண்ட விதி உள்ளடக்கியுள்ளதா? இல்லையா? என ஆராய்வாய். ஓர் அட்டையில் ஒருபுறம் உயிர்மெய் எழுத்துக்கள் இருந்தால் அதன்மறுபுறம் ஒன்றைஎண் இருக்கும்.

B	3	U	8

3. கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து நீங்கள் நினைத்துக்கொண்ட எண்ணை கண்டுபிடிக்கவும். இங்கே எட்டு உணவு யோசனை தரப்பட்டுள்ளன. இவைகளில் நான்கு சரியான கூற்றானாலும் நீங்கள் நினைத்த எண்ணை காண பயன்படாது.

நீங்கள் நினைத்த எண்ணை காண இவற்றில் நான்கு அவசியம்.

இங்கு எட்டுஉளவுயோசனை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அ. அந்த எண் 9ஐவிட பெரியது.

ஆ. அந்த எண் 10ன் மடங்காக இருக்காது.

இ. அந்த எண் 7ன் மடங்காகும்.

ஈ. அந்த எண் ஒற்றைப்படை எண்.

உ. அந்த எண் 11ன் மடங்கு அல்ல.

ஊ. அந்த எண் 200ஐவிட சிறியது

எ. அந்த எண்ணின் ஒன்றுகள் இலக்கம் பத்துக்கள் இலக்கத்தைவிட பெரியது.

ஏ. அந்த எண்ணின் பத்துகள் இலக்கம் ஒற்றைப்படைஎண்.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

அந்த எண் எது?

அந்த எண்ணை காண பயன்படும் நான்கு உளவு யோசனைகளையும், எண்ணை காண பயன்படாத நான்கு உளவு யோசனைகளையும் வகைப்படுத்த முடியுமா? உளவு யோசனைகளைக்கொண்டு அட்டவணையில் உள்ள எண்களை அழித்துவிடு. முதல் உளவுயோசனைப்படி, நாம் நினைத்த எண் 1 முதல் 9 வரை இல்லை. ஆகவே 1 முதல் 9 வரை உள்ள எண்களை அழித்துவிடவேண்டும். இந்த புதிர் அட்டவணையை உளவுயோசனைகளைக்கொண்டு பூர்த்தி செய்தபிறகு எந்த உளவுயோசனைகள் தேவை? எந்த உளவுயோசனைகள் தேவையில்லை என்பதை காண்க.

15.5 தேற்றங்கள், ஊகக்கூற்றுகள் மற்றும் எடுகோள்கள்

இதுவரை நாம் கூற்றுகள் மற்றும் அதன் உண்மை எவ்வாறு சரிபார்ப்பது என்பது பற்றி விவாதித்தோம்.

இப்பொழுது தேற்றம், ஊகக்கூற்று, எடுகோள் ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள வேற்றுமைகளை தெரிந்துக்கொள்வோம். நீங்கள் முன்வகுப்புகளில் தேற்றங்கள் பற்றி படித்திருக்கிறீர்கள். தேற்றம் என்றால் என்ன?

உண்மை என நிருபிக்கப்பட்ட ஒரு கணிதக்கூற்று தேற்றம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் கூற்றுகள் தேற்றங்கள் எனப்படுகின்றன.

தேற்றம் 15.1 : முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் மொத்தம் $180°$.

தேற்றம் 15.2 : ஏதேனும் இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் ஒற்றைப்படை எண்ணே.

தேற்றம் 15.3 : ஏதேனும் இரண்டு அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் 4ஆல் வகுப்படும்.

நமக்குள்ள கணித அறிவைக்கொண்டு நாம் மெய்யென ஏற்றுக்கொள்ளும் கூற்றை ஊகக்கூற்று என்ற அழைக்கப்படுகிறது. ஊககூற்று சரியாகவோ அல்லது தவறாகவோ இருக்கலாம். ஒரு ஊகக்கூற்ற சரி அல்லது தவறு என நிருபணம் செய்ய முடிந்தால் அது தேற்றமாகும். கணிதத்தில் ஊகக்கூற்றுகளை கொண்டு அறிவுசார்ந்த கணித கருத்துக்கள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. அந்த மாதிரியான உதாரணங்களை சிலவற்றை கவனிப்போம்.

ராஜா சில முழுஎண்கள் கணத்தை ஆராய்ந்து கீழ்கண்டவாறு குறிப்பிட்டான்.

அடுத்தடுத்த முழுஎண்களின் பெருக்கல்பலனுடன் அந்த மூன்று எண்களின் மைய எண்ணை கூட்டினால் வரும் மொத்தம் மையஎண்ணின் கனத்திற்கு சமம்.

உதாரணமாக, 3, 4, 5, எண்களை எடுத்தக்கொள்வோம். $3 \times 4 \times 5 + 4 = 64$, 64 என்பது 4ன் கனஎண். இது எப்பொழுதும் சரியாகுமா? மேலும் சில அடுத்தடுத்த மூன்று முழுஎண்களை எடுத்துக்கொண்டு ஆராய்க. ரவி, 6, 7, 8 எண்களை எடுத்துக்கொண்டு சரிபார்த்தான். $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$, 343 என்பது 7ன் கன எண்.

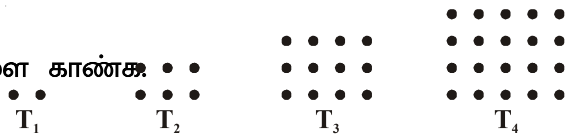
$n,\ n+1, n+$ எனும் மூன்று அடுத்தடுத்த முழுஎண்களை எடுத்துக்கொண்டு சரிபார்.

எடுத்துக்காட்டு 6: கீழ்கண்ட புள்ளிகள் அமைப்பு ஒருவித வரிசை எண் அமைப்பை தெரிவிக்கிறது.

(அ) அடுத்த மூன்று உறுப்புக்களை காண்க.

(ஆ) 100வது உறுப்பை காண்க.

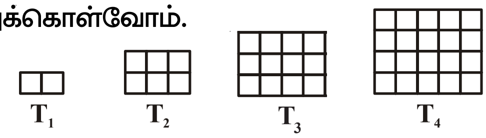
(இ) nவது உறுப்பை காண்க.



இங்குள்ள புள்ளிகள் அமைப்பு செவ்வக வடிவத்தை ஏற்படுத்துகிறது. இங்கு $T_1 = 2, T_2 = 6,\ T_3 = 12, T_4 = 20$ என்றவாறு உள்ளது. T_5 ஐ ஊகிக்கமுடியுமா? T_6, T_n ஆகியற்றை ஊகிக்க இயலுமா? T_n ஐ ஊகக்கூற்றாக்கவும் மேற்கண்ட புள்ளிகள் அமைப்பை கீழ்கண்டவாறு மாற்றி அமைத்துக்கொள்வோம்.

தீர்வு :

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	6	12	20	?	.....
	+4	+6	+8	+10	



எனவே, So, $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... T_7 ஐ காண்க.

$T_{100} = 100 \times 101 = 10,100$

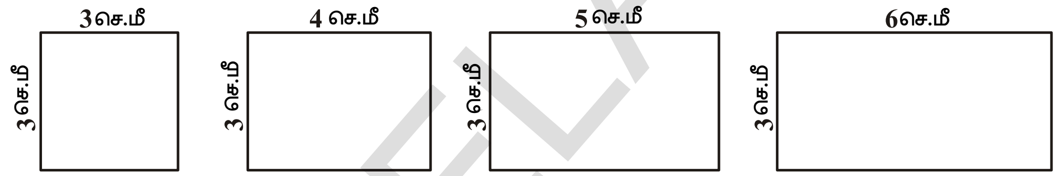
$T_n = n \times (n+1) = n^2 + n$

இந்த வகை காரண காரிய ஆலோசனைமுறையில் பலவித நிகழ்வுகளையும் தொகுப்பு விவரங்களையும் பரிசீலனை செய்து ஒரு முடிவுக்கு வருகிறோம். இவ்விதமுறையில் தீர்வுகாணுதலை தொகுத்தறிதல் முறை என்கிறோம். ஊகக்கூற்றுக்களை உருவாக்குவதற்கு தொகுத்தறிதல் முறை மிகவும் பயன்படுகிறது. கோல்டுபாக் என்ற கணிதமேதை ஓர் அமைப்பை கவனித்தார்.

6 = 3 + 3	8 = 3 + 5	10 = 3 + 7
12 = 5 + 7	14 = 11 + 3	16 = 13 + 3 = 11 + 5

1743ஆம் ஆண்டில் கோல்ட் பாக் செய்த அமைப்பிலிருந்து 4ஐவிட பெரிய ஒவ்வொரு இரட்டைப்படை எண்ணையும் இரண்டு பகா எண்களின் மொத்தமாக (இரண்டும் வெவ்வேறு பகா எண்களாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை) எழுதலாம். இவர் கண்டுபிடித்த இந்த ஊகக்கூற்றை இதுவரை சரிஎன்றோ அல்லது தவறு என்றோ நிருபிக்கப்படவில்லை. இக்கூற்றை சரிஎன்றோ அல்லது தவறு என்றோ உங்களால் நிருபணம் செய்யப்பட்டால் உங்களுக்கு பெருமையே.

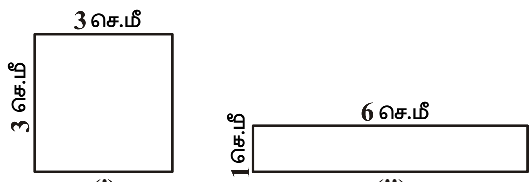
சிலநேரங்களில் சில எண் அமைப்புகள் தவறான ஊகக்கூற்றிற்கு அழைத்துச்செல்லும். உதாரணமாக 8 ஆம் வகுப்பு படிக்கும் ஜானகி மற்றும் கார்த்திக் பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவு அத்தியாயத்தை படிக்கும்போது, ஓர் அமைப்பை கவனித்தார்கள்.



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
சுற்றளவு :	12 செ.மீ	14 செ.மீ	16 செ.மீ	18 செ.மீ
பரப்பு :	9 செ.மீ^{2}	12 செ.மீ^{2}	15 செ.மீ^{2}	18 செ.மீ^{2}

இந்த இருவரும் செவ்வகத்தின் சுற்றளவு அதிகரிக்கும்போது அதன் பரப்பளவு அதிகரிக்கும் எனும் ஊகக்கூற்றை தெரிவித்தனர். இக்கூற்றைப்பற்றி நீ கூறுவது என்ன? இது சரியா? ராணி எனும் மாணவி சில செவ்வகங்களை எடுத்துக்கொண்டு இந்த ஊககூற்று தவறு என நிருபித்தாள்.

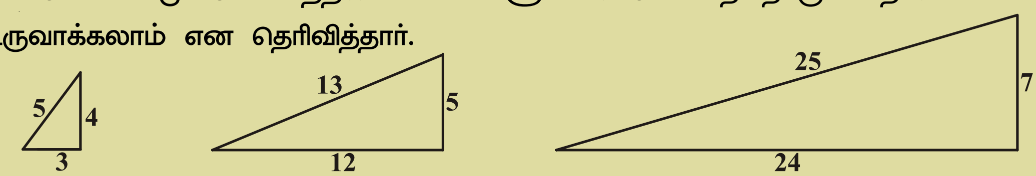
அருகில் உள்ள செவ்வகங்களில் சுற்றளவு அதிகரித்தபோதும் பரப்பளவு குறைந்தது. ஆகவே எல்லா சந்தர்ப்பங்களிலும் சரியாக இருக்கும்படியான ஊகக்கூற்றை உருவாக்கவேண்டும்.



	(i)	(ii)
சுற்றளவு :	12 செ.மீ	14 செ.மீ
பரப்பு :	9 செ.மீ^{2}	6செ.மீ^{2}

முயன்று பார்

சிறப்பு வாய்ந்த பிதாகரஸ் எனும் கணிதமேதையின் இளைய தம்பி செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கிடையே மற்றொரு உறவை உருவாக்கலாம் என தெரிவித்தார்.



(i) (ii) (iii)

பிதாகரஸ் தேற்றம் : எந்தஒரு செங்கோண முக்கோணத்திலும் சிறிய பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம்.

இந்த ஊகக்கூற்று சரியா? தவறா? என ஆராய்க. கணிதத்தில் சிலவற்றை நிருபணம் செய்யமுடியாது ஏன்?

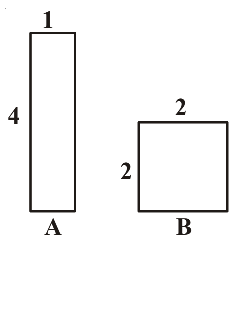
கணிதத்தில் சில கூற்றுக்களை நிருபணம் செய்யாமலே உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்கிறோம். இத்தகைய கூற்றுகள் "தானே தெளிவானது" என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த கூற்றுகள் எடுகோள்கள் என்று அழைக்கப்படுகிறது. அத்தியாயம் 3ல் யூக்ளிடின் எடுகோள்களை கற்றிருக்கிறோம்.

யூக்ளிடின் முதல் எடுகோள் : இரண்டு புள்ளிகளைக் கொண்டு ஒரு கோடு வரையலாம்.

மூன்றாவது எடுகோள் : ஒரு புள்ளியை மையமாகக்கொண்டு ஏதேனும் ஒரு ஆரத்திற்கு ஒரு வட்டத்தைை வரையலாம். இந்த இரண்டு கூற்றுக்களும் உண்மை என்று தெளிவாக தெரிகிறது. இவற்றை யூக்ளிட் உண்மை என்று அந்நாளிலே ஊகித்தறிந்தார். ஏன்? நாம் ஒவ்வொன்றையும் நிருபிக்க இயலாது. ஆகையால் சில கூற்றுக்களை உண்மை என்று ஏற்றுக்கொண்டு, சிலவற்றின் அடிப்படையில் சில விதிகளும் தேற்றங்களும் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

பார்ப்பதற்கு உண்மை என்று காணப்படுகிற அனைத்து கூற்றுக்களையும் ஏன் உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்ளகூடாது. இதற்கு பல காரணங்கள் உண்டு. சில கூற்றுக்கள் எப்பொழுதும் சரியாக இருக்காது. எடுத்துக்காட்டாக ஓர் எண்ணுடன் மற்றொரு எண்ணை கூட்டும் போது கிடைக்கும் விடை அந்த எண்களை விட பெரியதாக இருக்கும் என்று நம்மில் பலர் நம்புகிறார்கள். ஆனால் இதுஎப்போதும் உண்மையாக இருக்காது. உதாரணமாக $5 + (-5) = 0$, இதில் வரும்மொத்தம் 0, 5 ஐ விட சிறியது.

அருகில் உள்ள படங்களை கவனி. இவற்றில் எது பெரிய பரப்பளவை கொண்டுள்ளது? பார்ப்பதற்கு B பெரிய பரப்பளவு கொண்டதாக தெரிந்தாலும் உண்மையில் இரண்டும் சமப் பரப்பளவு கொண்டவையே.



எடுகோள்கள் நிருபிக்கப்படாமலேயே ஏற்றுக்கொள்வதை நினைத்துப்பார்த்தால் உங்களுக்கு வியப்பாக இருக்கலாம். எடுகோள்கள், தமக்குள்ளிருக்கும் உள்ளறிவால் பார்ப்பதற்கு சரியாக காணப்படுவதால் உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட எடுகோள் பிற்காலத்தில் நாமே தவறு என்ற அறியபடலாம். இவ்வாறு ஏற்படாமல் இருப்பதற்கு நாம் கையாளவேண்டிய முன்னெச்சரிக்கைகள் யாவை.

பின்வரும் படிகளை எடுக்கிறோம்.

1. எடுகோள் தெளிவாகவும் சுருக்கமாகவும் இருத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக யூக்ளிடின் ஐந்து எடுகோள்களை அடிப்படையாக கொண்டு நூற்றுக்கணக்கான தேற்றங்களை நிருபிக்க முடியும்.

2. எப்பொழுதும் ஏற்றுக்கொள்ள கூடியதாக இருந்தல் வேண்டும்.

ஒரு எடுகோளைக்கொண்டு மற்றொரு எடுகோளை தவறு என நிருபிக்கப்பட்டால் அதை ஒவ்வாத கூற்று என்கிறோம். உதாரணமாக கீழ்கண்ட இரண்டு கூற்றுக்களை கவனி. நாம் இவற்றை முரண்பாடான கூற்று என நிருபிக்கலாம்.

கூற்று -1 : எந்த ஒரு முழு எண்ணும் அதற்கு அடுத்த முழு எண்ணிற்கு சமம் அல்ல.

கூற்று-2 : ஒரு முழு எண்ணை பூஜ்ஜியத்தால் வகுத்தால் வரும் ஈவும் முழு எண்ணே.

(வகுத்தலில் 0ஆல் வகுப்படுதல் வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆனால் 0ஆல் வகுபடுதல் வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் என்ன நிகழ்கிறது என்ற பார்ப்போம்)

கூற்று(2)லிருந்து $\frac{1}{0} = a$, (இங்கு a என்பது முழுஎண்) இதிலிருந்து 1=0 ஆனால் இது கூற்று (1)ஐ மெய்யற்றதாக்குகிறது.

இதிலிருந்து ஒரு முழு எண்ணும் அதற்கு அடுத்துவரும் முழுஎண்ணும் சமம் அல்ல என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

(3) ஒரு தவறான எடுகோள் இப்போதோ அல்லது பிற்காலத்திலோ முரண்பாடான முடிவையே தரும்.

ஒரு கூற்று மற்றும் அதன் எதிர்மறை ஆகிய இரண்டும் சரியான கூற்று எனில் அதை முரண்பாடான கூற்று என்கிறோம். உதாரணமாக மேல்குறிப்பிடப்பட்ட கூற்று (1) மற்றும் கூற்று(2)ஐ எடுத்தக்கொள்வோம். கூற்று (1) லிருந்து $2 \neq 1$.

Let $x = y$

$x \times x = xy$

$x^2 = xy$

$x^2 - y^2 = xy - y^2$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$

இருபுறங்களிலும் $(x - y)$ ஆல் வகுப்படுகிறது (கூற்று (2)ன்படி)

$x + y = y$

ஆனால் $x = y$

ஆகவே $x + x = x$

$2x = x$

$2 = 1$

மேற்கண்டவைகளிலிருந்து $2 \neq 1$ மற்றும் அதன் எதிர்மறை $2 = 1$ ஆகிய இரண்டு கூற்றுக்களும் சரியானது. இது முரண்பாடான ஒன்றாகும். ஒரு முழு எண்ணை பூஜ்ஜியத்தால் வகுத்தால் வரும் ஈவும் முழு எண்ணே எனும் தவறான கூற்றிலிருந்து இந்த முரண்பாடான முடிவு வந்தது. ஆகவே ஒரு கூற்றை எடுகோளாக மாற்ற பல ஆலோசனைகளும் ஆழ்ந்த அறிவும் தேவைப்படுகிறது. ஒவ்வாத அல்லது தர்க்க முரண்பாடுகளை ஏற்படுத்தாத எடுகோடுகளை கண்டுபிடிக்கவேண்டும். இந்த எடுகோள்கள் புதிய கண்டுபிடிப்புகளை உருவாக்க பயன்படுகிறது.

இந்த பாடப்பகுதியை எடுகோள், தேற்றம் ஊககூற்று ஆகியற்றிற்கு இடையே உள்ள வேறுபாடுகளை நினைவுகூறி முடிப்போம். எடுகோள் என்பது நிருபணம் இல்லாத உண்மை என ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட கூற்று ஆகும். ஊகக்கூற்று என்பது சரி அல்லது தவறு என்று இதுவரை நிருபிக்கப்படாத கணித கூற்று ஆகும். தேற்றம் என்பது தர்க்க ஆலோசனைகள் அடிப்படையில் உண்மை என்று நிருபணம் செய்யப்பட்ட கூற்றுஆகும்.

பயிற்சி - 15.3

1. (i) ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் பெருக்கல்பலனைக்காண்க.

   உதாரணம் : $1 \times 3 \times 5 = 15,\ 3 \times 5 \times 7 = 105,\ 5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் மொத்தம் காண்க.

   உதாரணம் : $2 + 4 + 6 = 12,\ 4 + 6 + 8 = 18,\ 6 + 8 + 10 = 24,\ 8 + 10 + 12 = 30$ என்றவாறு காண்க.

   இவைகளில் ஏதேனும் ஒருவிதகுறிப்பிட்ட முறையை உன்னால் காணமுடிகிறதா? அவைகள் பற்றிய ஊகக்கூற்று யாது?

2. அருகில் உள்ள பாஸ்கல் முக்கோணத்தை கவனி.

   கிடைவரிசை-1 : 1 = 11^0

   கிடைவரிசை-2 :11 = 11^1

   கிடைவரிசை-3 :121 = 11^2

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1

   கிடைவரிசை 4 மற்றும் கிடைவரிசை 5 ஆகியவற்றைப்பற்றிய ஊகக்கூற்றை தயார்செய். நீ கண்டுபிடித்த ஊகக்கூற்று இடைவரிசை 6க்கும் பொருந்துகிறதா?

3. கீழ்கண்ட வரிசை எண் அமைப்பை கவனி.

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$, 28ன் காரணிகளின் $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$
   28, 6 காரணிகளாலும் வகுபடுகிறது. அதாவது 1, 2, 4, 7, 14, 28

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$, 30ன் காரணிகள் எண்ணிக்கை $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$
   30,8 காரணிகளாலும் வகுபடுகிறது, அதாவது 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   அமைப்பைக் கண்டுபிடி.

   (குறிப்பு : ஒவ்வொரு பகா எண்களின் அடுக்குடன் ஒன்றை கூட்டவும்)

4. கீழ்கண்ட எண் அமைப்பை கண்டுபிடி.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

கீழ்கண்ட ஒவ்வொன்றிற்கும் ஊகக்கூற்றைக்கண்டுபிடி.

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

நீ கண்டுபிடித்த ஊககூற்று சரியா? ஆராய்க.

5. இந்த புத்தகத்தில் உள்ள 5 எடுகோள்களை சேகரி.
6. $p(x) = x^2 + x + 41$ என்பது பல்லுறுப்புக்கோவை xன் பல்வேறு மதிப்புகளும் $p(x)$ஐ கண்டுபிடி. $p(x)$ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் பகா எண்ணா? x என்பது இயல் எண்கள் கணத்தின் உறுப்பா? $x = 41$ எனில் $p(x)$ஐ காண்க. நீ அறிவது யாது?

15.6 கணித நிருபணம் என்றால் என்ன?

கணித நிருபணங்களை புரிந்துக்கொள்வதற்குமுன் கணித கூற்றுக்களை ஆராய வேண்டும். உதாரணமாக இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் ஒற்றைப்படை எண்ணே என்பதை நிருபிப்பதற்கு ஏதேனும் இரண்டு (15,2005) ஒற்றைப்படை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு ஆராய்க. 15 × 2005 = 30075 என்பது ஒற்றைப்படை எண் இதுபோன்ற பல உதாரணங்களை செய்து பார்க்கலாம்.

முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் மொத்தத்தை காண்பதற்கு பல்வேறு அளவுகள் கொண்ட முக்கோணங்களை வரைந்து அவற்றின் உட்கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ என சரிபார்க்கலாம். கோணங்களை அளப்பதில் சிறியகுறைபாடு இருந்தாலும் ஏறக்குறைய $180°$ கிடைக்கும்.

இந்தவிதமுறையில் உள்ள குறைபாடு என்ன? இந்தமுறையில் பல கணக்குகள் (உதாரணங்கள்) சரிபார்க்கப்படுகிறது. நீங்கள் உண்மை என்று நம்பக்கூடிய ஒரு கூற்று எல்லா சந்தர்ப்பங்களிலும் சரியாக இருக்கும் என்று சொல்வதற்கு இல்லை. உதாரணமாக பல ஜோடி இரட்டைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலனை ஆராய்ந்து பார்த்ததில் இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண்ணாகும் என்று ஊகிக்கலாம். இருந்தபோதிலும் ஆராய்ந்து பார்க்காத மற்ற எண்ணற்ற இரட்டைப்படை ஜதைகளின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண்ணாகவே இருக்கும் என்று உத்தரவாதம் அளிக்க இயலாது. முடிவில்லாத இரட்டைப் படை ஜோடி இருப்பதால் அனைத்தையும் சோதிக்க இயலாது.

இவ்வாறே இதுவரை சில வரையபடாத முக்கோணங்களின் உட்கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ஆக இல்லாமலும் இருக்கலாம். உதாரணமாக (பயிற்சி 15.3, 2வது வினா) பாஸ்கல் முக்கோணத்தில் 11^5 = 15101051. ஆனால் உண்மையில் 11^5 = 161051. சிலவகைகள் மட்டும் சரிபார்த்தலை (நிரூபணத்தை) சார்ந்திருக்க வேண்டியதில்லை. ஆகவே ஒரு கூற்று நிருபணம் செய்வதற்கு சிலவற்றை மட்டும் எடுத்துக்கொண் (சில உதாரணங்கள் மட்டும்) ஆராய்வதற்கு பதிலாக வேறொரு சிறந்த முறையை நாடவேண்டியுள்ளது. அந்த சிறந்த முறையின் பெயர் நிருபிக்கப்படுகிற கூற்று. ஒரு கணித கூற்றை தர்க்க ஆலோசனைகளின் அடிப்படையில் நிருபணம் செய்யும் முறைக்கு கணித நிருபணம் என்று பெயர்.

ஒரு கணித கூற்று தவறு என நிருபிக்க ஒரே ஒரு மறுப்பு உதாரணம் போதுமானது. ஒரு கணித கூற்று ஆயிரக்கணக்கான உதாரணங்களைக் கொண்டு சோதித்து ஒரு கணித கூற்று சரி என நிருபித்தாலும் போதுமானது ஆகாது. ஏனெனில் அக்கூற்றை தவறு எனநிருபிக்க ஒரே ஒரு மறுப்பு உதாரணம் போதுமானது.

நிரூபிப்பதற்கு தேயையான வழிமுறைகளை கவனி.

1. கூற்றை தெளிவாக படித்து புரிந்துக்கொண்டு நிரூபணம் செய்வதற்கு தேவையான அம்சத்தை குறிப்பெடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

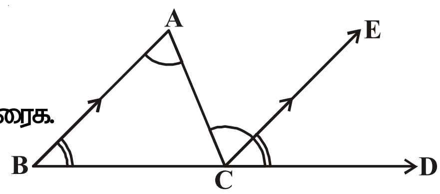
2. நிரூபணம் என்பது கணித கூற்றுக்களின் கிரமவரிசையாகும். ஒவ்வொரு கூற்றும் ஏற்கனவே நிருபிக்கப்பட்ட தேற்றம் அல்லது எடுகோள் அல்லது கருதுகோள் ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் தர்க்க ஆலோசனைமுறைப்படி நிருபிக்கப்படவேண்டும்.

3. எந்த அம்சத்தை நிருபிக்கவேண்டுமோ அதைச்சார்ந்த தர்க்க ஆலோசனையின் அடிப்படையில் சரியான கிரமவரிசையில் நிருபிக்கப்படவேண்டும்.

இதை நன்கு புரிந்துக்கொள்ள நாம் தேற்றத்தையும் அதன் நிருபணத்தையும் பகுப்பாய்வு செய்வோம். நான்காம் அத்தியாயத்தில் உள்ள தேற்றத்தின் நிருபணத்தை பகுத்து ஆராய்க. ஒரு தேற்றத்தை நிருபணம் செய்வதற்கு அந்த தேற்றம் சார்ந்த அம்சத்தின் பட அமைப்புமுறை முக்கியம். ஒவ்வொரு கூற்றின் நிருபணத்திலும் தர்க்க ஆலோசனை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

தேற்றம் 15.4 : ஒரு முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் மொத்தம் $180°$ ஆகும்.

நிரூபணம் : ABC என்பது ஒரு முக்கோணம்



நாம் $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

C புள்ளிவழியே CE கோட்டை BA க்கு இணையாக வரைக.

BC ஐ D வரை நீட்டி வரைக.

CE, BA க்கு இணை மற்றும் ACஒரு குறுக்குவெட்டி

ஆகவே, $\angle CAB = \angle ACE$, (ஒன்றுவிட்டகோணங்கள்) ..... (1)

இவ்வாறே, $\angle ABC = \angle DCE$ (ஒத்தகோணங்கள் சமம்) ..... (2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) கூட்டினால்

$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE$ என்பது கிடைக்கும் ..... (3)

3வது சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் $\angle BCA$ ஐ கூட்டினால்

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ எனப்பெறுகிறோம் ..... (4)

ஆனால் $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$, (ஏனெனில் அவைகள் கோட்டுக்கோணங்கள்)..... (5)

ஆகவே $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

மேற்கண்ட நிருபணத்தில் ஒவ்வொருபடியும் எவ்வாறு காரணகாரியத்தோடு தொடர்புகொண்டுள்ளது என்பதை கவனிப்போம்.

படி 1: மேற்கண்ட தேற்றம் முக்கோணத்தின் பண்புகளை சார்ந்து உள்ளது. ஆகையால் முக்கோணம் ABC உடன் ஆரம்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

படி 2: CE ஐ BA வுக்கு இணையாக வரையப்பட்டுள்ளது. BC ஐ Dவரை நீட்டி வரையப்பட்டுள்ளது. தேற்றத்தை நிருபிப்பதற்கு இது முக்கியமான படியாகும்.

படி 3: நாம் ஏற்கனவே அறிந்த தேற்றப்படி $\angle CAB = \angle ACE$, $\angle ABC = \angle DCE$, என்று முடிவுயெ்தோம். ($CE \parallel BA$, CA ஒரு குறுக்குவெட்டி எனில் ஒன்றுவிட்ட கோணம் மற்றும் ஒத்தகோணங்கள் சமம்)

படி 4: ஒரு சமன்பாட்டில் இருபுறமும் சமமான அம்சத்தை கூட்டினால் சமன்பாட்டில் மாற்றம் இருக்காது எனும் யூக்ளிடின் எடுகோள் ஆதாரமாக, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ என வருகிக்கலாம், அதாவது ஒரு முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் மொத்தம், ஒரு கோட்டின்மீது அமைந்துள்ள கோணங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம்.

படி 5: இங்கு யூக்ளிடின் எடுகோளைப் பயன்படுத்தி,

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$$

எனும் முடிவுக்கு வருகிறோம். இப்பொழுது தேற்றம் 15.2 மற்றும் 15.3 ஆகியவற்றை நிருபிக்கலாம்.

தேற்றம் 15.5 : இரண்டு ஒற்றைப்படை இயல்எண்களின் பெருக்கல்பலன் ஒற்றைப்படை எண்ணே.

நிருபணம் : x மற்றும் y என்பன இரண்டு ஒற்றைப்படை இயல்எண்கள் என்க.

xy, ஒரு ஒற்றைப்படை எண் என நிருபிக்கவேண்டும். x மற்றும் y ஒற்றைப்படை எண்கள் ஆகையால் $x = (2m - 1)$, $y = 2n - 1$ என எழுதலாம். இங்கு m,n என்பன இயல் எண்கள்.

ஆகவே, $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$= 4mn - 2m - 2n + 1$

$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$

$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$

$2mn - m - n + 1 = l$, என்க. (l என்பது ஏதேனும் ஒரு இயல் எண்)

$= 2l - 1, l \in N$

இது ஒற்றைப்படை எண்ணே.

தேற்றம் 15.6 : ஏதேனும் இரண்டு அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை இயல்எண்களின் பெருக்கல்பலன் 4ஆல் வகுபடும்.

$2m, 2m + 2,$ என்பன ஏதேனும் இரண்டு அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் பொது வடிவம். இங்கு m ஏதேனும் ஓர் இயல் எண். இவற்றின் பெருக்கல்பலன் $2m\ (2m + 2)$. 4ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்கவேண்டும். (இந்த தேற்றத்தை நீங்களே நிரூபிக்க முயற்சி செய்யுங்கள்)

கணிதமேதைகள் தங்கள் தீர்வை எவ்வாறு கண்டுபிடித்தார்கள்? மேலும் அவற்றிற்கு சரியான நிரூபணங்களை எவ்வாறு எழுதினார்கள்? மேற்கூறிய ஒவ்வொரு நிரூபணத்திற்கும் அடிப்படை ஆலோசனையே முக்கியமானது. ஒரே விஷயத்தை பலகோணங்களில் தர்க்க முறையில் சிந்தித்து சரியான நிரூபணத்திற்கு வருகிறார்கள். அவர்களின் புதியதை உருவாக்கும் சிந்தனைகள் எல்லாம் ஒன்று சேர்ந்து நிரூபணங்களாக வெளிப்படுகிறது.

நாம் தொகுத்தறி மற்றும் பகுத்தறிமுறை பற்றி கூட சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விவாதித்தோம்.

இங்கு முக்கியமாக சொல்லிக் கொள்ள ண்டியது என்னவெனில், இந்திய கணிதமேதை ஸ்ரீனிவாசஇராமானுஜன் தன்னுடைய மிகஅதிக நுட்பம் வாய்ந்த ஆக்குத்திறனை பயன்படுத்தி தான் கண்டுபிடித்த கூற்றுக்கள் உண்மை என நிரூபித்தார். அவற்றில் பல உண்மை என ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டு, அவைகள் மிகச்சிறப்பு வாய்ந்த தேற்றங்களாக சொல்லப்படுகிறது.

பயிற்சி - 15.4

1. கீழ்கண்டவற்றில் எது கணிதகூற்று எது கணிதகூற்று அல்ல என கூறி அதற்கான காரணத்தையும் தெரிவி.
   i. அவளுடைய கண்கள் நீலம் நிறமுடையது
   ii. $x + 7 = 18$
   iii. இன்று ஞாயிறு கிழமை அல்ல
   iv. $x + 0 = x$, x ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்
   v. இப்பொழுது நேரம் என்ன?
2. மறுப்பு உதாரணம் மூலம் கீழ்கண்ட கூற்றுக்கள் தவறு எனநிரூபி.
   i. ஒவ்வொரு செவ்வகமும் சதுரம்
   ii. $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$, x, y என்பன முழுக்கள்
   iii. n என்பது முழு எண் எனில் $2n^2 + 11$ என்பது பகா எண்.
   iv. இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்தகோணங்கள் சமம் எனில் அவை சர்வசமம்.
   v. ஒரு நாற்கரத்தில் அனைத்து பக்கங்களும் சமம் எனில் அது ஒரு சதுரம்.
3. இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களின் மொத்தம் இரட்டைப்படை எண் என நிரூபி.
4. இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் இரட்டைப்படை எண்ணே என நிரூபி.

5. x என்பது ஒற்றைப்படை எண் எனில் x^2ம் கூட ஒற்றைப்படை எண் என நிருபி.

6. கீழ்கண்டவற்றை பரிசோதித்து அவற்றில் எவை சரியானது என கண்டுபிடி.

i. ஏதாவது ஒரு எண்ணை தேர்ந்தெடு. அதை இருமடங்காக்கு. அதனுடன் 9ஐ கூட்டி வரும் மொத்தத்துடன் நீ ஏற்கனவே நினைத்துக்கொண்ட எண்ணை கூட்டுக. இப்பொழுது 3ஆல் வகுத்து வரும் ஈவுடன் 4ஐ கூட்ட வரும் மொத்தத்திலிருந்து நீ நினைத்துக்கொண்ட எணணை கழி. உன்னுடைய விடை 7.

ii. ஏதேனும் மூன்று இலக்க எண்ணை எடுத்தக்கொள்க. (உதாரணமாக, 425). இந்த எண்ணில் உள்ள இலக்கங்களை அதே வரிசை கிரமத்தில் அந்த (மூன்று இலக்க) எண்ணுடன் சேர்த்து எழுதி ஆறு இலக்க எண்ணாக்கு (425425). இப்பொழுது உருவாகும் எண் 7, 11, மற்றும் 13 ஆகியவைகளால் வகுபடும்.

நாம் கற்றவை

1. சில விதிகளுக்கு உட்பட்டு, மெய் அல்லது மெய்யற்றது என தீர்மானிக்கக்கூடிய வாக்கியங்கள் கூற்றுகள் ஆகும்.
2. கணிதகூற்றுக்கள் பொதுவான கூற்றுகளிலிருந்து வேறுபட்டவை. நமக்கு கிடைத்த குறிப்பேடுகளை மட்டும் வைத்துக்கொண்டு ஒரு மறுப்பு எடுத்துக்காட்டுடன் அக்கூற்றின் மெய்மை மதிப்பீடு மெய்யல்ல என நிரூபித்தாலும் அவற்றை தீர்வு காணமுடியாது.
3. பல விவரங்களின் அமைப்பை கவனிப்பதன் மூலமும் அந்த அமைப்பிற்கான விதிகளை வரையறுப்பதன் மூலமும் கணித கூற்றுக்களை உருவாக்குதல். ஒரு கூற்றை பலவிவரங்களை கவனித்து தர்க்க ஆலோசனை செய்து விளக்கி கூறுதல் கருதுகோள் எனப்படும்.
4. ஒரு கணித கூற்றை தர்க்க ஆலோசனைகளின் அடிப்படையில் நிருபணம் செய்யும்முறைக்கு கணித நிருபணம் என்று பெயர்.
5. எடுகோள் என்பது நிருபணம் இல்லாத உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய கூற்று ஆகும்.
6. நமக்குள்ள கணித அறிவைக்கொண்டு நாம் மெய்யென ஏற்றுக்கொள்ளும் கூற்றை ஊகக்கூற்று என்று அழைக்கிறோம். ஆனால் இவை சரி அல்லது தவறு என நிருபிக்கப்படாத கூற்று ஆகும்.
7. தர்க்க ஆலோசனைகள் அடிப்படையில் உண்மை என்று நிருபணம் செய்யப்பட்ட கூற்று தேற்றம் எனப்படும்.
8. ஒரு கணித கூற்றுக்கு தர்க்க ஆலோசனைகள் மூலமாக மெய்ம்மை மதிப்பீடை காணும்முறை பகுத்தறி முறையாகும்.
9. நிருபணம் என்பது கணித கூற்றுக்களின் வரிசைகிரமமாகும்.
10. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து ஆரம்பித்து, தர்க்கமுறையில் சங்கிலி படிகள் மூலம் முடிவை அடைவது என்பது தேற்ற நிரூபணத்தில் பின்பற்றப்படுகிறது.
11. நிருபிக்கப்படவேண்டிய அம்சத்தின் எதிர்மறையான கூற்றுடன் ஆரம்பித்து கருதுகோளுக்கு எதிர்மறையான முடிவை அடைவது கருதுகோளை உண்மை என நிருபிக்க பயன்படுத்தப்படும் மற்றொரு விதமான பகுத்தறி முறையாகும்.
12. குழப்பமில்லாத கூற்றுக்கு மெய்ம்மை மதிப்பீடை காணும் தர்க்கமுறையே பகுத்தறிமுறையாகும்.
13. பலவித சந்தர்ப்பங்களின் அல்லது விவரங்களின் தொகுப்பின் அடிப்படையில் தர்க்க ஆலோசனை செய்து தீர்வு காணும்முறையே தொகுத்தறிமுறையாகும்.

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1. a. $-5, \frac{22}{7}, \frac{-2013}{2014}$

   b. ஒரு எண் $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் எழுதப்பட்டால் அந்த எண் விகிதமுறு எண் எனப்படும். இங்கு $q \neq 0$ மேலும் p, q என்பன முழுக்கள் ஆகும்.

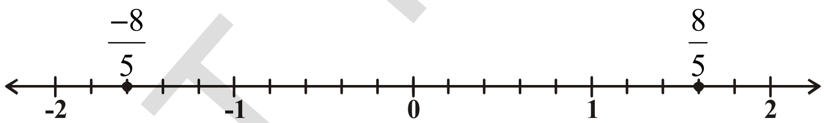
2. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

   (iv) 7 (v) -3

3. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{53}{32}$

4. $\frac{19}{30}, \frac{37}{60}, \frac{77}{120}$

5.



6. I. (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

   II. (i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.69\overline{4}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (iv) $1.\overline{2}$

7. (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

8. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{4}{11}$ (iv) $\frac{563}{180}$

9. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) ஆம் (iv) இல்லை

பயிற்சி 1.2

1. (i) விகிதமுறா (ii) விகிதமுறு (iii) விகிதமுறா

   (iv) விகிதமுறு (v) விகிதமுறு (vi) விகிதமுறா

2. விகிதமுறு எண்கள் : -1, $\frac{13}{7}$, 1.25, $21.\bar{8}$, 0

   விகிதமுறா எண்கள் : $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π, 2.131415....., 1.1010010001.....

3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$, முடிவுறா

4. 0.71727374....., 0.761661666..... 5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. 2.645751..... 8. $\sqrt{5}, \sqrt{6}$

9. (i) சரி (ii) சரி (iii) சரி ($\sqrt{3}$) (iv) சரி $\sqrt{9}$

   (v) சரி ($\sqrt{8}$) (vi) தவறு ($\frac{3}{7}$)

பயிற்சி 1.4

1. (i) $10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$ (ii) 20

   (iii) $10 + 2\sqrt{21}$ (iv) 4

2. (i) விகிதமுறா (ii) விகிதமுறா (iii) விகிதமுறா (iv) விகிதமுறு

   (v) விகிதமுறா (vi) விகிதமுறா (vii) விகிதமுறு

3. (i) விகிதமுறா (ii) விகிதமுறு (iii) விகிதமுறா (iv) விகிதமுறா

   (v) விகிதமுறா (vi) விகிதமுறு

4. ஏனெனில் c அல்லது d ல் ஏதேனும் ஒன்று விகிதமுறா எண் ஆகும்.

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $17 - 12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{35}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ (iv) $\frac{9\sqrt{15} - 3\sqrt{10} - 3\sqrt{21} + \sqrt{14}}{25}$

7. 0.3273

8. (i) 2 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 64

   (v) 9 (vi) $\frac{1}{6}$ 9. -8

10. (i) a = 5, b = 2 (ii) $a = \frac{-19}{7}$, $b = \frac{5}{7}$ 11. $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

பயிற்சி 2.1

1. (i) 5 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6

   (v) 2 (vi) 1

2. (i) பல்லுறுப்புக்கோவை (ii) பல்லுறுப்புக்கோவை (iii) இல்லை, ஏனெனில் இரண்டு மாறிகள் உள்ளன.
   (iv) பல்லுறுப்புக்கோவை அல்லத ஏனெனில் அடுக்குக்குறி (-) ஆகும்.
   (v) பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல ஏனெனில் x ன் அடுக்குக்குறி என்பது குறையல்லாத முழுக்கள் அல்ல.
   (vi) ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல ஏனெனில் இரண்டு மாறிகள் உள்ளன.

3. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2
   (v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $-2/3$ (vii) 0 (viii) 0

4. (i) இருபடி (ii) மூன்றுபடி (iii) இருபடி (iv) ஒருபடி
   (v) ஒருபடி (vi) இருபடி

5. (i) சரி (ii) தவறு (iii) தவறு (iv) தவறு
   (v) சரி (vi) சரி

பயிற்சி- 2.2

1. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3
   (v) 2, 0, 0

3. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) ஆம் (iv) இல்லை, ஆம்
   (v) ஆம் (vi) ஆம் (vii) ஆம்,இல்லை (viii) ஆம், இல்லை

4. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$
   (iv) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1, b = 0$

பயிற்சி - 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1
   (iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2. 5p 3. மீதி 5 எனவே காரணியல்ல 4. -3 5. $\frac{-13}{3}$

6. $\frac{-13}{3}$ 7. 8 8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = -7,\ b = -12$

பயிற்சி - 2.4

1. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) இல்லை (iv) இல்லை
2. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) ஆம் (iv) ஆம்
   (v) ஆம்
7. (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)^2(x-5)$
   (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$
9. a = 3 10. $(y-2)(y+3)$

பயிற்சி - 2.5

1. (i) $x^2 + 7x + 10$ (ii) $x^2 - 10x + 25$
   (iii) $9x^2 - 4$ (iv) $x^4 - \frac{1}{x^4}$ (v) $1 + 2x + x^2$
2. (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\frac{9999}{4} = 2499\frac{3}{4}$
   (iv) 251001 (v) 899.75
3. (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\frac{y}{5}\right)\left(2x-\frac{y}{5}\right)$
   (iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$
   (vi) $3(P-6)(P-2)$
4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
   (ii) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
   (iii) $4a^2 + 25b^2 + 9c^2 - 20ab - 30bc + 12ac$
   (iv) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$
   (v) $p^3 + 3p^2 + 3p + 1$ (vi) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
5. (i) $(-5x + 4y + 2z)^2$ (ii) $(3a + 2b - 4c)^2$
6. 29
7. (i) 970299 (ii) 1,0,61,208 (iii) 99,40,11,992 (iv) 100,30,03,001
8. (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p - \frac{1}{5}\right)^3$
10. (i) $(3a+4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2 + 70y + 100)$
11. $(3x+y+z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) -0.018

15. (i) $(2a+3)(2a-1)$ (ii) $(5a-3)(5a-4)$

16. (i) $3x(x-2)(x+2)$ (ii) $4(3y+5)(y-1)$

பயிற்சி - 3.1

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) 6 (iv) 180°
   (v) புள்ளி, தளம், கோடு

2. a) தவறு b) சரி c) சரி d) சரி
   e) சரி (7) முடிவிலா (8) கோடுகள் சாய்வான பகுதியில் வெட்டுவதால் கோணம் 180°யைவிட குறைவு.

9. $\angle 1 = \angle 2$

பயிற்சி - 4.1

2. (i) பின்வளைவுகோணம் (ii) செங்கோணம் (iii) குறுங்கோணம்

3. (i) தவறு (ii) சரி (iii) தவறு (iv) தவறு
   (v) சரி (vi) சரி (vii) தவறு (viii) சரி

4. (i) 270° (ii) 180° (iii) 210°

பயிற்சி - 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$

2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$

3. $\angle BOE = 30°$; $\angle COE$ -ன் பின்வளைவு கோணம் $= 250°$

4. $\angle C = 126°$

8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP = 302°$

பயிற்சி - 4.3

2. $x = 126°$

3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$

4. $\angle QRS = 60°$ 5. $\angle ACB = z = x + y$

6. $a = 40°$; $b = 100°$

7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$
   (ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$

9. $x = 40°$ $y = 40°$

10. $x = 60°$ $y = 18°$

11. $x = 63°$ $y = 11°$

13. $x = 50°$ $y = 77°$

15. (i) $x = 36°$; $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$

16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$

17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$

18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$

19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

பயிற்சி - 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$

2. $\angle 1 = 60°$ 3. $x = 35°, y = 51°$ 5. $x = 50°$ $y = 20°$

6. $x = 70°$ $y = 40°$ 7. $x = 30°$ $y = 75°$

8. $\angle PRQ = 65°$ 9. $\angle OZY = 32°$; $\angle YOZ = 121°$

10. $\angle DCE = 92°$ 11. $\angle SQT = 60°$ 12. $z = 60°$

13. $x = 37°$ $y = 53°$ 14. $\angle A = 50°$; $\angle B = 75°$

15. (i) 78° (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$

16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$
(iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$

17. $x = 96°$ $y = 120°$

பயிற்சி - 5.1

1. (i) நீர்தொட்டி (ii) ‘J’ வின் வீடு
(iii) கிழக்கு திசையில் செல்லும் போது இரண்டாம் தெருவில் வலப்பக்கமுள்ள கடைசி வீடு.
(iv) கிழக்கு திசையில் செல்லும் போது நான்காவது தெருவில் வலப்பக்கமுள்ள முதல் கட்டிடம்.
(v) கிழக்கு திசையில் செல்லும் போது நான்காவது தெருவில் இடப்பக்கமுள்ள கடைசி கட்டிடம்.

பயிற்சி - 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3
(v) Y-அச்சு (vi) X-அச்சு (vii) X-அச்சு (viii) Y-அச்சு

2. (i) x தொலைவு : 4 (ii) x தொலைவு : -5 (iii) x தொலைவு : 0 (iv) x தொலைவு : 5
(v) x தொலைவு : 0
y தொலைவு : -8

3. (ii) (0, 13) : Y-அச்சு (iv) (-2, 0) : X-அச்சு
(v) (0, -8) : Y-அச்சு (vi) (7, 0) : X-அச்சு
(vii) (0, 0) : இரண்டு அச்சுகளின் மீதும்

4. (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
(v) 4 (vi) -3

5. (i) தவறு (ii) சரி (iii) சரி (iv) தவறு
(v) தவறு (vi) சரி

பயிற்சி - 5.3

2. இல்லை. (5, -8) என்பது Q_4 லும் மேலும் (-8, 5) என்பது Q_2 விலும் அமைகிறது.
3. கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து புள்ளிகளும் Y-அச்சி-ருந்து 1 அலகு தூரத்திலுள்ள இணை கோட்டின் மீது அமைகின்றன.
4. கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து புள்ளிகளும் X-அச்சி-ருந்து 4 அலகுகள் தூரத்திலுள்ள இணை கோட்டின் மீது அமைகின்றன. 5. 12அலகுகள் 6. 8 சதுர அலகுகள்

பயிற்சி - 6.1

1. (i) $a = 8$ $b = 5$ $c = -3$
(ii) $a = 28$ $b = -35$ $c = 7$
(iii) $a = 93$ $b = 15$ $c = -12$
(iv) $a = 2$ $b = 5$ $c = 0$
(v) $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{4}$ $c = -7$
(vi) $a = \frac{3}{2}$ $b = 1$ $c = 0$
(vii) $a = 3$ $b = 5$ $c = -12$

2. (i) $a = 2$ $b = 0$ $c = -5$
(ii) $a = 0$ $b = 1$ $c = -2$
(iii) $a = 0$ $b = \frac{1}{7}$ $c = -3$
(iv) $a = 1$ $b = 0$ $c = \frac{14}{13}$

3. (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

பயிற்சி - 6.2

2. (i) $(0, -34); (\frac{17}{4}, 0)$ (ii) $(0, 3) ; (-7, 0)$

   (iii) $(0, \frac{3}{2}) ; (\frac{-3}{5}, 0)$

3. (i) தீர்வல்ல (ii) தீர்வு (iii) தீர்வு

   (iv) தீர்வல்ல (v) தீர்வல்ல

4. K = 7 5. $\alpha = \frac{8}{5}$ 6. 3

பயிற்சி- 6.3

2. (i) ஆம் (ii) ஆம்
3. 3
4. (i) 6 (ii) -5
5. (i) $(\frac{3}{2}, 3)$ (ii) $(-3, 6)$
6. (i) $(2, 0) : (0, -4)$ (ii) $(-8, 0) ; (0, 2)$

   (iii) $(-2, 0) ; (0, -3)$

7. $x + y = 1000$ 8. $x + y = 5000$ 9. $f = 6a$ 10. 39.2

பயிற்சி- 6.4

1. $5x = 3y$; 2000 ; 480 (வாக்களித்தவர்களின் எண்ணிக்கை $= x$, மொத்த வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை $= y$)
2. $x - y = 25$; 50; 15 (தந்தையின் வயது $= x$, ரூபியின் வயது $= y$)
3. ₹63 ,6 கி.மீ 4. $x + 4y = 27$; 5, 11
5. $y = 10x + 30$; 60; 90; 5 மணி (மொத்த மணிநேரங்கள் $= x$; நிறுத்துவதற்கான கட்டணம் $= y$)
6. d = 60 t (d = தூரம், t = காலம்); 90 கி.மீ; 120 கி.மீ; 210 கி.மீ.
7. $y = 8x$; $\frac{3}{2}$ or $1\frac{1}{2}$; 12
8. $y = \frac{5}{7}x$ (கலவையின் அளவு $= x$; பா-ன் அளவு $= y$) ; 20
9. (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) -40

பயிற்சி - 6.5

4. (i) $y = -3$ (ii) $y = 4$ (iii) $y = -5$ (iv) $y = 4$
5. (i) $x = -4$ (ii) $x = 2$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = -4$

பயிற்சி - 7.4

6. 7 7. No.

பயிற்சி - 8.1

1. (i) மெய் (ii) மெய் (iii) மெய்யற்றவை (iv) மெய்
   (v) மெய்யற்றவை (vi) மெய்யற்றவை
2. (a) ஆம்,இல்லை,இல்லை,இல்லை,இல்லை (b) இல்லை,ஆம்,ஆம்,ஆம்,ஆம்
   (c) இல்லை,ஆம்,ஆம்,ஆம்,ஆம் (d) இல்லை,ஆம்,ஆம்,ஆம்,ஆம்
   (e) இல்லை,ஆம்,ஆம்,ஆம்,ஆம் (f) இல்லை,ஆம்,ஆம்,ஆம்,ஆம்
   (g) இல்லை,இல்லை,இல்லை,ஆம்,ஆம் (h) இல்லை,இல்லை,ஆம்,இல்லை,ஆம்
   (i) இல்லை,இல்லை,இல்லை,ஆம்,ஆம் (j) இல்லை,இல்லை,ஆம்,இல்லை,ஆம்
4. நான்கு கோணங்கள் = 36°, 72°, 108°, 144°

பயிற்சி - 8.3

1. இணைகரத்தின் கோணங்கள் = 73°, 107°, 73°, 107°
2. இணைகரத்தின் கோணங்கள் = 68°, 112°, 68°, 112°

பயிற்சி - 8.4

1. BC = 8 செ.மீ

பயிற்சி - 9.1

1.

மதிப்பெண்கள்	5	6	7	8	9	10
நிகழ்வெண் (f)	5	6	8	12	9	5

2.

இரத்தப்பிரிவு	A	B	AB	O
நிகழ்வெண் (f)	10	9	2	15

பொதுவான இரத்தப்பிரிவு = O ; அரிதான இரத்தப்பிரிவு = AB

3.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3
நிகழ்வெண் (f)	3	10	10	7

4.

வாய்ப்புகள்	A	B	C
நிகழ்வெண் (f)	19	36	10

மொத்த சரியான விடைகள் = 65

அதிகமான மக்களின் கருத்து = B (பொதுஇடங்களில் மட்டும் தடைசெய்வது)

5.

வாகனங்களின் வகை	கார்	பேருந்து	ஆட்டோ	மிதிவண்டி
வாகனங்களின் எண்ணிக்கை (f)	25	45	30	40

6. அளவுத்திட்டம் : X-அச்சின் மீது 1செ.மீ = 1 பிரிவு இடைவெளி

X-அச்சின் மீது 1செ.மீ = 10 மாணவர்கள்

வகுப்பு	I	II	III	IV	V	VI
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	40	55	65	50	30	15

7.

மதிப்பெண்கள் (பிரிவு இடைவெளி)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	1	4	3	7	7	7	1	0

8.

மின் கட்டணம் (₹யில்) பிரிவு இடைவெளி	வீடுகளின் எண்ணிக்கை (f)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

ஆயுட்காலம் (வருடங்களில்) பிரிவு இடைவெளி	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0
மின்கலங்களின் எண்ணிக்கை	2	6	14	11	4	3

பயிற்சி - 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10
4. $\bar{x} = 17.7$
5. (i) ₹ 359, ₹ 413, ₹ 195, ₹ 228, ₹ 200, ₹ 837
   (ii) ஒவ்வொரு பள்ளியின் சேமிப்பு ₹444
6. மாணவனின் உயரம் = 147 செ.மீ ; மாணவியின் உயரம் = 152 செ.மீ.
7. $\bar{x}$ = 11.18 ; முகடு = 5 ; இடைநிலை அளவு = 10
8. $\bar{x}$ = 80 ; இடைநிலை அளவு = 75 ; முகடு = 50
9. 37 கி.கி 10. ₹11.25, இடைநிலைஅளவு = ₹ 10; முகடு = ₹ 10
11. 1வது = 2 ; 2வது = 6 ; 3வது = 19 ; 4வது = 33

பயிற்சி - 10.1

1. (i) 64செ.மீ.^{2} 96 செ.மீ.^{2} (ii) 140 செ.மீ.^{2} 236 செ.மீ.^{2}
2. 3375 மீ^{2} 3. 330 மீ^{2} 4. 8 செ.மீ
5. (i) உண்மையான பரப்பளவின் 4 மடங்கு (ii) உண்மையான பரப்பளவின் 9 மடங்கு (iii) n^2மடங்கு
6. 60 செ.மீ.^{3} 7. 48மீ^{3} 8. 3750000 -ட்டர்கள்

பயிற்சி - 10.2

1. 6.90 மீ^{2} 2. 176 செ.மீ^{2} ; 253 செ.மீ^{2}
3. r = 7.5 செ.மீ. 4. h = 25மீ
5. (i) 968 செ.மீ^{2} (ii) 10648 செ.மீ^{2} (iii) 2032.44 செ.மீ^{2}
6. ₹ 5420.8 7. 1584 மீ^{2}
8. (i) 110 மீ^{2} (ii) ₹4400
9. (i) 87.12 மீ^{2} (ii) 96.48 மீ^{2} 10. 517.44 -ட்டர்கள் 11. h = 20செ.மீ..

பயிற்சி - 10.3

1. h = 6செ.மீ. 2. h = 9 செ.மீ.
3. (i) 7 செ.மீ. (ii) 462 செ.மீ^{2} 4. 1232 செ.மீ^{3}
5. 1018.3 செ.மீ^{3} 6. 15 மீ ₹7920 7. $3394\frac{2}{7}$ செ.மீ^{3}
8. 241.84 மீ^{2} (தோராயமாக) (9) 63மீ (10) 6135.8செ.மீ^{2}
11. 24.7 நிமிடங்கள் (12) 60 π ச.அ.

பயிற்சி - 10.4

1. 154 செ.மீ^{2} ; 179.67 செ.மீ^{3} 2. 3054.86 செ.மீ^{3}
3. 616 செ.மீ^{2} 4. 6930 செ.மீ^{2} 5. 4 : 9 ; 8 : 27
6. $942\frac{6}{7}$ செ.மீ^{2} 7. 1 : 4 8. 441 : 400 9. 55 கி(அ) 0.055கி.கி
10. 5 செ.மீ. 11. 0.303–ட்டர் 12. புட்டிகளின் எண்ணிக்கை = 9

பயிற்சி-11.1

1. 19.5 செ.மீ^{2} 2. 114 செ.மீ^{2} 3. 36 செ.மீ^{2}

பயிற்சி - 11.2

1. 8.57 செ.மீ. 2. 6.67 செ.மீ

பயிற்சி - 12.1

1. (i) ஆரம் (ii) விட்டம் (iii) சிறிய வில்
(iv) நாண் (v) பெரிய வில் (vi) அரைவட்டம்
(vii) நாண் (viii) சிறிய வட்டத்துண்டு
2. (i) சரி (ii) சரி (iii) சரி (iv) தவறு
(v) தவறு (vi) சரி (vii) சரி

பயிற்சி - 12.2

1. 90° 2. 48°, 84° 3. ஆம்

பயிற்சி - 12.4

1. 130° 2. 40° 3. 60°, 120° 5. 5செ.மீ
6. 6 செ.மீ 7. 4 செ.மீ 9. 70°, 55°, 55°

பயிற்சி- 12.5

1. (i) $x° = 75°$; $y° = 75°$ (ii) $x° = 70°$; $y° = 95°$
(iii) $x° = 90°$; $y° = 40°$
4. (a), (b),(c), (e), (f)= முடியும் ; (d) = முடியாது

பயிற்சி - 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 (b) ஆம் (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{45}{100}$; $\frac{55}{100}$ (b) 1

3. (a) சிவப்பு (b) மஞ்சள் (c) நீலம் மற்றும் பச்சை (d) வாய்ப்பு இல்லை
   (e) இல்லை (அது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை)

4. (a) இல்லை
   (b) P (பச்சை) = $\frac{5}{12}$; P (நீலம்) = $\frac{1}{4}$; P (சிவப்பு) = $\frac{1}{6}$; P (மஞ்சள்) = $\frac{1}{6}$
   (c) 1

5. (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. $P(E) = \frac{7}{11}$

7. (i) $P = \frac{61}{806}$ (ii) $P = \frac{45}{146}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$ 8. $\frac{3.43}{16}$

பயிற்சி - 15.1

1. (i) எப்பொழுதும் தவறு. குறைந்தபட்சம் ஒரு மாதத்திற்கு 27 நாட்கள் உள்ளன. பொதுவாக மாதங்களில் 30 மற்றும் 31 நாட்கள் உள்ளன.
   (ii) தெளிவற்ற வாக்கியம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வருடத்தில் பொங்கல் பண்டிகை வெள்ளிக்கிழமையன்று வரலாம் அல்லது வராமல் போகலாம்.
   (iii) தெளிவற்ற வாக்கியம். குளிர் காலங்களில் சில சமயம் ஐதராபாத்தின் உஷ்ணநிலை $2°C$ ஆக இருக்க வாய்ப்புள்ளது.
   (iv) தற்போது நமக்குத் தெரிந்தவரையில் உண்மை. ஆனால் அறிவியல் அறிஞர்கள் வேறு கிரகங்களில் உயிரினங்கள் வாழ்கின்றன என ஆதாரத்துடன் நிருபித்தால் இந்த வாக்கியம் மாற்றமடையலாம்.
   (v) எப்பொழுதும் சரி. நாய்கள் பறக்காது.
   (vi) தெளிவற்ற வாக்கியம். லீப் வருடத்தில் பிப்ரவரி மாதத்தில் 29 நாட்கள் இருக்கும்.
2. (i) தவறு, நாற்கரத்தில் உட்கோணங்களின் மொத்தம் $360°$.
   (ii) சரி, எ.கா – அனைத்து குறை எண்களுக்கும்
   (iii) சரி, சாய்சதுரத்தின் எதிரெதிர் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணை. எனவே சாய்சதுரம் ஓர் இணைகரம்.
   (iv) சரி
   (v) தவறு, அனைத்து வர்க்க எண்களையும் இரண்டு ஒற்றைப் படை எண்களின் மொத்தமாக எழுத முடியாது. எ.கா: 9=4+5 (ஆனால் அனைத்து வர்க்க எண்களையும் ஒற்றைப்படை எண்களின் மொத்தமாக எழுத முடியும். எ.கா: 9 = 1 + 3 + 5)

3. (i) இயல் எண்கள் மட்டுமே.

(ii) இயல் எண்களின் இரண்டு மடங்கு எப்பொழுதும் இரட்டைப்படை எண்.

[எ.கா:. $2 \times \frac{5}{2} = 5$ (ஒற்றைப்படை எண்)]

(iii) ஏதேனும் $x > 1$ க்கு $3x + 1 > 4$ (iv) ஏதேனும் $x \geq 0$ க்கு $x^3 \geq 0$

(v) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தில் அதன் மையக்கோடு கோண இருசமவெட்டியாகும்.

4. ஏதேனும் ஒரு குறை எண்ணை எடுத்துக்கொள்.

x	y
-2 >	-3

$x^2 = -2 \times -2 = 4$ (இங்கு $x^2 < y^2$)

$y^2 = -3 \times -3 = 9$

பயிற்சி - 15.2

1. (i) ஜீவன் அழியக் கூடியவன்.
   (ii) இல்லை, X என்பவர் மராத்தி, குஜராத்தி, பஞ்சாபி போன்ற மொழிகளை பேசும் மாநிலத்தவராக இருக்கலாம்.
   (iii) மணி சிவப்பு நாக்கை உடையவர்.
   (iv) அனைத்து திறமைசா-களும் ஜனாதிபதியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. இங்கு ஜனாதிபதிகள் மட்டுமே திறமைசா-கள் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஆசிரியர்கள், மாணவர்கள் போன்றவர்களும் திறமைசா-களாகக இருக்கலாம்.
2. நீங்கள் 'B' மற்றும் 8 ஐ திருப்ப வேண்டும். 8 என்ற அட்டையின் மறுபுறம் இரட்டை எண் இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட விதி முறிந்துவிடும். இவ்வாறே 8 என்ற அட்டையின் மறுபுறம் உயிர்மெய் எழுத்து இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட விதி முறிந்துவிடும்.
3. விடை 35 ஆகும்.

- 'அ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படாது. ஏனெனில் மற்ற உளவு யோசனைகளை கடைபிடிப்பதை பொருத்து நமக்கு அதிகமான இலக்கங்கள் தேவைப்படுகின்றன. 'a'
- 'ஆ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படாது. ஏனெனில் ஒன்றுகள் இலக்கம் பத்துகள் இலக்கத்தை விட பெரியது. மேலும் 7 மற்றும் 10 ன் ஒரே மடங்கி 70 ஆகும். இங்கு 0 என்பது 7 ஐ விட சிறியது.
- 'இ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படும். ஏனெனில் நாம் காண வேண்டிய எண் 7 ன் மடங்கி ஆதலால் 7 ன் மடங்கிகளில் ஏதேனும் ஒரு எண் நாம் காண வேண்டிய எண்ணாக இருக்க வாய்ப்புள்ளது.
- 'ஈ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படும். ஏனெனில் நாம் காண வேண்டிய எண் ஒற்றை எண் ஆதலால் அவற்றில் ஓர் எண்ணாக இருக்க வாய்ப்புள்ளது.
- 'உ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படாது. ஏனெனில் 7 மற்றும் 11 ன் ஒரே மடங்கி 77 ஆகும். ஆனால் ஒன்றுகள் இலக்கம் பத்துகள் இலக்கத்தை விட பெரியது.
- 'ஊ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படாது.
- 'எ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படும். ஏனெனில் இக்கூற்றை பயன்படுத்துவதால் சில எண்கள் மீதம் இருக்கும்.
- 'ஏ' என்ற கூற்று நமக்கு பயன்படும். ஏனெனில் இக்கூற்றை பயன்படுத்துவதால் 35 மீதம் இருக்கும்.

எனவே 3,4,7 மற்றும் 8 நம்பிக்கையூட்டுகிறது.நாம் காண வேண்டிய எண்ணை பெற இவ்வெண்கள் மட்டுமே போதுமானது.

பயிற்சி - 15.3

1. (i) மூன்று வாய்ப்புள்ள ஊகக்கூற்றுகள் உள்ளன. அவை
   அ) மூன்று அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் ஒரு ஒற்றைப்படை எண்.
   ஆ) மூன்று அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலன் 3 ஆல் வகுபடும்.
   இ) மூன்று அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களின் பெருக்கல்பலனாக கிடைக்கும் எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களின் மொத்தம் ஒரு இரட்டைப்படை எண்.
   (ii) மூன்று வாய்ப்புள்ள ஊகக்கூற்றுகள் உள்ளன. அவை
   அ) ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் மொத்தம் எப்பொழுதும் ஒரு இரட்டைப்படை எண்.
   ஆ) ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் மொத்தம் எப்பொழுதும் 3 ஆல் வகுபடும்.
   இ) ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் மொத்தம் எப்பொழுதும் 6 ஆல் வகுபடும்.

4. $111111^2 = 12345654321$ $\qquad$ $1111111^2 = 1234567654321$
   ஊகக்கூற்று சரி

6. ஊகக்கூற்று தவறு. ஏனெனில் $x=41$ க்கு உங்களால் ஒரு பகுஎண்ணை காண முடியாது.

பயிற்சி - 15.4

1. (i) இல்லை (ii) ஆம் (iii) இல்லை
   (iv) ஆம் (v) இல்லை

2. (i) ஒரு செவ்வகம் சமமான கோணங்களைப் பெற்றிருக்கும்.ஆயினும் அது சதுரமாகாது.
   (ii) $x = 2; y = 3$, க்கு இக்கூற்று மெய்யாகாது.
   ($x = 0; y = 1$ or $x = 0, y = 0$ க்கு மட்டுமே மெய்யாகும்.)
   (iii) $n = 11$ க்கு $2n^2 + 11 = 253$ என்பது ஒரு பகா எண் அல்ல.
   (iv) உங்களால் சமமான கோணங்கள், ஆனால் வெவ்வேறு பக்கங்களை கொண்ட இரண்டு முக்கோணங்களை தரமுடியும்.
   (v) ஒரு சாய்சதுரம் சமமான பக்கங்களை கொண்டிருக்கும். ஆயினும் அது சதுரமாகாது.

3. x மற்றும் y இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்கள் என்க. ஏதேனும் சில இயல் எண்கள் m க்கு $x = 2m + 1$ மற்றும் ஏதேனும் சில இயல் எண்கள் n க்கு $y = 2n + 1$.
   $x + y = 2\ (m + n + 1)$. எனவே $x + y$ என்பது 2 ஆல் வகுபடும், மேலும் அது இரட்டைப்படை எண்ணாகும்.

4. $x = 2m$ மற்றும் $y = 2n$ என்க
   பெருக்கல்பலன் $xy = (2m)\,(2n)$
   $= 4\,mn$

6. (i) நீங்கள் நினைத்த எண் n என்க. பிறகு நாம் கீழ்கண்ட செயல்களை செய்யலாம்.
   $$n \to 2n \to 2n+9 \to +n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$
   (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ என்பதை கவனி. abc என்ற ஏதேனும் ஒரு மூன்று இலக்க எண்ணை எடுத்துக்கொள். இப்பொழுது $\mathrm{abc} \times 1001 = abcabc$. எனவே $abcabc$ என்ற ஆறு இலக்க எண் 7, 11 மற்றும் 13 ஆல் வகுபடும்.

பாடத்திட்டம்

எண்முறை (50மணி) (i) மெய்எண்கள்	**(i) மெய்எண்கள்** * எண்கோட்டின் மீது இயல்எண்கள், முழுக்கள் மற்றும் விகிதமுறு எண்களை காட்டுவதை மீள்பார்வை செய்தல். * முடிவுறு/முடிவுறா சுழல் தசமங்களை தொடர்ச்சியான உருப்பெருக்க முறையில் எண்கோட்டின் மீது காட்டுதல். * சுழல் /முடிவுறு தசமங்களாக விகிதமுறு எண்கள். * $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ போன்றவற்றின் மதிப்புகளை ஆறு சதமஇடங்கள் வரை வகுத்தல் முறையில் கண்டறிதல். * சுழற்சியற்ற/முடிவுறா தசமங்களின் எடுத்துக்காட்டுகள். எ.கா. : 1.01011011101111— 1.12112111211112— மற்றும் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ முதலியன. * $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ போன்ற விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டின் மீது காட்டுதல். * பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் முடிவினை பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு மெய்எண்ணையும் எண்கோட்டின் மீது காட்டுதல். * மூலங்கள் (Surd) கருத்து * மூலங்களை விகிதப்படுத்துதல்.
இயற்கணிதம் (20மணி) (i) பல்லுறுப்புக்கோவைகள் (ii) இரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச் சமன்பாடு	**(i) பல்லுறுப்புக்கோவைகள்** * ஒரு மாறியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரையறை, அதன் குணகம் (மெழு) எடுத்தக்காட்டுகள் மற்றும் எதிர் எடுத்தக்காட்டுகள், அதன் உறுப்புகள், பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக்கோவை. * மாறிலி, ஒருபடி, இருபடி, முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகள், ஒருறுப்புக்கோவை, ஈருறுப்புக்கோவை, மூவுறுப்புக்கோவை. பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூஜ்ஜியம்/மூலங்கள்/சமன்பாடு. * மீதித்தேற்றத்தை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் வரையறுத்தல் மற்றும் ஊக்குவித்தல். மேலும் மிகை முழுக்களுடன் இணைத்து மீதித் தேற்றத்தை விவரித்தல். * காரணி தேற்றத்தை வரையறுத்தல் மற்றும் சரிபார்த்தல். காரணி தேற்றத்தை பயன்படுத்தி a,b,c, என்ற மெய்எண்களையுடைய $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ கோவையை மற்றும் முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல்.

	* இயற்கணித கோவைகள் மற்றும் முற்றொருமைகளை நினைவுகூர்தல். * **சில மற்றொருமைகள் :** $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+x^2+2xy+2yz+2zx$ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ **போன்ற முற்றொருமைகளை பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்த பயன்படுத்துதல்.** **(ii) இரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாடு** * **ஒரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டை நினைவுகூர்தல்.** * **இரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டின் அறிமுகம்.** * **இரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டின் தீர்வு.** * **இரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டின் வரைபடம்.** * **x-அச்சு மற்றும் y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டுச் சமன்பாடுகள்.** * **x-அச்சு மற்றும் y-அச்சின் சமன்பாடுகள்**
ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம்(5 hrs)	**ஆயத்தொலைவு வடிவக்கணிதம்** * **காட்டீசியன் அமைப்பு** • **சமதளத்தில் புள்ளியை குறிப்பிடுதல்**
வடிவியல் (40 மணி) (i) **வடிவியலின் மூலங்கள்.** (ii) **கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள்** (iii) **முக்கோணங்கள்** (iv) **நாற்கரங்கள்** (v) **பரப்பளவு** (vi) **வட்டங்கள்** (vii) **செய்முறை வடிவியல்**	(i) **வடிவியலின் மூலங்கள்** * **யூக்ளிட் மற்றும் இந்தியாவில் வடிவியலின் வரலாறு. உற்றுநோக்கலின் மூலம் முறைப்படுத்துதல் என்ற யூக்ளிடின் முறைப்படி கணிதத்தின் வரையறைகள், தெளிவான/பொதுவான எண்ணங்கள், வெளிப்படை உண்மைகள்/நற்பயன்கள் மற்றும் தேற்றத்தை அறிதல் யூக்ளிடின் ஐந்து நற்பயன்கள் ஐந்தாவது நற்பயனின் சமான வேறுபாடு. வெளிப்படை உண்மை மற்றும் தேற்றத்திற்கிடையேயுள்ள உறவினை காண்பித்தல்.** * **இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு கோடு மட்டுமே அவற்றை இணைத்துச் செல்லும்.** * **இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகள் ஒன்றைவிட அதிகமான பொதுவான புள்ளிகளை பெற்றிருக்காது. (நிருபணம்)**

(ii) கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள்

* ஒரு கதிரானது ஒரு கோட்டின் மீது அமையும் போது ஏற்படும் இரண்டு அடுத்தடுத்த கோணங்களின் கூடுதல் 180^0 மற்றும் அவற்றின் மறுதலை (ஊக்குவித்தல்)
* இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் போது ஏற்படும் செங்குத்து எதிர் கோணங்கள் சமம். (நிருபணம்.)
* இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டும் போது ஏற்படும் ஒத்த கோணங்கள், மாறுபட்ட கோணங்கள் உட்கோணங்கள் போன்றவற்றின் மீதான முடிவுகள் (ஊக்குவித்தல்)
* கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் அனைத்தும் இணையானவைகள். (ஊக்குவித்தல்)
* கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் அனைத்தும் இணையானவைகள். (ஊக்குவித்தல்)
* ஒரு முக்கோணத்தில் கோணங்களின் கூடுதல் 180^0 (நிருபணம்)
* ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிகோணமானது அதன் உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமமாகும். (ஊக்குவித்தல்)

(iii) முக்கோணங்கள்

* ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம், மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்திற்கு சமம் எனில் இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும். (ப.கோ.ப. சர்வசமம்–ஊக்குவித்தல்)
* ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் மற்றும் அவற்றிக்கிடையேயுள்ள பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் மற்றும் அவற்றிக்கிடையேயுள்ள பக்கங்களுக்கும் சமம் எனில் இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும். (கோ.ப.கோ சர்வசமம்–நிருபணம்)
* ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு சமம் எனில் இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும். (ப.ப.ப. சர்வசமம் –ஊக்குவித்தல்)
* ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், பக்கங்களுக்கு சமம் எனில் அவ்விரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும். (ஊக்குவித்தல்)
* ஒரு முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களும் எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும். (நிருபணம்)
* ஒரு முக்கோணத்தில் சமகோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள் சமம். (ஊக்குவித்தல்)
* முக்கோண சமமின்மை மேலும் கோணம் மற்றும் அதன் எதிர் பக்கம், இடையேயுள்ள தொடர்பு முக்கோணத்தில் சமமின்மை பண்புகள்.

(iv) நாற்கரங்கள்

* ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம், அதனை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாக பிரிக்கும். (நிருபணம்).
* ஒரு இணைகரத்தில் அதன் எதிரெதிர் பக்கங்கள் சமம் மற்றும் அவற்றின் மறுதலை. (ஊக்குவித்தல்).
* ஒரு இணைகரத்தில் அதன் எதிரெதிர் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அவற்றின் மறுதலை. (ஊக்குவித்தல்).
* ஒரு நாற்கரத்தில் ஒரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம் எனில் அது ஒரு இணைகரமாகும். (ஊக்குவித்தல்)
* ஒரு இணைகரத்தில் இரண்டு மூலைவிட்டங்களும் ஒன்றை ஒன்று இருசமக்கூறிடும் மற்றும் அதன் மறுதலை (ஊக்குவித்தல்).
* ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை மற்றும் அவற்றின் மறுதலை. (ஊக்குவித்தல்).

(v) பரப்பளவு

* பரப்பளவு கருத்து, சமதளங்களின் பரப்பளவு போன்றவற்றை மீள்பார்வை செய்தல்.
* செவ்வகத்தின் பரப்பளவை நினைவு கூர்தல்.
* ஒரே அடிப்பக்கம் மற்றும் ஒரே இணைகோடுகளுக்கு இடையே அமைந்துள்ள படங்கள்.
* ஒரே அடிப்பக்கம் மற்றும் ஒரே இணைகோடுகளுக்கிடையே அமைந்துள்ள இணைகரங்கள் ஒரே பரப்பளவை கொண்டிருக்கும். (நிருபணம்).
* ஒரே அடிப்பக்கம் மற்றும் ஒரே இணைகோடுகளுக்கிடையே அமைந்துள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவு சமம். மற்றும் அவற்றின் மறுதலை. (ஊக்குவித்தல்)

(vi) வட்டங்கள்

* வட்டத்திற்கு தொடர்புடைய கருத்துகளான ஆரம், சுற்றளவு, விட்டம், நாண், வட்டவில், வட்டவிற்களால் அடைபட்ட கோணம் போன்றவற்றின் வரையறைகளை எடுத்தக்காட்டுகளின் மூலம் அறிதல்.
* ஒரு வட்டத்தில் சமமான நாண்கள் வட்டத்தின் மையத்தில் சமமான கோணங்களை ஏற்படுத்தும் (நிருபணம்) மற்றும் அவற்றின் மறுதலை (ஊக்குவித்தல்)
* வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடானது அந்த நாணை இருசமக்கூறிடும். மேலும் ஒரு நாணை இருசமக்கூறிட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து வரையப்பட்ட கோடானது அந்த நாணிற்கு செங்குத்தாக அமையும் என்பது இதன் மறுதலையாகும். (ஊக்குவித்தல்)

	* கொடுக்கப்பட்ட மூன்று ஒருகோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம் மட்டுமே செல்லும். (நிருபணம்). * ஒரு வட்டத்தில் (அல்லது சர்வசம வட்டங்களில்) சமமான நாண்கள் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து (மையங்களிலிருந்து) சமமான தூரத்தில் இருக்கும். மேலும் அவற்றின் மறுதலை (ஊக்குவித்தல்). * ஒரு வட்டவில்லால் வட்டத்தின் மையத்தில் ஏற்படுத்தப்பட்ட கோணமானது, அதே வட்டவில்லால் வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படும் கோணத்தைவிட இருமடங்காகும். (நிருபணம்) * ஒரே வட்டக்கோணப்பகுதியிலுள்ள கோணங்கள் சமம். (ஊக்குவித்தல்). * ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு கோட்டுத்துண்டானது, அதே பக்கத்திலுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளில் சமமான கோணங்களை ஏற்படுத்தினால் அந்த நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகளாகும். (நிருபணம்.) * ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^0 மேலும் அவற்றின் மறுதலை (ஊக்குவித்தல்)
	(vii) வரைதல் * அடிபக்கம், இரண்டு பக்கங்கள் மொத்தம் அல்லது வித்தியாசம் மற்றும் ஒரு அடிப்பக்ககோணம் கொடுக்கப்பட்ட போது முக்கோணத்தை வரைதல். * சுற்றளவு மற்றும் அடிப்பக்க கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்ட போது முக்கோணத்தை வரைதல். * கொடுக்கப்பட்ட நாண் மற்றும் கோணத்தை கொண்டு வட்டக்கோணப்பகுதியை வரைதல்.
அளவீடுகள் (15 மணி) (i) **புறப்பரப்பளவுகள் மற்றும் கனஅளவுகள்**	**(i) புறப்பரப்பளவுகள் மற்றும் கனஅளவுகள்.** * கனச்சதுரம், கனச்செவ்வகம் ஆகியவற்றின் புறப்பரப்பளவு மற்றும் கனஅளவினை மீள்பார்வை செய்தல். * உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக்கோளம் போன்றவற்றின் புறப்பரப்புகள். * உருளை, கூம்பு, கோளம் (அரைக்கோளம் உட்பட), உருளைகள்/கூம்புகள் போன்றவற்றின் கனஅளவுகள்.
புள்ளியியல் மற்றும் நிகழ்தகவு	**(i) புள்ளியியல்** * வகைப்படுத்தப்பட்ட மற்றும் வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீடுகளை மீள்பார்வை செய்தல். * வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பங்கீட்டின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு.
	(ii) நிகழ்தகவு * கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு பரிசோதனைகள் செய்து நிகழ்தகவு உணர்வினை ஏற்படுத்துதல். நாணயங்களை சுண்டுதல், பகடைகளை உருட்டுதல் போன்றவற்றின் மூலம் வாய்ப்புகள் கருத்தை அறிதல்.

	* பலமுறை பகடையை உருட்டுவதால் 1லிருந்து 1வரை ஏற்படும் வாய்ப்புகளை கணக்கிடுதல் மற்றும் பட்டியலை தயார் செய்தல். * நாணயம் சுண்டுதல் பகடையை உருட்டுதலில் கிடைத்த பதிவுகளை ஒப்பிட்டு சமவாய்ப்புக் கருத்தினை அறிதல். * நாணயம் சுண்டுதல், பகடையை உருட்டுதல் போன்ற செயல்களின் மூலம் வாய்ப்பு என்ற கருத்தை ஒருமைப்படுத்துதல் மற்றும் பொதுமைப்படுத்துதல். * ஒரே வகையான நாணயங்கள் சுண்டுதல் அல்லது பகடைகளை உருட்டுதல் போன்ற செயல்களை மீண்டும் மீண்டும் செய்வதால் கிடைத்த நிகழ்வெண்களை காட்சிப்படுத்துதல். * அதிகமான எண்ணிக்கைக் கொண்ட திரும்பத் திரும்ப நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகளில் தொகுப்பு எண்ணிக்கைகளை உற்றுநோக்குதல். ஒரு நாணயத்தின் விவரத்தோடு ஒப்பிடுதல். சமவாய்ப்பு கருத்து, தொடர் உருட்டுதல் போன்றவற்றை உற்றுநோக்குதல்.
கணித நிரூபணங்கள் (5மணி) (i) **கணித நிரூபணங்கள்**	(i) **கணித நிரூபணங்கள்** * கணிதக்கூற்றுகள் மேலும் அவற்றை சரிபார்த்தல். * கணிதத்தில் தர்க்க, விதிவருமுறை சிந்தனைகள். * தேற்றங்கள், ஊகங்கள் மற்றும் ளெிப்படை உண்மைகள். * கணித நிரூபணம் என்றால் என்ன?

கற்றல் நிலைகள்

கற்றலின் நிலைகள் என்பது மாணவனுக்கு தெரிந்தது என்ன மற்றும் அவனால் முடிந்தது என்ன என கூறுதல் ஆகும்.

பிரச்சனையை தீர்த்தல்.

பொருள் மற்றும் வழிமுறைகளை கொண்டு கணித பிரச்சனைகளை தீர்த்தல்.

(அ) பிரச்சனைகளின் வகைகள் :

பிரச்சனைகள் பல்வேறு வகைகள் : புதிர்கள், வாய்மொழி கணக்குகள், படக்கணக்குகள், வழிமுறை கணக்குகள், விவரங்களை படித்தல், அட்டவணைகள், வரைபடங்கள் முதலியன.

(ஆ) பிரச்சனையை தீர்ப்பதின் படி நிலைகள்

- பிரச்சனைகளை படித்தல்
- எல்லா சிறுசிறு விவரங்கள்/தகவல்களை கண்டறிதல்
- சிறுசிறு தகவல்களின் பொருத்தமானவற்றை பிரித்தல்.
- என்ன பொருள் கொண்டுள்ளது என புரிந்து கொள்ளுதல்.
- செயல்முறைகள், சூத்திரங்களை நினைவு கூர்தல்.
- தேர்ந்தெடுத்தலின் வழிமுறைகள்
- பிரச்சனையை தீர்த்தல்
- விடைகளை சரிபார்த்தல், பிரச்சனையை அடிப்படையாகக் கொண்ட தேற்றங்கள்

(இ) சிக்கலான நிலை

ஒரு பிரச்சனையின் சிக்கலான நிலை என்பது கீழ்கண்டவற்றின் மீது ஆதாரப்பட்டுள்ளது.

- இணைப்புகளை உருவாக்குதல் (இணைப்பு பகுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது போல)
- பிரச்சனையின் படிகளின் எண்ணிக்கை
- பிரச்சனையின் செய்முறையின் எண்ணிக்கை
- பிரச்சனைகளில் இருந்து விடுபடும்மொத்த வழிமுறைகளையும் அமைத்தல்.
- பிரச்சனைகளின் இயல்பு நிலைகள்.

(ஈ) காரணம் கூறுதல், நிரூபித்தல்

- பல்வேறு படிநிலைகளுக்கிடையே உள்ள காரணங்கள்.
- புரிந்து கொள்ளுதல் மேலும் கணித பொதுமைப்படுத்துதல் மற்றும் ஊகங்களை உருவாக்குதல்.
- நிரூபிக்கும் வழிமுறைகளை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- தர்க்கரீதியான வாதங்களை பரிசோதித்தல்.

- நிரூபணத்தின் கருத்தை புரிந்து கொள்ளதல்.
- விதிவருமுறை மற்றும் விதிவிளக்கு முறையின் வாதங்களை பயன்படுத்துதல்
- கணித ஊகங்களை சோதித்தறிதல் (Mathematical conjectures).

தகவல்கள் கூறுதல் :

- படித்தல் மற்றும் எழுதுதல் கணிதக் கருத்துகளை வெளிப்படுத்ததல் (வாய்மொழி மற்றும் குறியீட்டு வடிவங்கள்) எ.கா. : $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, கோணங்களின் மொத்தம் $= 180^0$
- கணித விரிவாக்கங்களை உருவாக்குதல்.
- சொந்த வாக்கியங்களில் கணித கருத்துகளை விளக்குதல் (எ.கா) ஒரு சதுரம் மூடிய நான்கு சமமான பக்கங்களையும் சமான கோணங்களையும் கொண்டது.
- கணித வழிமுறைகளை விளக்குதல் : (எ.கா) இரண்டு இலக்க எண்களை கூட்டும் போது முதலில் ஒன்றாம் இடத்தில் உள்ள எண்களையும், பின்னர் பத்தாம் இடத்தில் உள்ள எண்களையும் கூட்ட வேண்டும் என்பதை மனதில் கொள்ள வேண்டும்.
- கணித தர்க்கங்களை விளக்குதல்

தொடர்புகள் :

கணித வரம்புகளை பாடப்பொருளுடன் தொடர்பு படுத்துதல் : உதாரணமாக தொடர்ச்சியான கூடுதல் பெருக்கல், முழுவதில் ஒருபகுதியின் விகிதம் வகுத்தல். அமைப்புகள் மற்றும் சமச்சீர்மை, அளவீடுகள் மற்றும் வெற்றிடம்.

- அன்றாட வாழ்க்கையுடன் தொடர்பை ஏற்படுத்துதல்
- வெவ்வேறு பாகங்களுடன் கணிதத்தை தொடர்புபடுத்துதல்.
- வெவ்வேறான கணித வரம்புகளை பாடப்பொருளுடன் தொடர்பு படுத்துதல், விவரங்களை கையாளுதல் மற்றும் கணக்கீடு, கணக்கீடு மற்றும் வெற்றிடம்.
- பெருக்கலின் வழிமுறைகளை பாடப்பொருளுடன் தொடர்பு படுத்துதல்.

காட்சிப்படுத்துதல் மற்றும் அடையாளம் காட்டல் :

- விவரங்களின் அட்டவணைகளை விளக்குதல் மற்றும் படித்தல், எண்கோடு, படவரைபடம், செவ்வக வரைபடம், இருபரிமாண படங்கள், முப்பரிமாண படங்கள், படங்கள்.
- அட்டவணைகளை உறுவாக்குதல், எண்கோடு, படவரைபடம், செவ்வக வரைபடம், படங்கள்
- கணித குறியீடுகள் மற்றும் படங்கள்.